

Über die Singularitäten algebraischer Gebilde.

Von

Werner Schmeidler in Göttingen.

Einleitung.

Der Begriff der singulären Punkte einer algebraischen Kurve oder Fläche wird in der vorliegenden Arbeit auf einen beliebigen (unhomogen geschriebenen) Modul und damit auf ein beliebiges algebraisches Gebilde im Raume von mehreren Dimensionen übertragen¹⁾. Nun hängt der Charakter einer Singularität natürlich wesentlich ab von den Transformationen des Raumes bzw. der betreffenden Mannigfaltigkeit, die man als zulässig ansieht. Während die allgemeinsten, auf einer ebenen algebraischen Kurve *birationalen* Transformationen jeden singulären Punkt in gewöhnliche Doppelpunkte aufzulösen gestatten, die Besonderheit der Singularität also völlig aufheben, sind gegenüber allgemeinen *linearen* Transformationen gewisse von M. Noether und anderen studierte charakteristische Zahlen²⁾ invariant.

Hier werden nun solche Transformationen zugrunde gelegt, die für das betreffende Gebilde *umkehrbar ganz rational*, also im Endlichen eindeutig sind. Dadurch geht, wie in § 1 gezeigt wird, der Modul in einen anderen über, *dessen Restgruppe zu der des gegebenen isomorph ist* (Satz I), womit die ganze Untersuchung auf die Theorie der Restgruppen zurückgeführt wird. Es wird nämlich weiterhin gezeigt, daß auch die Restgruppe des zur Charakterisierung der Singularitäten dienenden Moduls bei den genannten Transformationen in eine isomorphe Restgruppe übergeht, so daß in einem wohlbestimmten Sinne diese selbst der gegebenen Restgruppe

¹⁾ Vgl. für Primmoduln und das kleinste gemeinsame Vielfache von Primmoduln derselben Mannigfaltigkeit bereits Macaulay, *The algebraic Theory of Modular Systems* [Cambridge Tracts 19 (1916), 112 S.], S. 34.

²⁾ Vgl. z. B. Brill-Noether, *Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neuerer Zeit* [Jahresberichte der Deutschen Mathematikervereinigung 3 (1894), S. 109–566], S. 367–402.

als Invariante zugeordnet werden kann. Dieses Ergebnis erscheint auch vom Standpunkt der abstrakten Theorie der Restgruppen aus als bemerkenswert; es gilt auch bei Beschränkung des Koeffizientenbereiches auf einen beliebigen Körper, wenn dieser nur unendlich viele Konstanten enthält, insbesondere also z. B. für den Bereich aller reellen Zahlen. Es kann ferner noch dahin verfeinert werden, daß die singulären Punkte in endlich viele verschiedene Klassen eingeteilt werden, so daß die Restgruppen der Moduln der Punkte einer Klasse, die sogenannten „Singularitätengruppen“, einzeln isomorph bleiben (Satz III). So scheiden sich z. B. bei einer Raumkurve im dreidimensionalen Raum die singulären Punkte, die auch für jede hindurchgehende Fläche singulär sind, von denen, für die dies nicht der Fall ist. Weiterhin wird gezeigt, daß für eine reduzible Restgruppe (vgl. hierzu wie überhaupt bezüglich des Begriffes der Restgruppe meine Arbeit *Über Moduln und Gruppen hyperkomplexer Größen* [Math. Zeitschr. **3** (1918), S. 29—42]) auch die Singularitätengruppen in die bezüglichen Bestandteile reduzibel werden (Satz IV). — In § 2 wird gezeigt, was die Isomorphie der Singularitätengruppen bei eingliedrigen Moduln für die geometrische Gestalt der Umgebung entsprechender isolierter Singularitäten zur Folge hat: Die Bestandteile niedrigster Ordnung haben denselben Grad und linear verwandte Scharen der ersten Polaren (Satz V), so daß z. B. bei ebenen Kurven die Vielfachheit des Punktes, die Anzahl der verschiedenen Tangenten und die Vielfachheit einer jeden invariant ist.

An Hilfsmitteln gebrauche ich außer dem Begriffe der Restgruppe den Laskerschen Zerlegungssatz eines Moduln in primäre Moduln (E. Lasker, *Zur Theorie der Moduln und Ideale* [Math. Ann. **60** (1905), S. 20—115]) in seiner Ausdehnung auf einen beliebigen Körper als Koeffizientenbereich (vgl. eine demnächst erscheinende Arbeit von E. Noether).

§ 1.

Die Singularitätengruppen.

