SUR LA FONCTION $\zeta(s)$ DE RIEMANN AU VOISINAGE DE $\sigma = 1$.

Par **T. H. Gronwall** (Chicago, Ill.).

Adunanza del 10 novembre 1912.

Soit $s = \sigma + ti$, σ et t étant réels; la fonction $\zeta(s)$ de RIEMANN est définie, pour $\sigma > 1$, par la série de DIRICHLET

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

et l'on sait que $(s-1)\zeta(s)$ est une fonction entière de s. Pour σ voisin de l'unité, on connaît les résultats suivants:

MM. MELLIN et LANDAU [1]) ont fait voir que

$$(1) \qquad |\zeta(\sigma + ti)| < \log t + c_1, \quad \sigma \geqq 1, \quad t \geqq t_0,$$

t_0 étant une constante positive [2]) suffisamment grande, et c_1, ainsi que les $c_2, c_3, \ldots$ introduites dans la suite, étant toutes des constantes positives.

M. LANDAU [3]) a démontré que

$$(2) \qquad \frac{1}{|\zeta(\sigma + ti)|} < c_2 \log t \log\log t, \qquad \sigma \geqq 1, \qquad t \geqq t_0,$$

et

$$(3) \qquad \left|\frac{\zeta'(\sigma + ti)}{\zeta(\sigma + ti)}\right| < c_3 \log t \log\log t, \qquad \sigma \geqq 1 - \frac{1}{2a\log t}, \qquad t \geqq t_0,$$

où a est une constante positive dont il sera question plus loin.

J'ai trouvé récemment [4]) les formules plus précises

$$(1_a) \qquad |\zeta(\sigma + ti)| < \frac{3}{4}\log t + c_4, \qquad \sigma \geqq 1, \qquad t \geqq t_0;$$

$$(2_a) \qquad \frac{1}{|\zeta(\sigma + ti)|} < c_5 \log t (\log\log t)^{\frac{3}{8}}, \qquad \sigma \geqq 1, \qquad t \geqq t_0,$$

[1]) Voir: E. LANDAU, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen* (Leipzig, Teubner, 1909), p. 191.

[2]) Il suffit évidemment de considérer les valeurs positives de t, à cause de $|\zeta(\sigma+ti)| = |\zeta(\sigma-ti)|$.

[3]) Loc. cit. [1]), p. 614. Voir aussi: E. LANDAU, *Beiträge zur analytischen Zahlentheorie* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXVI (2e semestre 1908), pp. 169-302], où la formule (2) se trouve p. 217 et la formule (3) p. 245.

[4]) T. H. GRONWALL, *Über das Verhalten der* RIEMANN*schen Zetafunktion auf der Geraden* $\sigma = 1$ [Archiv der Mathematik und Physik (Note actuellement sous presse)].

et, dans le cas particulier $\sigma \geqq 1$,

$$(3_a) \qquad \left|\frac{\zeta'(\sigma+ti)}{\zeta(\sigma+ti)}\right| < c_6 \log t \sqrt{\log\log t}, \qquad \sigma \geqq 1, \qquad t \geqq t_0.$$

En modifiant convenablement, dans la Note actuelle, la méthode de mon travail précédent, je préciserai davantage en faisant voir que

$$(2_b) \qquad \frac{1}{|\zeta(\sigma+ti)|} < c_7 \log t, \qquad \sigma \geqq 1 - \frac{1}{2a\log t}, \qquad t \geqq t_0;$$

$$(3_b) \qquad \left|\frac{\zeta'(\sigma+ti)}{\zeta(\sigma+ti)}\right| < c_8 \log t, \qquad \sigma \geqq 1 - \frac{1}{2a\log t}, \qquad t \geqq t_0.$$

Commençons par démontrer (3_b); la formule (2_b) en sera une conséquence presque immédiate. Rappelons d'abord un théorème de M. CARATHÉODORY [5]):

Soit $F(s)$ une fonction analytique, holomorphe pour $|s-s_0| \leqq r$, et A une constante égale ou supérieure au maximum de la partie réelle de $F(s)$ sur la circonférence, de sorte que

$$\Re F(s) \leqq A$$

pour $|s-s_0| \leqq r$. Posons

$$F(s_0) = \beta + \gamma i,$$

et par conséquent

$$\beta = \Re F(s_0);$$

supposons enfin que $0 < \rho < r$. Alors on aura, pour $|s-s_0| \leqq \rho$,

$$(4) \qquad |F(s)| \leqq |\gamma| + |\beta| \cdot \frac{r+\rho}{r-\rho} + A \cdot \frac{2\rho}{r-\rho}$$

et

$$(5) \qquad |\Re F(s)| \leqq |\beta| \cdot \frac{r+\rho}{r-\rho} + A \cdot \frac{2\rho}{r-\rho}.$$

