SULLE SERIE ALGEBRICHE SEMPLICEMENTE INFINITE DI GRUPPI DI PUNTI APPARTENENTI A UNA CURVA ALGEBRICA.

Memoria di **Ruggiero Torelli** (Pisa).

Adunanza del 22 giugno 1913.

In questa Memoria studio le serie algebriche semplicemente infinite di gruppi di punti su una curva algebrica. E mi occupo in ispecie delle particolarità che presenta la varietà jacobiana di una curva di genere p contenente una serie ∞^1 di genere $<p$ [1]).

§ I.

Generalità; lemmi preliminari.

1. Assegnata su una curva C_p, del genere p, una serie algebrica ∞^1, γ, di gruppi di punti, i primi caratteri che si presentano come essenziali per lo studio di essa sono: l'*ordine* n (numero dei punti di cui è costituito ciascun gruppo); l'*indice* ν (numero dei gruppi di γ uscenti dal generico punto di C_p); il *genere* π della serie stessa; il suo *difetto di equivalenza* χ (numero dei gruppi di γ contenuti in una generica g^{n-1}_{n+p-1} di C_p). Mediante tali numeri si esprimono i numeri d, δ dei punti doppî e di diramazione di γ: si hanno infatti le note formule:

$$d = 2\nu(n+p-1) - 2\chi, \qquad \delta = 2n(\nu+\pi-1) - 2\chi \text{ [2])}.$$

Indicheremo la serie γ col simbolo γ^1_n; e, quando occorra tener presente anche gli altri caratteri sunnominati, adopreremo il simbolo $\gamma^1_n[\nu\pi\chi]$.

Se poi Γ_π è una curva birazionalmente identica a γ [3]), resta individuata tra C_p e Γ_π una corrispondenza $\theta(n\nu)$ di indici n, ν; e su Γ_π una serie γ^1_ν: questa, se γ^1_n non

[1]) Notazioni usate di frequente: curva C_p = curva C di *genere* p; varietà V_k = varietà ∞^k; corrispondenza $\theta(\alpha\alpha')$ = corrispondenza θ di *indici* α, α'; involuzione I_δ = involuzione I di *ordine* δ; congruenza Σ_{k-i} su una varietà V_k = congruenza Σ di *dimensione* $k-i$ (di varietà ∞^i).

[2]) Nelle quali è sottinteso che la serie non possegga *infiniti* punti doppî o, rispettivamente, di diramazione. — Le considerazioni del presente lavoro valgono anche (con ovvie modificazioni in qualche punto) per le serie con infiniti punti multipli o di diramazione.

L'importanza dello χ fu, notoriamente, messa in luce da Castelnuovo.

[3]) Ove Γ_π ammettesse corrispondenze biunivoche in sè, intendiamo riferirci ad una corrispondenza fra γ e Γ_π che si suppone *fissata una volta per sempre*.

è composta con una involuzione, ha l'indice n, il difetto di equivalenza χ, ed è birazionalmente identica alla C_p; se invece la γ_n^1 è composta con una involuzione I_ε di ordine ε, la γ_ν^1 ha l'indice $\frac{n}{\varepsilon}$, il difetto di equivalenza $\frac{\chi}{\varepsilon}$ [4]), ed è birazionalmente identica a I_ε (e allora a due punti di C_p coniugati in I_ε corrisponde nella $\theta(n\nu)$ uno stesso gruppo della γ_ν^1). Gli enti γ_ν^1 e $\theta(n\nu)$ sono perfettamente individuati da γ_n^1 e si diranno anche *indotti* da essa. Analogamente diremo che una corrispondenza fra due curve induce su ciascuna di esse una serie birazionalmente identica all'altra, o ad una involuzione sull'altra.

Parlando di una serie, sottintenderemo sempre, salvo a dire espressamente il contrario, che essa sia (∞^1, senza punti fissi) irriducibile e non costituita di gruppi fra loro equivalenti.

2. Assegnata su una curva C_p una serie $\gamma_n^1[\nu\pi\chi]$, i residui dei suoi gruppi rispetto a una g_{n+p}^n di C_p costituiscono una serie γ_p^1, che si dirà *residua* della data γ_n^1. Quali sono i caratteri di γ_p^1?

a) Se un generico gruppo di γ_n^1 non è equivalente ad altri gruppi di γ_n^1, le due serie γ_n^1, γ_p^1 sono riferite fra loro biunivocamente. E mediante un lemma da me dato altrove [5]) si vede subito che:

LEMMA I. — *Sopra una curva C_p una $\gamma_n^1[\nu\pi\chi]$ il cui gruppo generico non sia equivalente ad altri gruppi, ammette come residue delle $\gamma_p^1[\chi\pi\chi]$.*

b) Se poi un generico gruppo di γ_n^1 è equivalente ad altri $\eta - 1$ gruppi della serie stessa, le η-ple di gruppi fra loro equivalenti costituiscono, entro l'ente γ_n^1, una involuzione di un certo genere $\varpi (0 < \varpi \leqq \pi)$ [6]). Con una facile estensione del lemma succitato [vedi nota [5])] si vede che: *nel caso attuale la $\gamma_n^1[\nu\pi\chi]$ ammette come residue delle* $\gamma_p^1\left[\frac{\chi}{\eta}\varpi\frac{\chi}{\eta}\right]$.

---

[4]) Si vede infatti facilmente che in una corrispondenza $(1\,\varepsilon)$ fra due curve $\overline{C}$, C, a una $\gamma_n^1[\nu\pi\chi]$ di $\overline{C}$ corrisponde una $\gamma_{\varepsilon n}^1[\nu\pi\,\varepsilon\chi]$ di C. Basta osservare che i punti doppi di $\gamma_{\varepsilon n}^1$ provengono da quelli di γ_n^1 e dai punti di diramazione della corrispondenza fra $\overline{C}$, C.

Avverto che, parlando di *involuzione* su una curva, sottintendo, secondo l'uso comune, *di ordine* > 1, e *priva di punti multipli variabili* (non costituita cioè dai gruppi di un'altra involuzione, di ordine $\geqq 1$, contati ciascuno più volte).

[5]) R. TORELLI, *Sulle curve di genere due contenenti una involuzione ellittica* [Rendiconti della R Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli, serie III, vol. XVII (1911), pp. 412-419], n° 1, *b*).

Quel lemma si estende subito così:

Avendosi su una curva due serie ∞^1, γ, γ', frai cui gruppi interceda una corrispondenza di indici qualunque tale che la somma o la differenza (virtuale) di due gruppi omologhi vari in una serie lineare, frai difetti di equivalenza χ, χ' di γ, γ' intercede la relazione $\alpha\chi' = \alpha'\chi$: essendo $\alpha - 1$ (rispettivamente $\alpha' - 1$) il numero dei gruppi della serie γ (rispettivamente γ') equivalenti al suo gruppo generico. Si noti che fra γ, γ' si potrà stabilire una corrispondenza analoga a quella suddetta, e di indici α, α'.

[6]) Ricordiamo che avendosi su una curva una infinità razionale di serie lineari, esse son tutte contenute in una unica serie lineare completa (dello stesso ordine). Si noti che è $\omega = \pi$ se, e solo se, $\pi = 1$.

OSSERVAZIONE. — Trai residui dei gruppi di γ^1_n rispetto a una *generica* g^n_{n+p}, non ve n'è alcuno speciale: giacchè aggregando a ogni gruppo di γ^1_n ogni p-pla speciale di punti di C_p si hanno solo ∞^{p-1} serie lineari g^n_{n+p}. Adunque: *la generica residua di una serie non contiene gruppi speciali.*

Se però, per una particolare scelta della g^n_{n+p}, trai residui rispetto ad essa dei gruppi di γ^1_n vi fosse una p-pla speciale (una volta), tutta la g^1_p da questa individuata, contata 1 o η volte secondo che si sia nel caso a) o b), andrebbe considerata come parte della serie residua di γ^1_n: tal serie residua sarebbe perciò riduttibile. Ma si vede subito che *il suo indice e il suo difetto di equivalenza avrebbero sempre il valore* ζ *o* $\frac{\zeta}{\eta}$, *secondo i casi.*

3. Il sistema delle residue di una serie è mutato in sè dalle trasformazioni di 1ª specie fra le p-ple di punti della curva sostegno. Tal sistema può dunque ottenersi applicando a una particolare residua le dette trasformazioni.

Se frai gruppi di due serie γ, γ', intercede una corrispondenza $(\alpha\,\alpha')$ tale che la differenza fra due gruppi omologhi vari in una serie lineare, le due serie hanno le medesime residue. Se invece è la somma di due gruppi omologhi che varia in una serie lineare, le residue di γ' (o γ) si possono avere applicando alle residue di γ (o γ') una qualunque trasformazione di 2ª specie. E viceversa. [Vedi nota 5)].

La generica residua di una serie non è composta con una involuzione, e possiede punti doppi e di diramazione in numero finito.

4. Lo studio di una serie algebrica è intimamente legato a quello delle sue residue; e perciò nelle ricerche sulle serie algebriche appartenenti a una curva C_p ci si può, almeno per molte questioni, limitare alla considerazione delle *serie di ordine* p, *prive di gruppi speciali (e non composte con una involuzione, nè aventi punti doppi o di diramazione variabili).*

Dal nº 2 risulta, relativamente alle serie di ordine p, che:

LEMMA II. — *Su una curva* C_p *una serie* γ^1_p *priva di gruppi speciali ha il difetto di equivalenza eguale all'indice.*

Presa infatti una residua $\overline{\gamma}^1_p$ della γ^1_p, questa ultima può, a sua volta, considerarsi come residua di $\overline{\gamma}^1_p$; onde segue l'asserto. È subito visto che:

Se la γ^1_p *possiede* ε *gruppi speciali (una volta), il suo indice è inferiore di* ε *unità al suo difetto d'equivalenza.*

OSSERVAZIONE. — Per le serie più volte infinite si possono facilmente istituire considerazioni analoghe alle precedenti (e a parecchie delle seguenti). Per una serie ∞^ρ, γ^ρ_n, di ordine n, l'ufficio che ha il numero ζ per le serie ∞^1 è tenuto, in *alcune* questioni, dal numero ζ_ρ dei gruppi della serie contenuti in gruppi di una generica $g^{n-\rho}_{n+p-\rho}$. Tale numero rientra fra quelli da me studiati in un precedente lavoro 7). L'annullarsi di ζ_ρ

7) R. TORELLI, *Sulle serie algebriche di gruppi di punti appartenenti a una curva algebrica* [Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, tomo LXVII (1907-1908), parte IIª, pp. 1323-1336].