Satz I. Zwei Moduln $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(x_1, \dots, x_m)$ und $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(y_1, \dots, y_n)$ mit Koeffizienten in einem festen Körper \mathbb{P} haben dann und nur dann isomorphe Restgruppen, wenn es Polynome $f_j(x) = f_j(x_1, \dots, x_m)$ und $g_i(y) = g_i(y_1, \dots, y_n)$ ($\begin{smallmatrix} i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n \end{smallmatrix}$) gibt, so daß für die Restklassen ξ_1, \dots, ξ_m bzw. η_1, \dots, η_n von x_1, \dots, x_m bzw. y_1, \dots, y_n mod \mathfrak{M} bzw. mod \mathfrak{N} die Gleichungen gelten:

$$(1) \quad \mathfrak{M}(g(\eta)) = 0, \quad \mathfrak{N}(f(\xi)) = 0,$$

$$(2) \quad f_j(g(\eta)) = \eta_j, \quad g_i(f(\xi)) = \xi_i.$$

Dabei bedeutet $M(x) = M(x_1, \dots, x_m)$ ein beliebiges Polynom aus \mathfrak{M} , $N(y) = N(y_1, \dots, y_n)$ ein beliebiges Polynom aus \mathfrak{N} .

1. Die Restgruppen \mathfrak{A} und \mathfrak{B} von \mathfrak{M} und \mathfrak{N} seien isomorph. Dann gibt es gewisse Größen aus \mathfrak{B} , die den Größen ξ_1, \dots, ξ_m von \mathfrak{A} zugeordnet sind, und die als ganze rationale Funktionen von η_1, \dots, η_n mit $g_1(\eta), \dots, g_m(\eta)$ bezeichnet werden mögen. Entsprechend seien die Größen aus \mathfrak{A} , die den Größen η_1, \dots, η_n von \mathfrak{B} zugeordnet sind, mit $f_1(\xi), \dots, f_n(\xi)$ bezeichnet. Dann gelten wegen $M(\xi) = 0$ und $N(\eta) = 0$, weil die Zuordnung isomorph sein soll, auch die Gleichungen (1). Weil ferner die Zuordnung umkehrbar eindeutig ist, so sind die beiden Größen $f_j(g(\eta))$ und η_j , die beide der Größe $f_j(\xi)$ entsprechen, einander gleich, und analog die Größen $g_i(f(\xi))$ und ξ_i . Daraus folgen die Relationen (2).

2. Es bestehen die Relationen (1) und (2) für gewisse Polynome f und g . Dann ordnen wir die Restklassen ξ_i und $g_i(\eta)$ einander zu und beziehen dadurch die Gruppe \mathfrak{A} auf die durch $g_i(\eta)$ erzeugte Untergruppe von \mathfrak{B} . Diese ist aber mit \mathfrak{B} identisch, da wegen der ersten Gleichung von (2) auch die Größe η_j , also jede Größe von \mathfrak{B} dazu gehört. Ferner gilt jede Relation zwischen den Größen ξ_1, \dots, ξ_m auch für die zugeordneten Größen, da ja nach (1) aus $M(\xi) = 0$ auch $M(g(\eta)) = 0$ folgt. Ist umgekehrt $F(g(\eta)) = 0$ eine Relation zwischen den Größen $g_1(\eta), \dots, g_m(\eta)$, so folgt aus der zweiten Gleichung von (1) auch $F(g(f(\xi))) = 0$. Andererseits ist der zweiten Gleichung von (2) wegen $F(g(f(\xi))) = F(\xi)$, und daher auch $F(\xi) = 0$. Hieraus ergibt sich aber unmittelbar die Isomorphie³⁾.

Zur Definition der *singulären Punkte eines Moduls* $\mathfrak{M}(x_1, \dots, x_m)$ verfahren wir nun folgendermaßen:

Es sei r eine positive ganze Zahl $\leq m$. Dann betrachten wir irgend r Polynome M_1, \dots, M_r , die zu \mathfrak{M} gehören, und bilden eine r -reihige Determinante der Form

$$(3) \quad D_r = \begin{vmatrix} \frac{\partial M_1}{\partial x_{\nu_1}} & \dots & \frac{\partial M_1}{\partial x_{\nu_r}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial M_r}{\partial x_{\nu_1}} & \dots & \frac{\partial M_r}{\partial x_{\nu_r}} \end{vmatrix},$$

wobei ν_1, \dots, ν_m irgend r Indizes der Reihe $1, \dots, m$ bedeuten.

³⁾ Mit Hilfe des Hilbertsehen Endlichkeitssatzes der Modulbasis läßt sich die Isomorphie auch unter der allgemeineren Voraussetzung beweisen, daß nur die Existenz von Polynomen f_j, g_i, h_j, k_i bekannt ist, für die die Relationen $M(g(\eta)) = 0$, $f_j(g(\eta)) = \eta_j$ und $N(h(\xi)) = 0$, $k_i(h(\xi)) = \xi_i$ gelten. Vgl. zum Beweise die analoge Schlußweise in der Arbeit Noether-Schmeidler, Moduln in nicht kommutativen Bereichen, insbesondere aus Differential- und Differenzenausdrücken [Mathematische Zeitschrift 8 (1920), § 9].

