Über eine fundamentale Eigenschaft der Invarianten einer allgemeinen binären Form.

Von

A. Ostrowski in Hamburg und I. Schur in Berlin.

Wendet man auf die Variablen x, y der binären Form

$$f(x, y) = a_0 x^n + \binom{n}{1} a_1 x^{n-1} y + \binom{n}{2} a_2 x^{n-2} y^2 + \ldots + a_n y^n$$

eine allgemeine lineare homogene Transformation

$$(s) \qquad x = \alpha\xi + \gamma\eta, \qquad y = \beta\xi + \delta\eta$$

an, so entsteht eine neue Form

$$\varphi(\xi, \eta) = a_0' \xi^n + \binom{n}{1} a_1' \xi^{n-1} \eta + \binom{n}{2} a_2' \xi^{n-2} \eta^2 + \ldots + a_n' \eta^n.$$

Hierbei erscheinen die a_ν' als allein durch s bestimmte lineare Formen der a_λ

$$a_\varkappa' = \sum_{\lambda=0}^{n} t_{\varkappa\lambda} a_\lambda \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots, n).$$

Die so durch s erzeugte lineare Transformation in $n+1$ Variablen nennt man vielfach die zu s gehörende induzierte Transformation; sie soll mit $T(s)$ bezeichnet werden[1]. Diese Transformationen bilden eine mit der linearen Gruppe der Substitutionen s isomorphe Gruppe $\mathfrak{G}$, die wir im folgenden die *Fundamentalgruppe* der (binären) Invariantentheorie nennen wollen. In der Tat kann man ja die gesamte Theorie der Invarianten binärer Formen als die Lehre von den Invarianten der Gruppe $\mathfrak{G}$ auffassen.

Es war nun von Interesse, diese Gruppe unabhängig von der Transformation der x, y allein als lineare Gruppe in $n+1$ Variablen zu kenn-

[1] Diese Transformation ist im wesentlichen gleichbedeutend mit der von A. Hurwitz, Zur Invariantentheorie, Mathematische Annalen 43 (1893), S. 381–404, betrachteten Potenztransformation $P_n(s)$.

zeichnen. Eine solche Charakterisierung ergibt sich aus einem Satz, den Ostrowski unter anderen Ergebnissen in seiner Arbeit *Über eine neue Eigenschaft der Diskriminanten und Resultanten binärer Formen*[2]) aufgestellt hat, und der hier folgendermaßen ausgesprochen werden kann:

Die Gruppe $\mathfrak{G}$ *läßt sich definieren als die Gesamtheit aller linearen Transformationen der* $a_\varkappa$, *welche die Diskriminante* D *der Form* $f(x, y)$ *ungeändert lassen*[3]).

Es erscheint uns nun merkwürdig, daß dieser Satz nicht umgekehrt zur Kennzeichnung der Diskriminante innerhalb der Gesamtheit aller Invarianten F von $f(x, y)$ dienen kann, daß vielmehr der weit allgemeinere Satz gilt:

I. *Jede (nicht konstante) Invariante* F *der Form* $f(x, y)$ *läßt außer den Transformationen der Fundamentalgruppe* $\mathfrak{G}$ *keine weiteren linearen Transformationen der* $a_\varkappa$ *zu. Eine Ausnahme bilden nur für ein gerades* $n = 2\nu > 2$ *die Potenzen der quadratischen Invariante*

$$J = a_0 a_n - \binom{n}{1} a_1 a_{n-1} + \binom{n}{2} a_2 a_{n-2} - \cdots \pm \binom{n}{\nu-1} a_{\nu-1} a_{\nu+1} \mp \frac{1}{2}\binom{n}{\nu} a_\nu^2 .$$

Daß $\mathfrak{G}$ die größte *kontinuierliche* Gruppe linearer Transformationen ist, welche eine Invariante F (abgesehen von dem Ausnahmefall) zuläßt, folgt bereits aus einem schönen Resultat von Herrn G. Kowalewski[4]), auf das schon Ostrowski am Schluß der oben zitierten Arbeit hingewiesen hat. Der Beweis unseres Satzes I wird auch in einem wichtigen Punkte von einem Hilfssatz (Satz III) Gebrauch machen, der implicite schon bei Herrn Kowalewski vorkommt.

Dieser Beweis wird im folgenden mit durchaus elementaren Hilfsmitteln erbracht werden, wobei auch aus der Invariantentheorie nur die sehr leicht zu beweisende Tatsache benutzt wird, daß jede Invariante einer binären Form gewissen drei partiellen Differentialgleichungen genügt. Der Zusammenhang unserer Überlegung mit der Theorie der kontinuierlichen Gruppen ist aber naturgemäß ein sehr enger. Man kann geradezu sagen, daß wir uns einer älteren Auffassungsweise von Lie anschließen, bei der die infinitesimalen Operationen lediglich als die linken Seiten gewisser Differentialgleichungen erscheinen.

---

[2]) Mathematische Annalen **79** (1919), S. 360–387.

[3]) Wenn wir in der vorliegenden Arbeit sagen, eine Form bleibe bei einer linearen Transformation ungeändert oder lasse eine solche zu, so sehen wir von einem eventuell hinzutretenden konstanten Faktor ab. Ferner schließen wir lineare Transformationen mit verschwindender Determinante von der Betrachtung aus.

[4]) Über die projektive Gruppe der Normkurve und eine charakteristische Eigenschaft des sechsdimensionalen Raumes, Leipz. Berichte, math.-phys. Klasse **54** (1902), S. 371–392.

Unsere Methode führt nicht allein im Falle der Invarianten einer binären Form zum Ziele. Auch in anderen Fällen erweist sie sich als brauchbar, um die sämtlichen linearen Transformationen zu bestimmen, die eine gegebene Form zuläßt. Beispiele dieser Art, die dem formalen Kalkül der Potenzreihen entnommen sind und auch an und für sich ein gewisses Interesse beanspruchen, behandeln wir in den §§ 5 und 6 dieser Arbeit.

Der Satz I läßt sich, wie Ostrowski in einigen späteren Arbeiten unter Heranziehung wesentlich tiefer liegender Hilfsmittel vielleicht etwas mehr begrifflichen Charakters darlegen wird, auch auf den Fall mehrerer Grundformen mit beliebig vielen Variablen $x, y, \ldots$ übertragen. In der vorliegenden Abhandlung waren wir vor allem bestrebt, den Beweis möglichst elementar zu führen.

Die drei ersten Paragraphen dieser Arbeit sind in gemeinsamen Besprechungen beider Autoren entstanden. Die Ausführungen des § 4 rühren von A. Ostrowski, die der §§ 5 und 6 von I. Schur her.

§ 1.

Der Grundgedanke der Beweismethode.

Für jede Form $F = F(a)$ der Variablen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ setzen wir im folgenden überall

$$\frac{\partial F}{\partial a_\nu} = F_\nu \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n).$$

Genügt nun F einer Differentialgleichung von der Gestalt

$$C = \sum_{\varkappa, \lambda}{}_0^n c_{\varkappa\lambda} a_\lambda F_\varkappa = 0 \tag{1}$$

mit konstanten Koeffizienten $c_{\varkappa\lambda}$, so betrachten wir die Matrix $C = (c_{\varkappa\lambda})$, die wir stets mit demselben Buchstaben bezeichnen wie die linke Seite der Differentialgleichung.

Eine wichtige Rolle wird nun bei uns die einfache Bemerkung spielen:

II. *Genügt F der Differentialgleichung* (1) *und ist $P = (p_{\varkappa\lambda})$ eine lineare Transformation, die F ungeändert läßt, so genügt F auch der Differentialgleichung $C_1 = 0$ mit der Koeffizientenmatrix*

$$C_1 = PCP^{-1}$$

Denn aus

$$a'_\varkappa = \sum_{\lambda=0}^{n} p_{\varkappa\lambda} a_\lambda, \qquad F(a') = \gamma \cdot F(a)$$

6*

folgt durch Differentiation nach $a_\varkappa$

$$\gamma F_\varkappa(a) = \sum_{\mu=0}^{n} p_{\mu\varkappa} F_\mu(a').$$

Setzt man nun

$$a_\lambda = \sum_{\nu=0}^{n} p'_{\lambda\nu} a'_\nu,$$

so wird

$$\gamma C = \sum_{\varkappa,\lambda} c_{\varkappa\lambda}\, a_\lambda \cdot \gamma F_\varkappa(a) = \sum_{\varkappa,\lambda,\mu,\nu} c_{\varkappa\lambda}\, p'_{\lambda\nu}\, p_{\mu\varkappa}\, a'_\nu\, F_\mu(a') = 0\,.$$

Für

$$\sum_{\varkappa,\lambda} p_{\mu\varkappa}\, c_{\varkappa\lambda}\, p'_{\lambda\nu} = c'_{\mu\nu}, \quad \text{d. h.} \quad C_1 = (c'_{\mu\nu})$$

erhält man demnach

$$\sum_{\mu,\nu} c'_{\mu\nu}\, a'_\nu\, F_\mu(a') = 0\,.$$

Das liefert aber den Satz II, wenn man noch beachtet, daß die a'_ν voneinander unabhängig sind und daher durch die a_ν ersetzt werden können.

