

**7. Die Bewegung eines elektrischen Teilchens
in einem konstanten, rotierenden Magnetfeld;
von C. A. Mebius.**

(Aus Arkiv för matematik, astronomi och fysik, Bd. 10, Nr. 10;
Übersetzung.)

Die allgemeinen Bewegungsgleichungen eines elektrischen Teilchens, das sich unter Einwirkung einer magnetischen Kraft bewegt, sind

$$\begin{aligned}\frac{d^2 x}{dt^2} &= k \left(Y \frac{dx}{dt} - Z \frac{dy}{dt} \right), \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= k \left(Z \frac{dx}{dt} - X \frac{dz}{dt} \right), \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= k \left(X \frac{dy}{dt} - Y \frac{dx}{dt} \right).\end{aligned}$$

Hier bedeuten x , y , z die Koordinaten des Teilchens bei der Zeit t , X , Y , Z die Komponenten der magnetischen Kraft nach den Koordinaten x , y , z , und $k = e/m$ das Verhältnis zwischen der Ladung und der Masse des Teilchens.

Es wird angenommen, daß das Teilchen sich in der Richtung der x -Achse bewegt, wenn es in das rotierende magnetische Feld eintritt. Dieses wird durch die Komponenten bestimmt:

$$(1) \quad X = 0; \quad Y = H \sin \omega t; \quad Z = H \cos \omega t.$$

Die magnetische Kraft H wird also als rechtwinklig zur anfänglichen Bewegungsrichtung des Teilchens angenommen. Die Frequenz n oder die Anzahl von Umdrehungen pro Sekunde ist durch die Gleichung

$$(2) \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n$$

bestimmt, wo T die Zeit einer Umdrehung bezeichnet. Das Magnetfeld dreht sich in trigonometrisch negativer Richtung, wenn wir uns die yz -Ebene mit der Ebene des Papiers zusammenfallend, die y -Achse nach rechts, die z -Achse aufwärts denken; die x -Achse ist gegen den Zuschauer gerichtet gedacht.

Man erhält also

$$(3) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = k H \left(\sin \omega t \cdot \frac{dx}{dt} - \cos \omega t \cdot \frac{dy}{dt} \right),$$

$$(4) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = k H \cos \omega t \cdot \frac{dx}{dt},$$

$$(5) \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = -k H \sin \omega t \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Weil

$$\sum_{x,y,z} \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{x,y,z} X \frac{d^2 x}{dt^2} = 0$$

ist, so ist die Geschwindigkeit v des Teilchens konstant und die Beschleunigung rechtwinklig zur magnetischen Kraft. Aus den Gleichungen (4) und (5) erhält man

$$\sin \omega t \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + \cos \omega t \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} = 0$$

und

$$\cos \omega t \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} - \sin \omega t \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} = k H \frac{dx}{dt}.$$

Wenn der absolute Betrag des Komponenten der Beschleunigung in der yz -Ebene G ist und dieser mit der positiven y -Achse den Winkel α bildet, so ist

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = G \cos \alpha \quad \text{und} \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = G \sin \alpha.$$

Die vorigen Gleichungen können dann

$$G \sin(\omega t + \alpha) = 0 \quad \text{und} \quad G \cos(\omega t + \alpha) = k H \frac{dx}{dt}$$

geschrieben werden, und also ist

$$\alpha = -\omega t \quad \text{oder} \quad \alpha = \pi - \omega t.$$

Für $t = 0$ ist $G \cos \alpha = k H (dx/dt)$ und $(dx/dt) > 0$, wenn das Teilchen in die positive Richtung der x -Achse geschleudert wird. Für einen Kathodenstrahl, also ein negatives Teilchen, ist k negativ, für ein positives Teilchen ist k positiv. Es ergibt sich also, wenn $t = 0$.

$$G = -k H \frac{dx}{dt} \quad \text{und} \quad \alpha = \pi,$$

da es sich um einen Kathodenstrahl handelt und alsdann $\alpha = \pi - \omega t$.

Die Komponente der Beschleunigung in der yz -Ebene dreht sich danach in derselben Richtung wie die magnetische Kraft, und mit derselben Geschwindigkeit; die Phase aber ist $\frac{1}{4}$ Periode verspätet. Sie wäre $\frac{1}{4}$ Periode voraus gewesen, wenn das Teilchen positiv elektrisch wäre, und dann hätte man $\alpha = -\omega t$.