Indem wir nun alle diese Determinanten zu \mathfrak{M} hinzufügen und daraus den kleinsten umfassenden Modul bilden, erhalten wir einen Teiler von \mathfrak{M} , deren Koeffizienten dem Körper P angehören und den wir mit

$$(4) \quad \mathfrak{M}_r = (\mathfrak{M}, D_r)$$

bezeichnen wollen. Wir setzen ferner $\mathfrak{M}_0 = 1$. Es wird dann \mathfrak{M}_{r-1} ein Teiler von \mathfrak{M}_r ($1 \leq r \leq m$).

Sind die Polynome F_1, \dots, F_k eine Basis von \mathfrak{M} , so genügt es, um \mathfrak{M}_r zu erhalten, alle Determinanten (3) in den Modul aufzunehmen, die mit irgendwelchen r Polynomen F gebildet sind. Denn wegen

$$\frac{\partial M}{\partial x_r} \equiv A_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_r} + \dots + A_k \frac{\partial F_k}{\partial x_r} (\mathfrak{M}) \quad \text{für } M = A_1 F_1 + \dots + A_k F_k$$

wird die Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial M_1}{\partial x_{v_1}} & \dots & \frac{\partial M_1}{\partial x_{v_r}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial M_r}{\partial x_{v_1}} & \dots & \frac{\partial M_r}{\partial x_{v_r}} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{r1} & \dots & A_{rk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_{v_1}} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_{v_r}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_k}{\partial x_{v_1}} & \dots & \frac{\partial F_k}{\partial x_{v_r}} \end{pmatrix} (\mathfrak{M})$$

in dem Sinne, daß die Differenz zweier entsprechender Elemente rechts und links zu \mathfrak{M} gehört. Bildet man nun nach bekannten Determinantensätzen die Determinante rechts und links, so findet man für $r > k$ rechts 0, also $\mathfrak{M}_r = \mathfrak{M}$, für $r \leq k$ eine Summe von Produkten von Determinanten aus der ersten und zweiten Matrix rechts, dazu eine zu \mathfrak{M} gehörende Funktion, womit die Behauptung bewiesen ist.

Beispiel 1. $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(x, y) = (F(x, y))$ sei ein Kurvenmodul in der Ebene. Dann ist $\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_1 = (F, F_x, F_y)$ ein Modul, dessen Nullstellen die singulären Punkte der Kurve $F = 0$ sind.

Beispiel 2. $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(x, y, z) = (F(x, y, z))$ sei ein Flächenmodul im Raume. Es wird $\mathfrak{M}_3 = \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_1 = (F, F_x, F_y, F_z)$ ein Modul, dessen Nullstellen die singulären Stellen der Fläche sind. — Allgemeiner gilt Entsprechendes für jeden eingliedrigem Modul in einem Raume von beliebig vielen Dimensionen.

Beispiel 3. $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(x, y, z) = (F, G)$ sei ein Kurvenmodul im Raume. Es wird $\mathfrak{M}_3 = \mathfrak{M}$; ferner

$$\mathfrak{M}_2 = \left(F, G, \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix} \right)$$

ein Modul, dessen Nullstellen die singulären Punkte der Kurve $F = 0$, $G = 0$ sind. Endlich wird

$$\mathfrak{M}_1 = (F, G, F_x, F_y, F_z, G_x, G_y, G_z)$$

ein Modul, dessen Nullstellen diejenigen singulären Punkte der Kurve $F = 0, G = 0$ sind, die auch für jede Fläche durch die Kurve, die zum Modul gehört, singuläre Stellen sind.

Definition: *Es sei $\varrho \leq m$ der größte Wert, für den der Modul \mathfrak{M}_ϱ ein echter Teiler von \mathfrak{M} ist. Dann heißen die Nullstellen von \mathfrak{M}_ϱ singuläre Punkte von \mathfrak{M} , und zwar insbesondere solche Nullstellen von \mathfrak{M}_r ($1 \leq r \leq \varrho$), die nicht Nullstellen von \mathfrak{M}_{r-1} sind, singuläre Punkte r -ter Art.*

Satz II. *Ist $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(x_1, \dots, x_m)$ ein Primmodul der Mannigfaltigkeit d , so ist $\mathfrak{M}_m = \dots = \mathfrak{M}_{m-d+1} = \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_{m-d} \neq \mathfrak{M}$, also $\varrho = m - d$.*

Ist nämlich F_1, \dots, F_k eine Basis von \mathfrak{M} , so hat die Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_k}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_k}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

nach bekannten Sätzen in jeder Nullstelle von \mathfrak{M} den Rang $\leq m - d$, in gewissen Nullstellen genau den Rang $m - d$, so daß nicht alle Determinanten D_{m-d} zu \mathfrak{M} gehören. Dagegen verschwindet jede Determinante D_{m-d+1} in allen Nullstellen von \mathfrak{M} , gehört also zum Modul, da \mathfrak{M} ein Primmodul sein sollte. — Der Satz gestattet eine leichte Verallgemeinerung auf solche Moduln, die kleinstes gemeinsames Vielfaches von mehreren Primmoduln der gleichen Mannigfaltigkeit sind. Dagegen läßt er sich nicht auf solche Moduln ausdehnen, die Gebilde verschiedener Mannigfaltigkeit umfassen. So ist für $\mathfrak{M} = (zx, zy)$ das Gebilde der Nullstellen die Ebene $z = 0$ und die Gerade $x = y = 0$, also die Mannigfaltigkeit $d = 2$, dagegen $\mathfrak{M}_{m-d+1} = \mathfrak{M}_2 = (z^2, zx, zy) \neq \mathfrak{M}$.