Handelt es sich nun darum, die Gruppe $\mathfrak{F}$ aller Transformationen P zu bestimmen, welche die gegebene Form F ungeändert lassen, so wird zuweilen folgende Schlußweise gute Dienste leisten: Kennt man eine *Basis* der Schar $\mathfrak{D}$ aller Differentialgleichungen der Form (1) für die gegebene Funktion F, d. h. ein System

$$C_1 = 0,\ C_2 = 0,\ \ldots,\ C_k = 0$$

von linear unabhängigen Differentialgleichungen, aus denen sich jede andere Differentialgleichung von $\mathfrak{D}$ linear zusammensetzen läßt, so ergibt der Satz II, daß für jede Transformation P der Gruppe $\mathfrak{F}$ Gleichungen von der Gestalt

$$PC_\varkappa P^{-1} = \sum_{\lambda=1}^{k} d_{\varkappa\lambda} C_\lambda \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k) \tag{2}$$

gelten müssen. Hierbei ist jede dieser Gleichungen als eine Relation zwischen Matrizen aufzufassen. Bezeichnet man nun die rechte Seite von (2) mit $C'_\varkappa$,[5]) so lassen sich diese Gleichungen auch in der Form

$$PC_\varkappa = C'_\varkappa P \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k) \tag{3}$$

schreiben und liefern nun gewisse *lineare* Bedingungen für die zu bestimmenden Koeffizienten $p_{\alpha\beta}$ der Substitution P, im Gegensatz zu der komplizierteren Gleichung, welche die Invarianz von F gegenüber P zum Ausdruck bringt.

[5]) Das Zeichen M' für die zu einer Matrix M gehörende transponierte Matrix wird in dieser Arbeit nirgends benutzt.

Zu beachten ist allerdings, daß in (3) die $C_\varkappa$ als bekannt anzusehen sind, die $C'_\varkappa$ aber nicht. Diese Matrizen werden aber in vielen Fällen von so speziellem Bau sein, daß die Diskussion des Problems, alle P zu bestimmen, zu Ende geführt werden kann.

Im Falle einer Invariante F der binären Form $f(x, y)$ wird nun eine Basis der zugehörigen Schar $\mathfrak{D}$ durch den oben erwähnten Hilfssatz von Herrn Kowalewski geliefert:

III. *Für jede (nicht konstante) Invariante F der binären Form $f(x, y)$ bilden die drei Differentialgleichungen*

$$(4)\qquad \begin{cases} C_1 = a_0 F_1 + 2a_1 F_2 + \dots + n a_{n-1} F_n = 0 \\ C_2 = n a_1 F_0 + (n-1) a_2 F_1 + \dots + a_n F_{n-1} = 0 \\ C_3 = n a_0 F_0 + (n-2) a_1 F_1 + \dots + (n-2n) a_n F_n = 0 \end{cases}$$

eine Basis der zu F gehörenden Schar $\mathfrak{D}$. Eine Ausnahme tritt nur für $n > 2$ ein, wenn F eine Potenz der (in der Einleitung erwähnten) quadratischen Invariante J ist.

Von diesem Satz, dessen Beweis im § 3 in einer gegenüber dem Kowalewskischen Beweis etwas vereinfachten und unseren Betrachtungen mehr angepaßten Darstellung erbracht werden wird, soll schon jetzt Gebrauch gemacht werden.

§ 2.

Beweis des Satzes I.

Um diesen Satz zu beweisen, haben wir nur zu zeigen, daß eine Substitution $P = (p_{\varkappa\lambda})$, die für die Matrizen C_ν der drei Differentialgleichungen (4) Gleichungen der Form

$$(5)\qquad PC_\nu = (\varrho_\nu C_1 + \sigma_\nu C_2 + \tau_\nu C_3)P$$

genügt, der Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ angehört, d. h. für eine passend gewählte Substitution

$$s = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

die Form der durch s induzierten Transformation $T(s)$ erhält. Den Beweis zerlegen wir in eine Reihe einzelner Schritte:

1. Um zu zeigen, daß P zu $\mathfrak{G}$ gehört, genügt es offenbar dies für irgendein Produkt $Q = G_1 P G_2$ zu beweisen, wo G_1 und G_2 in der Gruppe $\mathfrak{G}$ enthalten sind. Wir werden nun G_1 und G_2 so wählen, daß in $Q = (q_{\varkappa\lambda})$ die beiden Elemente q_{0n} und q_{n0} gleichzeitig verschwinden. Hierbei bedienen wir uns der drei Transformationen von $\mathfrak{G}$

$(H_1^{(t)})\quad a'_\varkappa = t^\varkappa a_0 + \binom{\varkappa}{1} t^{\varkappa-1} a_1 + \binom{\varkappa}{2} t^{\varkappa-2} a_2 + \dots + a_\varkappa$

$(H_2^{(u)})\quad a'_\varkappa = a_\varkappa + \binom{n-\varkappa}{1} u\, a_{\varkappa+1} + \binom{n-\varkappa}{2} u^2 a_{\varkappa+2} + \dots + u^{n-\varkappa} \cdot a_n$

$(H_3)\quad a'_\varkappa = a_{n-\varkappa},$

die zu den drei Substitutionen

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}, \qquad s_2 = \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad s_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gehören. Insbesondere bewirkt die linksseitige Multiplikation von P mit H_3 eine Umkehrung der Reihenfolge der Zeilen und die rechtsseitige Multiplikation mit H_3 das Analoge für die Kolonnen. Bildet man nun $H_1^{(t)} P$, so tritt an Stelle von p_{n0} der Ausdruck

$$p_{00} t^n + \binom{n}{1} t^{n-1} p_{10} + \dots + \binom{n}{1} t p_{n-1,0} + p_{n0}.$$

Durch geeignete Wahl von t kann dieser Ausdruck gewiß zu Null gemacht werden, wenn nicht

$$p_{00} = p_{10} = \dots = p_{n-1,0}$$

ist. In diesem Fall steht aber in $H_3 P$ in der ersten Kolonne an letzter Stelle eine Null.

Wir können also von vornherein annehmen, daß p_{n0} bereits Null ist. Es darf dann vorausgesetzt werden, daß nicht gleichzeitig auch in der ersten Zeile von P

$$(6)\qquad p_{00} = p_{01} = \dots = p_{0,n-1} = 0$$

ist. Denn ist dies der Fall, so ersetze man P durch $H_3 P = (r_{\varkappa\lambda})$. In dieser Matrix ist nämlich noch $r_{n0} = p_{00} = 0$, aber nicht zugleich

$$r_{00} = r_{01} = \dots = r_{0,n-1} = 0.$$

Denn dies würde nur bedeuten, daß in P auch

$$p_{n0} = p_{n1} = \dots = p_{n,n-1} = 0$$

wäre, was zusammen mit (6) das Verschwinden der Determinante von P nach sich ziehen würde.

Bildet man nun $P H_2^{(u)} = (q_{\varkappa\lambda})$, so wird von selbst $q_{n0} = p_{n0} = 0$ und außerdem

$$q_{0n} = p_{00} u^n + p_{01} u^{n-1} + \dots + p_{0n}.$$

Dieser Ausdruck hängt noch jedenfalls von u ab und kann wieder durch passende Wahl von u zum Verschwinden gebracht werden.

Wir nehmen daher an, daß in $P = (p_{\varkappa\lambda})$ von vornherein

$$p_{n0} = p_{0n} = 0$$

ist, und werden zunächst zeigen, daß dann P von selbst eine Diagonalmatrix werden muß.

2. Setzen wir in der Formel (5)

$$\varrho_\nu C_1 + \sigma_\nu C_2 + \tau_\nu C_3 = C'_\nu$$

und bilden die Matrix $C'_\nu P = (v^{(\nu)}_{\varkappa\lambda})$, so wird, wie man leicht erkennt,

$$v^{(\nu)}_{\varkappa\lambda} = \varrho_\nu \varkappa p_{\varkappa-1,\lambda} + \sigma_\nu (n-\varkappa) p_{\varkappa+1,\lambda} + \tau_\nu (n - 2\varkappa) p_{\varkappa\lambda}. \tag{7}$$

Hierbei ist $p_{\alpha\beta} = 0$ zu setzen, wenn einer der Indizes negativ oder größer als n wird. Da nun $p_{n0} = 0$ sein soll und nicht alle Elemente $p_{\alpha 0}$ der ersten Kolonne von P verschwinden können, so gibt es einen Index m $(0 \leqq m < n)$ von der Art, daß p_{m0} als das letzte nicht verschwindende unter den Elementen $p_{\alpha 0}$ erscheint. Die Gleichung $PC_3 = C'_3 P$ liefert nun insbesondere für die Indizes $\varkappa = m+1$, $\lambda = 0$

$$n p_{m+1,0} = \varrho_3 (m+1) p_{m0}, \tag{8}$$

weil die beiden anderen in (7) vorkommenden Glieder in unserem Fall von selbst fortfallen. Aus (8) folgt wegen $p_{m+1,0} = 0$, $p_{m0} \neq 0$, daß $\varrho_3 = 0$ sein muß. Ebenso ergibt sich aus $PC_3 = C'_3 P$ durch Betrachtung der letzten Kolonne, daß auch σ_3 verschwinden muß.