Um das System (3) bis (5) zu integrieren, wird die Gleichung (3) zweimal differenziert und die Werte von $d^2 y/dt^2$ und $d^2 z/dt^2$ aus (4) und (5) eingesetzt.

Man bekommt dann, wenn

$$k^2 H^2 + \omega^2 = \beta^2,$$

$$\frac{d^4 x}{dt^4} + \beta^2 \frac{d^2 x}{dt^2} = 0,$$

und daher

$$(6) \quad x = A \sin(\beta t + \varphi) + B t + C,$$

wo A , B , C und φ Konstanten sind, die bestimmt werden müssen.

Zu diesem Zweck nehmen wir an, daß wenn $t = 0$,

$$(7) \quad x = y = z = 0; \quad \frac{dx}{dt} = v; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0$$

ist.

Da nun

$$(8) \quad \frac{dx}{dt} = A\beta \cos(\beta t + \varphi) + B \quad \text{und} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = -A\beta^2 \sin(\beta t + \varphi),$$

so ergibt sich

$$(9) \quad 0 = A \sin \varphi + C; \quad v = A \beta \cos \varphi + B; \quad 0 = -A \beta^2 \sin \varphi.$$

Also ist¹⁾

$$(10) \quad \varphi = 0, \quad C = 0 \quad \text{und} \quad v = A \beta + B$$

und folglich

$$x = A \sin \beta t + B t \quad \text{und} \quad \frac{dx}{dt} = A \beta \cos \beta t + B.$$

1) Die möglichen Werte $A = 0$ und $\beta = 0$ leiten zur Lösung

$$x = vt; \quad y = \frac{k H v}{\omega^2} (1 - \cos \omega t); \quad z = \frac{k H v}{\omega^2} \sin \omega t - \frac{k H v}{\omega} t,$$

welche als mit der Gleichung (3) in Widerspruch stehend, ausgeschlossen wird.

Aus den Gleichungen (4) und (5) ergibt sich

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{1}{2} A \beta k H (\cos(\beta + \omega)t + \cos(\beta - \omega)t) + B k H \cos \omega t$$

und

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{1}{2} A \beta k H (\sin(\beta + \omega)t - \sin(\beta - \omega)t) - B k H \sin \omega t$$

und aus diesen

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2} A \beta k H \left(\frac{\sin(\beta + \omega)t}{\beta + \omega} + \frac{\sin(\beta - \omega)t}{\beta - \omega} \right) + \frac{B k H}{\omega} \sin \omega t + c;$$

$$c = 0;$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{2} A \beta k H \left(\frac{\cos(\beta + \omega)t}{\beta + \omega} - \frac{\cos(\beta - \omega)t}{\beta - \omega} \right) + \frac{B k H}{\omega} \cos \omega t + C.$$

Daher ist

$$(11) \quad y = -\frac{1}{2} A \beta k H \left(\frac{\cos(\beta + \omega)t}{(\beta + \omega)^2} + \frac{\cos(\beta - \omega)t}{(\beta - \omega)^2} \right) - \frac{B k H}{\omega^2} \cos \omega t + C_1$$

und

$$(12) \quad z = +\frac{1}{2} A \beta k H \left(\frac{\sin(\beta + \omega)t}{(\beta + \omega)^2} - \frac{\sin(\beta - \omega)t}{(\beta - \omega)^2} \right) + \frac{B k H}{\omega^2} \sin \omega t + C t + C_2.$$

Werden die Werte von dy/dt und dz/dt in die Gleichung (3) eingesetzt, so entsteht

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -A \beta^2 \sin \beta t + C k H \sin \omega t,$$

und also ist nach Gleichung (8) und weil $\varphi = 0$

$$C = 0.$$

Da $dz/dt = 0$ für $t = 0$, so ist

$$\frac{B k H}{\omega} = \frac{\omega}{k H} \cdot A \beta,$$

und da nach Gleichung (10)

$$v = A \beta + B,$$

so erhält man

$$B = \frac{\omega^2}{\beta^2} \cdot v; \quad A = \frac{\beta^2 - \omega^2}{\beta^3} \cdot v.$$