Nous aurons besoin aussi du théorème suivant de M. DE LA VALLÉE POUSSIN [6]):

Il y a une constante positive a telle que $\zeta(s)$ est différent de zéro dans le domaine:

$$(6) \qquad s = \sigma + ti, \qquad |t| \geqq 2, \qquad \sigma \geqq 1 - \frac{1}{a\log|t|}.$$

Comme l'a démontré M. HADAMARD [7]),

$$(7) \qquad (s-1)\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) = g(x)$$

est une fonction entière, de genre zéro, de la variable $x = \left(s-\frac{1}{2}\right)^2$, sans racines réelles $\geqq 0$, de sorte que

$$(8) \qquad g(x) = g(0)\prod_{n=1}^{\infty}\left[1 - \frac{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2}{x_n}\right].$$

[5]) E. LANDAU, loc. cit. [1]), pp. 299-301. Les inégalités analogues, mais moins resserrées, de MM. HADAMARD et BOREL conduiraient aussi au but.

[6]) E. LANDAU, loc. cit. [1]), p. 321.

[7]) E. LANDAU, loc. cit. [1]), p. 310 et suiv.

En fixant le signe de $\sqrt{x_n}$ de façon que, par exemple, $\Re\, i\sqrt{x_n} < 0$, et posant

$$\beta_n + i\gamma_n = \tfrac{1}{2} + \sqrt{x_n}, \quad \gamma_n > 0,$$

on aura identiquement

$$1 - \frac{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2}{x_n} = -\frac{1}{x_n}(s - \beta_n - i\gamma_n)(s - 1 + \beta_n + i\gamma_n),$$

et de (7) et (8) on tire alors [8])

$$(9) \quad \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{1}{2}\log\pi - \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\frac{s}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s-\beta_n-i\gamma_n} + \frac{1}{s-1+\beta_n+i\gamma_n}\right).$$

On a encore [9])

$$\Re\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} \leqq \left|\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}\right| < c_9 \log t, \qquad 0 \leqq \sigma \leqq 2, \qquad t \geqq 2,$$

de sorte qu'en prenant la partie réelle de (9), pour $0 \leqq \sigma \leqq 2$, $t \geqq 2$,

$$(10)\left\{\begin{aligned}
-\Re\frac{\zeta'(\sigma+ti)}{\zeta(\sigma+ti)} &= -\frac{1}{2}\log\pi + \frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2+t^2} + \frac{1}{2}\Re\frac{\Gamma'\left(\frac{s}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)} \\
&\quad -\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\sigma-\beta_n}{(\sigma-\beta_n)^2+(t-\gamma_n)^2} + \frac{\sigma-1+\beta_n}{(\sigma-1+\beta_n)^2+(t+\gamma_n)^2}\right] \\
&\leqq -\frac{1}{2}\log\pi + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{2}c_9\log\frac{t}{2} \\
&\quad -\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\sigma-\beta_n}{(\sigma-\beta_n)^2+(t-\gamma_n)^2} + \frac{\sigma-1+\beta_n}{(\sigma-1+\beta_n)^2+(t+\gamma_n)^2}\right] \\
&\leqq c_{10}\log t - \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\sigma-\beta_n}{(\sigma-\beta_n)^2+(t-\gamma_n)^2} + \frac{\sigma-1+\beta_n}{(\sigma-1+\beta_n)^2+(t+\gamma_n)^2}\right].
\end{aligned}\right.$$

Je dis maintenant que

$$(11) \qquad -\Re\frac{\zeta'(\sigma+ti)}{\zeta(\sigma+ti)} \leqq c_{11}\log t, \qquad t \geqq 2, \qquad \sigma \geqq 1 - \frac{1}{a\log 2t}.$$

Pour le démontrer, supposons d'abord que

$$(12) \qquad t \geqq 2, \qquad 1 > \sigma \geqq 1 - \frac{1}{a\log 2t},$$

et déterminons t_1 par la relation

$$\sigma = 1 - \frac{1}{a\log 2t_1}, \quad \text{d'où} \quad t_1 = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{a(1-\sigma)}} \geqq t \geqq 2.$$

[8]) E. Landau, loc. cit. [3]), p. 208, équation (75). Sous une forme un peu différente, la formule se trouve aussi loc. cit. [1]), p. 316.

