Zur Auflösung der Keplerschen Gleichung. Von *A. Wilkens.*

Anschließend an die jüngst von Herrn *Hartmann* in A. N. 205.309 gegebenen bequemen Formeln zur Auflösung der Keplerschen Gleichung auch für große Werte der Exzentrizität möchte ich zwei nicht minder einfache, meines Wissens bisher unbekannte Formeln mitteilen, deren ich mich wegen ihrer großen Bequemlichkeit schon lange praktisch wie auch in meinen Vorlesungen bediene. Die Konvergenz, die den Kern der Frage bildet, ist eine außerordentlich rasche, und der Grad der den Formeln anhaftenden Genauigkeit ist von vornherein theoretisch fixiert.

Die Keplersche Gleichung möge die Form erhalten:

$$E-M = e\sin E = e\sin(E-M+M)$$
$$= e\sin(E-M)\cos M + e\cos(E-M)\sin M \qquad (1)$$

wo $E-M$ als Unbekannte betrachtet wird. Da der absolute Betrag von $E-M$ der Keplerschen Gleichung zufolge stets $<e$, also <1 ist, kann der Quotient $\sin(E-M)/(E-M)$ bis zu Gliedern 4. Grades in die folgende, rasch konvergente Reihe entwickelt werden:

$$\sin(E-M)./(E-M) = 1-{}^1/_6(E-M)^2$$

oder auch innerhalb derselben Genauigkeit:

$$\sin(E-M)./(E-M) = [1-{}^1/_2(E-M)^2]^{1/3} = \sqrt[3]{\cos(E-M)}$$

gesetzt werden, sodaß

$$E-M = \sin(E-M)\sqrt[3]{\sec(E-M)} \qquad (2)$$

wo die 3. Wurzel stets nahe 1 und die Formel (2) bis $E-M = 10^\circ$ innerhalb einer Bogensekunde richtig ist (s. *Brünnow*, Lehrbuch der sphär. Astr., 2. Aufl., S. 17). Die Substitution von (2) in (1) gibt dann als erste Endformel:

$$\operatorname{tg}(E-M) = e\sin M/[\sqrt[3]{\sec(E-M)} - e\cos M] \qquad (\mathrm{I})$$

wo der Term $\sqrt[3]{\sec(E-M)}$ von der einen zur anderen Näherung zu verbessern ist.

Die Genauigkeit der Formel (I), die nur die Glieder bis zur 2. Potenz einschließlich in $E-M$ berücksichtigt, ist nun unter Beibehaltung einer ebenso einfachen Form einer Steigerung fähig, wobei noch die Glieder 4. Grades berücksichtigt und nur die vom 6. Grade in $E-M$ vernachlässigt werden. Diejenige einfache geschlossene Funktion ist zu suchen, die den Quotienten

$$(E-M)/\sin(E-M) = 1+{}^1/_6(E-M)^2+{}^7/_{360}(E-M)^4 \qquad (3)$$

bis zur 4. Potenz einschließlich darstellt, wenn jene Funktion in eine Potenzreihe entwickelt wird. Geben wir jener Funktion die Form eines Binoms, so ist also

$$[1+m(E-M)^2]^n = 1+{}^1/_6(E-M)^2+{}^7/_{360}(E-M)^4. \qquad (4)$$

Die Entwicklung des Binoms liefert dann bei Vergleichung der Koeffizienten gleicher Potenzen von $E-M$ die Gleichungen für m und n, sodaß dann $m = -{}^1/_{15}$ und $n = -{}^5/_2$. Die Substitution von

$$E-M = \sin(E-M)[1+m(E-M)^2]^n \qquad (5)$$

in (1) gibt dann die zweite Endformel:

$$\operatorname{tg}(E-M) = e\sin M/\{[1-{}^1/_{15}(E-M)^2]^{-5/2} - e\cos M\} \qquad (\mathrm{II})$$

wo sich der Logarithmus des 1. Gliedes im Nenner in einfacher Weise als das ${}^5/_2$fache des Subtraktionslogarithmus von ${}^1/_{15}(E-M)^2$ gegen 1 ergibt.