è condizione necessaria e sufficiente perchè ogni gruppo di γ_n^ρ sia equivalente ad *infiniti* altri; se χ_ρ è $\neq 0$, l'indice delle γ_p^ρ *residue* della γ_n^ρ è appunto χ_ρ o un suo divisore; etc.

Per lo studio delle serie algebriche, una o più volte infinite, sono però essenziali oltre i numeri ζ, χ_ρ suddetti, anche altri caratteri analoghi. Così il COMESSATTI ha recentemente posto in luce [8]) l'importanza che per una serie ∞^1, γ, hanno i numeri χ_ρ relativi alla serie costituita dalle ρ-ple di gruppi di γ.

§ II.

Digressione: sulle varietà picardiane.

5. Si chiama, com'è ben noto, *varietà picardiana* una varietà (irriducibile) ∞^p, V_p, contenente un gruppo abeliano, assolutamente transitivo, di trasformazioni birazionali in sè (*trasformazioni di 1ª specie*).

Le più semplici varietà picardiane sono le varietà *jacobiane*: chiamasi così la varietà che rappresenta le g_p di una curva di genere p.

Un'altra categoria notevole di varietà picardiane è data dalle varietà riferibili alle involuzioni generate da trasformazioni di 1ª specie cicliche di una varietà jacobiana.

Le varietà picardiane a 2 o 3 dimensioni sono jacobiane, ovvero appartengono a quest'ultima categoria.

Nei numeri seguenti ricorderemo alcune proprietà note delle varietà picardiane, e ne osserveremo qualcun'altra, di facile dimostrazione, di cui dovremo fare uso in seguito.

6. Si chiamano involuzioni *ordinarie* su una varietà picardiana V_p le involuzioni mutate in sè dalle trasformazioni di 1ª specie di V_p. Una tale involuzione è, a sua volta, riferibile a una varietà picardiana.

Tra le involuzioni ordinarie di V_p ve n'è, per ogni valore dell'intiero ε, una ben determinata, di ordine ε^{2p}, birazionalmente identica alla V_p, i cui gruppi sono costituiti dai punti ε-pli per le $g_\varepsilon^{\varepsilon-1}$ di V_p [9]). Designeremo tale involuzione col simbolo $\mathfrak{J}^\varepsilon$.

Ogni involuzione ordinaria o è generata da una trasformazione di 1ª specie ciclica (*involuzioni cicliche*); o è una $\mathfrak{J}$ entro una involuzione ciclica.

7. *a) Se una varietà picardiana V_p contiene una varietà picardiana V_π con $\pi < p$, V_π appartiene ad una (e una sola) congruenza di indice* 1, $\Sigma_{p-\pi}$. *Questa è costituita da varietà birazionalmente identiche a V_π, ed è a sua volta riferibile a una varietà picardiana.*

---

8) A. COMESSATTI, *Sulle serie algebriche semplicemente infinite di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XXXVI (1° semestre 1913), pp. 35-57].

I risultati del § 2 della Memoria del COMESSATTI potrebbero anche ritrovarsi colle considerazioni del presente lavoro: vedi n° 17, e n° 27, *Osservazione* 1ª.

9) G. CASTELNUOVO, *Sugli integrali semplici appartenenti ad una superficie algebrica* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei (Roma), vol. XIV, 1° semestre 1905, pp. 545-556, 593-598, 655-663], pag. 556.

Ogni trasformazione T di 1ª (o 2ª) specie di V_p *muta in sè la* $\Sigma_{p-\pi}$, *inducendo in essa una trasformazione di 1ª (o 2ª) specie; e subordinando una trasformazione della stessa specie in una varietà di* $\Sigma_{p-\pi}$ *che sia mutata in sè da T. Esiste poi anche in* V_p *una seconda congruenza* Σ'_π, *d'indice* 1, *di varietà picardiane* $V_{p-\pi}$: Σ' *è pienamente individuata da* Σ *e la relazione tra* Σ, Σ' *è reciproca.*

b) Se una varietà picardiana V_p *possiede una varietà* ∞^d, V_d $(d < p)$, *su cui i degli integrali di 1ª specie di* V_p *restino costanti, la* V_d *è contenuta in una varietà picardiana* V_{p-i} $(d \leqq p - i)$ *immersa a sua volta in* V_p.

Questi due teoremi sono di CASTELNUOVO, loc. cit. [9]), pp. 593-598.

Chiameremo senz'altro *congruenze* quelle di cui si parla in *a*); e anche, più in generale, le involuzioni ordinarie entro quelle congruenze (tali involuzioni dànno congruenze di varietà *riducibili*). Non può esservi ambiguità, poichè le sole congruenze che avremo da considerare sono del tipo suddetto.

8. Data entro una varietà picardiana V_p una curva irriducibile $\overline{C}$, di genere > 1, applichiamo ad essa le infinite trasformazioni di 1ª specie T. Otterremo così un sistema Σ_p di ∞^p curve C (irriducibili); da ogni punto di V_p ne escono ∞^1. Ora proponiamoci questa questione:

Può il sistema Σ_p *ammettere delle varietà fondamentali?* (Varietà *fondamentale* per Σ_p è una varietà tale che le C uscenti da un suo qualunque punto sono contenute in essa).

Si vede facilmente che se esistono di tali varietà, il sistema Σ_p è *intransitivo* [10]): è quindi costituito da ∞^{p-i} $(0 < i < p)$ sistemi ∞^i transitivi, situati su varietà ∞^i costituenti un sistema ∞^{p-i} di indice 1. Inversamente, se ciò avviene, ogni varietà *appartenente* al sistema detto è fondamentale per Σ_p. La questione propostaci equivale adunque all'altra di vedere *se il sistema* Σ_p *può essere intransitivo.*

Ora per costruire Σ_p cominciamo, ripetendo una considerazione di CASTELNUOVO [loc. cit. [9]), pag. 594], ad applicare alla $\overline{C}$ le ∞^2 trasformazioni T che mutano un suo punto in un altro suo punto: otterremo così ∞^2 curve C, due a due concatenate fra loro, che riempiranno una varietà Φ, a 2 o 3 dimensioni. Applichiamo similmente a tali C le trasformazioni T che mutano un punto di Φ in un altro punto di Φ: se tali T non mutano Φ in sè stessa, otterremo un sistema transitivo di curve C, che riempirà una varietà $\Phi^{(1)}$ contenente Φ (e più ampia di Φ).

Così continuando, se il sistema Σ_p è intransitivo, e solo in tal caso, dovremo arrivare a una varietà $\Phi^{(i)}$, di dimensione $< p$, trasformata in sè da tutte le T che mu-

[10]) Chiamo *transitivo* un sistema di curve, allorquando due sue curve qualunque sono *concatenate:* possono cioè riguardarsi come estremi di una serie finita di curve del sistema, tale che due curve consecutive di essa serie si incontrano. Cfr. la mia Nota: *Osservazioni di geometria sopra una varietà algebrica* [Rendiconti della R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli, serie III, vol. XVII (1911), pp. 420-425], n° 1. Là veramente si parla di *congruenze:* ma quelle considerazioni si estendono subito al nostro caso.

tano un suo punto in un altro suo punto. Ma allora $\Phi^{(i)}$ è una varietà picardiana; e ogni C, in particolare $\overline{C}$, è immersa in una varietà della congruenza individuata da $\Phi^{(i)}$ (n° 7). Si ha dunque il seguente

LEMMA III. — *Perchè il sistema Σ_p, che si ottiene applicando a una curva $\overline{C}$ di una varietà picardiana V_p tutte le trasformazioni di 1ª specie, ammetta varietà fondamentali, è necessario e sufficiente che V_p possegga una congruenza, e che la $\overline{C}$ sia immersa in una varietà della congruenza.*

Se Σ_p è transitivo, diremo che $\overline{C}$ *appartiene* alla varietà V_p.

Le considerazioni di questo n° si estendono alle varietà di dimensione > 1 contenute in V_p.

9. Sopra una varietà picardiana V_p abbiansi due involuzioni ordinarie I, I', degli ordini δ, δ' ($\delta \geqq 1$, $\delta' \geqq 1$), birazionalmente identiche: non escludiamo che esse coincidano.

Data una corrispondenza biunivoca Ω frai gruppi di I, I', esiste solo un numero finito di punti di V_p, da cui escono gruppi omologhi. Infatti, moltiplicando Ω per una trasformazione di 1ª specie variabile di I' in sè, si ottiene un sistema ∞^p di corrispondenze biunivoche trai gruppi di I, I': di tal sistema fa parte la Ω. Ora due corrispondenze di questo sistema non hanno mai una coppia di gruppi omologhi a comune; epperò la varietà dei punti da cui escono gruppi omologhi in una corrispondenza del sistema non ha punti comuni colle altre varietà ad essa analoghe. Poichè esistono ∞^p di tali varietà, queste debbono essere di dimensione zero. C. D. D.

Dalla precedente proprietà segue quest'altra:

Sia W_p una varietà birazionalmente identica a I, I'. Una corrispondenza biunivoca fra W_p e I (o I') può riguardarsi come una *corrispondenza* $\Theta(1\,\delta)$ [o rispettivamente $\Theta'(1\,\delta')$] fra W_p e V_p. Orbene segue subito che:

Una $\Theta(1\,\delta)$ e una $\Theta'(1\,\delta')$ non possono, se non coincidono, avere infinite coppie di punti omologhi a comune.

10. Sopra una varietà picardiana V_p si abbiano due congruenze Σ_{p-i}, Σ'_{p-i} birazionalmente identiche tra loro (eventualmente coincidenti). Con considerazioni analoghe a quelle del n° 9 [11]) si vede che:

Assegnata una corrispondenza biunivoca Ω fra le varietà di Σ_{p-i} e quelle di Σ'_{p-i}, i punti di V_p da cui escono varietà delle due congruenze omologhe nella Ω costituiscono una varietà ∞^i di un'altra congruenza.