[9]) E. Landau, loc. cit. [1]), p. 317.

Comme l'a fait voir M. DE LA VALLÉE POUSSIN, il n'y a aucun zéro $\beta_n + i\gamma_n$ pour lequel $\gamma_n < 2$.

Pour chaque zéro $\beta_n + i\gamma_n$ où $2 \leqq \gamma_n \leqq 2t_1$, nous avons, en vertu de (6),

$$\sigma - \beta_n \geqq \sigma - \left(1 - \frac{1}{a\log\gamma_n}\right) \geqq \sigma - \left(1 - \frac{1}{a\log 2t_1}\right) = 0,$$

$$\sigma - 1 + \beta_n \geqq \sigma - \left(1 - \frac{1}{a\log\gamma_n}\right) \geqq \sigma - \left(1 - \frac{1}{a\log 2t_1}\right) = 0,$$

et, par conséquent, le terme correspondant dans la série au membre droit de (10) est positif ou zéro.

Pour les zéros $\beta_n + i\gamma_n$ où $\gamma_n > 2t_1$, nous avons

$$\gamma_n - t \geqq \gamma_n - t_1 > \tfrac{1}{2}\gamma_n,$$

et, puisque $0 \leqq \beta_n \leqq 1$, il s'ensuit que

$$\left|\frac{\sigma-\beta_n}{(\sigma-\beta_n)^2+(t-\gamma_n)^2}+\frac{\sigma-1+\beta_n}{(\sigma-1+\beta_n)^2+(t+\gamma_n)^2}\right| \leqq \frac{|\sigma-\beta_n|}{(t-\gamma_n)^2}+\frac{|\sigma-1+\beta_n|}{(t+\gamma_n)^2}$$

$$< \frac{1}{(t-\gamma_n)^2}+\frac{1}{(t+\gamma_n)^2} < \frac{2}{(t-\gamma_n)^2}$$

$$< \frac{2.4}{\gamma_n^2} = \frac{16}{\gamma_n^2+\gamma_n^2} < \frac{16}{1+\gamma_n^2}$$

$$< \frac{16}{(\beta_n-\frac{1}{2})^2+\gamma_n^2} = \frac{16}{|x_n|}.$$

En désignant par $\sum'$ une somme étendue aux n pour lesquels $\gamma_n > 2t_1$, nous aurons par conséquent

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\sigma-\beta_n}{(\sigma-\beta_n)^2+(t-\gamma_n)^2}+\frac{\sigma-1+\beta_n}{(\sigma-1+\beta_n)^2+(t+\gamma_n)^2}\right]$$

$$<-\sum{}'\left[\frac{\sigma-\beta_n}{(\sigma-\beta_n)^2+(t-\gamma_n)^2}+\frac{\sigma-1+\beta_n}{(\sigma-1+\beta_n)^2+(t-\gamma_n)^2}\right]$$

$$\leqq \sum{}'\left|\frac{\sigma-\beta_n}{(\sigma-\beta_n)^2+(t-\gamma_n)^2}+\frac{\sigma-1+\beta_n}{(\sigma-1+\beta_n)^2+(t-\gamma_n)^2}\right|$$

$$< 16\sum{}'\frac{1}{|x_n|}$$

$$\leqq 16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|x_n|},$$

et, la dernière série étant convergente d'après le théorème de M. HADAMARD, il résulte de (10) que

$$(13)\qquad -\Re\frac{\zeta'(\sigma+ti)}{\zeta(\sigma+ti)} < c_{10}\log t + 16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|x_n|},\qquad t \geqq 2,\qquad 1 > \sigma \geqq 1 - \frac{1}{a\log 2t}.$$

Soit en second lieu $1 \leqq \sigma \leqq 2$, $t \geqq 2$; alors, puisque $0 \leqq \beta_n \leqq 1$, on aura

$\sigma - \beta_n \geqq 0$, $\sigma - 1 + \beta_n \geqq 0$ pour toute valeur de n, et (10) donne

$$-\Re\frac{\zeta'(\sigma+ti)}{\zeta(\sigma+ti)} \leqq c_{10}\log t, \qquad t \geqq 2, \qquad 1 \leqq \sigma \leqq 2. \tag{14}$$

Supposons enfin $\sigma > 2$. De la relation connue, valable pour $\sigma > 1$,

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{p,m}\frac{\log p}{p^{ms}},$$

il s'ensuit que, pour $\sigma \geqq \sigma' > 1$, $\sigma' \leqq 2$,

$$\left\{\begin{aligned} \left|\frac{\zeta'(\sigma+ti)}{\zeta(\sigma+ti)}\right| &\leqq \sum_{p,m}\left|\frac{\log p}{p^{ms}}\right| = \sum_{p,m}\frac{\log p}{p^{m\sigma}} = -\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} \\ &\leqq \sum_{p,m}\frac{\log p}{p^{m\sigma'}} = -\frac{\zeta'(\sigma')}{\zeta(\sigma')} \\ &< \frac{c_{12}}{\sigma'-1}, \end{aligned}\right. \tag{15}$$

car $(s-1)\dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ est holomorphe au voisinage de $s = 1$.