Ziehen wir jetzt zur Erprobung der Leistungsfähigkeit der Formeln dasselbe von Herrn *Hartmann* benutzte, der großen Exzentrizität wegen für den Rechner allgemein unbequeme Beispiel heran, wo $\log e = 9.7442503$ und $M = 34^\circ 19' 36''.14$, so ergibt die 1. Näherung nach (I), wenn rechter Hand zuerst $E-M = 0$ gesetzt wird, bei 5stelliger Rechnung: $E_1-M = 30^\circ 0'.9$; in 2. Näherung ist dann nach (I): $E_2-M = 27^\circ 54'.45$. Verwenden wir jetzt in 3. Näherung die Formel (II), so finden wir $E_3-M = 28^\circ 13'.4$, also $E_3 = 62^\circ 33'.0$, d. h. $E_3-E = +0'.6$, wo E den Endwert bedeutet. Die differentielle Fortsetzung der Rechnung ergibt dann in einmaliger Rechnung sofort den Endwert: $E = 62^\circ 32' 25''.80$. Die beschränkte Zahl der Annäherungen bei dem großen Werte von $e = 0.55$ dürfte als Beweis der großen Leistungsfähigkeit der benutzten Formeln anzusprechen sein.

Breslau, 1918 Jan. 15. *A. Wilkens.*

Antipodale Korrespondenzen im Vulkanismus der Sonne und der Erde 1917. Von *W. Krebs.*

Die schwereren Erdbeben- und Vulkan-Katastrophen der Erde ließen 1917 eine Neigung zu antipodaler Korrespondenz erkennen, die sehr an die von mir für 1907 und 1909 gefundenen Verhältnisse erinnerte (vgl. Phys. Z. 1909, S. 1023). Ich führe hier nur die hauptsächlichsten Erdbebenherde für das erste Halbjahr 1917 an: Bali, Januar 26; Arezzo, April 26; San Salvador, Anfang Juni; Meer bei Neuseeland, Mai 1 und Juni 26.

Dieselbe Gesetzmäßigkeit ließ die Sonnentätigkeit in ihrem markantesten Auftreten erkennen. Riesenhafte Sonnenfleckengruppen, die teilweise unbewaffneten Augen sichtbar waren, traten wiederholt auf. Die größten ließen jene antipodale Korrespondenz erkennen.

Riesenfleckengruppen 1917.

	Meridiankreuzung	Hemisphäre	J. D.	
1.	Juli 13	N.	2421433	(Wiederkehr August 8)
2.	Sept. 23	S.	2421505	
3.	Dez. 24	N.	2421597	
4.	Dez. 30	S.	2421603	(Voraussichtlich)

Auf den Dezember 1917 verteilt sich ihre Wiederkehr folgendermaßen:

	Dez. 11 Gr. 2	Dez. 18 Gr. 1	Dez. 24 Gr. 3	Dez. 30 Gr. 4
Unterschied	7^d	6^d	6^d	7^d

Die Gruppen 1 und 4 entsprechen zwei Hauptherden der Sonnentätigkeit, die ich in Veröffentlichungen in Mem. Spett. It. 1912–14 zurück bis 301 und vorwärts bis 1914 verfolgt habe.

1917 Juli 13	J.D. 2421433	1917 Dez. 30	J.D. 2421603
1909 Sept. 8	2418568	1909 Sept. 23	2418583
Unterschied	2865		3020
	$= 26.5 \times 108.11$		$= 26.5 \times 113.96.$

Juli und Dezember 1917 waren bemerkenswert durch Sonnenfinsternisse, die fast genau an dem Nord- und dem Südpole der Erde auftraten.

Das Auftreten der Sonnenausbrüche vorwiegend in diesen Monaten verdient deshalb besondere Hervorhebung, nicht minder das Auftreten der erwähnten großen Erdbebenkatastrophen in der Nähe der Pole und des Äquators der Pendulation der Erde, deren Achse senkrecht zur Drehungsachse der Erde steht.

Schnelsen, 1917 Dez. 27. *W. Krebs.*