3. Die Gleichung (5) hat also für $\nu = 3$ die einfache Form

$$PC_3 = \tau_3 C_3 P,$$

und dies liefert

$$(n - 2\lambda) p_{\varkappa\lambda} = \tau_3 (n - 2\varkappa) p_{\varkappa\lambda}. \tag{9}$$

Ist nun $p_{0\beta} \neq 0$, so wird wegen $p_{0n} = 0$ jedenfalls $\beta < n$ und

$$n - 2\beta = \tau_3 n. \tag{10}$$

Für $p_{\alpha 0} \neq 0$ wird ebenso wegen $p_{n0} = 0$ auch $\alpha < n$ und

$$n = \tau_3 (n - 2\alpha).$$

Diese beiden Gleichungen liefern aber

$$n^2 = (n - 2\alpha)(n - 2\beta),$$

was nur für $\alpha = \beta = 0$ möglich ist. Zugleich ergibt sich aus (10) $\tau_3 = 1$. Aus (9) folgt nun unmittelbar, daß für $\varkappa \neq \lambda$ das Element $p_{\varkappa\lambda}$ gleich 0 sein muß. Die Matrix P ist also in der Tat eine Diagonalmatrix.

4. Für eine solche Matrix P enthält nun $C'_1 = P C_1 P^{-1}$ nur in der ersten Nebendiagonale unterhalb der Hauptdiagonale von Null verschiedene Elemente. Daher muß $C'_1 = \varrho_1 C_1$ werden, und vergleichen wir nun in der Gleichung $PC_1 = \varrho_1 C_1 P$ links und rechts die Elemente, so erhalten wir insbesondere $p_{\varkappa\varkappa} = \varrho_1 p_{\varkappa-1,\varkappa-1}$, also

$$p_{\varkappa\varkappa} = \varrho_1^{\varkappa} p_{00}.$$

Eine Diagonalmatrix P, deren Elemente $p_{\varkappa\varkappa}$ diese Form haben, läßt sich aber, wenn α eine Lösung der Gleichung $\alpha^n = p_{00}$ bedeutet, als die durch die Substitution

$$s = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \varrho_1 \end{pmatrix}$$

induzierte Transformation $T(s)$ auffassen.

§ 3.

Beweis des Kowalewskischen Hilfssatzes.

Auch den Beweis dieses Satzes, den wir als Satz III bezeichnet haben, wollen wir in einer Reihe von einzelnen Schritten führen.

1. Eine Invariante F der binären Form $f(x, y)$ ist jedenfalls eine isobare Form der Variablen a_ν. Ist ihr Gewicht gleich p, so wird $a_\lambda F_\varkappa$ isobar vom Gewichte $p + \lambda - \varkappa$. Genügt daher F einer Differentialgleichung der Form (1), so müssen in $C = \sum c_{\lambda\varkappa} a_\lambda F_\varkappa$ die Teilsummen der Glieder von gleichem Gewicht, d. h. derjenigen mit konstanter Differenz $\varkappa - \lambda$ einzeln verschwinden. Wir können uns daher auf die Betrachtung von Gleichungen der Form

$$x_\varkappa a_0 F_\varkappa + x_{\varkappa+1} a_1 F_{\varkappa+1} + \cdots + x_n a_{n-\varkappa} F_n = 0,$$
$$x_0 a_\varkappa F_0 + x_1 a_{\varkappa+1} F_1 + \cdots + x_{n-\varkappa} a_n F_{n-\varkappa} = 0$$

beschränken. Die linksstehenden Ausdrücke bezeichnen wir mit

$$D_\varkappa(x_\nu) = D_\varkappa(x_0, x_1, \ldots, x_n) \quad \text{und} \quad D_{-\varkappa}(x_\nu) = D_{-\varkappa}(x_0, x_1, \ldots, x_n),$$

wobei im ersten Fall $x_0, x_1, \ldots, x_{\varkappa-1}$ und im zweiten Fall $x_{n-\varkappa+1}, \ldots, x_n$ gleich Null zu setzen sind.

Daß F bei der Transformation $a'_\varkappa = a_{n-\varkappa}$ ungeändert bleibt, hat zur Folge, daß, wenn F der Differentialgleichung $D_\lambda(x_\nu) = 0$ genügt, auch der Ausdruck

$$D_\lambda^*(x_\nu) = D_{-\lambda}(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0) \qquad (\lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

verschwinden muß.

Jedenfalls genügt F, als Invariante von $f(x, y)$, den drei Differentialgleichungen (4) des vorigen Paragraphen. Die früher mit C_1, C_2, C_3 bezeichneten Ausdrücke nennen wir jetzt A, B und C. In den neuen Bezeichnungen wird

$$A = D_1(\nu), \qquad B = A^* = D_{-1}(n - \nu), \qquad C = D_0(n - 2\nu).$$

Um deutlicher zu machen, daß in $A = D_1(\nu)$ die Werte $\nu < 0$ und $\nu > n$ nicht zulässig sind, empfiehlt es sich,

$$A = D_1(k_\nu) \qquad (k_0 = 0,\ k_1 = 1, \ldots,\ k_n = n)$$

zu setzen, mit der Festsetzung, daß für $\nu < 0$ und $\nu > n$ k_ν gleich Null sein soll.

2. Genügt eine Form $F = F(a)$ den beiden Differentialgleichungen

$$R = \sum_{\varkappa,\lambda}{}_0^n r_{\varkappa\lambda} a_\lambda F_\varkappa = 0, \qquad S = \sum_{\varkappa,\lambda}{}_0^n s_{\varkappa\lambda} a_\lambda F_\varkappa = 0,$$

so verschwindet bekanntlich auch der „Klammerausdruck“

$$(R, S) = \sum_{\varkappa,\lambda}{}_0^n a_\lambda F_\varkappa \left[\sum_{\nu=0}^{n} (r_{\varkappa\nu} s_{\nu\lambda} - s_{\varkappa\nu} r_{\nu\lambda})\right].$$

Speziell wird für $\varkappa, \lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, wie eine einfache Rechnung lehrt,

$$(11) \qquad (D_\varkappa(x_\nu), D_\lambda(y_\nu)) = D_{\varkappa+\lambda}(x_\nu y_{\nu-\varkappa} - y_\nu x_{\nu-\lambda}),$$

wobei alle x_α, y_α für $\alpha < 0$ und $\alpha > n$ durch Nullen zu ersetzen sind.

3. Es sei nun $\mu \leqq n$ der größte positive Index, für den die zu betrachtende Invariante F einer Differentialgleichung $M = D_\mu(x_\nu) = 0$ mit nicht lauter verschwindenden Koeffizienten x_ν genügt[6]). Da jedenfalls $A = D_1(k_\nu) = 0$ ist, so ist $\mu \geqq 1$, und wir werden, wie sich bald zeigen wird, nur zu zeigen haben, daß abgesehen vom Ausnahmefall $F = J^r$ der Index μ den Wert 1 haben muß.

Zunächst schließen wir die Fälle $\mu = n - 1$ und $\mu = n$ aus.

Auf Grund der Formel (11) wird auch

$$(A, M) = D_{\mu+1}(k_\nu x_{\nu-1} - x_\nu k_{\nu-\mu}) = 0.$$

Dies liefert $k_\nu x_{\nu-1} = x_\nu k_{\nu-\mu}$ oder genauer

$$(\mu + 1)x_\mu = x_{\mu+1}, \ (\mu + 2)x_{\mu+1} = 2x_{\mu+2}, \ldots, n x_{n-1} = (n - \mu)x_n.$$

Wir erhalten also $x_\nu = \binom{\nu}{\mu} x_\mu$. Wählt man $x_\mu = 1$, so kann

$$M = D_\mu(l_\nu) \qquad \left(l_\nu = \binom{\nu}{\mu} \quad \text{für} \quad \nu = 0, 1, \ldots, n\right)$$

gesetzt werden. Ist insbesondere $\mu = 1$, so wird $M = A$. Zugleich ergibt sich, daß auch keine Differentialgleichung $D_{-\varkappa}(y_\nu) = 0$ für $\varkappa > \mu$ bestehen kann, weil sonst auch $D_\varkappa(y_{n-\nu}) = 0$ wäre. Für $\varkappa = \mu$ hat man ferner, wenn von einem konstanten Faktor abgesehen wird, nur die eine Gleichung $D_{-\mu}(l_{n-\nu}) = 0$.

4. Sei $R = D_0(z_\nu) = 0$ eine Differentialgleichung für F. Dann wird auch

$$(R, M) = D_\mu(z_\nu l_\nu - l_\nu z_{\nu-\mu}) = 0.$$

[6]) Mit diesem größten Index μ operiert auch Herr Kowalewski, l. c.[4]).

Hieraus folgt, da dieser Ausdruck sich von M nur durch einen konstanten Faktor d unterscheiden darf,

(12) $$z_\mu - z_0 = z_{\mu+1} - z_1 = \ldots = z_n - z_{n-\mu} = d.$$

Für $\mu = 1$ erhält man insbesondere

$$z_1 - z_0 = z_2 - z_1 = \ldots = z_n - z_{n-1} = d,$$

also $z_\nu = z_0 + d\nu$. Ist nun früher $C = D_0(n - 2\nu)$, so wird

$$R = \sum_{\nu=0}^{n} z_\nu a_\nu F_\nu = \left(z_0 + \frac{dn}{2}\right) \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu F_\nu - \frac{d}{2} C.$$

Da nun $C = 0$ und $\sum a_\nu F_\nu = mF$ ist, falls m den Grad der homogenen Funktion F bedeutet, so muß $z_0 + \frac{dn}{2} = 0$ sein, d. h. R ist von der Form konst. C. Es gibt also für $\mu = 1$, wie zu beweisen ist, im wesentlichen nur die drei Differentialgleichungen $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$. Im folgenden können wir daher $\mu > 1$ annehmen.