Daher ergibt sich aus Gleichungen (11), (12) und (7)

$$C_1 = \frac{2v}{kH} \quad \text{und} \quad C_2 = 0.$$

Wir erhalten somit schließlich

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{\beta^2 - \omega^2}{\beta^3} \cdot v \cdot \sin \beta t + \frac{\omega^2}{\beta^2} v t, \\
 y &= -\frac{k H}{2} \cdot \frac{\beta^2 - \omega^2}{\beta^2} \cdot v \left(\frac{\cos(\beta + \omega) t}{(\beta + \omega)^2} + \frac{\cos(\beta - \omega) t}{(\beta - \omega)^2} \right) \\
 &\quad - \frac{k H}{\beta^2} \cdot v \cos \omega t + 2 \frac{v}{k H}, \\
 z &= \frac{k H}{2} \cdot \frac{\beta^2 - \omega^2}{\beta^2} \cdot v \left(\frac{\sin(\beta + \omega) t}{(\beta + \omega)^2} - \frac{\sin(\beta - \omega) t}{(\beta - \omega)^2} \right) + \frac{k H}{\beta^2} \cdot v \cdot \sin \omega t.
 \end{aligned}$$

Den Koeffizienten dieser Gleichungen kann einfachere Form gegeben werden.

Weil

$$k^2 H^2 = \beta^2 - \omega^2,$$

können wir

$$(13) \quad \beta + \omega = k H \cot \Theta \quad \text{und} \quad \beta - \omega = k H \operatorname{tg} \Theta$$

setzen; dann ist

$$(14) \quad \beta = \frac{k H}{\sin 2 \Theta} \quad \text{und} \quad \omega = k H \cot 2 \Theta.$$

Wird außerdem

$$(15) \quad \frac{v}{k H} = r$$

gesetzt, so erhält man:

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned}
 x &= r \sin^3 2 \Theta \sin \beta t + v \cos^2 2 \Theta \cdot t, \\
 y &= -2 r \sin^4 \Theta \cos(\beta + \omega) t - 2 r \cos^4 \Theta \cos(\beta - \omega) t \\
 &\quad - r \sin^2 2 \Theta \cdot \cos \omega t + 2 r, \\
 z &= 2 r \sin^4 \Theta \sin(\beta + \omega) t - 2 r \cos^4 \Theta \sin(\beta - \omega) t \\
 &\quad + r \sin^2 2 \Theta \cdot \sin \omega t.
 \end{aligned} \right.$$

Die Projektion des elektrischen Teilchens auf die x -Achse oszilliert also um einen Punkt, welcher sich mit der konstanten Geschwindigkeit $v \cos^2 2 \Theta$ längs der x -Achse bewegt. Diese Geschwindigkeit nimmt in dem Maße ab, wie Θ sich 45° nähert, und für $\Theta = 45^\circ$ oder $\omega = 0$ wird dieselbe Null. Die Projektionen auf die y - und z -Achsen oszillieren mit drei Perioden, von denen die eine mit derjenigen des Magnetfeldes zusammenfällt.

Um die Bewegung der Projektion des Teilchens auf die $y z$ -Ebene auseinanderzusetzen, nehmen wir an

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_1 = -2r \sin^4 \Theta \cdot \cos(\beta + \omega)t; \\ z_1 = 2r \sin^4 \Theta \cdot \sin(\beta + \omega)t, \\ \text{woraus} \\ y_1^2 + z_1^2 = (2r \sin^4 \Theta)^2, \end{array} \right.$$

und ferner

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_2 = -2r \cos^4 \Theta \cdot \cos(\beta - \omega)t, \\ z_2 = -2r \cos^4 \Theta \cdot \sin(\beta - \omega)t, \\ \text{woraus} \\ y_2^2 + z_2^2 = (2r \cos^4 \Theta)^2, \end{array} \right.$$

und schließlich

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_3 = 2r - r \sin^2 2\Theta \cdot \cos \omega t; \quad z_3 = r \sin^2 2\Theta \cdot \sin \omega t, \\ \text{woraus} \\ (y_3 - 2r)^2 + z_3^2 = (r \sin^2 2\Theta)^2. \end{array} \right.$$

Die Gleichungen (17) geben eine Kreisbewegung in trigonometrisch negativer Richtung an, also in der des Magnetfeldes. Die Gleichungen (18) stellen eine Kreisbewegung in entgegengesetzter Richtung dar. Die Umlaufzeiten und die Halbmesser sind verschieden. Die Gleichungen (19) geben eine kreisförmige Bewegung in derselben Richtung wie der des Magnetfeldes und mit derselben Periode. Für $\Theta = 45^\circ$ werden die Halbmesser der beiden ersten Kreise beide $= \frac{1}{2}r$; die Umlaufzeiten werden auch gleich und die Bewegungen längs der z -Achsen heben einander auf.

