Beweis des Jordanschen Satzes für den n-dimensionalen Raum.

Von

L. E. J. Brouwer in Amsterdam.

Der zu beweisende Satz lautet folgendermaßen:

Im n-dimensionalen Raume R_n bestimmt eine Jordansche Mannigfaltigkeit, d. h. das eineindeutige und stetige Bild einer geschlossenen $(n-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit zwei Gebiete, und ist mit der Grenze jedes dieser Gebiete identisch.

Wir bezeichnen die Jordansche Mannigfaltigkeit mit J, und zerlegen (analog wie früher in der Ebene*)) den Satz in folgende drei Bestandteile:

1. *Die Grenze eines von J bestimmten Gebietes ist mit J identisch.*
2. *J bestimmt höchstens zwei Gebiete.*
3. *J bestimmt mindestens zwei Gebiete.*

Alsdann ist der erste Teil im Resultate des § 6 meiner vorstehenden Arbeit enthalten, während der dritte Teil sich nach einer von Lebesgue skizzierten Methode**) herleiten läßt. Der noch restierende zweite Teil soll im Folgenden erledigt werden.

---

*) Math. Ann. 69, S. 169—175.

**) C. R., 27 mars 1911. Das daselbst erhaltene Resultat liefert zusammen mit den Entwicklungen von Baire in Bull. des Sc. Math. (2), 31 einen zweiten Beweis der Invarianz des n-dimensionalen Gebiets.

Für diejenigen Leser, deren Interesse mit dem dreidimensionalen Raume aufhört, lasse ich hier einen sehr einfachen, aber nur für $n=3$ gültigen Beweis dieses dritten Teiles des Jordanschen Satzes folgen.

Seien j_1 und j_2 zwei geschlossene stetige Kurven (im Sinne von Schoenflies) des R_3, so können wir den vollen Umlauf von j_1 resp. j_2 in unendlich vielen Weisen als eindeutiges und stetiges Bild β_1 resp. β_2 eines Kreises auffassen. Für eine bestimmte Wahl von β_1 und β_2 besitzt die Entfernung zweier entsprechender Punkte von j_1 und j_2 ein Maximum M; die bei Variierung von β_1 und β_2 auftretende untere Grenze von M soll die *Parameterdistanz von j_1 und j_2* heißen.

Wenn wir eine endliche Reihe von geschlossenen stetigen Kurven, in welcher j das erste und ein einziger Punkt das letzte Element ist, in solcher Weise konstruieren, daß das Maximum der Parameterdistanzen zweier aufeinanderfolgender Elemente den

§ 1.

Sei E das von J bestimmte unendliche Gebiet, I ein von J bestimmtes endliches Gebiet, P ein Punkt von I. Wir wählen in J ein willkürliches Element J' heraus, bezeichnen die von den übrigen Elementen gebildete Punktmenge mit J'', den Umfang von J' mit j, das repräsentierende Simplex (vgl. Math. Ann. 71, S. 100) von J' mit S, den Umfang von S mit s, wählen in J' und dementsprechend (vgl. l. c. S. 108) in j einen positiven Sinn der Indikatrix, verbinden P und $J''-j$ innerhalb I durch einen Weg w', und verbinden $J'-j$ und $J''-j$ innerhalb E durch einen Weg w_e.

Die Menge derjenigen Punkte von J', welche von J'' eine Entfernung $\geqq \frac{\sqrt{n}}{2^{\tau-1}}$ besitzen, bezeichnen wir mit J'_τ.