En particulier, pour $\sigma' = 2$, on trouve

$$-\Re\frac{\zeta'(\sigma+ti)}{\zeta(\sigma+ti)} \leqq \left|\frac{\zeta'(\sigma+ti)}{\zeta(\sigma+ti)}\right| \leqq -\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}, \qquad \sigma \geqq 2. \tag{16}$$

La comparaison de (13), (14) et (16) donne enfin la formule (11).

Posons maintenant, dans le théorème de M. Carathéodory,

$$\left\{\begin{aligned} & F(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}, \\ & s_0 = \sigma + \frac{1}{a\log t} + ti, \qquad \sigma \geqq 1 - \frac{1}{2a\log t}, \qquad t \geqq t_0, \\ & r = \frac{5}{4a\log t}, \\ & \rho = \frac{1}{a\log t}. \end{aligned}\right. \tag{17}$$

La fonction $F(s)$ est holomorphe dans le domaine (6), et à fortiori dans le domaine

$$t \geqq 2, \qquad \sigma \geqq 1 - \frac{1}{a\log 2t}, \tag{18}$$

et je dis que, pour t_0 suffisamment grand, tout point $s = u + vi$ du cercle

$$\left|s - \left(\sigma + \frac{1}{a\log t} + ti\right)\right| = |s - s_0| \leqq r = \frac{5}{4a\log t}$$

appartient à (18), c'est-à-dire que

$$v \geqq 2, \qquad u \geqq 1 - \frac{1}{a\log 2v}. \tag{19}$$

En effet, toute ordonnée v satisfait aux inégalités

$$t + \frac{5}{4a\log t} \geqq v \geqq t - \frac{5}{4a\log t}$$
$$> 2 \quad \text{pour} \quad t \geqq t_0 \geqq 4 + \frac{5}{4a\log 4},$$

et toute abscisse u à l'inégalité

$$u \geqq \sigma + \frac{1}{a\log t} - \frac{5}{4a\log t}$$
$$\geqq 1 - \frac{1}{2a\log t} + \frac{1}{a\log t} - \frac{5}{4a\log t} = 1 - \frac{3}{4a\log t};$$

or, pour $\log t \geqq \log t_0 \geqq 3\log 2 + \dfrac{15}{4a.4\log 4}$, on aura

$$\log t \geqq 3\log 2 + \frac{15}{4at\log t},$$

$$\log t \geqq \frac{3}{4}\left(\log 2t + \frac{5}{4at\log t}\right) > \frac{3}{4}\log\left(2t + \frac{5}{2a\log t}\right)$$
$$\geqq \tfrac{3}{4}\log 2v,$$

d'où

$$u \geqq 1 - \frac{3}{4a\log t} \geqq 1 - \frac{1}{a\log 2v},$$

et, par conséquent, on satisfera à (19) en prenant

$$t_0 = \max.\left(4 + \frac{5}{4a\log 4},\ 8e^{\frac{15}{4a.4\log 4}}\right) = 8e^{\frac{15}{16a\log 4}}$$

Le théorème de M. Carathéodory devient donc applicable aux données (17), et de (11) on conclut que

$$A = \max.\left[-\Re\frac{\zeta'(u+vi)}{\zeta(u+vi)}\right] < c_{11}\max.\log v$$
$$= c_{11}\log\left(t + \frac{5}{4a\log t}\right) < c_{13}\log t, \qquad t \geqq t_0;$$

de plus, nous tirons de (17) et (15)

$$\left|\frac{\zeta'(s_0)}{\zeta(s_0)}\right| \leqq -\frac{\zeta'\left(\sigma + \frac{1}{a\log t}\right)}{\zeta\left(\sigma + \frac{1}{a\log t}\right)} \leqq -\frac{\zeta'\left(1 + \frac{1}{2a\log t}\right)}{\zeta\left(1 + \frac{1}{2a\log t}\right)} < 2ac_{12}\log t,$$

ce qui donne, pour les parties réelle et imaginaire de $-\dfrac{\zeta'(s_0)}{\zeta(s_0)}$,