5. Neben $M = D_\mu(l_\nu) = 0$ genügt F noch der Differentialgleichung

$$M^* = N = D_{-\mu}(l_{n-\nu}) = 0,$$

also auch der Gleichung

$$(M, N) = D_0(u_\nu) = 0.$$

Hierbei ist

$$u_\nu = l_\nu l_{n-\nu+\mu} - l_{n-\nu} l_{\nu+\mu}$$

zu setzen. Es muß also wegen (12)

(13) $$u_\mu - u_0 = u_{\mu+1} - u_1 = \ldots = u_n - u_{n-\mu}$$

sein.

Ist nun

$$n - q\mu = r \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots, \mu - 1)$$

und bedeutet ϱ eine der Zahlen $0, 1, \ldots, r$, so betrachten wir die Ausdrücke

(14) $$u_{\varkappa\mu+\varrho} = l_{\varkappa\mu+\varrho} l_{n-(\varkappa-1)\mu-\varrho} - l_{(\varkappa+1)\mu+\varrho} l_{n-\varkappa\mu-\varrho} \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots, q).$$

Bezeichnet man den gemeinsamen Wert der Differenzen (13) mit w, so folgt aus

$$u_{\mu+\varrho} - u_\varrho = u_{2\mu+\varrho} - u_{\mu+\varrho} = \ldots = u_{q\mu+\varrho} - u_{(q-1)\mu+\varrho} = w$$

offenbar

(15) $$u_{\varkappa\mu+\varrho} = u_\varrho + \varkappa w.$$

Andererseits liefert aber (14) wegen $n + \mu - \varrho > n$, $(q+1)\mu + \varrho > n$

$$\sum_{\varkappa=0}^{q} u_{\varkappa\mu+\varrho} = l_\varrho l_{n+\mu-\varrho} - l_{(q+1)\mu+\varrho} l_{n-q\mu-\varrho} = 0.$$

Aus (15) folgt daher

(16) $$0=(q+1)u_\varrho+\frac{q(q+1)}{2}w, \quad \text{d. h.} \quad 2u_\varrho=-qw.$$

Für $r>0$ ergibt sich insbesondere $u_0=u_1$, was wegen

(17) $$u_0=-l_n l_\mu, \qquad u_1=-l_{n-1}l_{\mu+1}$$

die Gleichung $\binom{n}{\mu}=(\mu+1)\binom{n-1}{\mu}$ oder, was dasselbe ist, $n=(n-\mu)(\mu+1)$ liefert. Dies führt nur auf den zunächst ausgeschlossenen Fall $\mu=n-1$.

Wir können also annehmen, daß $r=0$, also $n=q\mu$ ist. Für $\varrho=0$ folgt nun aus (15) und (16)

$$q u_{\varkappa\mu}=(q-2\varkappa)u_0.$$

Für $\varkappa=q-1$ ergibt sich insbesondere, indem man die l_α einführt,

$$2(q-1)l_\mu l_{q\mu}=q\,l_{2\mu}l_{(q-1)\mu}$$

oder, was dasselbe ist,

$$2(q-1)\binom{q\mu}{\mu}=q\binom{2\mu}{\mu}\binom{(q-1)\mu}{\mu}.$$

Eine einfache Umformung liefert

$$2(q-1)\frac{(q-1)\mu+1}{(q-2)\mu+1}\cdot\frac{(q-1)\mu+2}{(q-2)\mu+2}\cdots\frac{q\mu}{(q-1)\mu}=q\cdot\frac{\mu+1}{1}\cdot\frac{\mu+2}{2}\cdots\frac{2\mu}{\mu}.$$

Für $q>2$ werden nun die Brüche auf der linken Seite kleiner als die entsprechenden Brüche auf der rechten Seite. Da nun $\mu>1$ ist, so würde folgen

$$2(q-1)\cdot\frac{q\mu}{(q-1)\mu}>q\cdot\frac{2\mu}{\mu},$$

was nicht möglich ist.

Der allein noch zu behandelnde Fall $q=2$, $n=2\mu$ erledigt sich, indem man die Gleichung

$$u_\mu-u_0=u_{\mu+1}-u_1$$

betrachtet. Wegen (17) und

$$u_\mu=l_\mu l_n-l_{n-\mu}l_{2\mu}=0, \quad u_{\mu+1}=l_{\mu+1}l_{n-1}-l_{n-\mu-1}l_{2\mu+1}=l_{\mu+1}l_{2\mu-1}$$

liefert sie $l_\mu l_{2\mu}=2\,l_{\mu+1}l_{2\mu-1}$ oder

$$\binom{2\mu}{\mu}=2(\mu+1)\binom{2\mu-1}{\mu},$$

d. h. $2=2(\mu+1)$, was wieder nicht möglich ist.

6. Es bleiben also nur noch die Fälle $\mu=n-1>1$ und $\mu=n$ zu behandeln.

Ist zunächst $\mu=n$, so wird

$$M=a_0F_n, \qquad M^*=a_nF_0.$$

Wir bilden nun mit Hilfe der Formel (11) Schritt für Schritt die Klammerausdrücke [7])

$$K_1 = (A, M^*), \quad K_2 = \left(A, \tfrac{1}{2} K_1\right), \quad K_3 = \left(A, \tfrac{1}{3} K_2\right), \ldots .$$

Eine einfache Rechnung liefert in den früheren Bezeichnungen

$$(-1)^\nu K_\nu = D_{\nu-n}\left(\binom{n}{\nu}, -\binom{n}{\nu-1}, \binom{n}{\nu-2}, \ldots, \pm 1, 0, \ldots, 0\right).$$

Da nun alle diese Ausdrücke für unsere Invariante F verschwinden müssen, so ergibt sich für $\nu = 0, 1, \ldots, n$

$$\binom{n}{\nu} a_{n-\nu} F_0 - \binom{n}{\nu-1} a_{n-\nu+1} F_1 + \ldots + (-1)^\nu a_n F_\nu = 0.$$

Dies liefert aber

$$F_0 = F_1 = \ldots = F_n = 0, \quad \text{d. h.} \quad F = \text{konst.}$$

7. Für $\mu = n - 1$ wird

$$M = a_0 F_{n-1} + n a_1 F_n, \qquad M^* = n a_{n-1} F_0 + a_n F_1.$$

Bildet man wieder die iterierten Ausdrücke K_ν, so wird hier, wie man ebenfalls ohne Mühe erkennt,

$$(-1)^{\nu-1} K_{\nu-1} = D_{\nu-n}\left(\binom{n}{\nu}\nu, -\binom{n}{\nu-1}(\nu-2), \binom{n}{\nu-2}(\nu-4), \ldots\right).$$

Das liefert für F die Differentialgleichungen

$$(18) \qquad \left\{ \begin{array}{l} n a_{n-1} F_0 + a_n F_1 = 0 \\ 2\binom{n}{2} a_{n-2} F_0 - 2 a_n F_2 = 0 \\ 3\binom{n}{3} a_{n-3} F_0 - \binom{n}{2} a_{n-2} F_1 - \binom{n}{1} a_{n-1} F_2 + 3 a_n F_3 = 0 \text{ usw.} \end{array} \right.$$

Entwickelt man nun F nach fallenden Potenzen von a_0, so sei

$$F = a_0^r G_0 + a^{r-1} G_1 + \ldots + G .$$

Aus den Gleichungen (18) ergibt sich nun hintereinander

$$\frac{\partial G_0}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial G_0}{\partial a_2} = 0, \ldots, \frac{\partial G_0}{\partial a_{n-1}} = 0.$$

Daher ist $G_0 = \gamma a_n^s$, wobei γ eine Konstante bedeutet. Die n-te der Gleichungen (18) liefert aber noch

$$n a_0 F_0 - (n-2)\binom{n}{1} a_1 F_1 + (n-4)\binom{n}{2} a_2 F_2 - \ldots + (-1)^n (n-2n) a_n F_n = 0.$$

[7]) Auch hier lehnt sich unser Beweis an den des Herrn **Kowalewski** an, der mit diesen iterierten Klammerausdrücken mehrfach operiert. Wir machen von ihnen aber im Gegensatz zu Herrn **Kowalewski** nur in den für die Rechnung besonders einfachen Ausnahmefällen $\mu = n$ und $\mu = n - 1$ Gebrauch.