Wir zerlegen den R_n in homothetische n-dimensionale Kuben $\mathfrak{q}_0$ mit der Kantenlänge 1, jeden der $\mathfrak{q}_0$ in 2^n homothetische Teilkuben $\mathfrak{q}_1$ mit

---

Wert ε besitzt, so werden wir sagen, *daß j mit dem Unstetigkeitsgrade ε zusammengezogen wird.*

Eine endliche Menge von geschlossenen stetigen Kurven nennen wir kurz ein *Kurvensystem.*

Sei nun J' eine Jordansche Fläche im R_3, $\varkappa$ eine solche um einen ihrer Punkte beschriebene Kugel, die einen Teil von J' in ihrem Äußeren und nur zweiseitige Teilgebiete von J' in ihrem Inneren enthält. Durch eine geeignete Inversion des R_3 geht $\varkappa$ in eine Ebene k, J' in eine Jordansche Fläche J über. Sei $\mathfrak{G}$ ein durch k in J ausgeschnittenes zweiseitiges Gebiet, γ die Grenze von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{S}$ ein γ im Abstande ε_1 approximierendes Polygonsystem in $\mathfrak{G}$, S ein von $\mathfrak{S}$ die Parameterdistanz ε_2 besitzendes, in k liegendes Kurvensystem. Wenn wir ε_2 mit ε_1 gegen Null konvergieren lassen, so existiert in k ein Gebiet G, welches für hinreichend kleines ε_1 eine nicht verschwindende Zahl c Male von S umlaufen wird.

Im entgegengesetzten Falle könnten wir nämlich das Kurvensystem S in k in einer Entfernung $\leqq \varepsilon_3$ von γ mit dem Unstetigkeitsgrade ε_4, und auf Grund davon das Kurvensystem $\mathfrak{S}$ in J in einer Entfernung $\leqq \varepsilon_5$ von γ mit dem Unstetigkeitsgrade ε_6 zusammenziehen, wo ε_3, ε_4, ε_5 und ε_6 mit ε_1 gegen Null konvergieren. Dies ist aber nach der Definition von $\mathfrak{S}$ ein Widerspruch.

Ein in einem Punkte von G auf k errichtetes Lot l wird sowohl von S wie von $\mathfrak{S}$ c Male umlaufen, sodaß die Differenz der Anzahlen der positiven und der negativen Kreuzungen von l mit einer willkürlichen hinreichend genauen simplizialen Approximierung von $\mathfrak{G}$ gleich $\pm c$ ist. Mithin können wir eine solche nicht von $J-\mathfrak{G}$ getroffene und von nicht in J liegenden Endpunkten Q_1 und Q_2 begrenzte Teilstrecke von l bestimmen, für welche die Differenz der Zahlen der positiven und der negativen Kreuzungen mit einer willkürlichen hinreichend genauen simplizialen Approximierung von $\mathfrak{G}$ *nicht gleich Null* ist. Dann aber müssen ein willkürlicher, Q_1 und Q_2 verbindender Streckenzug und eine willkürliche hinreichend genaue simpliziale Approximierung von J notwendig einander treffen, *sodaß Q_1 und Q_2 durch J getrennt werden.*

der Kantenlänge $\frac{1}{2}$, jeden der q_1 in 2^n homothetische Teilkuben q_2 mit der Kantenlänge $\frac{1}{4}$, usw.

Die von denjenigen q_τ, welche in ihrem Inneren oder auf ihrem Umfange wenigstens einen Punkt von J_τ' enthalten, gebildete Punktmenge bezeichnen wir mit μ_τ, die Menge der zu $\mu_\tau, \mu_{\tau+1}, \mu_{\tau+2}, \cdots$ gehörigen Punkte mit π_τ; wir wählen τ so groß, daß w' von π_τ *nicht* getroffen wird. Das P enthaltende von $J + \pi_\tau$ bestimmte Gebiet bezeichnen wir mit I_τ, den nicht in J'' enthaltenen Teil der Grenze von I_τ mit g.