Über die singulären Stellen r -ter Art sei im Anschluß daran noch folgendes festgestellt: Es gibt nach Definition für einen solchen Punkt $r - 1$ Polynome M_1, \dots, M_{r-1} in \mathfrak{M} , so daß eine bestimmte Funktionaldeterminante $\left| \frac{\partial M_i}{\partial x_j} \right|$ dort nicht verschwindet. Dann hat das durch $M_1 = 0, \dots, M_{r-1} = 0$ dargestellte Gebilde die Mannigfaltigkeit $m - r + 1$ und in dem betreffenden Punkte eine „berührende“ lineare Mannigfaltigkeit derselben Dimension, also einen regulären Punkt. *Es gibt also ein Vielfaches von \mathfrak{M} von der Mannigfaltigkeit $m - r + 1$, dessen Gebilde in einem singulären Punkte r -ter Art von \mathfrak{M} einen regulären Punkt hat.* So gibt es durch einen singulären Punkt zweiter Art einer Raumkurve eine Fläche, die zum Modul gehört und dort regulär ist, während dies für die singulären Punkte erster Art nicht zutrifft, weil dort für jedes Polynom des Moduls alle Ableitungen verschwinden. Als Beispiel sei etwa $\mathfrak{M} = (xy, xz, yz)$

betrachtet, für den der Nullpunkt ein singulärer Punkt erster Art ist; Beispiele für singuläre Punkte zweiter Art bietet jede ebene Kurve mit singulären Punkten, wenn sie als Raumkurve aufgefaßt wird, aber auch die Schnittkurve zweier sich berührender Flächen zweiter Ordnung usw.

Ihr eigentliches Interesse gewinnt nun die Definition der singulären Punkte in der obigen Allgemeinheit erst durch den

Satz III: *Haben zwei Moduln $\mathfrak{M}(x_1, \dots, x_m)$ und $\mathfrak{N}(y_1, \dots, y_m)$ der gleichen Variablenzahl mit Koeffizienten in \mathfrak{P} isomorphe Restgruppen, so sind auch die Restgruppen der entsprechenden Teiler \mathfrak{M}_r und \mathfrak{N}_r ($1 \leq r \leq \varrho$) isomorph.*

Zum Beweise seien $f_i(x_1, \dots, x_m)$ und $g_i(y_1, \dots, y_m)$ ($i = 1, \dots, m$) die Polynome der Substitutionen, die nach Satz I den Übergang von \mathfrak{M} zu \mathfrak{N} vermitteln. Ferner sei $T_r(y_1, \dots, y_m)$ eine der Determinante (3) entsprechende Determinante für \mathfrak{N}_r . Dann genügt es nach Satz I für die Isomorphie der Restgruppen \mathfrak{M}_r und \mathfrak{N}_r von \mathfrak{M}_r und \mathfrak{N}_r zu zeigen, daß

$$(5) \quad \begin{aligned} T_r(f_1, \dots, f_m) &\equiv 0(\mathfrak{M}_r) \\ D_r(g_1, \dots, g_m) &\equiv 0(\mathfrak{N}_r) \end{aligned}$$

ist. Wir beweisen nur die Behauptung (5), da der Beweis der zweiten Behauptung ganz entsprechend verläuft.

Es sei $N(y) = N(y_1, \dots, y_m)$ irgendein Polynom aus \mathfrak{N} ; dann ist nach Satz I

$$N(f) = M$$

ein Polynom von \mathfrak{M} . Daher ist

$$\frac{\partial N}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial N}{\partial f_m} \frac{\partial f_m}{\partial x_i} = \frac{\partial M}{\partial x_i} \quad (i = 1, \dots, m).$$

Wir haben daher für r Polynome N_1, \dots, N_r und die zugehörigen Polynome M_1, \dots, M_r die Matrizengleichung

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial f_1} & \dots & \frac{\partial N_1}{\partial f_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial N_r}{\partial f_1} & \dots & \frac{\partial N_r}{\partial f_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial M_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial M_1}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial M_r}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial M_r}{\partial x_m} \end{pmatrix}.$$

Bildet man jetzt irgendeine r -reihige Determinante D_r der Matrix rechter Hand, so erhält man linker Hand eine lineare Verbindung von Determinanten $T_r(f_1, \dots, f_m)$, deren Koeffizienten r -reihige Unterdeterminanten der Funktionaldeterminante $\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|$ sind. Im ganzen bekommt man $\binom{m}{r}$ solche Gleichungen für die $\binom{m}{r}$ Funktionen $T_r(f)$, deren Koeffizientendeterminante nach bekannten Sätzen eine Potenz von $\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|$, etwa die λ -te,

ist. Man erhält daher nach diesen Gleichungen durch Multiplikation mit gewissen Polynomen und Addition

$$(6) \quad T_r(f_1, \dots, f_m) \cdot \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|^2 = 0 (\mathfrak{M}_r)$$

für jede Determinante T_r . Um nun hieraus die Kongruenz (5) schließen zu können, bedarf es noch gewisser Festsetzungen über die Polynome f_i und g_i .