Vergleicht man hier wieder links und rechts die Koeffizienten von a_0^r, so erhält man

$$n r G_0 + n(-1)^{n-1} a_n \frac{\partial G_0}{\partial a_n} = 0,$$

also $r + (-1)^{n-1} s = 0$. Folglich muß n eine gerade Zahl und $r = s$ sein. Setzt man $n = 2\nu$ und (wie früher)

$$J = a_0 a_n - \binom{n}{1} a_1 a_{n-1} + \ldots \pm \frac{1}{2}\binom{n}{\nu} a_\nu^2,$$

so genügt J und folglich auch jede Potenz von J der Differentialgleichung

$$a_0 \frac{\partial z}{\partial a_{n-1}} + n a_1 \frac{\partial z}{\partial a_n} = 0,$$

die auch für unsere Invariante F besteht. Dasselbe gilt daher für

$$F^{(1)} = F - \gamma J^r,$$

und es würde sich wieder ergeben, daß, wenn $F^{(1)}$ nicht Null ist, dieser Ausdruck ein Glied der Form $\gamma' a_0^{r'} a_n^{r'}$ enthalten müßte. Hierbei wäre aber $r' < r$, was der Tatsache widerspricht, daß $F^{(1)}$ eine homogene Funktion von demselben Grade wie F sein muß. Es muß also in dem Falle $\mu = n - 1$ unsere Invariante F von der Gestalt γJ^r sein. Damit ist der Satz III in allen Teilen bewiesen.

§ 4.

Eine Folgerung aus dem Satze III.

Schreibt man eine Form F der Variablen a_ν in der Gestalt

$$F = \sum K a_0^{\alpha_0} a_1^{\alpha_1} \ldots a_n^{\alpha_n}$$

und besteht diese Summe aus k verschiedenen Gliedern, so besagt eine Differentialgleichung vom Typus

$$(19) \qquad x_0 a_0 F_0 + x_1 a_1 F_1 + \ldots + x_n a_n F_n = 0,$$

daß für jedes der k Glieder von F die Gleichung

$$(20) \qquad \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$$

erfüllt ist. Dies bedeutet aber, daß die Form F isobar vom Gewichte 0 bei der Gewichtsbestimmung ist, bei der a_0 das Gewicht x_0, a_1 das Gewicht x_1 usw. hat. Die Tatsache, daß es, von einem konstanten Faktor abgesehen, nur eine Differentialgleichung von der Form (19) gibt, der F genügt (vom Ausnahmefall abgesehen), besagt also, daß es im wesentlichen nur eine Gewichtsbestimmung gibt, bei der F isobar vom Gewichte 0 ist. Nun gibt es aber für jede Invariante F bekanntlich zwei wesentlich verschiedene Gewichtsbestimmungen, bei denen sie isobar ist. Gäbe es noch eine dritte Gewichtsbestimmung, die von den beiden bekannten unabhängig wäre, und in bezug auf die F isobar wäre, so ließen sich aus den drei Gewichtsbestimmungen zwei solche herleiten, in bezug auf die F isobar vom Gewichte 0 wäre. Da dies aber (vom Ausnahmefall abgesehen) unmöglich ist, erhalten wir das Resultat:

IV. *Jede Gewichtsbestimmung für die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ der binären Form n-ten Grades $f(x, y)$, bei der eine Invariante F dieser Form, die nicht die Gestalt γJ^r hat, isobar ist, läßt sich aus den beiden bekannten Gewichtsbestimmungen:*

(I) $x_0 = 1, x_1 = 1, \ldots, x_n = 1$; (II) $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, \ldots, x_n = n$

linear zusammensetzen.

Für einige Invarianten läßt sich dieser Satz auch durch direkte Untersuchung ihrer Gewichtseigenschaften bestätigen.

Die Anzahl N der linear unabhängigen Differentialgleichungen (19) ist genau gleich der Anzahl der linear unabhängigen Lösungen der k linearen homogenen Gleichungen (20). Weiß man insbesondere, daß $N = 1$ ist, so darf jedenfalls nicht k kleiner als $(n+1) - 1 = n$ sein. Die Bedingung $N = 1$ ist nun nach Satz III für jede Invariante F der Form $f(x, y)$, abgesehen vom Ausnahmefall, gewiß erfüllt.

Hat aber F die Form γJ^r $(r > 1)$, wo

$$J = a_0 a_n - \binom{n}{1} a_1 a_{k-1} + \ldots \pm \frac{1}{2} \binom{n}{\frac{n}{2}} a_{\frac{n}{2}}^2$$

ist, so sind hier die einzelnen Glieder unabhängige Funktionen der a_i, und daher besteht J^ν aus genau so vielen Gliedern, wie

$$(z_0 + z_1 + \ldots + z_{\frac{n}{2}})^\nu,$$

wo z_i beliebige Unbestimmten sind, also für $\nu > 1$ aus mehr als n Gliedern. Daher folgt:

IV'. *Eine (nicht konstante) Invariante F der binären Form n-ten Grades $f(x, y)$, die nicht von der Gestalt γJ ist, enthält mindestens n verschiedene Glieder.*

Dieser einfache Satz scheint in der Literatur nirgends erwähnt zu sein. Die untere Schranke n für die Gliederanzahl ist vermutlich für größere Werte von n noch sehr ungenau.

§ 5.

Über eine spezielle Klasse von Formen.

Es sei

$$\varphi(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

eine gegebene Potenzreihe. Ferner sei

$$g(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

eine Potenzreihe, deren Koeffizienten a_ν im folgenden als voneinander unabhängige Variable angesehen werden sollen. Entwickelt man $\varphi(g)$ nach Potenzen von x, so sei

$$\varphi(g) = \varphi_0 + \varphi_1 x + \varphi_2 x^2 + \dots .$$

Hierin ist φ_n eine wohlbestimmte ganze rationale Funktion der Variablen $a_1, a_2, \dots, a_n$. Führen wir noch eine Hilfsvariable a_0 ein und setzen

$$F = F^{(n)} = a_0^n \varphi_n\left(\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \dots, \frac{a_n}{a_0}\right), \tag{21}$$

so wird F, sofern $\varphi(x)$ sich nicht auf die Konstante c_0 reduziert, eine Form in den Variablen $a_0, a_1, \dots, a_n$ vom Grade n und auch vom Gewichte n. Sie genügt daher der Differentialgleichung

$$C_0 = \sum_{\nu=0}^{n} (1-\nu) a_\nu F_\nu = 0 \qquad \left(F_\nu = \frac{\partial F}{\partial a_\nu}\right).$$

Wir wollen nun zeigen, daß es unter gewissen Voraussetzungen über die Funktion $\varphi(x)$ möglich ist, die Gesamtheit $\mathfrak{F}$ der linearen Transformationen

$$a'_\varkappa = \sum_{\lambda=0}^{n} p_{\varkappa\lambda} a_\lambda, \tag{P}$$

welche die Form F ungeändert lassen, genau zu bestimmen.

Diese Voraussetzungen lauten:

a) *Die Koeffizienten $c_1, c_2, \dots$ sollen sämtlich von 0 verschieden sein.*

b) *Für jedes $n > 2$ sollen für F $n-1$ Differentialgleichungen der Form*

$$C_\nu = \gamma_\nu^{(\nu)} a_0 F_\nu + \gamma_{\nu+1}^{(\nu)} a_1 F_{\nu+1} + \dots + \gamma_n^{(\nu)} a_{n-\nu} F_n = 0 \tag{22}$$
$$(\nu = 1, 2, \dots, n-1)$$

bestehen, wobei die Konstanten $\gamma_\lambda^{(\nu)}$ noch von n abhängen können.

Für welche Funktionen $\varphi(x)$ diese Voraussetzungen gleichzeitig erfüllt sind, soll im nächsten Paragraphen untersucht werden. Zunächst gehen wir daran, unter der Annahme, daß sie gelten, die Gruppe $\mathfrak{F}$ für jedes n zu bestimmen.

1. Aus a) folgt, daß in der Entwicklung von F jedes Potenzprodukt $a_0^{\alpha_1} a_1^{\alpha_2} \ldots a_n^{\alpha_n}$ von der Dimension n und vom Gewichte n mit einem von Null verschiedenen Koeffizienten versehen vorkommt. Insbesondere gilt das für die Potenzprodukte

$$(23) \qquad a_1^n,\ a_1^{n-2} a_2 a_0,\ a_1^{n-3} a_3 a_0^2, \ldots, a_1 a_{n-1} a_0^{n-2},\ a_n a_0^{n-1}.$$

Hieraus folgt zugleich, daß F_ν ein Glied der Form konst. $a_1^{n-\nu} a_0^{\nu-1}$ explizite enthält. Dies hat offenbar zur Folge, daß die Ausdrücke

$$(24) \qquad a_1 F_{\varkappa+1},\quad a_2 F_{\varkappa+2}, \ldots, a_{n-\varkappa} F_n \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots, n-1)$$

und

$$(25) \qquad a_{\lambda+1} F_1,\quad a_{\lambda+2} F_2, \ldots, a_n F_{n-\lambda} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n-1)$$

bei festem $\varkappa$ bzw. festem λ linear unabhängig sind. Insbesondere müssen daher in den Differentialgleichungen (22) die Koeffizienten $\gamma_1^{(1)}, \gamma_2^{(2)}, \ldots, \gamma_{n-1}^{(n-1)}$ von Null verschieden sein.