Se poi W_{p-i} è una varietà birazionalmente identica a Σ_{p-i}, Σ'_{p-i}, ogni corrispondenza biunivoca fra W_{p-i} e Σ_{p-i} (o Σ'_{p-i}) può riguardarsi come una corrispondenza $\Theta(1\,\infty^i)$ [o $\Theta'(1\,\infty^i)$] fra W_{p-i} e V_p. Si ha subito che:

Se una $\Theta(1\,\infty^i)$ e una $\Theta'(1\,\infty^i)$, non coincidenti, subordinano la stessa corrispon-

---

[11]) E a quelle della mia Nota: *Sulle superficie algebriche contenenti due fasci ellittici di curve* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei (Roma), vol. XXI, 1° semestre 1912, pp. 453-457].

denza fra una varietà di W_{p-i} e una, v, di V_p, la v è contenuta in una varietà picardiana, di dimensione $< p$, immersa in V_p.

11. *Esistono sempre varietà jacobiane contenenti una data varietà picardiana V_p.*

Prendiamo infatti una superficie F contenente un sistema di curve C, birazionalmente identico a V_p, e tale che la generica C non sia equivalente ad altre. Scelta su F una curva Γ, appartenente ad un fascio lineare Σ privo di curve spezzate e dotato di punti base, le C segheranno su Γ una serie ∞^p, γ, birazionalmente identica a V_p, e di cui un gruppo generico non è equivalente ad altri. Supponiamo infatti che fissata una generica C, sia C_0, esistano altre C [necessariamente in numero finito [12])], siano $C_1, C_2, \ldots$, tali che i gruppi $(C\Gamma)$, $(C_1\Gamma)$, ... siano equivalenti; esisterà allora [13]) un intiero d tale che $d\,C_0 \equiv d\,C_1 \equiv d\,C_2 \ldots$; dal che segue che le $C_1, C_2, \ldots$ non possono, al variare continuo di Γ in Σ, variare [14]). Ma allora le $C_0, C_1, C_2, \ldots$ sarebbero equivalenti [15]), contro il supposto.

Ciò posto una serie residua della γ è appunto rappresentata, nella varietà jacobiana di Γ, da una varietà birazionalmente identica a V_p. Ciò prova l'asserto.

Mediante la precedente proprietà si può ritrovare che *le varietà picardiane hanno il sistema canonico di ordine zero* [16]).

12. La varietà jacobiana V_π di una curva Γ_π possiede un sistema $\infty^{\pi-\rho}$ di varietà v_ρ immagini delle ρ-ple di punti di Γ_π (cioè delle π-ple di punti con $\pi - \rho$ punti fissi). Due qualunque di tali v_ρ si corrispondono in una trasformazione di 1ª specie. È facile vedere che:

Data in V_π una involuzione ordinaria I, il gruppo di I uscente dal generico punto di una v_ρ non ha a comune con questa altri punti.

Si noti pure che *ogni v_ρ appartiene* (n° 8) *a* V_p.

§ III.

Costruzione di una certa congruenza.

13. Una curva C_p possiede sempre serie di genere $\geq p$; ma, se essa è a moduli generali, non possiede serie di genere $\pi < p$. Se infatti C_p possiede una serie γ_n^1 di

---

12) SEVERI, *Osservazioni varie di geometria sopra una superficie algebrica e sopra una varietà* [Atti del R. Istituto Veneto di Scienze Lettere e Arti, tomo LXV (1905-1906), parte IIª, pp. 625-643], n° 2.

13) SEVERI, *Intorno al teorema d'*ABEL *sulle superficie algebriche ed alla riduzione a forma normale degli integrali di* PICARD [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XXI (1° semestre 1906), pp. 257-282], n° 9, Teorema IV.

14) SEVERI, Nota citata [12]), n° 5.

15) SEVERI, Nota citata [12]), pag. 629, nota.

16) Basta osservare che se una varietà V_π contiene un sistema $\infty^{\pi-i}$, d'indice 1, di varietà V_i, le varietà canoniche di V_π segano sulle V_i varietà canoniche; e tener presente che le varietà jacobiane hanno il sistema canonico di ordine zero.

genere $\pi < p$, una sua residua è rappresentata da una curva $\overline{g}'$, di genere $\varpi \leqq \pi$, della varietà jacobiana V_p di C_p: ed esisteranno $p - \varpi + i$ ($0 \leqq i < \varpi$) integrali di 1ª specie di V_p ciascun dei quali rimane costante lungo $\overline{g}'$. Allora (nº 7) $\overline{g}'$ è immersa in una varietà picardiana $\overline{V}'$, a $\varpi - i$ dimensioni, contenuta in V_p; e $\overline{V}'$ appartiene a una congruenza S di varietà (irriducibili) V'. L'esistenza di S è una *particolarità* di V_p [17]).

a) *Le* V' *si possono costruire,* con CASTELNUOVO [loc. cit. [9]), pag. 594], *applicando alla* $\overline{g}'$ *le trasformazioni di 1ª specie di* V_p. Il sistema delle curve g' così ottenute (che son poi le immagini delle residue di γ_n^1) è intransitivo; ed è costituito da $\infty^{p-\varpi+i}$ sistemi transitivi $\infty^{\varpi-i}$ che riempiono appunto le varietà V' (vedi nº 8).

b) $p - \varpi + i$ *è il numero degli integrali di 1ª specie di* C_p *che forniscono, sommandone i valori nei punti di un gruppo variabile di* γ_n^1, *somme costanti* (nº 7, *b*).

14. La congruenza S può anche costruirsi in un altro modo.

Prendiamo perciò una generica $g_{\pi n+p}^{\pi n}$ di C_p, e consideriamo i residui R, rispetto ad essa, di tutte le π-ple di gruppi di γ_n^1. Dovremo distinguere tre casi:

A) *Una generica* π*-pla di gruppi di* γ_n^1 *non è equivalente ad alcuna altra* π*-pla.* Allora i detti residui R formano una serie ∞^π birazionalmente identica alla varietà jacobiana V_π della curva Γ_π immagine di γ_n^1; e V_p contiene una congruenza di varietà birazionalmente identiche a V_π [18]).

B) *Una generica* π*-pla di gruppi di* γ_n^1 *è equivalente ad altre* $\varepsilon - 1$ π*-ple.* In tal caso i residui R costituiscono una serie ∞^π birazionalmente identica a una certa involuzione I_ε della varietà jacobiana V_π; in questa involuzione sono coniugati due punti di V_π, cioè due π-ple di punti di Γ_π, allora e solo allora quando le corrispondenti π-ple di gruppi di γ_n^1 sono equivalenti. Ne segue facilmente che le trasformazioni di 1ª specie di V_π mutano in sè stessa l'involuzione I_ε [19]): che sarà adunque una involuzione ordinaria (nº 6) di V_π. Adunque si conclude che nel caso attuale V_p contiene una congruenza di varietà birazionalmente identiche a una certa involuzione ordinaria d'ordine ε di V_π.

C) *Una generica* π*-pla di gruppi di* γ_n^1 *è equivalente a* ∞^i π*-ple.* Allora le π-ple di punti di Γ_π si ripartiscono in $\infty^{\pi-i}$ serie ∞^i (eventualmente *riducibili*), tali che a due π-ple che appartengono a una stessa serie (e solo a due tali π-ple) corrispondono su C_p π-ple equivalenti di gruppi di γ_n^1. Corrispondentemente abbiamo su V_π un sistema $\infty^{\pi-i}$, $\Sigma_{\pi-i}$, d'indice 1, di varietà W_i (eventualmente riducibili): si vede facilmente

---

[17]) Questa particolarità si presenta anche se, essendo $\pi \geqq p$, esistono integrali di V_p costanti lungo $\overline{g}'$.

[18]) Vedremo tra poco (nº 15) che questa congruenza è proprio la S del nº precedente. Lo stesso dicasi nei casi *B*) e *C*).

[19]) Indicando infatti con E_i, E'_i ($i = 1, 2, \ldots$) π-ple di punti di Γ_π, e con G_i, G'_i le corrispondenti π-ple di gruppi di γ_n^1, se $E_1 - E'_1 \equiv E_2 - E'_2$, segue $G_1 - G'_1 \equiv G_2 - G'_2$; cosicchè se è anche $G_1 \equiv G_2$, segue $G'_1 \equiv G'_2$.

[vedi nota [19])] che $\Sigma_{\pi-i}$ è mutato in sè dalle trasformazioni di 1^a specie di V_π, cosicchè esso è una congruenza nel solito senso (n° 7) di tal parola.

I residui R formano allora una serie birazionalmente identica a $\Sigma_{\pi-i}$: epperò si conclude che in tal caso V_p possiede una congruenza di varietà birazionalmente identiche a una certa congruenza esistente in V_π.

15. Possiamo riassumere l'analisi fatta nel seguente enunciato:

TEOREMA I. — *Una curva C_p possegga una serie γ_n^1, di genere $\pi < p$; sia Γ_π una curva immagine di γ_n^1.*

Mediante la precedente costruzione, nella varietà jacobiana V_p di C_p resta individuata una congruenza S di varietà (irriducibili) V', le quali sono birazionalmente identiche

A) alla varietà jacobiana V_π di Γ_π; ovvero

B) a una certa involuzione ordinaria I_ε di V_π; ovvero

C) a una certa congruenza $\Sigma_{\pi-i}$ di V_π.

Due punti di V_π coniugati in I_ε, ovvero appartenenti a una stessa varietà della congruenza $\Sigma_{\pi-i}$ (e solo due punti siffatti) sono immagini di due π-ple equivalenti di gruppi della γ_n^1. Si vede anche facilmente che:

Fissata ad arbitrio una V', sia $\overline{V}'$, tra questa e V_π o I_ε o $\Sigma_{\pi-i}$ la costruzione del n° 14 individua, a meno di trasformazioni di 1^a specie di $\overline{V}'$, una corrispondenza biunivoca. Questa, riguardata come corrispondenza Θ di indici $(1\ 1)$ o $(\varepsilon\ 1)$ o $(\infty^i\ 1)$ *fra V_π* e *$\overline{V}'$, fa corrispondere alle curve g di V_π, che sono immagini dei punti di Γ_π, curve g' di V' che sono imagini di residue della γ_n^1. Se un generico gruppo di γ_n^1 è equivalente ad altri $r - 1$ $(r \geq 1)$, la Θ subordina fra una g e una g' omologhe una corrispondenza $(r\ 1)$. E le g' invadono tutta la $\overline{V}'$ e le appartengono* [20]).