Diese sind nämlich durch unsere bisherigen Festsetzungen noch nicht eindeutig bestimmt, sondern nur ihre Restklassen mod \mathfrak{M} bzw. mod \mathfrak{R} , sollen nun aber noch genauer festgelegt werden. Wir behaupten nämlich den folgenden

Hilfssatz I. *Die Polynome $f_i(x)$ der Übergangssubstitutionen von \mathfrak{M} zu \mathfrak{R} lassen sich so bestimmen, daß die Funktionaldeterminante $\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|$ an endlich vielen beliebig vorgeschriebenen Nullstellen von \mathfrak{M} stets von Null verschieden ist. Entsprechendes gilt von den Polynomen $g_i(y)$.*

Es sei $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ eine Nullstelle von \mathfrak{M} . Setzen wir

$$(7) \quad f_i(\alpha) = \beta_i,$$

so ist wegen (2) auch $g_i(\beta) = \alpha_i$, und wegen (1) ist $N(\beta) = 0$ für jedes N aus \mathfrak{R} . Die beiden Nullstellen α und β von \mathfrak{M} und \mathfrak{R} sind also umkehrbar eindeutig einander zugeordnet. Wir entwickeln jetzt die Polynome $f_i(x)$ nach Potenzen von $x_i - \alpha_i$ und bezeichnen mit A die Matrix $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_\alpha$ der Koeffizienten der linearen Bestandteile. Wegen (2) gehört das Polynom

$$x_i - g_i(f_1, \dots, f_m) = M_i$$

zu \mathfrak{M} .

Aus dieser Gleichung folgt durch Differentiation nach x_i :

$$\delta_{ij} - \sum_k \frac{\partial g_i}{\partial f_k} \frac{\partial f_k}{\partial x_j} = \frac{\partial M_i}{\partial x_j}$$

und daraus folgt wegen (7) durch Einführung des Wertsystems $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, wenn wir mit B die Matrix $\left(\frac{\partial g_i(y)}{\partial y_k} \right)_\beta$ bezeichnen, daß die Matrix

$$(8) \quad E - BA = U$$

die Koeffizientenmatrix der linearen Bestandteile der nach Potenzen von $x_i - \alpha_i$ umgeordneten Polynome M_i ist. Wir wählen nun eine Zahl λ so, daß die Determinanten $|A + \lambda E|$ und $|E + \lambda B|$ beide von Null verschieden sind. Dann ist $|A + \lambda(E + \lambda B)^{-1} U| \neq 0$, weil nach (8)

$$|A + \lambda B A + \lambda U| = |A + \lambda E|,$$

also nach Voraussetzung $\neq 0$ ist. Hieraus folgt, falls jetzt F_1, \dots, F_k eine

Basis von \mathfrak{M} bilden, die Existenz von gewissen Konstanten $c_{i\mu}$, so daß die Determinante der Koeffizienten der linearen Bestandteile von

$f_i + \sum_{\mu} c_{i\mu} F_{\mu}$, also die Determinante $\left| \frac{\partial \left(f_i + \sum_{\mu} c_{i\mu} F_{\mu} \right)}{\partial x_j} \right|$ an der Stelle $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, von Null verschieden ist.

Sind nun mehrere solche Stellen (α) vorgegeben, so läßt sich für jede ein entsprechendes System von Konstanten c bestimmen; anders ausgedrückt: Die Funktionen

$\left| \frac{\partial \left(f_i + \sum_{\mu} c_{i\mu} F_{\mu} \right)}{\partial x_j} \right|$ von $c_{i\mu}$, die entstehen, indem man für x_1, \dots, x_m die betreffenden Werte $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ einsetzt, verschwinden sämtlich nicht identisch. Es gibt daher nach einem bekannten Satze ein Wertsystem $c_{i\mu}$ im Körper P , für das sämtliche Funktionen $\neq 0$ sind. Bezeichnet man nun $f_i + \sum_{\mu} c_{i\mu} F_{\mu}$ für dieses Wertsystem selbst mit f_i ,

so ist die Determinante $\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|$ an sämtlichen vorgeschriebenen Stellen $\neq 0$ und der Hilfssatz ist zur ersten Hälfte bewiesen. Da man aber auf analoge Weise und unabhängig von der Bestimmung der f_i auch die Polynome g_i durch andere Polynome derselben Restklassen ersetzen kann, so daß die entsprechende Aussage gilt, so gilt der Hilfssatz ganz.