2. Wir behaupten nun, daß unter den von uns gemachten Voraussetzungen die n Differentialgleichungen

$$C_0 = 0,\quad C_1 = 0, \ldots, C_{n-1} = 0$$

für $n > 2$ in dem früheren Sinne eine Basis der Schar $\mathfrak{D}$ aller für F bestehenden Differentialgleichungen der Form

$$(26) \qquad C = \sum_{\varkappa, \lambda = 0}^{n} c_{\varkappa\lambda} a_\lambda F_\varkappa = 0$$

bilden (vgl. § 1).

Um dies zu erkennen, genügt es (wie in § 3), nur Differentialgleichungen vom Typus

$$D_\varkappa = D_\varkappa(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0 \quad (\varkappa = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots, \pm n)$$

zu betrachten. Die Fälle $\varkappa = \pm n$ sind gewiß auszuschließen, da sie nur auf $F_n = 0$ bzw. $F_0 = 0$ führen würden. Ist ferner $\varkappa$ eine der Zahlen $0, 1, \ldots, n-1$, also

$$D_\varkappa = x_\varkappa a_0 F_\varkappa + x_{\varkappa+1} a_1 F_{\varkappa+1} + \ldots + x_n a_{n-\varkappa} F_n,$$

so muß

$$D_\varkappa = \frac{x_\varkappa}{\gamma_\varkappa^{(\varkappa)}} C_\varkappa$$

werden, da sich sonst eine lineare Beziehung zwischen den Funktionen (24) ergeben würde. Es sei also $\varkappa = -\lambda$ eine der Zahlen $-1, -2, \ldots, -(n-1)$. In

$$D_{-\lambda} = x_0 a_\lambda F_0 + x_1 a_{\lambda+1} F_1 + \ldots + x_{n-\lambda} a_n F_{n-\lambda} = 0,$$

muß dann x_0 wegen der linearen Unabhängigkeit der Funktionen (25) von Null verschieden sein. Man bilde nun durch Anwendung der Klammeroperation die Differentialgleichung

$$\Delta_0^{(\lambda)} = (C_\lambda, D_{-\lambda}) = D_0(u_0, u_1, \ldots, u_n) = 0,$$

wo

$$u_\nu = \gamma_\nu^{(\lambda)} x_{\nu-\lambda} - x_\nu \gamma_{\nu+\lambda}^{(\lambda)}$$

zu setzen ist; hierbei hat man unter $\gamma_\alpha^{(\lambda)}$ für $\alpha < \lambda$ oder $\alpha > n$ der Wert Null zu verstehen. Nach dem schon Bewiesenen müßte sich $\Delta_0^{(\lambda)}$ von C_0 nur um einen konstanten Faktor unterscheiden. In $\Delta_0^{(\lambda)}$ ist aber die Summe aller Koeffizienten gleich Null, in C_0 ist diese Summe aber gleich

$$s = \sum_{\nu=0}^{n} (1-\nu) = (n+1)\left(1 - \frac{n}{2}\right),$$

also für $n > 2$ gewiß von Null verschieden. Daher müßten alle u_ν verschwinden. Dies widerspricht aber wegen $u_0 = -x_0 \gamma_\lambda^{(\lambda)}$ der Annahme, daß $x_0 \neq 0$ sein soll.

3. Bezeichnen wir wie bei früheren Gelegenheiten die zur Differentialgleichung $C_\nu = 0$ gehörende Koeffizientenmatrix ebenfalls mit C_ν, so wird

$$C_0 = ((1-\alpha)\, e_{\alpha\beta}), \quad C_1 = (\gamma_\alpha^{(1)} e_{\alpha,\beta+1}), \quad C_2 = (\gamma_\alpha^{(2)} e_{\alpha,\beta+2}), \ldots,$$

wobei $e_{\alpha\beta}$ gleich 1 oder 0 zu setzen ist, je nachdem $\alpha = \beta$ oder $\alpha \neq \beta$ ist. Die Matrix $P = (p_{\alpha\beta})$ einer Transformation der zu bestimmenden Gruppe $\mathfrak{J}$ hat nun, wie aus dem unter 2. Bewiesenen folgt, die Eigenschaft, daß

$$P C_\nu P^{-1} = C'_\nu \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n-1)$$

eine lineare Verbindung von $C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}$ darstellt, also gewiß eine „Dreiecksmatrix" wird, d. h. eine Matrix, die oberhalb der Hauptdiagonale lauter Nullen enthält. Wir behaupten nun, daß auch P eine solche Dreiecksmatrix sein muß.

Es sei nämlich

$$C'_0 = P C_0 P^{-1} = \varrho_0 C_0 + \varrho_1 C_1 + \ldots + \varrho_{n-1} C_{n-1}. \tag{27}$$

Das ist eine zu C_0 ähnliche Matrix, ihre Spur ist demnach gleich der Spur $s = \Sigma(1-\nu)$ von C_0. Die Spur der rechts stehenden Matrix ist aber gleich $\varrho_0 s$. Aus $s \neq 0$ folgt daher $\varrho_0 = 1$. Man schreibe nun die Gleichung (27) in der Form

$$P C_0 - C_0 P = (\varrho_1 C_1 + \varrho_2 C_2 + \ldots + \varrho_{n-1} C_{n-1}) P \tag{28}$$

und bezeichne das allgemeine Element der rechts stehenden Matrix mit $q_{\alpha\beta}$. Das entsprechende Element links hat, wie man leicht erkennt, den Wert $(\alpha - \beta)\, p_{\alpha\beta}$. Beachtet man nun, daß $\varrho_1 C_1 + \ldots + \varrho_{n-1} C_{n-1}$ eine Dreiecksmatrix ist, die in der Hauptdiagonale lauter Nullen enthält, so ergibt sich zunächst $q_{0\beta} = 0$. Das liefert

$$p_{01} = p_{02} = \dots = p_{0n} = 0.$$

Weiß man nun schon, daß $p_{\alpha\beta}$ für $\alpha < \nu$ und $\beta > \alpha$ gleich Null ist, so wird auch

$$q_{\nu,\nu+1} = q_{\nu,\nu+2} = \dots = q_{\nu,n} = 0.$$

Daher müssen auch die entsprechenden Elemente $p_{\alpha\beta}$ verschwinden. Für $\alpha < \beta$ sind also in der Tat alle $p_{\alpha\beta}$ gleich Null.

4. Um nun die Gleichung (28) weiter zu diskutieren, empfiehlt es sich, in folgender Weise vorzugehen. Man zerlege P_1 nach den Nebendiagonalen Δ_ν, d. h. man schreibe P in der Form

$$P = P_0 + P_1 + \dots + P_n,$$

wobei

$$P_\nu = (p_{\nu\alpha} e_{\alpha,\beta+\nu})$$

in der Nebendiagonale Δ_ν dieselben Elemente wie P, sonst aber lauter Nullen enthält. Zerlegt man nun die in (28) links und rechts auftretenden Matrizen in derselben Weise und beachtet, daß

$$P_\nu C_0 - C_0 P_\nu = \nu P_\nu$$

wird, so zerfällt (28) in die n Gleichungen

$$(29) \qquad \begin{cases} P_1 = \varrho_1 C_1 P_0 \\ 2P_2 = \varrho_1 C_1 P_1 + \varrho_2 C_2 P_0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ nP_n = \varrho_1 C_1 P_{n-1} + \varrho_2 C_2 P_{n-2} + \dots + \varrho_n C_n P_0, \end{cases}$$

wobei aber $C_n = 0$ zu setzen ist.

5. Wir benutzen nun einen Satz, der der Lieschen Theorie entnommen ist, aber auch direkt sehr leicht bewiesen werden kann:

Genügt die Form F der Differentialgleichung (26) *mit der Koeffizientenmatrix C, so bleibt F für jeden Wert des Parameters ξ bei der linearen Transformation*

$$S(\xi) = e^{\xi C} = E + \frac{\xi}{1!} C + \frac{\xi^2}{2!} C^2 + \dots$$

ungeändert[8]).

In unserem Fall liefern insbesondere die Differentialgleichungen $C_\nu = 0$ für $\nu = 1, 2, \dots, n-1$ wohlbestimmte Transformationen $S_\nu(\xi_\nu)$, die fol-

[8]) Vgl. H. F. Baker, On the Exponential Theorem for a Simple Transitive Continuous Group, and the Calculation of the Finite Equations from the Constants of Structure, Proceedings of the London Math. Soc. **34** (1902), S. 91–127.

gende Eigenschaft besitzen: $S_\nu(\xi_\nu)$ läßt die Variablen $a_0, a_1, \ldots, a_{\nu-1}$ ungeändert und führt a_ν in $\gamma_\nu^{(\nu)}\xi_\nu a_0 + a_\nu$ über. Bildet man nun

$$S_1(\xi_1)P = P^{(1)}, \quad S_2(\xi_2)P^{(1)} = P^{(2)}, \ldots, S_{n-1}(\xi_{n-1})P^{(n-2)} = P^{(n-1)},$$

so kann man Schritt für Schritt $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ so wählen, daß in $P^{(n-1)} = (r_{\alpha\beta})$ die Elemente $r_{10}, r_{20}, \ldots, r_{n-1,0}$ gleich Null werden. Nehmen wir von vornherein an, P selbst habe schon diese Eigenschaft, so enthält insbesondere für $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$ die Matrix P_ν in der ersten Kolonne lauter Nullen. Beachtet man nun, daß in der ersten Kolonne von $C_\nu P_0$ das nicht verschwindende Element $\gamma_\nu^{(\nu)} p_{00}$ auftritt, so erhält man aus den $n-1$ ersten der Gleichungen (29) hintereinander

$$\varrho_1 = 0, \quad \varrho_2 = 0, \quad \ldots, \quad \varrho_{n-1} = 0.$$

Dann wird aber zugleich

$$P_1 = 0, \quad P_2 = 0, \quad \ldots, \quad P_{n-1} = 0, \quad P_n = 0.$$

Die Matrix P wird also eine Diagonalmatrix.

