Sulla generazione di curve piane algebriche reali mediante « piccola variazione » di una curva spezzata.

(*Di* Luigi Brusotti, *a Pavia.*)

Gli studî sul numero, sulla disposizione e sul comportamento dei circuiti di una curva piana algebrica reale si sono svolti principalmente in due indirizzi.

Uno di essi prende le mosse da un'osservazione di Cayley sull'esistenza di sestiche piane (prive di molteplicità) dotate di un sol circuito non projettabile interamente al finito (*), e si fonda sul concetto di *indice*, cioè del minimo numero di punti (reali) in cui un circuito è tagliato da una retta (reale). Così Charlotte Angas Scott ha dimostrato che per ogni ordine n esistono curve razionali costituite da un circuito d'indice $n-2$ e curve ellittiche costituite da un tal circuito ed eventualmente da un ovale (**) e Peter Field ha trovato che per ogni ordine n esistono curve, prive di singolarità, dotate di un sol circuito d'indice $n-4$, mentre esistono curve di genere p $[1 \leq p \leq n-2]$ costituite da p circuiti tali che la somma dei loro indici sia $= n-2$ (***).

L'altro indirizzo, più largamente rappresentato, parte dai classici risultati di un lavoro di Harnack (****). In esso è dimostrato che una curva di

(*) Cayley, *On quartic curves* (Phil. Mag. XXIX, 1865; Coll. Math. Pap., vol. V, pag. 468).

(**) Scott, *On the Circuits of plane Curves* (Transactions of the Amer. Math. Society, vol. 3, 1902, pagg. 388-398).

(***) Field, *On the Circuits of a plane Curve* (Math. Ann., Bd. LXVII, pag. 126; Bd. LXIX, pag. 218).

(****) *Ueber die Vieltheiligkeit der ebenen algebraischen Curven* (Math. Ann., Bd. X, pagine 189-198).

genere p possiede al più $p+1$ circuiti, che per ogni valore di p esistono curve dotate di circuiti in tal numero e che per ogni ordine n esistono curve piane dotate di $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1$ circuiti (numero massimo). HILBERT nella prima parte di una Memoria (la cui seconda parte è dedicata alle curve gobbe reali di massimo genere) dimostra l'esistenza di curve piane d'ordine n fornite di $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1$ circuiti, dei quali $\frac{1}{2}(n-2)$ [per n pari] oppure $\frac{1}{2}(n-3)$ [per n dispari] sono disposti in modo che il primo sia interno al secondo, il secondo al terzo, ecc., ecc. (*eingeschachtelte Züge*) (*). I metodi ed i risultati di HILBERT sono estesi da HULBURT e da Miss RAGSDALE (**). Altri procedimenti per la costruzione di curve piane reali d'ordine n, col massimo numero di circuiti, sono esposti in una mia Nota (***).

Alle dette ricerche si collega il teorema secondo cui non esistono sestiche piane (reali) dotate di undici circuiti, ciascuno dei quali sia esterno agli altri; teorema enunciato da HILBERT (loc. cit.), preso pure in esame da WRIGHT e da KLARA LÖBENSTEIN (****) e recentemente dimostrato da ROHN ($*_*$). Nel citato lavoro di Miss RAGSDALE viene enunciata una generalizzazione di esso per curve d'ordine pari qualunque, ma la dimostrazione riflette le sole curve ottenute coi metodi di HARNACK e di HILBERT.

(*) HILBERT, *Ueber die reellen Züge algebraischer Curven* (Math. Ann., Bd. XXXVIII, pagg. 115-138).

(**) HULBURT, *A Class of New Theorems on the Number and Arrangement of the Real Branches of Plane Algebraic Curves* (American Journ. of Math., vol. 14, pag. 246). — RAGSDALE, *On the Arrangement of the Real Branches of Plane Algebraic Curven* (American Journ. of Math., vol. 28, pagg. 377-404).

(***) *Sulla generazione delle curve piane di genere p dotate di p + 1 circuiti* (Rend. R. Ist. Lomb., serie II, XLIII, 1910, pag. 143).

(****) WRIGHT, *The Ovals of the Plane Sextic Curve* (American Journ. of Math., vol. 29, pagg. 305-308). — LÖBENSTEIN, *Ueber den Satz, dass eine ebene, algebraische Kurve 6. Ordnung mit 11 sich einander ausschliessenden Ovalen nicht existiert* (Inaug. Dissert. Göttingen, Kaestner, 1910). Cfr. l'altra dissertazione uscita contemporaneamente alla precedente: G. KAHN, *Eine allgemeine Methode zur Untersuchung der Gestalten der algebraischen Kurven* (Göttingen, 1910).