Dasjenige von $J'' + g$ bestimmte Gebiet, in dem E enthalten ist, bezeichnen wir mit E_τ, und ziehen in E_τ einen Weg w''' aus E nach g. Der Endpunkt R dieses Weges liegt in einer gewissen zur Grenze von E_τ gehörigen zweiseitigen $(n-1)$-dimensionalen Pseudomannigfaltigkeit (vgl. meine vorstehende Arbeit S. 305) γ mit ebenen Elementen und einem in j enthaltenen Rande*). Hierbei werden zwei $(n-2)$-dimensionale Elementseiten von γ, welche in R_n zusammenfallen, dann und nur dann auch für γ als identisch betrachtet, wenn die beiden entsprechenden Elemente daselbst einen zu E_τ gehörigen Winkel einschließen.

Wir dürfen annehmen, daß der Punkt R *nicht* einer $(n-2)$-dimensionalen Elementseite von γ angehört.

Wir wählen in γ einen positiven Sinn der Indikatrix, ziehen in I_τ aus P einen w' nicht treffenden Weg w'' nach R, und bezeichnen den von w' und w'' gebildeten Streckenzug mit w_{ir}.

Die zu E_τ gehörige Seite von γ soll ihre *linke*, die andere ihre *rechte* Seite heißen. Alsdann verbindet der Weg w_{ir} innerhalb I die rechte Seite von γ mit $J'' - j$, während der Weg w''' ein Endsegment w_{il} besitzt, welches innerhalb I die linke Seite von γ mit $J' - j$ verbindet.

Mittels zweier in beliebiger Nähe von J' resp. von J'' verlaufender, j nicht treffender Streckenzüge v' und v'' können wir die Wege w_{ir}, w_{il} und w_e ergänzen zu einem γ nur in einem einzigen Kreuzungspunkte, nämlich im Punkte R treffenden Polygon w.

§ 2.

Im R_n verstehen wir unter einem p-dimensionalen *Netze* resp. *Netzfragmente* das simpliziale Bild einer p-dimensionalen Pseudomannigfaltigkeit resp. eines p-dimensionalen Fragmentes (vgl. meine vorstehende Arbeit S. 306).

*) Unter dem Rande von γ verstehen wir die Menge der nicht in γ enthaltenen Grenzpunkte von γ. Ob solche Grenzpunkte existieren, bleibt in diesem Paragraphen noch dahingestellt.

Unter den *Grundsimplexen*, *Grundpunkten* und *Grundseiten* eines Netzes resp. Netzfragmentes verstehen wir die Bilder der Grundsimplexe, Grundpunkte und Grundseiten der entsprechenden Pseudomannigfaltigkeit resp. des entsprechenden Fragmentes.

Wenn im R_n ein mit einem positiven Umlaufssinne versehenes Polygon $\mathfrak{P}$ und ein mit einer positiven Indikatrix versehenes geschlossenes zweiseitiges $(n-1)$-dimensionales Netz $\mathfrak{N}$ in solcher Weise gelegen sind, daß kein Eckpunkt und keine Teilstrecke von $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{N}$ liegt und keine Seite von $\mathfrak{P}$ eine $(n-2)$-dimensionale Grundseite von $\mathfrak{N}$ trifft, so sind die Anzahlen der positiven und der negativen Kreuzungen von $\mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{N}$ einander gleich.*)

Für den Fall, daß $\mathfrak{N}$ einseitig ist, läßt sich nur aussagen, daß die absolute Anzahl der Kreuzungen von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{N}$ gerade ist.

Wir denken uns nun im R_n ein mit einer positiven Indikatrix versehenes geschlossenes zweiseitiges $(n-2)$-dimensionales Netz $\mathfrak{R}$ und ein mit einem positiven Umlaufssinne versehenes, $\mathfrak{R}$ nicht treffendes Polygon $\mathfrak{P}$.