6. Als isobare Form läßt F jedenfalls die Transformationen

$$(A(\varrho)) \qquad a'_\varkappa = \varrho\, a_\varkappa$$

$$(B(\sigma)) \qquad a'_\varkappa = \sigma^\varkappa a_\varkappa$$

zu. Setzt man nun

$$P = A(p_{00})\, B\left(\frac{p_{11}}{p_{00}}\right) Q,$$

so erhält die Transformation Q der zu F gehörenden Gruppe $\mathfrak{F}$ die Gestalt

$$a'_\varkappa = \tau_\varkappa a_\varkappa,$$

wobei insbesondere $\tau_0 = \tau_1 = 1$ wird. Da aber unsere Form F die Potenzprodukte (23) explizite enthält, so kann sie bei der Transformation Q nur dann ungeändert bleiben, wenn alle $\tau_\varkappa$ gleich 1 werden.

Unsere Diskussion hat nun folgendes Resultat ergeben:

V. *Sind für die Potenzreihe $\varphi(x)$ die Voraussetzungen* a) *und* b) *erfüllt, so ist für jedes $n > 2$ die Gruppe $\mathfrak{F}$ der linearen Transformationen, welche die durch die Gleichung* (21) *bestimmte Form F ungeändert lassen, identisch mit der $(n+1)$-gliedrigen kontinuierlichen Gruppe, die durch die Transformationen*

$$A(\varrho), \quad B(\sigma), \quad S_1(\xi_1), \quad S_2(\xi_2), \quad \ldots, \quad S_{n-1}(\xi_{n-1})$$

erzeugt wird.

Zu beachten ist hierbei, daß man zur Erzeugung der Gruppe $\mathfrak{F}$ nicht notwendig die Transformationen S_ν zu berechnen braucht. Es genügt, an Stelle der S_ν irgendwelche $n-1$ Transformationen T_ν der Gruppe $\mathfrak{F}$ zu kennen, die folgende Eigenschaften haben: Die Koeffizienten von T_ν sind ganze rationale Funktionen des Parameters ξ_ν, und ferner läßt T_ν die Variablen $a_0, a_1, \ldots, a_{\nu-1}$ ungeändert, während a_ν in $\alpha_\nu \xi_\nu a_0 + a_\nu$ übergeführt wird. Hierbei sollen die Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\nu-1}$ von Null verschieden sein.

§ 6.

Fortsetzung der Diskussion.

Wir gehen nun dazu über, die Gesamtheit der Potenzreihen $\varphi(x)$, auf die unsere bisherigen Betrachtungen anwendbar sind, genauer zu bestimmen.

VI. *Die einzigen Potenzreihen* $\varphi(x)$, *für welche die Voraussetzungen* a) *und* b) *des vorigen Paragraphen erfüllt sind, werden erhalten, indem man*

(30) $$\varphi(x) = a + bx + c\Phi(dx)$$

setzt, wobei $\Phi(x)$ *eine der Funktionen*

(31) $$e^x, \quad (1+x)^\mu, \quad \log(1+x), \quad (1+x)\log(1+x)$$

bedeutet. Die Konstanten a, b, c, d *unterliegen hierbei nur den Bedingungen*

$$c \neq 0, \quad d \neq 0, \quad b + cd\Phi'(0) \neq 0.$$

Für $\Phi(x) = (1+x)^\mu$ *ist außerdem noch zu verlangen, daß* μ *keine der Zahlen* $0, 1, 2, \ldots$ *sein soll.*

In den früheren Bezeichnungen wird nämlich

(32) $$\varphi(g) = \sum_{n=0}^{\infty} a_0^{-n} F^{(n)}(a_0, a_0 a_1, \ldots, a_0 a_n) x^n.$$

Setzt man nun

(33) $$\varphi'(g) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda c_\lambda g^{\lambda-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) x^n \qquad (\psi_0 = c_1),$$

so folgt für $\nu > 0$ aus (32) durch Differentiation nach a_ν

$$x^\nu \varphi'(g) = \sum_{n=0}^{\infty} a_0^{-n+1} F_\nu^{(n)}(a_0, a_0 a_1, \ldots, a_0 a_n) x^n.$$

Das liefert, wenn wieder n festgehalten und $F^{(n)} = F$ gesetzt wird,

$$F_\nu(a_0, a_1, \ldots, a_n) = a_0^{n-1} \psi_{n-\nu}\left(\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \ldots, \frac{a_n}{a_0}\right).$$

Verlangen wir nun für jedes $n > 1$, daß $n-1$ Differentialgleichungen der Form (22) für F bestehen sollen, so ist das gleichbedeutend mit der

Forderung, daß die Funktionen ψ_n für jedes $m \geqq 1$ einer in den Variablen $a_1, a_2, \ldots$ identischen Gleichung von der Gestalt

$$(34) \qquad k_0 \psi_m + k_1 a_1 \psi_{m-1} + k_2 a_2 \psi_{m-2} + \ldots + k_m a_m \psi_0 = 0 \qquad (k_0 \neq 0)$$

genügen sollen, wobei die k_ν noch von m abhängen können.

Für $n \geqq 4$ enthält nun ψ_n insbesondere die Glieder

$$(n+1)\, c_{n+1} a_1^n, \qquad 2\binom{n}{2} c_n a_1^{n-2} a_2, \qquad 3\binom{n-1}{3} c_{n-1} a_1^{n-4} a_2^2.$$

Vergleicht man nun in (34) links und rechts die Koeffizienten von a_1^m, $a_1^{m-2} a_2$ und $a_1^{m-4} a_2^2$, so ergibt sich für $m \geqq 4$

$$(m+1)\, k_0 c_{m+1} + m\, k_1 c_m = 0\,,$$
$$2\binom{m}{2} k_0 c_m + 2\binom{m-1}{2} k_1 c_{m-1} + (m-1)\, k_2 c_{m-1} = 0\,,$$
$$3\binom{m-1}{3} k_0 c_{m-1} + 3\binom{m-2}{3} k_1 c_{m-2} + 2\binom{m-2}{2} k_2 c_{m-2} = 0\,.$$

Daher muß die Determinante

$$\begin{vmatrix} (m+1)\, c_{m+1}\,, & m\, c_m\,, & 0 \\ 2\binom{m}{2} c_m\,, & 2\binom{m-1}{2} c_{m-1}\,, & (m-1)\, c_{m-1} \\ 3\binom{m-1}{3} c_{m-1}\,, & 3\binom{m-2}{3} c_{m-2}\,, & 2\binom{m-2}{2} c_{m-2} \end{vmatrix}$$

gleich Null sein. Setzt man nun

$$c_n = \frac{\gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_n}{n!} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

so liefert dies nach einer einfachen Umformung die Rekursionsformel

$$\gamma_{m+1} = 2\gamma_m - \gamma_{m-1} \qquad (m \geqq 4).$$

Hieraus folgt aber, wenn unter α, β, γ, δ die Zahlen

$$\alpha = \gamma_1\,, \qquad \beta = \gamma_2\,, \qquad \gamma = \gamma_3\,, \qquad \delta = \gamma_3 - \gamma_4$$

verstanden werden, für $n \geqq 3$

$$\gamma_n = \gamma - (n-3)\,\delta\,,$$

also

$$\varphi(x) = c_0 + \frac{\alpha x}{1!} + \frac{\alpha\beta}{2!} x^2 + \alpha\beta \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\gamma(\gamma-\delta)(\gamma-2\delta)\ldots(\gamma-(n-3)\delta)}{n!} x^n$$

Ist nun $\delta = 0$, so wird

$$\varphi(x) = c_0 - \frac{\alpha\beta}{\gamma^2} + \alpha\left(1 - \frac{\beta}{\gamma}\right) x + \frac{\alpha\beta}{\gamma^2} e^{\gamma x}.$$

Für $\delta \neq 0$ wird aber

$$\varphi''(x) = \alpha\beta(1+\delta x)^{\frac{\gamma}{\delta}}.$$

Entsprechend den drei zu berücksichtigenden Fällen

$$(\gamma+2\delta)(\gamma+\delta) \neq 0, \qquad \gamma+2\delta = 0, \qquad \gamma+\delta = 0$$

erhält man hieraus durch zweimalige Integration für $\varphi(x)$ die drei übrigen im Satz VI angegebenen Formen.