Um nun mit seiner Hilfe den Satz III zu beweisen, wenden wir auf den Modul \mathfrak{M}_r die Laskersche Zerlegung in primäre Moduln an, wonach \mathfrak{M}_r kleinstes gemeinsames Vielfaches von endlich vielen primären Moduln mit Koeffizienten in P ist⁴⁾. Zu jedem dieser Teiler gehört ein irreduzibles Gebilde, deren Gesamtheit das Gebilde von \mathfrak{M}_r ausmacht⁵⁾. Wir wählen nun auf jedem irreduziblen Gebilde einen Punkt und bestimmen die Funktionen f_i nach Hilfssatz I so, daß $\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|$ in keinem dieser Punkte verschwindet. Dann gilt dasselbe von $\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|^{\lambda}$; keine Potenz dieses Polynoms gehört also zu einem der Primärteiler von \mathfrak{M}_r . Weil nun nach (6) das Produkt $T_r(f) \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|^{\lambda}$ zu \mathfrak{M}_r , also zu jedem primären Teiler gehört, so muß nach der Definition der primären Moduln der Faktor $T_r(f)$ zu jedem dieser Teiler, also zu \mathfrak{M}_r selbst gehören, womit die Behauptung (5) und damit Satz III bewiesen ist.

Der Satz kann auch so aufgefaßt werden, daß die Restgruppen

⁴⁾ Ein Primärmodul ist ein solcher, für den ein Produkt von zwei Polynomen, die beide $\equiv 0$ sind, nur dann $\equiv 0$ sein kann, wenn für beide eine Potenz $\equiv 0$ ist.

⁵⁾ Sollte keine Nullstelle von \mathfrak{M}_r existieren, also $\mathfrak{M}_r = 1$ sein, so ist die Behauptung (5) trivial.

$\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_c$ der Moduln $\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_c$ der Restgruppe \mathfrak{A} in bezug auf die Variablenzahl m zugeordnet sind; sie bilden eine Kette von wohlbestimmten, ineinander geschachtelten Untergruppen von \mathfrak{A} , die wegen ihrer Beziehung zu den Singularitäten von \mathfrak{M} die „Singularitätengruppen von \mathfrak{A} in bezug auf m “ heißen mögen.

Zur Vereinfachung der Berechnung der Singularitätengruppen dient der folgende

Satz IV. Ist die Restgruppe $\mathfrak{G} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$, so gilt für die Singularitätengruppen $\mathfrak{A}_r, \mathfrak{B}_r, \mathfrak{G}_r$ in bezug auf m die Beziehung $\mathfrak{G}_r = \mathfrak{A}_r + \mathfrak{B}_r$.

Sind $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{R}$ die zu $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{G}$ gehörenden Moduln, so ist $\mathfrak{R} = [\mathfrak{M}, \mathfrak{N}]$ (vgl. Satz III meiner in der Einleitung genannten Arbeit), und die Moduln \mathfrak{M} und \mathfrak{N} sind teilerfremd. Es besteht daher eine Relation $M_0 + N_0 = 1$, wobei M_0 zu \mathfrak{M} , N_0 zu \mathfrak{N} gehört.

Es sei ferner F_1, \dots, F_k eine Basis von \mathfrak{M} , G_1, \dots, G_l eine Basis von \mathfrak{N} . Dann ist nach einem bekannten Satze $F_1 G_1, \dots, F_k G_l$ eine Basis von \mathfrak{R} . Für jedes $r \leq m$ bilden also $F_i G_j$ und die r -reihigen Determinanten $\left| \frac{\partial (F_i G_j)}{\partial x_{v_\lambda}} \right|$ eine Basis von \mathfrak{R}_r . Andererseits bilden die Polynome $F_i \left| \frac{\partial G_j}{\partial x_{v_\lambda}} \right|, \left| \frac{\partial F_i}{\partial x_{v_\lambda}} \right| G_j, \left| \frac{\partial F_i}{\partial x_{v_\lambda}} \right| \left| \frac{\partial G_j}{\partial x_{v_\lambda}} \right|, F_i G_j$ eine Basis von $[\mathfrak{M}_r, \mathfrak{N}_r]$. Hieraus folgt zunächst $\mathfrak{R}_r \equiv 0 [\mathfrak{M}_r, \mathfrak{N}_r]$.

In der Tat kann man in der Entwicklung der Determinante $\left| \frac{\partial (F_i G_j)}{\partial x_{v_\lambda}} \right| = \left| F_i \frac{\partial G_j}{\partial x_{v_\lambda}} + G_j \frac{\partial F_i}{\partial x_{v_\lambda}} \right|$ die Glieder, bei denen nur der vordere Summand jedes Elements berücksichtigt ist, als Vielfaches von $F_i \left| \frac{\partial G_j}{\partial x_{v_\lambda}} \right|$, ebenso diejenigen, bei denen nur der hintere Summand berücksichtigt ist, als Vielfaches von $G_j \left| \frac{\partial F_i}{\partial x_{v_\lambda}} \right|$ außer Betracht lassen. Die übrigen Glieder enthalten aber sämtlich mindestens einen Faktor F und einen Faktor G , sind also ebenfalls $\equiv 0 [\mathfrak{M}_r, \mathfrak{N}_r]$.