Quest'ultima affermazione (giustificata dal fatto che le g invadono tutta la V_π e le appartengono) mostra che la congruenza da noi costruita al n° 14 coincide con quella di cui si parlava al n° 13.

Due serie di C_p aventi le stesse residue, oppure aventi due sistemi di residue che si corrispondano in una trasformazione di 2^a specie (n° 3), individuano la stessa congruenza S in V_p.

Se due serie sono riferite *biunivocamente* in guisa che la somma o la differenza di gruppi omologhi varî in una serie lineare (esse individuano in V_p la stessa congruenza S di varietà V' e inoltre) le corrispondenze individuate fra una delle V', sia $\overline{V}'$, e la varietà jacobiana V_π della curva Γ_π immagine di entrambe le serie [21]), coincidono o dif-

[20]) In questo enunciato, e altrove, si sottintende sempre che sia stata *fissata* una corrispondenza frai gruppi di γ_n^1 e i punti di Γ_π (ove Γ_π possegga trasformazioni in sè); come anche fra le p-ple (π-ple) di punti di C_p (Γ_π) e i punti di V_p (V_π).

[21]) S'intende, ove Γ_π ammetta trasformazioni in sè, che gruppi delle due serie omologhi nel dato riferimento sian rappresentati da uno stesso punto di Γ_π. Un'analoga osservazione è da farsi in varî altri punti.

feriscono per trasformazioni di 2ª specie di $\overline{V}'$. E viceversa: se due serie aventi per immagine una stessa curva Γ_π individuano in V_p la stessa congruenza S di varietà V', e fra una di queste, $\overline{V}'$, e la varietà jacobiana di Γ_π individuano corrispondenze coincidenti o differenti per trasformazioni di 2ª specie di $\overline{V}'$, la somma o la differenza di due gruppi delle due serie aventi per immagine uno stesso punto di Γ_π varia in una serie lineare. Due serie siffatte si porranno in una stessa *classe*: ogni serie determina una classe.

Osservazione. — Notiamo che per le serie di genere $\pi \geq p$ si estendono immediatamente le considerazioni fatte, e quelle che faremo in seguito, pel caso $\pi < p$ (con le debite modificazioni). Si capisce che se $\pi > p$ ogni π-pla di gruppi è necessariamente equivalente almeno ad altre $\infty^{\pi-p}$; se è equivalente a sole altre $\infty^{\pi-p}$ ($\pi \geq p$), non ha luogo la considerazione della congruenza S, ed è V_p stessa che è birazionalmente identica a una involuzione ordinaria o congruenza di V_π (si può dire che allora la S è *di dimensione zero*), etc.; cfr. la nota [17]).

§ IV.

Complementi ai risultati precedenti e loro inversione.

16. Due k-ple ($k = 1, 2, \ldots$) di gruppi di una serie si diranno per brevità equivalenti (o, in particolare, coincidenti) *identicamente*, allorquando sulla curva immagine della serie sono equivalenti (o, in particolare, coincidono) le relative k-ple di punti.

Ciò posto abbiasi su una curva C_p una serie γ_n^1 di cui sia Γ_π ($\pi < p$) la curva immagine; sia τ la corrispondenza indotta da γ_n^1 fra C_p e Γ_π; e adoperiamo le notazioni usate al n° 15. Possiamo allora, a complemento dei risultati precedenti, osservare le seguenti proprietà:

I. *Se γ_n^1 possiede due k-ple di gruppi le quali siano equivalenti (o in particolare coincidenti) non identicamente, γ_n^1 non può presentare il caso A).*

Siano infatti H, H_1 due k-ple, non equivalenti, di punti di Γ_π; K, K_1 le corrispondenti k-ple di gruppi di γ_n^1; e sia $K \equiv K_1$. Presa una qualunque π-pla, E, di punti di Γ_π, nella serie lineare completa $|H + E|$ il gruppo H_1 avrà un certo residuo E_1: se si dicono G, G_1 le π-ple di gruppi di γ_n^1 omologhe in τ di E, E_1, dall'essere

$$H + E \equiv H_1 + E_1$$

segue

$$K + G \equiv K_1 + G_1;$$

e poichè $K \equiv K_1$, si ha $G \equiv G_1$: cioè ogni π-pla G di gruppi di γ_n^1 è equivalente ad altre π-ple: il che dimostra l'asserto.

In particolare *non può presentare il caso A) una serie che abbia un gruppo* DOPPIO (gruppo che corrisponde a due punti distinti della curva immagine della serie).

II. *Se γ_n^1 presenta il caso B), esistono $\frac{\pi}{2}$-ple o $\frac{\pi+1}{2}$-ple (secondochè π sia pari o* *no) di gruppi di* γ_n^1 *le quali sono equivalenti non identicamente ad altre* $\frac{\pi}{2}$*-ple o* $\frac{\pi+1}{2}$*-ple.*

Se γ_n^1 *presenta il caso C), ogni* $(\pi-i)$*-pla di gruppi è equivalente ad altre* $(\pi-i)$*-ple in numero finito; ed esistono* $\frac{\pi-i}{2}$*-ple o* $\frac{\pi-i+1}{2}$*-ple di gruppi le quali sono equivalenti non identicamente ad altre* $\frac{\pi-i}{2}$*-ple o* $\frac{\pi-i+1}{2}$*-ple.*

Si dimostra la prima parte dell'enunciato osservando che, mentre un punto di V_π descrive una varietà immagine delle $\frac{\pi}{2}$-ple o $\frac{\pi+1}{2}$-ple di punti di Γ_π, i suoi coniugati nella involuzione I_ε descrivono una varietà, della stessa dimensione, che incontra certo la prima.

Con considerazioni analoghe si ha la seconda parte del lemma.

Così *ogni serie di genere due che non presenti il caso A) possiede qualche coppia di gruppi fra loro equivalenti (o in particolare un gruppo doppio); e se presenta il caso C) possiede infinite di siffatte coppie.*

III. *Se* $\pi > 1$ *e ogni gruppo di* γ_n^1 *è equivalente ad altri* $\eta - 1$ $(\eta > 1)$, γ_n^1 *presenta il caso C).*

Si consideri infatti su Γ_π l'involuzione J_η in cui son coniugati due punti quando i corrispondenti gruppi di γ_n^1 sono equivalenti; e, detto ϖ $(0 < \varpi < \pi)$ il genere di J_η, si prenda su Γ_π una $g_{\pi\eta}^{\pi-\varpi}$ composta con J_η. Un generico gruppo Y di $g_{\pi\eta}^{\pi-\varpi}$ sarà costituito da π gruppi di J_η, siano

$$(A_1^{(s)} A_2^{(s)} \dots A_\eta^{(s)}) \qquad (s = 1, \dots, \pi).$$

Indichiamo ora con $\Gamma_r^{(s)}$ il gruppo di γ_n^1 omologo in τ di $A_r^{(s)}$; sarà

$$\Gamma_1^{(s)} \equiv \Gamma_2^{(s)} \equiv \cdots \equiv \Gamma_\eta^{(s)}. \tag{1}$$

Poichè il gruppo $\sum_{rs} A_r^{(s)}$ di Γ_π varia, al variare di Y, in una serie lineare, la stessa proprietà compete su C_p al gruppo $\sum_{rs} \Gamma_r^{(s)}$; e quindi, per le (1), gli η^π gruppi

$$\eta(\Gamma_{i_1}^{(1)} + \Gamma_{i_2}^{(2)} + \cdots + \Gamma_{i_\pi}^{(\pi)}),$$

dove $(i_1, i_2, \dots, i_\pi)$ è una qualunque disposizione con ripetizione di $(1, 2, \dots, \eta)$, variano in una serie lineare. Ma allora (SEVERI) anche i gruppi $\Gamma_{i_1}^{(1)} + \cdots + \Gamma_{i_\pi}^{(\pi)}$ descrivono una o più serie irriducibili $\infty^{\pi-\varpi}$, ciascuna delle quali è costituita di gruppi equivalenti. Da ciò segue l'asserto (che potrebbe anche dedursi facilmente da quanto è detto al n° 13, osservando che le residue della γ_n^1 hanno, nell'ipotesi fatta, il genere $\varpi < \pi$).

IV. *Se* γ_n^1 *è costituita dai gruppi di un'altra serie* $\bar{\gamma}$, *pensati ciascuno* ω *volte, la* γ_n^1 *presenta il caso B), o il C).* E precisamente: se $\bar{\gamma}$ presenta il caso A), γ_n^1 presenta il caso B) e individua in V_π l'involuzione $\mathfrak{J}^\omega$ (n° 6); se $\bar{\gamma}$ presenta il caso B) o C), e individua in V_π l'involuzione I o la congruenza Σ, γ_n^1 presenta il caso stesso e individua in V_π una involuzione o congruenza che è appunto la $\mathfrak{I}^{(i)}$ entro I o Σ [22]).

V. *Se γ_n^1 è una involuzione, essa non può presentare il caso C)*; *e per conseguenza, se $\pi > 1$, un suo gruppo generico non può essere equivalente ad altri gruppi.*

Ciò dipende dal fatto che se si ha un sistema continuo di k-ple di gruppi di una involuzione le quali siano fra loro equivalenti, esse debbono essere identicamente equivalenti (SEVERI).

VI. *Se γ_n^1 è a moduli generali, essa non può presentare il caso C)*; giacchè la varietà jacobiana di una curva a moduli generali non contiene congruenze.

17. L'interpretazione geometrica in V_p dei numeri ζ_ρ ($\zeta_1 = \zeta$) studiati dal COMESSATTI [loc. cit. [8])] è la seguente.