Wir haben nun umgekehrt zu zeigen, daß für jede Funktion $\varphi(x)$ von der Form (30) die zugehörigen Funktionen ψ_n der Variablen $a_1, a_2, \ldots$ Relationen von der Gestalt (34) genügen. Hierbei ist folgendes zu beachten. Geht man von $\varphi(x)$ zu einer Funktion

$$\varphi_1(x) = a + bx + c\varphi(dx)$$

über und setzt entsprechend der Gleichung (33)

$$\varphi_1'(g) = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n(a_1, a_2, \ldots, a_n)x^n,$$

so wird

$$\chi_0 = b + cdc_1, \qquad \chi_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = cd \cdot \psi_n(da_1, da_2, \ldots, da_n).$$

Genügen daher für ein gegebenes m die Ausdrücke ψ_n der Relation (34), so wird

$$k_0\chi_m + dk_1 a_1 \chi_{m-1} + \cdots + dk_{m-1}a_{m-1}\chi_1 + \frac{dk_m a_m c_1}{b+cdc_1}\chi_0 = 0.$$

Wir brauchen demnach die Betrachtung nur für die vier Funktionen (31) durchzuführen. In diesen vier Fällen macht aber die Aufstellung der Relationen (34) keine Mühe. Man erhält für $\varphi(x) = e^x$

$$m\psi_m - a_1\psi_{m-1} - 2a_2\psi_{m-2} - \cdots - ma_m\psi_0 = 0,$$

für $\varphi(x) = (1+x)^\mu$

$$m\psi_m + (m-\mu)a_1\psi_{m-1} + \cdots + (m-m\mu)a_m\psi_0 = 0,$$

für $\varphi(x) = \log(1+x)$

$$\psi_m + a_1\psi_{m-1} + \cdots + a_m\psi_0 = 0$$

und endlich für $\varphi(x) = (1+x)\log(1+x)$

$$m\psi_m + (m-1)a_1\psi_{m-1} + (m-2)a_2\psi_{m-2} + \cdots + a_{m-1}\psi_1 - ma_m\psi_0 = 0.$$

Hieraus ergeben sich auch ohne weiteres in jedem der vier zu betrachtenden Fälle die $n-1$ Differentialgleichungen (22), denen bei gegebenem n die zugehörige Form $F = F^{(n)}$ der Variablen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ genügt. Wir beherrschen demnach auch die Gruppe $\mathfrak{J}$ der linearen Transformationen, die F ungeändert lassen, in jedem der vier Fälle.

Der Vollständigkeit wegen wollen wir auch die analytische Bedeutung der sich so ergebenden Gruppen $\mathfrak{J}$ genauer zu kennzeichnen versuchen. Hierzu beweisen wir folgenden

Hilfssatz. *Es sei*

$$P(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots$$

eine beliebige Potenzreihe. Bei gegebenem $n > 1$ *setze man, wenn* ν *eine der Zahlen* $1, 2, \dots, n-1$ *und* ϱ *eine beliebige Konstante bedeutet.*

$$Q(x) = (1 + \varrho x^\nu)^{\frac{n-\nu}{\nu}} P\left(\frac{x}{(1+\varrho x^\nu)^{\frac{1}{\nu}}}\right).$$

Entwickelt man dann $Q(x)$ *nach Potenzen von* x, *so wird der Koeffizient* B_n *von* x^n *wieder gleich* A_n.

Um nämlich B_n zu berechnen, hat man in

$$Q(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} A_\lambda x^\lambda (1 + \varrho x^\nu)^{\frac{n-\nu-\lambda}{\nu}}$$

für $\lambda = 1, 2, \dots, n$ jeden Summanden nach Potenzen von x zu entwickeln. Hierbei liefert das λ-te Glied nur solche Potenzen x^m, für die $m \equiv \lambda \pmod{\nu}$ wird. Ist demnach

$$n = q\nu + \mu \qquad (0 < \mu \leqq \nu),$$

so haben wir nur die Teilsumme

$$Q_1(x) = \sum_{k=0}^{q} A_{k\nu+\mu} x^{k\nu+\mu} (1 + \varrho x^\nu)^{\frac{q\nu-\nu-k\nu}{\nu}}$$

zu berücksichtigen. Für $k < q$ ist aber hierin der k-te Summand ein Polynom des Grades $(q-1)\nu + \mu < n$. Die Potenz x^n tritt demnach nur im letzten Summanden, und zwar mit dem Koeffizienten $A_{q\nu+\mu} = A_n$ auf.

Im folgenden setze man zur Abkürzung

$$x^* = \frac{x}{(1+\varrho x^\nu)^{\frac{1}{\nu}}}.$$

Ist nun zunächst

$$\varphi(g) = e^g = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(a_1, \dots, a_n) x^n,$$

so bleibt nach unserem Hilfssatz φ_n für jedes n ungeändert, wenn für $\nu = 1, 2, \dots, n-1$ und beliebiges ϱ an Stelle von $g(x)$ die Funktion

$$g^{(1)}(x) = g(x^*) + \frac{n-\nu}{\nu} \log(1 + \varrho x^\nu)$$

tritt.

Dasselbe gilt für $\varphi(g) = (1+g)^{\mu}$, wenn $g(x)$ durch

$$g^{(2)}(x) = (1+\varrho x^{\nu})^{\frac{n-\nu}{\mu\nu}}\,[1+g(x^*)]-1$$

ersetzt wird.

Im Falle $\varphi(g) = \log(1+g)$ bleibt φ_n schon ungeändert, wenn man für $g(x)$ die Funktion

$$g^{(3)}(x) = e^{\varrho x^{\nu}}[1+g(x)]-1 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1)$$

treten läßt.

Ist endlich $\varphi(g) = (1+g)\log(1+g)$, so ändert sich, wie wieder aus unserem Hilfssatz ohne Mühe folgt, der Koeffizient φ_n von x^n nicht, falls $g(x)$ durch die Funktion

$$g^{(4)}(x) = (1+\varrho x^{\nu})^{\frac{n-\nu}{\nu}}\,[1+g(x^*)] - \beta_{\nu} x^n - 1$$

ersetzt wird. Hierbei soll β_{ν} den Koeffizienten von x^n in der Entwicklung von

$$(1+\varrho x^{\nu})^{\frac{n-\nu}{\nu}}\,[1+g(x^*)]\log(1+\varrho x^{\nu})^{\frac{n-\nu}{\nu}}$$

bedeuten [9]).

In jedem der vier Fälle ist der Übergang von $g(x)$ zu $g^{(\alpha)}(x)$ gleichbedeutend mit einer wohlbestimmten linearen Transformation

$$(T_{\nu}(\varrho)) \qquad a'_{\varkappa} = p_{\varkappa 0} + p_{\varkappa 1} a_1 + \ldots + p_{\varkappa\varkappa} a_{\varkappa}$$

der Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots$ Hierbei sind die $p_{\varkappa\lambda}$ ganze rationale Funktionen des Parameters ϱ, und insbesondere wird

$$a'_1 = a_1, \quad a'_2 = a_2, \quad \ldots, \quad a'_{\nu-1} = a_{\nu-1}, \quad a'_{\nu} = \alpha_{\nu}\varrho + a_{\nu},$$

wo α_{ν} eine gewisse von Null verschiedene Konstante bedeutet.

In Verbindung mit dem im vorigen Paragraphen Bewiesenen können wir nun unser Ergebnis folgendermaßen aussprechen:

Bedeutet $\varphi(x)$ eine der Funktionen

$$e^x, \quad (1+x)^{\mu}, \quad \log(1+x), \quad (1+x)\log(1+x) \qquad (\mu \neq 0, 1, 2, \ldots)$$

und setzt man

$$\varphi(a_1 x + a_2 x^2 + \ldots) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(a_1, a_2, \ldots, a_n)\, x^n,$$

so läßt sich für $n > 2$ jede lineare Transformation

$$a'_{\varkappa} = q_{\varkappa 0} + q_{\varkappa 1} a_1 + \ldots + q_{\varkappa n} a_n \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n)$$

---

[9]) Eine einfache Rechnung liefert

$$\beta_{\nu} = \frac{n-\nu}{\nu}\left[a_{n-\nu}\varrho + a_{n-2\nu}\frac{\varrho^2}{2} + a_{n-3\nu}\frac{\varrho^3}{3} + \ldots\right].$$

der Variablen $a_1, a_2, \ldots, a_n$, welche die Funktion φ_n bis auf einen konstanten Faktor ungeändert läßt, bei passender Wahl der Parameter $\varrho, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ aus der Transformation $a'_\varkappa = \varrho^\varkappa a_\varkappa$ und den vorhin charakterisierten Transformationen

$$T_1(\xi_1), \quad T_2(\xi_2), \quad \ldots, \quad T_{n-1}(\xi_{n-1})$$

zusammensetzen. Diese Funktionen $\varphi(x)$ sind zugleich im wesentlichen die einzigen, für die sich die Diskussion in derselben Weise durchführen läßt.

Die beiden Fälle

$$\varphi(x) = \log(1+x), \qquad \varphi(x) = (1+x)^{-1}$$

sind insbesondere für die Theorie der symmetrischen Funktionen von Wichtigkeit. Deutet man nämlich $a_1, a_2, \ldots, a_n$ als die elementaren symmetrischen Funktionen von n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, so wird im ersten Fall

$$\varphi_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x_1^n + x_2^n + \ldots + x_n^n),$$

und im zweiten Fall

$$\varphi_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (-1)^n w_n(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

wo w_n die sog. Wronskische Alephfunktion n-ten Grades bedeutet, d. h. die Summe aller Produkte von der Dimension n, die sich mit Hilfe von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bilden lassen.

(Eingegangen am 30. Juli 1921.)