Sei $\mathfrak{C}$ ein solches mit einer positiven Indikatrix versehenes zweiseitiges $(n-1)$-dimensionales Netzfragment, welches $\mathfrak{R}$ als seinen einzigen Rand und die positive Indikatrix von $\mathfrak{R}$ als positive Randindikatrix**) besitzt, während kein Eckpunkt und keine Teilstrecke von $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{C}$ liegt und keine Seite von $\mathfrak{P}$ eine $(n-2)$-dimensionale Grundseite von $\mathfrak{C}$ trifft. Wenn wir dann mit p die Anzahl der positiven, mit p' die Anzahl der negativen Kreuzungen von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{C}$ bezeichnen, so ist für gegebenes $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{R}$ die Zahl $c = p - p'$ unabhängig von der Wahl von $\mathfrak{C}$.

Die Zahl c stellt mithin eine Beziehung zwischen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{R}$ dar. Wir nennen sie *den Grad von $\mathfrak{R}$ in bezug auf $\mathfrak{P}$*.

§ 3.

Diejenigen Elemente von γ, welche von j eine Entfernung $\geqq \frac{1}{2^\nu}$ besitzen, bilden ein mit γ_ν zu bezeichnendes $(n-1)$-dimensionales Fragment, dessen Grenze η_ν für unbeschränkt wachsendes ν gleichmäßig gegen j konvergiert.

---

*) Sei f der Endpunkt der kreuzenden Polygonseite für einen positiven Umlaufssinn von $\mathfrak{P}$, i eine positive Indikatrix des gekreuzten Grundsimplexes von $\mathfrak{N}$. Falls if für den R_n eine positive Indikatrix darstellt, heißt die Kreuzung positiv. Um die im Texte ausgesprochene Eigenschaft einzusehen, braucht man $\mathfrak{P}$ nur in solcher Weise aus dem Unendlichen heranrücken zu lassen, daß die Bahnen der Punkte von $\mathfrak{P}$ keine $(n-3)$-dimensionale Grundseite, und speziell die Bahnen der Eckpunkte von $\mathfrak{P}$ keine $(n-2)$-dimensionale Grundseite von $\mathfrak{N}$ treffen.

**) Hinsichtlich der Beziehung zwischen „positiver Indikatrix" und „positiver Randindikatrix" vgl. Math. Ann. 71, S. 108.

Wir nehmen mit J eine solche Fundamentalreihe $z_1, z_2, \cdots$ von simplizialen Zerlegungen vor daß für unbeschränkt wachsendes ν die Breite der zu z_ν gehörigen Grundsimplexe unter jede Grenze herabsinkt, während jedes $z_{\nu+1}$ eine Unterteilung von z_ν ist. Jedes z_ν bestimmt im R_n ein $(n-1)$-dimensionales Netzfragment J_ν' resp. J_ν'' als simpliziales Bild von J' resp. J'', und ein geschlossenes zweiseitiges $(n-2)$-dimensionales Netz j_ν als simpliziales Bild von j. Jedem Elementeckpunkte von η_ν weisen wir einen solchen in j liegenden Grundpunkt von z_ν zu, welcher von ihm die kleinstmögliche Entfernung besitzt, und konstruieren dementsprechend im repräsentierenden Simplexe S von J' eine simpliziale Abbildung von η_ν, welche wir aus dem Mittelpunkte von S auf s projizieren.

Sodann nehmen wir mit η_ν eine solche simpliziale Zerlegung ζ_ν vor, daß durch die genannte Projektion jedes Grundsimplex von ζ_ν innerhalb eines einzigen zu z_n gehörigen Grundsimplexes von s abgebildet wird. Den Eckpunkten eines willkürlichen Grundsimplexes von ζ_ν sind dann solche Punkte von j_ν zugewiesen, welche in einem einzigen Grundsimplexe von j_ν enthalten sind.