Si indichino con Z_ρ (rispettivamente v_ρ) le varietà di V_p (rispettivamente V_π) immagini delle ρ-ple di punti di C_p (rispettivamente Γ_π). Se γ_n^1 presenta il caso A) o il B), consideriamo le v_ρ con $\rho = 1, 2, \ldots, \pi - 1$; esse sono mutate dalla corrispondenza Θ in varietà v'_ρ di $\overline{V}'$: tra una v_ρ e una v'_ρ omologhe la Θ subordina una corrispondenza biunivoca (n° 12). Si ha allora

$$\zeta_\rho = [v'_\rho Z_{p-\rho}] \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, \pi - 1),$$

dove il secondo membro indica il numero delle intersezioni delle varietà chiuse tra parentesi; e

$$\zeta_\pi = [v'_\pi Z_{p-\pi}] \quad \text{ovvero} \quad \zeta_\pi = \varepsilon [v'_\pi Z_{p-\pi}]$$

secondo che γ_n^1 presenti il caso A) o B).

Se invece γ_n^1 presenta il caso C), si considerino in V_π le v_ρ con $\rho = 1, 2, \ldots, \pi - i$; esse son mutate dalla Θ in varietà v'_ρ della stessa dimensione; tra una v_ρ e la v'_ρ omologa la Θ subordina una certa corrispondenza di indici (η_ρ 1) [23]); e si ha:

$$\zeta_\rho = \eta_\rho [v'_\rho Z_{p-\rho}].$$

Le precedenti formule si giustificano subito pensando che una varietà v'_ρ è immagine di una serie residua di quella costituita dalle ρ-ple di gruppi di γ_n^1; e che $[v'_\rho Z_{p-\rho}]$, è l'indice della serie che ha per immagine v'_ρ: vedi n° 4, *Osservazione.*

18. Come si può costruire la *seconda* congruenza di V_p? (vedi n° 7, *a*). Basta, come può facilmente vedersi, invertire l'ufficio delle due curve C_p, Γ_π: applicare cioè la costruzione del n° 14 alla serie indotta da γ_n^1 su Γ_π. Si avranno considerazioni analoghe a quelle del detto n° 14, C); cfr. n° 15, *Osservazione.*

19. Proponiamoci adesso la questione inversa di quella trattata al n° 14.

E cioè: supponiamo che la varietà jacobiana V_p di una curva C_p, possegga una congruenza di varietà V'. Quali sono le serie di C_p che individuano, nel senso noto, detta congruenza?

---

[22]) Si tenga presente che se G, G_1 sono π-ple di gruppi di $\overline{\gamma}$, ed E, E_1 gruppi di p punti di C_p tali che $G + E \equiv G_1 + E_1$, si ha $\omega G \equiv \omega G_1$ se, e solo se, $\omega E \equiv \omega E_1$.

[23]) η_1 sarebbe il numero indicato al n° 15 con η; η_ρ è il numero (≥ 1) dei punti comuni a una v_ρ e alla W_i che passa per un suo punto.

Da quanto è detto al n° 13 *a*), risulta subito la risposta a tal domanda. Si prenda entro una delle V' una curva che le appartenga: essa sarà immagine di una γ_p^1 di C_p: ogni serie avente per residua tal γ_p^1 individua appunto in V_p la congruenza data. E si hanno così *tutte* le serie richieste (per il loro genere, che assume valori grandi quanto si vuole, vedi n° 15, *Osservazione*).

Dalla precedente considerazione, tenendo anche presente il n° 11, risulta subito che: *il minimo genere delle curve che appartengono a una varietà picardiana V_p è $> p$, se V_p non è birazionalmente identica a una involuzione ordinaria di una varietà jacobiana.*

20. Si può precisare il precedente risultato come segue:

TEOREMA II. — *La varietà jacobiana V_p di una curva C_p contenga una congruenza S (anche di dimensione zero: vedi n° 15,* OSSERVAZIONE) *di varietà irriducibili V'. Sia poi data una corrispondenza biunivoca tra una delle V', sia $\overline{V}'$, e la varietà jacobiana V_π di una curva Γ_π, ovvero fra $\overline{V}'$ e una involuzione ordinaria I_ε o una congruenza $\Sigma_{\pi-i}$ di V_π. Tal corrispondenza potrà riguardarsi come una corrispondenza Θ fra $\overline{V}'$ e V_π, di indici* (11) o ($1\,\varepsilon$) o ($1\,\infty^i$). *Esiste allora su C_p un ben determinato sistema di serie, birazionalmente identiche a Γ_π, che individuano in V_p la data congruenza S, e fra $\overline{V}'$, V_π la data corrispondenza Θ (a meno di trasformazioni di 1ª specie).*

Si consideri infatti su V_π una curva g, immagine dei punti di Γ_π: in virtù della corrispondenza che si suppone fissata trai punti di V_π e le π-ple di punti di Γ_π, a ogni punto A di g corrisponde un ben determinato punto α di Γ_π, e viceversa.

La data corrispondenza Θ farà corrispondere alla curva g di V_π una certa curva g' di $\overline{V}'$; e come g appartiene a V_π, così g' apparterrà a $\overline{V}'$. Tra g e g' la Θ subordinerà una corrispondenza θ, la quale è certo biunivoca se Θ ha gli indici (11) o ($1\,\varepsilon$): supporremo per ora che essa sia biunivoca anche ove Θ abbia gli indici ($1\,\infty^i$). Sia A' l'omologo in θ del punto A di g.

La curva g' è immagine di una γ_p^1 di C_p: poichè g' appartiene a $\overline{V}'$, ogni serie avente per residua la γ_p^1 individua in V_p la data congruenza S. Prendiamo ora una serie γ avente per residua la γ_p^1, e di cui un gruppo generico non sia equivalente ad altri; e rappresentiamo col punto α di Γ_π quel gruppo di γ il cui residuo in γ_p^1 ha per immagine A'. Allora (n° 15) γ individuerà fra $\overline{V}'$ e V_π (a meno di trasformazione di 1ª specie di $\overline{V}'$) una certa corrispondenza razionale, che avrà gli indici finiti se Θ ha gli indici finiti, e gli indici ($1\,\infty^i$) se Θ ha gli indici ($1\,\infty^i$). Possiamo *fissare* tal corrispondenza assegnando come punti omologhi una delle coppie di punti $A\,A'$ poco fa considerate; otterremo così una corrispondenza Θ_1 che fa, come Θ, corrispondere g, g', e anzi subordina fra queste due curve appunto la corrispondenza θ: dunque Θ_1 coincide con Θ (nⁱ 9, 10): il che dimostra il teorema.

La dimostrazione va leggermente modificata se Θ ha gli indici ($1\,\infty^i$), e subordina fra g', g una corrispondenza θ di indici $1, \eta\,(\eta > 1)$. In tal caso si prenda su C_p una generica serie lineare g_{n+p}^n con $n \geq p + \eta - 1$: i gruppi della γ_p^1 immagine di g' hanno come residue, rispetto ad essa, delle serie lineari g_n^{n-p}. Possiamo ora prendere una serie γ_n^1 la quale sia birazionalmente identica a Γ_π, e tale che il gruppo omologo del punto

α sia un gruppo della g_n^{n-p} residua del gruppo immagine di A' [24]). Si vede allora come prima che γ_n^1 soddisfa alle condizioni dell'enunciato.

Osservazione. — Se nella Θ ai punti di $\overline{V}'$ corrispondono i gruppi di una involuzione di V_π che sia una $\mathfrak{J}$ entro un'altra involuzione (ordinaria); ovvero le varietà di una congruenza che sia una $\mathfrak{J}$ entro un'altra congruenza; allora tra le serie γ di cui parla il precedente teorema ve n'è di costituite da gruppi di un'altra serie, contati ciascuno più volte (vedi n° 16, IV).

Si noti pure che la costruzione indicata ci dà *tutte* le serie, di ordine abbastanza elevato, soddisfacenti alle condizioni dello enunciato. Esse appartengono alla stessa classe (n° 15).

§ V.

Classi che contengono serie composte con una involuzione.

21. Data su una curva una serie, si può facilmente decidere se nella classe (cfr. n° 15) da essa individuata esistono serie composte con una involuzione. Si hanno infatti i seguenti due teoremi:

Teorema III. — *Su una curva C_p abbiansi due serie $\gamma_n^1[\nu\,\pi\,\zeta]$, $\gamma_m^1[\mu\,\pi\,\zeta]$ appartenenti alla stessa classe, e delle quali la prima sia composta con una involuzione (irrazionale) I. Allora le μ-ple di gruppi della γ_m^1 uscenti da due punti coniugati in I sono equivalenti (o in particolare coincidenti) identicamente.*

Sia infatti Γ_π una curva immagine delle due serie; queste inducono fra C_p e Γ_π due corrispondenze θ, θ_1, le quali *dipendono* fra loro secondo i numeri (1 1) o (1 —1) nel senso da Γ_π a C_p, quindi anche nell'opposto [25]). E cioè: preso un punto variabile di C_p, la somma o la differenza dei gruppi di punti di Γ_π che gli corrispondono in θ, θ_1 varia in una serie lineare. Poichè ora a due punti coniugati in I corrisponde, per la corrispondenza θ indotta da γ_n^1, uno stesso gruppo su Γ_π, segue subito l'asserto.

Il precedente teorema s'inverte così:

Teorema IV. — *Su una curva C_p abbiasi una serie $\gamma_m^1[\mu\,\pi\,\zeta]$, e si supponga che dato un punto qualunque P_1 di C_p, esistano altre $\omega - 1$ punti P_2, P_3, ..., P_ω, tali che le μ-ple di gruppi della γ_m^1 uscenti da due qualunque dei P_i siano identicamente equiva-*

---

[24]) Per far ciò si osservi che la corrispondenza θ induce in g una involuzione J_η. Si può allora (com'è facile vedere) prendere in un S_r (r abbastanza alto) una curva X birazionalmente identica a g, tale che su X i gruppi dell'involuzione I_η sian segati, uno a uno, da spazî S_{n-p}. Identificando la varietà costituita da questi S_{n-p} coll'insieme dei gruppi delle g_n^{n-p}, la curva X rappresenta la serie γ_n^1 richiesta.

[25]) Alludo a un notissimo teorema di Severi, che vale anche per corrispondenze fra curve distinte. Si avverta che nelle considerazioni attuali (come in quasi tutto il presente lavoro) non si impone *a priori* alcuna limitazione al genere delle serie considerate: vedi n° 15, *Osservazione.*

lenti. Allora il gruppo $(P_1 P_2 \ldots P_\omega)$ *descrive una involuzione irrazionale* I; *e nella classe individuata da* γ^1_m *esistono serie* γ^1_ζ *composte con* I.