Wir haben nun noch umgekehrt $[\mathfrak{M}_r, \mathfrak{N}_r] = 0 (\mathfrak{R}_r)$ zu zeigen. Aus der Relation der Teilerfremdheit $M_0 + N_0 = 1$ folgt für jedes $N \equiv 0 (\mathfrak{R})$

$$(9) \quad \frac{\partial N}{\partial x_\lambda} = \frac{\partial (N M_0)}{\partial x_\lambda} - N \frac{\partial M_0}{\partial x_\lambda} + N_0 \frac{\partial N}{\partial x_\lambda} = \frac{\partial (N M_0)}{\partial x_\lambda} (\mathfrak{R})$$

Bildet man nun $F_i \left| \frac{\partial G_j}{\partial x_{v_\lambda}} \right|$ und setzt für jedes Element den Ausdruck (9) ein, so wird das Resultat $\equiv F_i \left| \frac{\partial (G_j M_0)}{\partial x_{v_\lambda}} \right|$, also $\equiv 0 (\mathfrak{R}_r)$. Ebenso wird

$$G_j \left| \frac{\partial F_i}{\partial x_{v_\lambda}} \right| \equiv 0 (\mathfrak{R}_r).$$

Entsprechend behandeln wir das Produkt $\left| \frac{\partial F_i}{\partial x_{\nu_i}} \right| \left| \frac{\partial G_j}{\partial x_{\nu_\mu}} \right|$, indem wir neben (9) die entsprechende Relation für irgendein $M \equiv 0 (\mathfrak{M})$ benutzen:

$$\frac{\partial M}{\partial x_\mu} = \frac{\partial (MN_0)}{\partial x_\mu} - M \frac{\partial N_0}{\partial x_\mu} + M_0 \frac{\partial M}{\partial x_\mu} \equiv \frac{\partial (MN_0)}{\partial x_\mu} (\mathfrak{M}).$$

Jede Determinante wird dann = $\frac{\partial (F_i N_0)}{\partial x_{\nu_i}} (\mathfrak{M})$ bzw. $\equiv \left| \frac{\partial (G_j M_0)}{\partial x_{\nu_\mu}} \right| (\mathfrak{M})$, das Produkt also $\equiv 0 (\mathfrak{R}_r)$.

Hiermit ist Satz IV bewiesen.

§ 2.

Folgerungen und Beispiele.

Der vorliegende Paragraph soll vor allem von dem Fall eingliedriger Moduln, speziell von ebenen Kurven handeln. Vorher zeigen wir noch allgemein den

Hilfssatz II. *Ist $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ eine Nullstelle des Moduls $\mathfrak{P}(x_1, \dots, x_m)$ in einem algebraisch abgeschlossenen Bereich P und ordnet man alle Polynome von \mathfrak{P} nach $x_i - \alpha_i$ um, wobei der niedrigste auftretende Untergrad⁶⁾ $k \geq 2$ ist, so ist jedes System \mathfrak{P}_κ von allen Unterformen κ -ten Grades von \mathfrak{P} linear verwandt mit dem entsprechenden System \mathfrak{Q}_κ eines Moduls $\mathfrak{Q}(y_1, \dots, y_m)$ derselben Variablenzahl und isomorpher Restgruppe, gebildet für die entsprechende Nullstelle β_1, \dots, β_m . Ist $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ und daher auch β_1, \dots, β_m eine isolierte Nullstelle, so gilt der Satz auch für $k = 1$ und $\kappa = 1$.*

Zum Beweise sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\alpha_i = 0, \beta_i = 0$. Dann ist für die Übergangssubstitutionen f_i und g_i nach (2)

$$x_i - g_i(f_1, \dots, f_m) = P$$

zu \mathfrak{P} gehörig; also sind für $k \geq 2$ die linearen Bestandteile links $= 0$. Daraus folgt für die Matrizen A und B dieser Bestandteile $E = BA$. Nun ist nach (1) $\mathfrak{P}(g_1, \dots, g_m)$ zu \mathfrak{Q} gehörig; also entsteht durch lineare Substitution mit der Matrix B aus jeder Form von \mathfrak{P}_κ eine solche von \mathfrak{Q}_κ und durch die reziproke Substitution aus jeder Form von \mathfrak{Q}_κ eine solche von \mathfrak{P}_κ . Damit ist die Behauptung bewiesen.