Für $\Theta = 45^\circ$ ist $\omega = (2\pi/T) = 0$, also $T = \infty$, und das Magnetfeld ist ruhend. Die Gleichungen (16) nehmen dann die Form an

$$x = r \sin \frac{v}{r} t; \quad y = -r \cos \frac{v}{r} t + r; \quad z = 0;$$

also

$$x^2 + (y - r)^2 = r^2.$$

Die Bahn des Teilchens liegt dann, wie bekannt, in der $x y$ -Ebene und ist ein Kreis vom Radius r . Dieser Kreis trifft die $y z$ -Ebene in den Punkten $y = 0$ und $y = 2r$ auf der y -Achse.

Wenn das Magnetfeld sich langsam dreht, kann man $\beta \pm \omega = \beta$ setzen, und dann ist $\sin^4 \Theta = \cos^4 \Theta = \frac{1}{4}$ und $\sin^2 2\Theta = 1$ und $\cos^2 2\Theta = 0$.

Dann ist

$$x = r \sin \frac{v}{r} t; \quad y = -r \cos \frac{v}{r} t + 2r - r \cos \omega t; \\ z = r \sin \omega t;$$

folglich

$$x^2 + (y - 2r + r \cos \omega t)^2 = r^2$$

und

$$z^2 + \left(y - 2r + r \cos \frac{v}{r} t\right)^2 = r^2.$$

Der Mittelpunkt des vorher in der xy -Ebene ruhenden Kreises schwingt nun im Takte mit dem Magnetfelde in der y -Achse zwischen den äußersten Lagen $y = r$ und $y = 3r$, und die Projektion des Teilchens in die yz -Ebene beschreibt einen Kreis mit dem Radius r , dessen Mittelpunkt in der y -Achse zwischen den Wendepunkten $y = r$ und $y = 3r$, aber mit einer viel größeren Geschwindigkeit als das Magnetfeld oszilliert. In der xz -Ebene ist die Bewegung der Projektion des Teilchens aus einer sehr schnellen Schwingung längs der x -Achse und einer langsamen längs der z -Achse zusammengesetzt.

Für $\Theta = 30^\circ$ wird

$$\beta = \frac{2}{\sqrt{3}} k H \quad \text{und} \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{3}} k H,$$

also $\beta = 2\omega$.

Zwei von den Perioden fallen dann zusammen und man hat

$$x = \frac{3\sqrt{3}}{8} r \sin 2\omega t + \frac{v}{4} t; \\ y = -\frac{1}{8} r \cos 3\omega t - \frac{15}{8} r \cos \omega t + 2r; \\ z = \frac{1}{8} r \sin 3\omega t - \frac{3}{8} r \sin \omega t.$$

Die Projektion in die yz -Ebene befindet sich dann in der Ellipse

$$\frac{\left(y - 2r + \frac{1}{8}r \cos 3\omega t\right)^2}{\left(\frac{15}{8}r\right)^2} + \frac{\left(z - \frac{1}{8}r \sin 3\omega t\right)^2}{\left(\frac{3}{8}r\right)^2} = 1,$$

welche in positiver Richtung beschrieben wird. Der Mittelpunkt der Ellipse bewegt sich um den Punkt $y = 2r$ auf der y -Achse in einem Kreis vom Radius $\frac{1}{8}r$ in negativer Richtung und mit dreimal kleinerer Umlaufzeit.

Die Drehung des Magnetfeldes hat also im allgemeinen Falle den Einfluß auf die Bewegung des elektrischen Teilchens, daß statt einer einzigen geradlinigen Schwingung in einer Ebene, die rechtwinklig zur Bewegungsrichtung des Teilchens ist, wenn es in das Magnetfeld eintritt, in dieser Ebene zwei kreisförmige Schwingungen entstehen, die eine mit größerer, die andere mit geringerer Frequenz als im ruhenden Felde. Das Verhältnis ist also analog der Teilung eines geradlinigen polarisierten Lichtstrahles in zwei zirkularpolarisierte mit entgegengesetzten Schwingungsrichtungen. Im elektrischen Strahl kommen auch longitudinale Schwingungen vor.

(Eingegangen 1. März 1915.)