È chiaro che il gruppo $(P_1 P_2 \ldots P_\omega)$ descrive una involuzione irrazionale I [vedi nota [6])]; questa potrà a sua volta essere composta con una involuzione $I'_{\omega'}$, tale che gli insiemi dei gruppi di γ^1_m uscenti da due punti coniugati in $I'_{\omega'}$ coincidano (nel qual caso la γ^1_m è composta colla $I'_{\omega'}$).

Si consideri ora una curva Γ_π immagine di γ^1_m; questa induce su Γ_π una serie γ^1_μ; una generica residua di γ^1_μ, sia γ^1_π, sarà birazionalmente identica alla I, e avrà, come subito si vede, l'indice (e il difetto d'equivalenza) eguale a $\frac{\zeta}{\omega}$. La corrispondenza $\left(\frac{\zeta}{\omega}\,\pi\right)$ indotta da γ^1_π fra l'involuzione I, immagine di γ^1_π, e Γ_π, può riguardarsi come una corrispondenza $\theta(\zeta\,\pi)$ fra C_p e Γ_π; e θ indurrà su C_p una serie γ^1_ζ, composta con I, e birazionalmente identica a Γ_π, poichè γ^1_π non è composta con una involuzione (n° 3).

Detta poi θ_1 la corrispondenza indotta dalla γ^1_m fra C_p e Γ_π, le θ, θ_1 dipendono secondo i numeri 1, 1 nel senso da C_p a Γ_π, quindi anche nell'opposto: il che dimostra il teorema.

22. Dal precedente teorema risulta in particolare che:

Nella classe individuata da una serie ellittica, avente il difetto di equivalenza ζ $(\geqq 1)$ *esiste una involuzione ellittica di ordine* ζ. Basta ricordare che su una curva ellittica una serie avente il difetto di equivalenza ζ possiede $\zeta - 1$ gruppi equivalenti al suo gruppo generico. Si noti anche quest'altra conseguenza:

Se in una classe esistono serie γ', γ'', γ''', ... *composte rispettivamente colle involuzioni* I', I'', I''', ..., *esistono anche nella classe serie composte con una involuzione* I, *la quale è a sua volta composta simultaneamente colle* I', I'', I''', ... (Queste ultime debbono essere perciò in numero finito).

23. Avendosi su una curva C_p una serie $\gamma^1_n[\nu\,\pi\,\zeta]$ composta con una involuzione I, se un generico gruppo di γ^1_n non è equivalente ad altri gruppi di γ^1_n, una residua $\gamma^1_p[\zeta\,\pi\,\zeta]$ di γ^1_n gode, secondo il Teorema III, di questa proprietà: che le ζ-ple di suoi gruppi uscenti da due punti coniugati in I sono identicamente equivalenti.

Se la γ^1_n possiede invece $\eta - 1$ gruppi equivalenti al suo gruppo generico, che cosa potrà dirsi delle sue residue γ^1_p? Tali residue avranno ora l'indice $\frac{\zeta}{\eta}$: e si vede facilmente che: *nel caso attuale sono equivalenti identicamente i multipli secondo* η *delle* $\frac{\zeta}{\eta}$*-ple di gruppi di una* γ^1_p *uscenti da due punti coniugati in* I. Per veder ciò basta ripetere il ragionamento con cui si è dimostrato il Teorema III, osservando però che se Γ_π è una curva immagine di γ^1_n, la γ^1_p non ha più per immagine la Γ_π, ma l'involuzione di Γ_π in cui son coniugati due punti quando sono immagini di gruppi equivalenti di γ^1_n.

Nell'applicare la precedente proposizione giova però tener presente quanto segue.

Può darsi che fra gli $\eta - 1$ gruppi di γ^1_n equivalenti al suo gruppo generico ve ne siano $\eta' - 1$ $(\leqq \eta - 1)$ i quali, pensati come insiemi di gruppi della I, siano identicamente equivalenti a quello. Orbene: allora *si può trovare un'altra serie avente le stesse residue di* γ^1_n, *composta con* I, *e di cui il gruppo generico sia equivalente solo ad altri* $\frac{\eta}{\eta'} - 1$. Presa infatti una curva K immagine di I, e però in corrispondenza $\tau(1\,\varepsilon)$ con C_p (ε ordine di I), la γ^1_n sarà la trasformata nella τ di una serie $\gamma^1_{\frac{n}{\varepsilon}}$ di K; presa una residua γ^1_ϖ (ϖ genere di K) di $\gamma^1_{\frac{n}{\varepsilon}}$, ad essa corrisponderà nella τ una serie $\gamma^1_{\varepsilon\varpi}$ di C_p, soddisfacente alle condizioni dichiarate.

Dalla considerazione fatta segue *l'equivalenza dei multipli secondo* $\frac{\eta}{\eta'}$ *delle* $\frac{\chi}{\eta}$*-ple di gruppi di una* γ^1_p, *residua della* γ^1_n, *uscenti da due punti coniugati in* I. Il che precisa maggiormente il primo enunciato di questo numero.

Osservazione. — Noteremo che *non esiste su* C_p *una serie composta con* I, *avente le stesse residue di* γ^1_n, *e di cui il generico gruppo sia equivalente solo a* $\eta_1 < \frac{\eta}{\eta'} - 1$ *altri gruppi*. Se infatti una serie composta colla I, sia $\gamma^1_{\varepsilon m}$, ha le stesse residue di γ^1_n, e quindi di $\gamma^1_{\varepsilon\varpi}$, tra $\gamma^1_{\varepsilon m}$, $\gamma^1_{\varepsilon\varpi}$ intercederà una certa corrispondenza $\left(\alpha\frac{\eta}{\eta'}\right)$ tale che la differenza fra due gruppi omologhi varia in una serie lineare (n° 3). Allora su K fra le serie γ^1_m, γ^1_ϖ che per la τ si mutano nelle $\gamma^1_{\varepsilon m}$, $\gamma^1_{\varepsilon\varpi}$, intercederà una corrispondenza $\left(\alpha\frac{\eta}{\eta'}\right)$, tale che il multiplo secondo ε della differenza fra gruppi omologhi varia in una serie lineare. Si prenda un fattore *irriducibile* ξ di quest'ultima corrispondenza: allora anche la differenza fra gruppi omologhi in ξ varia in una serie lineare. Poichè la $\gamma^1_{\varepsilon\varpi}$ non possiede gruppi equivalenti al suo gruppo generico, la ξ avrà il secondo indice $= 1$; se α_1 è il primo si vede subito che su C_p ogni gruppo di $\gamma^1_{\varepsilon m}$ è equivalente ad altri $\frac{\eta}{\eta'}\alpha_1 - 1$ $\left(\geqq \frac{\eta}{\eta'} - 1\right)$; il che dimostra l'asserto.

24. Termineremo questo § con una proprietà della varietà jacobiana V_p di una curva C_p contenente una involuzione irrazionale I.

Se π è il genere di I, una generica π-pla di gruppi della I sarà equivalente ad altre $\varepsilon - 1$, essendo $\varepsilon \geqq 1$ (n° 16, V).

Si prenda ora una varietà V' della congruenza S individuata da I nella V_p; e si consideri una *qualunque* curva (*irriducibile*) c di V'. La c sarà immagine di una residua di una serie composta con I, e di cui (in generale) ogni gruppo è equivalente (non identicamente rispetto a I) ad altri $\varepsilon - 1$. Prese allora in V_p due varietà ∞^{p-1} Z, Z_1 immagini di due punti di C_p coniugati nella I, i gruppi di punti $\varepsilon(Zc)$, $\varepsilon(Z_1c)$ risulteranno, secondo il risultato del n° 23, equivalenti. Applicando allora un ovvio criterio di equivalenza [26]), possiamo enunciare il seguente

---

[26]) Se su una varietà V_r si hanno due varietà ∞^{r-1}, A, B, tali che presa in V_r una qualunque varietà di data dimensione h, segata dalle A, B secondo varietà ∞^{h-1}, queste ultime risultino sempre equivalenti fra loro, allora le A, B sono esse stesse equivalenti. Lo si dimostra subito per induzione da $r - 1$ a r.

TEOREMA V. — *Una curva* C_p *possegga una involuzione* I *di genere* π, *tale che la generica* π*-pla di gruppi sia equivalente ad altre* $\varepsilon - 1$ (≥ 0). *Presa nella varietà jacobiana* V_p *di* C_p *una varietà* V' *della congruenza individuata da* I, *e dette* Z, Z_1 *due varietà* ∞^{p-1} *immagini di due punti di* C_p *coniugati in* I, *si ha:*

$$\varepsilon(ZV') \equiv \varepsilon(Z_1 V').$$

§ VI.

Classi che non contengono serie composte con una involuzione. Serie tipiche.

25. Si possono costruire curve contenenti serie birazionalmente identiche a una curva Γ_π, colla seguente considerazione.

Si prenda la varietà jacobiana V_π di Γ_π; e in essa il sistema delle varietà $\infty^{\pi-1}$, Z, immagini dei punti di Γ_π. Supposto che V_π rappresenti senza eccezione le g_π di Γ_π, il detto sistema avrà come varietà base la varietà $w_{\pi-2}$ immagine delle g_π speciali di Γ_π.

Si prenda ora in V_π una curva C_p, che non giaccia sulla $w_{\pi-2}$, nè sia immagine di una γ^1_π di Γ_π composta con una involuzione irrazionale. Allora, se ν è il numero delle intersezioni variabili di una Z con C_p, le Z segano su C_p una serie γ^1_ν, birazionalmente identica alla Γ_π. È chiaro che la γ^1_ν non può essere composta con una involuzione; e si vede anche facilmente che nella classe individuata da γ^1_ν non esistono serie composte con una involuzione. Basta, per ciò, applicare il Teorema III, e ricordare che due k-ple di Z sono equivalenti se, e solo se, sono equivalenti su Γ_π le relative k-ple di punti.

Si noti che se C_p non giace sull'inviluppo delle Z, la γ^1_ν è priva di punti multipli, o di diramazione, variabili.