$$|\beta| < 2ac_{12}\log t, \qquad |\gamma| < 2ac_{12}\log t.$$

La formule (4) devient maintenant, avec $s = \sigma + ti$, point qui se trouve bien, en vertu de (17), sur la circonference $|s - s_0| = \rho$:

$$\left|\frac{\zeta'(\sigma+ti)}{\zeta(\sigma+ti)}\right| \leqq 2ac_{12}\log t + 2ac_{12}\log t.\frac{\frac{5}{4}+1}{\frac{5}{4}-1} + c_{13}\log t.\frac{2.1}{\frac{5}{4}-1}$$

$$= c_8 \log t, \quad \text{pour} \quad \sigma \geqq 1 - \frac{1}{2a\log t}, \qquad t \geqq t_0,$$

c'est-à-dire (3_b). La formule (5) donne, d'une manière analogue,

$$(20)\quad \begin{cases} \left|\Re\frac{\zeta'(\sigma+ti)}{\zeta(\sigma+ti)}\right| \leqq 2ac_{12}\log t.\frac{\frac{5}{4}+1}{\frac{5}{4}-1} + c_{13}\log t.\frac{2.1}{\frac{5}{4}-1} \\ \qquad = c_{14}\log t, \qquad \text{pour} \quad \sigma \geqq 1 - \frac{1}{2a\log t}, \qquad t \geqq t_0. \end{cases}$$

Pour démontrer (2_b), soit $\log\zeta(s)$ la branche du logarithme définie, au domaine $\sigma > 1$, par la série bien connue

$$\log\zeta(s) = \sum_{p,m}\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{p^{ms}},$$

de sorte que, pour $\sigma \geqq \sigma' > 1$, $\sigma' \leqq 2$,

$$(21)\quad \begin{cases} |\Re\log\zeta(\sigma+ti)| = \left|\sum_{p,m}\frac{1}{m}\cdot\frac{\cos(mt\log p)}{p^{m\sigma}}\right| \leqq \sum_{p,m}\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{p^{m\sigma}} \\ \qquad \leqq \sum_{p,m}\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{p^{m\sigma'}} = \log\zeta(\sigma') \\ \qquad < \log\frac{1}{\sigma'-1} + c_{15}, \end{cases}$$

parce que $(s-1)\zeta(s)$ est holomorphe et ne s'annule pas au voisinage de $s = 1$. De la formule

$$\log\zeta(\sigma+\varepsilon+ti) - \log\zeta(\sigma+ti) = \int_0^\varepsilon \frac{\zeta'(\sigma+u+ti)}{\zeta(\sigma+u+ti)}du, \qquad \varepsilon > 0,$$

nous voyons que

$$|\Re\log\zeta(\sigma+ti)| \leqq |\Re\log\zeta(\sigma+\varepsilon+ti)| + \int_0^\varepsilon \left|\frac{\zeta'(\sigma+u+ti)}{\zeta(\sigma+u+ti)}\right|du$$

et, pour $\sigma \geqq 1 - \frac{1}{2a\log t}$, $t \geqq t_0$, en vertu de (20) et (21),

$$|\Re\log\zeta(\sigma+ti)| \leqq \log\frac{1}{1-\frac{1}{2a\log t}+\varepsilon-1} + c_{15} + \varepsilon.c_{14}\log t$$

ou, en faisant $\varepsilon = \frac{1}{a\log t}$,

$$|\Re\log\zeta(\sigma+ti)| \leqq \log(2a\log t) + c_{15} + \frac{c_{14}}{a} = \log\log t + c_{16}.$$

On en tire immédiatement

$$\log\frac{1}{|\zeta(\sigma+ti)|} = -\Re\log\zeta(\sigma+ti) \leqq |\Re\log\zeta(\sigma+ti)| \leqq \log\log t + c_{16},$$

d'où la formule (2_b); et d'autre part

$$\log|\zeta(\sigma+ti)| = \Re\log\zeta(\sigma+ti) \leqq |\Re\log\zeta(\sigma+ti)| \leqq \log\log t + c_{16},$$

d'où

$$|\zeta(\sigma+ti)| < c_7 \log t, \qquad \sigma \geqq 1 - \frac{1}{2a\log t}, \qquad t \geqq t_0.$$

La dernière formule, démontrée par M. LANDAU d'une manière purement élémentaire et dans le domaine plus large (6), est précisément celle qui lui a servi de point de départ dans sa démonstration de (2) et (3).

Chicago, Ill., le 24 août 1912.

T. H. GRONWALL.