Durch eine passende simpliziale Zerlegung der Grenzelemente von γ_ν erweitern wir ζ_ν zu einer simplizialen Zerlegung von γ_ν, und indem wir von dieser Zerlegung alle nicht zu η_ν gehörigen Grundpunkte festlassen, jeden zu η_ν gehörigen Grundpunkt aber durch den ihm entsprechenden Punkt von j_ν ersetzen, wird als simpliziales Bild von γ_ν ein zweiseitiges $(n-1)$-dimensionales Netzfragment $\mathfrak{F}_\nu$ bestimmt, dessen Grenze λ_ν sich als simpliziales Bild von η_ν aus einer endlichen Zahl von geschlossenen zweiseitigen $(n-2)$-dimensionalen Netzen zusammensetzt und in j_ν enthalten ist.

§ 4.

Für hinreichend großes ν hat das Polygon w außer R keinen Punkt mit $\mathfrak{F}_\nu$ gemeinsam, ist mithin der totale Grad von λ_ν in bezug auf w gleich ± 1.

Den Grad der Abbildung von λ_ν auf j_ν (vgl. Math. Ann. 71, S. 105) bezeichnen wir mit c, den Grad von j_ν in bezug auf w mit c'.

Sei $\mathfrak{C}_1$ ein solches mit einer positiven Indikatrix versehenes zweiseitiges $(n-1)$-dimensionales Netzfragment, welches j_ν als Grenze und die negative Indikatrix von j_ν als positive Randindikatrix besitzt, während kein Eckpunkt und keine Teilstrecke von w in $\mathfrak{C}_1$ liegt und keine Seite von w eine $(n-2)$-dimensionale Grundseite von $\mathfrak{C}_1$ trifft.

Seien $\mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_3, \cdots, \mathfrak{C}_c$ weitere Netzfragmente derselben Art, so sind die Anzahlen der positiven und der negativen Kreuzungen von w mit $\mathfrak{F}_\nu + \mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2 + \mathfrak{C}_3 + \cdots + \mathfrak{C}_c$ einander gleich.

Der totale Grad von λ_ν in bezug auf w wird somit erhalten, indem wir den Grad von j_ν in bezug auf w mit c multiplizieren, d. h. es gilt folgende Formel:

$$c c' = \pm 1.$$

Dieser Formel kann aber nur dadurch genügt werden, daß sowohl c *wie* c' *gleich* ± 1 *ist.*

§ 5.

Wir nehmen nun dem zu beweisenden Satze entgegen an, daß außer I noch ein zweites von J bestimmtes endliches Gebiet I' existiert. Alsdann konstruieren wir γ' und $\mathfrak{F}_\nu'$ in I' analog wie γ und $\mathfrak{F}_\nu$ in I, wobei die Grenze λ_ν' von $\mathfrak{F}_\nu'$ ebenso wie die Grenze λ_ν von $\mathfrak{F}_\nu$ das Netz j_ν mit dem Grade ± 1 überdeckt. Weiter dürfen wir die Streckenzüge v' und v'' in solcher Weise konstruiert denken, daß sie γ' ebensowenig wie γ treffen, sodaß γ' mit w keinen Punkt gemeinsam hat.

Nun muß einerseits jedes Polygon, von dem kein Eckpunkt und keine Teilstrecke in $\mathfrak{F}_\nu + \mathfrak{F}_\nu'$ liegt und keine Seite eine $(n-2)$-dimensionale Grundseite von $\mathfrak{F}_\nu + \mathfrak{F}_\nu'$ trifft, mit $\mathfrak{F}_\nu + \mathfrak{F}_\nu'$ eine gerade Anzahl von Kreuzungspunkten aufweisen, andererseits aber können wir ν so groß wählen, daß das Polygon w mit $\mathfrak{F}_\nu'$ keinen Punkt gemeinsam hat, mithin $\mathfrak{F}_\nu + \mathfrak{F}_\nu'$ nur in einem einzigen Punkte, nämlich im Punkte R kreuzt.

Aus diesem Widerspruche folgern wir, *daß* J *nur ein einziges endliches Gebiet* I *bestimmen kann.*

W. z. b. w.