26. Le serie or ora costruite si possono assumere come serie tipiche delle classi che non contengono serie composte con una involuzione. Si ha infatti il seguente

TEOREMA VI. — *Sopra una curva* C_p *si abbia una classe di serie birazionalmente identiche a una curva* Γ_π, *e aventi il difetto di equivalenza* ζ, *nessuna delle quali sia composta con una involuzione. Si può allora immergere la* C_p *nella varietà jacobiana* V_π *di* Γ_π, *in guisa che le varietà di* V_π, *immagini dei punti di* Γ_π, *seghino su* C_p *una* $\gamma^1_\zeta[\pi\pi\zeta]$ *della classe.*

Si prenda infatti una serie $\gamma^1_n[\nu\pi\zeta]$ della classe; essa induce su Γ_π una serie $\gamma^1_\nu[np\zeta]$, birazionalmente identica a C_p, e non contenente gruppi equivalenti al suo gruppo generico (Teorema IV). Allora una generica residua $\gamma^1_\pi[\zeta p\zeta]$ della γ^1_ν induce su C_p una $\gamma^1_\zeta[\pi\pi\zeta]$, che per una considerazione fatta altre volte (n° 21) appartiene alla classe considerata. La γ^1_ζ è appunto costruibile nel modo detto. C. D. D.

Si noti che le ∞^π serie γ^1_ζ così ottenute hanno in generale punti doppi e di diramazione in numero finito (n° 25).

27. Ci proponiamo ora la ricerca di criteri che permettano di decidere quale dei tre casi A), B), C) del n° 14 presentino le serie di una classe.

Per le classi che studiamo in questo § la questione è parzialmente risolta dal seguente enunciato:

Teorema VII. — *Entro la varietà jacobiana V_π di una curva Γ_π si consideri una curva C_p, su cui le varietà Z, immagini dei punti di Γ_π, seghino una serie γ_ν^1, birazionalmente identica a Γ_π. Allora se C_p appartiene a V_p, la γ_ν^1 presenta il caso A) o il B) del n° 14; se invece C_p appartiene a una varietà picardiana $V_{\pi-i}$ immersa in V_π, ogni π-pla di gruppi della γ_ν^1 è equivalente ad altre ∞^i.*

Infatti se C_p appartiene a V_p, C_p è contenuta in un sistema transitivo di curve di V_p; e perciò se una infinità di k-ple di varietà Z sega su C_p una serie di gruppi equivalenti, le stesse k-ple di Z sono fra loro equivalenti [27]). Poichè una generica π-pla di Z non è equivalente ad alcuna altra π-pla, la γ_ν^1 non può presentare il caso C).

Se invece C_p appartiene a una varietà picardiana $V_{\pi-i}$ immersa in V_p, si consideri il sistema ∞^π, Σ, di tutte le π-ple di Z; esso sega su $V_{\pi-i}$ un sistema ∞^π, Σ', di varietà $V_{\pi-i-1}$: e poichè $V_{\pi-i}$ ha l'irregolarità superficiale $\pi - i$, ogni varietà di Σ' sarà equivalente almeno ad altre ∞^i: anzi a sole altre ∞^i, perchè la congruenza di cui fa parte la $V_{\pi-i}$ ha l'irregolarità i [28]). D'altronde, poichè C_p appartiene a $V_{\pi-i}$, un sistema di $V_{\pi-i-1}$ di $V_{\pi-i}$ che seghi su C_p una serie di gruppi equivalenti è costituito, per lo stesso criterio applicato dianzi, da $V_{\pi-i-1}$ equivalenti: e perciò ogni π-pla di gruppi di γ_ν^1 è equivalente ad altre ∞^i, e sole altre ∞^i. C. D. D.

Osservazioni:

1° Il teorema precedente è, in sostanza, equivalente all'altro di Comessatti [loc. cit. [8]), n° 8] che se $p \geqq \pi$ e i integrali di 1ª specie di Γ_π dànno somme costanti nei gruppi della serie indotta da γ_ν^1 su Γ_π, allora $p - \pi + i$ integrali di 1ª specie di C_p dànno somme costanti nei gruppi di γ_ν^1.

2° Applicando una trasformazione T, di 1ª o 2ª specie, al sistema delle Z, si ha un sistema che sega su C_p una serie della stessa classe di γ_ν^1. Applicando invece la T alla curva C_p, si ha una curva C'_p; la γ_ν^1 si muta per la T in una serie di C'_p che appartiene alla stessa classe di quella segata dalle Z su C'_p

§ VII.

Classi contenenti una involuzione.

28. Allorquando tra le serie di una classe v'è una involuzione, si può facilmente, dalla natura di questa involuzione, decidere se le serie della classe presentano il caso A)

---

[27]) Vedi la mia Nota citata [10]), n° 2.

[28]) Risulta infatti facilmente da notissimi teoremi di Severi che se in una varietà V_r si ha un sistema continuo costituito da infiniti sistemi lineari completi $|X|$, il quale seghi un sistema di varietà equivalenti su ogni V_h di un sistema ∞^{r-h}, Σ, di indice 1, ogni $|X|$ può aversi togliendo da un sistema lineare fisso un sistema lineare *appartenente* a Σ.

o il caso B) del n° 14. Il caso C), come sappiamo, è escluso dal lemma V del n° 16.

La questione che risolveremo in questo § è adunque la seguente: una curva C_p possiede una involuzione (irrazionale) I, di ordine ε e genere π. Una generica π-pla di gruppi di I sarà equivalente ad altre π-ple? [29]).

29. Cominciamo a risolvere la seguente questione ausiliaria.

Sopra una curva C_p è data una involuzione I di ordine ε, e una g^1_n; trai gruppi della g^1_n è stabilita una projettività Ω. Quante sono le coppie di punti coniugati nella I, e individuanti nella g^1_n coppie di gruppi omologhi in Ω?

Tal problema si risolve molto facilmente. Detto X un punto variabile di C_p, esso individua un gruppo della g^1_n; tal gruppo avrà nella Ω un gruppo omologo G; sia Γ l'insieme degli $n(\varepsilon - 1)$ residui, rispetto a I, dei punti del gruppo G. La corrispondenza che a X fa corrispondere Γ ha gli indici eguali a $n(\varepsilon - 1)$; ed è a valenza zero, perchè Γ, al variare di X, descrive una serie razionale. Tal corrispondenza ha dunque

$$x = 2(\varepsilon - 1)n \tag{2}$$

coincidenze. *E tante saranno,* SE NON SONO INFINITE, *le coppie cercate: purchè* (si noti bene) *si conti* PER DUE *una coppia di punti coniugati nella I e individuanti nella g^1_n due gruppi che nella Ω si corrispondano in doppio modo (o, in particolare, coincidano).*

30. Dopo ciò riprendiamo la questione enunciata al n° 28. Essa, per le involuzioni non composte, vien completamente risoluta dai due seguenti teoremi:

TEOREMA VIII. — *Una curva C_p possegga una involuzione non composta I, di ordine ε e genere $\pi > 0$. Se due k-ple di gruppi di I ($k = 1, 2, \ldots$) sono equivalenti non identicamente, la I è una involuzione ciclica* [30]) *priva di coincidenze.*

Infatti le due dette k-ple, che indicheremo con K, K_1, individueranno una $g^1_{k\varepsilon}$, che non sarà composta colla I: perchè in tal caso K, K_1 sarebbero equivalenti identicamente. Allora la $g^1_{k\varepsilon}$ e la I avranno necessariamente un numero finito di coppie comuni: numero a cui una nota formula di SCHUBERT assegna il valore

$$(\varepsilon - 1)\varepsilon k - \tfrac{1}{2}d,$$

dove d è il numero delle coincidenze di I. Ma le coppie di punti estratte dai gruppi di I contenuti in K, K_1 sono $\varepsilon(\varepsilon - 1)k$; dunque vediamo già che deve essere $d = 0$: e inoltre che queste ultime coppie sono *tutte* quelle comuni a I, $g^1_{k\varepsilon}$.

Prendiamo adesso due punti P, P' contenuti in uno stesso gruppo di I, che non sia uno di quelli facienti parte di K, K_1; questi due punti individuano nella $g^1_{k\varepsilon}$ due gruppi distinti A, A'; consideriamo quella projettività Ω della $g^1_{k\varepsilon}$ in sè nella quale K, K_1 sono uniti, e $A\,A'$ si corrispondono. Esistono allora $2\varepsilon k(\varepsilon - 1) + 1$ coppie di punti coniugati in I e individuanti gruppi di $g^1_{k\varepsilon}$ omologhi in Ω: tali sono la coppia PP', e le coppie estratte dai gruppi di I facienti parte di K, K_1, contate ciascuna due volte.

Ma allora pel risultato del n° 29, esisteranno *infinite* coppie dotate della stessa pro-

[29]) Per $\pi = 1$ la questione è risolta nella mia Nota citata [5]), n° 1, d).

[30]) Generata cioè da una corrispondenza biunivoca ciclica di C_p.

prietà. E cioè: preso un gruppo qualunque G di $g^1_{k\varepsilon}$ (diverso da K, K_1) e un suo punto X, l'omologo in Ω di G contiene uno (e uno solo) dei coniugati di X nella I. Da ciò segue subito che la Ω è ciclica; e poi che è anche ciclica la I. C. D. D.

TEOREMA IX. — *Se una curva C_p possiede una involuzione ciclica I (anche composta) di ordine ε e genere π, priva di coincidenze, una generica* π-pla *di gruppi di I è equivalente ad altre $\varepsilon - 1$, π-ple.*

Cominciamo a osservare che, essendo I priva di coincidenze, si ha, per una nota formula di ZEUTHEN:

$$p - 1 = \varepsilon(\pi - 1). \tag{3}$$

Ciò posto sia, su C_p, T la corrispondenza biunivoca che genera I; Γ_π sia una curva immagine della I; tra C_p e Γ_π intercede dunque una corrispondenza $\theta(\varepsilon\, 1)$.