Ist jetzt $k = 1$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ eine isolierte Nullstelle, so sei zunächst die Restgruppe von \mathfrak{P} entweder selbst von endlicher Ordnung (also \mathfrak{P} ein Punktmodul) oder reduzibel in zwei Bestandteile, deren einer von endlicher Ordnung ist und zu der Nullstelle $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ gehört. Fügt man

⁶⁾ D. h. der Grad des niedrigsten homogenen Bestandteils. Diesen selbst bezeichnen wir als die „Unterform“.

die Haupteinheit des zweiten Bestandteils dem Modul \mathfrak{P} hinzu, so erhält man den zugehörigen primären Punktmodul. Daher gibt es in diesem Falle ein Polynom A , das im Punkte $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ verschwindet, so daß (\mathfrak{P}, A) eine endliche Restgruppe hat. Ist wieder $\alpha_i = 0$, so ist der Untergrad von A mindestens 1, und ferner gibt es nach dem Gesagten ein Polynom A' , so daß

$$(10) \quad A + A' = 1 (\mathfrak{P}),$$

$$(11) \quad AA' = 0 (\mathfrak{P})$$

ist. Nach (10) hat A' das konstante Glied 1, also AA' dieselbe Unterform wie A , die also nach (11) zu \mathfrak{P}_1 gehört. Die Anzahl der linear unabhängigen Formen von \mathfrak{P}_1 ist daher dieselbe auch für den Modul (\mathfrak{P}, A) , und Entsprechendes gilt für \mathfrak{Q}_1 in bezug auf einen analog gebildeten Modul (\mathfrak{Q}, B) , dessen Restgruppe zu der von (\mathfrak{P}, A) erzeugten endlichen irreduziblen Gruppe isomorph ist. Für eine solche ist aber die fragliche Anzahl $= m - r_1$, wo r_1 die erste Hilbertsche Invariante der Gruppe ist⁷⁾. Beide Anzahlen stimmen also überein und der Beweis ist erbracht. — Im allgemeinen Falle betrachtet man ähnlich einen geeigneten Teiler (\mathfrak{P}, A) , wodurch die Mannigfaltigkeit des Gebildes von \mathfrak{P} um 1 erniedrigt und der Satz durch Induktion auf den soeben erledigten Fall des Punktmoduls zurückgeführt wird.

Satz V. Ist $\mathfrak{M} = (M(x_1, \dots, x_m))$ ein eingliedriger Modul, für den $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ eine k -fache isolierte Singularität ist, ist ferner nach homogenen Bestandteilen von $x_i - \alpha_i$ geordnet

$$M = M_k + M_{k+1} + \dots,$$

so ist für jeden eingliedrigen Modul $\mathfrak{N} = (N(y_1, \dots, y_m))$ derselben Variablenzahl, dessen Singularitätengruppe zu der von \mathfrak{M} isomorph ist, die zu M_k entsprechende Form N_k von demselben Grade k und hat eine linear verwandte Schar der ersten Polaren.

Zunächst ist wegen der Eingliedrigkeit $\rho = 1$, so daß nur eine Singularitätengruppe in Frage kommt. Infolge der Isomorphie von \mathfrak{M}_1 und \mathfrak{N}_1 sind die singulären Punkte von \mathfrak{M} und \mathfrak{N} einander zugeordnet. Wir betrachten zwei isolierte Singularitäten, die wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit in den Nullpunkt des x - bzw. y -Raumes legen.

Ist jetzt erstens $k > 2$, so ist für \mathfrak{M}_1 der kleinste Untergrad ≥ 2 , also nach Hilfssatz II das durch $\frac{\partial M_k}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial M_k}{\partial x_n}$ linear erzeugte System linear verwandt mit dem entsprechenden System von \mathfrak{N}_1 . Hieraus folgt die Invarianz von k und die Behauptung des Satzes.

⁷⁾ Vgl. meine Arbeit Zur Theorie der primären Punktmoduli [Mathematische Annalen 79 (1918), S. 56–75], Satz III.

Ist aber $k = 2$, so ist nach Hilfssatz II der Rang von M_k invariant, da er gleich der Anzahl der linear unabhängigen linearen Unterformen von \mathfrak{M}_1 ist.

Insbesondere ergibt sich für $m = 2$, wenn man in der Zerlegung von M_k in irreduzible Faktoren die Exponenten als Vielfachheiten der betreffenden Tangente bezeichnet:

Sind für zwei ebene Kurven die Singularitätengruppen isomorph, so stimmt in je zwei zugeordneten singulären Punkten die Vielfachheit der Punkte, die Anzahl der verschiedenen Tangenten und die Vielfachheit einer jeden entsprechend überein.

Insbesondere gilt dies nach Satz III auch, wenn die Restgruppen der beiden Kurven selbst isomorph sind. Das Verhalten der weiteren, von M. Noether zur Charakterisierung der Singularitäten eingeführten Vielfachheitsanzahlen zur Singularitätengruppe mag einer späteren Untersuchung vorbehalten bleiben. Als einfache Folgerung von Satz V sei hier z. B. erwähnt, daß ein nicht zerfallender Kegelschnitt, eine Kurve 3. Ordnung mit Doppelpunkt im Endlichen und eine Kurve 3. Ordnung mit Spitze im Endlichen je Restgruppen erzeugen, die nicht isomorph sein können, daß also, trotzdem alle drei Kurven rational sind, keine beiderseits ganz rationale Abbildung von einer auf die andere existiert.

(Angenommen 25. I. 1920.)