Alla serie canonica $g^{\pi-1}_{2\pi-2}$ di Γ_π corrisponde, per la θ, su C_p una serie $g^{\pi-1}_{2p-2}$ contenuta nella serie canonica g^{p-1}_{2p-2} di C_p, e *completa rispetto alla involuzione I.* D'altronde nella g^{p-1}_{2p-2} la T subordina una omografia ciclica di ordine ε (e non minore, perchè la g^{p-1}_{2p-2} non può essere composta con una involuzione irrazionale): la detta $g^{\pi-1}_{2p-2}$ è appunto uno spazio fondamentale di tale omografia. Ma di spazî fondamentali dovranno esisterne altri: dovranno cioè esistere su Γ_π delle altre serie di ordine $2\pi - 2$ e dimensione $\pi - 2$ cui per la θ corrisponderanno serie lineari $\infty^{\pi-2}$, complete rispetto a I, e costituite di gruppi canonici. Quante saranno tali serie? Poichè una omografia ciclica è generale [31]), se i è il numero delle dette serie dovremo avere:

$$\pi + i(\pi - 1) = p$$

che combinata colla (3) ne dà:

$$i = \varepsilon - 1.$$

Adunque: sulla curva Γ_π, oltre la serie canonica $g^{\pi-1}_{2\pi-2}$, esistono altre $\varepsilon - 1$ serie lineari $g^{(1)}, g^{(2)}, \ldots, g^{(\varepsilon-1)}$, di ordine $2\pi - 2$ e dimensione $\pi - 1$, cui corrispondono su C_p serie $g'^{(1)}, g'^{(2)}, \ldots, g'^{(\varepsilon-1)}$, complete rispetto a I, e contenute nella serie canonica di C_p.

Adesso, ripetendo un ragionamento fatto al n° 16, I), prendiamo una generica π-pla di punti di Γ_π, sia essa A. Su Γ_π la serie completa $|g^{\pi-1}_{2\pi-2} + A|$ è una $g^{2\pi-2}_{3\pi-2}$: e in essa le $g^{(1)}, g^{(2)}, \ldots, g^{(\varepsilon-1)}$ avranno come residui dei gruppi di p punti, sieno rispettivamente $A_1, A_2, \ldots, A_{\varepsilon-1}$. Per la θ a tali gruppi corrispondono dei gruppi A'_1, $A'_2, \ldots, A'_{\varepsilon-1}$, ciascuno dei quali è formato da π gruppi di I; e un analogo gruppo A' corrisponde ad A. Ora essendo su Γ_π:

$$g^{\pi-1}_{2\pi-2} + A \equiv g^{(1)} + A_1 \equiv \cdots \equiv g^{(\varepsilon-1)} + A_{\varepsilon-1},$$

avremo su C_p:

$$g^{\pi-1}_{2p-2} + A' \equiv g'^{(1)} + A_1 \equiv \cdots \equiv g'^{(\varepsilon-1)} + A'_{\varepsilon-1};$$

e poichè le serie $g^{\pi-1}_{2p-2}\ g'^{(1)} \ldots g'^{(\varepsilon-1)}$ sono contenute nella serie canonica, si ha:

$$A' \equiv A'_1 \equiv \cdots \equiv A'_{\varepsilon-1};$$

[31]) BERTINI, *Introduzione alla geometria projettiva degli iperspazi* (Pisa, Spoerri, 1907), pag. 67.

cioè: una generica π-pla di gruppi di I è equivalente ad altre $\varepsilon - 1$ π-ple [32]). E vediamo subito: a *sole* altre $\varepsilon - 1$ π-ple. Quest'ultima affermazione può giustificarsi con considerazioni analoghe alle precedenti; o anche, più semplicemente, osservando che una generica π-pla di gruppi di I individua una serie completa $g_{\varepsilon\pi}^{\varepsilon\pi-p}$, cioè, per la (3), una $g_{\varepsilon+p-1}^{\varepsilon-1}$: la quale deve contenere $\varepsilon\pi$, e non più, gruppi di I, perchè $\varepsilon\pi$ è il difetto di equivalenza di I.

Resta così dimostrato il nostro teorema.

31. Dai due teoremi precedenti risulta senz'altro il seguente:

Corollario. — *Se in una classe di serie v'è una involuzione non composta, che non sia ciclica e priva di coincidenze, le serie presentano il caso A). Se invece vi è una involuzione ciclica (anche composta) priva di coincidenze, le serie stesse presentano il caso B: se π è il loro genere, ed ε l'ordine dell'involuzione, ogni π-pla di gruppi di una qualunque delle serie è equivalente ad altre $\varepsilon - 1$.*

Tra le involuzioni cicliche prive di coincidenze ricorderò quelle di ordine 2 e genere $\frac{p+1}{2}$ su una curva iperellittica di genere dispari p [33]). Una tale involuzione possiede due gruppi fra loro equivalenti (vedi n° 16, I): le due coppie che essa ha a comune colla g_2^1 della curva sostegno. Prese $\frac{p+1}{2}$ coppie generiche dell'involuzione, esse individuano una g_{p+1}^1 completa, mutata in sè, non identicamente [vedi nota [32])], dall'involuzione, e contenente quindi un altro gruppo costituito da $\frac{p+1}{2}$ coppie di essa.

32. Termineremo facendo vedere che *avendosi su una curva C_p una serie (d'indice ≥ 1) composta con una involuzione, la questione di decidere quale dei tre casi A), B), C) presenti la serie stessa può ricondursi all'analoga per serie del tipo studiato al n° 25, o per involuzioni non composte.*

Sia dunque su C_p una serie $\gamma_{n\varepsilon}^1$, di genere π, composta con una involuzione I, di ordine ε e genere ω, che possiamo supporre non composta.

Dette Γ_π, C_ω due curve immagini rispettivamente di $\gamma_{n\varepsilon}^1$, I, fra la C_ω e la C_p intercederà una corrispondenza $\theta(1\,\varepsilon)$; e C_ω possiederà una serie γ_n^1, birazionalmente identica a Γ_π, che per la θ si muta appunto nella $\gamma_{n\varepsilon}^1$. La γ_n^1 indurrà fra Γ_π e C_ω una corrispondenza τ; la $\gamma_{n\varepsilon}^1$ indurrà fra Γ_π e C_p la $\tau\theta$.

Se I non è una involuzione ciclica priva di coincidenze, due π-ple di punti di Γ_π avranno per omologhe nella $\tau\theta$ due π-ple equivalenti di gruppi della $\gamma_{n\varepsilon}^1$, allora e solo

---

32) A questa conclusione si arriva anche applicando il ragionamento, da noi fatto per la g_{2p-2}^{p-1}, direttamente alla $g_{\varepsilon\pi}^{\varepsilon\pi-p}$ individuata da una generica π-pla di gruppi di I. (Occorre far vedere che in tale $g_{\varepsilon\pi}^{\varepsilon\pi-p}$ la T induce una omografia ciclica di ordine ε, *e non minore*: ciò è evidente se ε è primo).

33) Cfr. la mia Nota: *Sulle involuzioni irrazionali nelle curve iperellittiche* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XIX (1905), pp. 297-304], n° 6.

Osservo incidentalmente che *una C_3 contenente una involuzione I_2 di genere 2 è necessariamente iperellittica*: altrimenti sulla quartica piana canonica la I_2 sarebbe subordinata da una omologia armonica, il cui asse segherebbe la quartica in punti doppî per la I_2: mentre I_2 non ha punti doppî.

Va perciò modificata la dicitura in principio del n° 11 della Nota citata 5).

allora (Teorema VIII) che abbiano per omologhe nella τ due π-ple equivalenti di gruppi della γ^1_n. *La questione così resta spostata dalla* $\gamma^1_{n\varepsilon}$ *alla* γ^1_n.

Se invece I è una involuzione ciclica priva di coincidenze, si ragioni così. Dette V_p, V_ω, V_π, le varietà jacobiane di C_p, C_ω, C_π, la V_p contiene una congruenza S di varietà V'_ω, birazionalmente identiche a una certa involuzione ordinaria J_ε di V_ω.

La V_ω, a sua volta, contiene una congruenza $\overline{S}$ di varietà $\overline{V}'$, birazionalmente identiche a V_π, o a una involuzione ordinaria $\overline{J}_\delta$ di V_π, o a una congruenza $\Sigma_{\pi-i}$ di varietà W_i $(0 < i < \pi)$ di V_π: avvertendo che se $\pi \geqq \omega$ la $\overline{S}$ può essere di dimensione zero (n° 15, *Osservazione*).

Nella corrispondenza $(\varepsilon\, 1)$ che intercede fra V_ω e una V'_ω, alla congruenza $\overline{S}$ di V_ω corrisponde una congruenza S^* di varietà V'^* entro la detta V'_ω: *al variare di quest'ultima in* S, *la* S^* *descrive appunto,* com'è facile vedere, *la congruenza individuata da* $\gamma^1_{n\varepsilon}$ *in* V_p.

Ora in V_ω la J_ε, essendo ε primo, perchè I non è composta, è ciclica; se T è una trasformazione (di 1ª specie) generatrice di J_ε, T muterà in sè la $\overline{S}$, inducendo in essa una trasformazione (di 1ª specie, ciclica) $\overline{T}$. E si posson dare 2 casi:

a) Se $\overline{T}$ è diversa dall'identità, le V'^* sono birazionalmente identiche alle $\overline{V}'$, quindi a V_π o $\overline{J}_\delta$ o $\Sigma_{\pi-i}$. Due π-ple di gruppi della $\gamma^1_{n\varepsilon}$ sono equivalenti se, e solo se, lo sono le corrispondenti π-ple di gruppi della γ^1_n.

b) Se invece $\overline{T}$ è l'identità (in particolare se la $\overline{S}$ è di dimensione zero), T subordina in ogni V'_ω una trasformazione (di 1ª specie) ciclica a periodo ε: all'involuzione da questa generata in una V'_ω, corrisponde, nella corrispondenza $(1\,1)$ o $(1\,\delta)$ o $(1\,\infty^i)$ tra la detta V'_ω e V_π, una involuzione ordinaria J^*, o una congruenza Σ^* composta colla $\Sigma_{\pi-i}$. Due punti di V_π appartenenti a uno stesso gruppo di J^*, o a una stessa varietà di Σ^*, e solo due tali punti, sono immagini di due π-ple equivalenti di gruppi della $\gamma^1_{n\varepsilon}$.

Dalle considerazioni fatte segue quanto si è asserito a principio del n°.

Si noti che, anche quando I_ε non è ciclica e priva di coincidenze, vale la costruzione, indicata ultimamente, della congruenza individuata da $\gamma^1_{n\varepsilon}$: solo che allora a J_ε va sostituita l'involuzione *di 1° ordine* dei punti di V_ω, e quindi a T l'identità.

Pisa, 2 giugno 1913.

RUGGIERO TORELLI.