($*_*$) *Die ebene Kurve 6. Ordnung mit elf Ovalen* (Leipz. Ber.; 63; 1911). — *Die Maximalzahl und Anordnung der Ovale bei der ebenen Kurve 6. Ordnung und bei der Fläche 4. Ordnung* (Math. Ann., Bd. LXXIII, 1913).

Gli studî di KLEIN (*) [pur riattaccandosi in parte a quelli di ZEUTHEN sulle bitangenti di una quartica piana reale (**)] si svolgono con metodi originali caratterizzati specialmente dall'intervento delle superficie dette di RIEMANN-KLEIN e dalla loro distinzione in diasimmetriche et ortosimmetriche. Qui ricordo come sia da KLEIN dimostrata l'esistenza di curve di genere p, dotate di 0, 1,..., p circuiti, nel caso diasimmetrico, e di curve di genere p, dotate di $p+1$, $p-1$, $p-3$,... circuiti nel caso ortosimmetrico.

Non insisto sui lavori concernenti curve di quarto, di quinto e di sesto ordine, dotate o meno di assegnate singolarità, lavori dovuti a W. FR. MEYER, BRILL, GENTRY, BULLARD, HJELMMAN, BARCROFT, DOWLING, PETER FIELD, ROSENBLATT . . . (***).

Nelle ricerche variamente dirette, che si son venute citando, l'effettiva costruzione di curve soddisfacenti a condizioni assegnate è generalmente ottenuta mediante « piccola variazione » di una curva spezzata. Il metodo consiste nella introduzione di $h \geqq 2$ curve $f_i = 0$ d'ordini n_i $(i = 1, 2,..., h)$ a punti reali e di una curva reale $g = 0$ d'ordine $n_1 + n_2 + \cdots + n_h$, con tale scelta che la curva:

$$f_1 f_2 \ldots f_h + t g = 0 \qquad (\alpha)$$

per t reale, di segno opportuno e di valor assoluto abbastanza piccolo, possegga le volute proprietà.

Nella presente Memoria mi sono proposto di sottoporre il metodo della « piccola variazione » ad uno studio sistematico. Allo scopo di circoscrivere

---

(*) Vedansi specialmente: *Eine neue Relation zwischen den Singularitäten einer algebraischen Curve* (Math. Ann., Bd. X, pag. 199). — *Ueber den Verlauf der Abel'schen Integrale bei den Curven vierten Grades* (Ibid., pag. 365). — *Ueber eine neue Art von Riemann'schen Flächen* (Ibid., pag. 398; cfr. Bd. VII, pag. 558). — *Ueber Realitätsverhältnisse bei der einem beliebiger Geschlechte zugehörigen Normalcurve der* φ (Math. Ann., Bd. XLII, pag. 1). — *Riemann'sche Flächen* (Autograph. Vorles., Göttingen, 1892).

(**) ZEUTHEN, *Sur les différentes formes des courbes du quatrième ordre* (Math. Ann., Bd. VII, pag. 410).

(***) Per la bibliografia in proposito vedasi la diligente prefazione al lavoro di ROSENBLATT: *Untersuchungen über die Gestalten der algebraischen Kurven sechster Ordnung* (Bull. de l'Académie des Sciences de Cracovie, 1910, pag. 636). Cfr. pure KOHN, *Specielle ebene algebraische Kurven* [*Erster Teil: Ebene Kurven dritter und vierter Ordnung*] (Encyclopädie der Math. Wiss., III, 2, Heft 4), num. 53.

la trattazione, ho però escluso, così per le $f_i = 0$ come per la (α), l'esistenza di punti multipli reali e per le $f_i = 0$ anche quella di mutui contatti reali. In tale campo ho potuto raggiungere risultati di notevole generalità. Ho dimostrato, ad es., come (supposte le $f_i = 0$ in posizione generica) si possa realizzare algebricamente una « piccola variazione » di cui siano assegnati i caratteri topologici (§ 9) ed ho stabilito le condizioni perchè la (α) risulti dotata del massimo numero di circuiti relativo al suo ordine (§ 12).

Le ricerche svolte si fondano in parte su concetti e procedimenti offerti dall'*Analysis situs* del piano projettivo, in parte invece su sviluppi di carattere algebrico appartenenti specialmente alla teoria dei sistemi lineari di curve piane ed alla geometria sopra una curva.

Nell'intento di mantenere nettamente distinti i due diversi ordini di considerazioni, ho diviso il lavoro in due parti. La prima (dal § 1 al § 7) è di contenuto strettamente topologico, la seconda (dal § 8 al § 12) ne applica le conclusioni alle curve piane algebriche reali.

Il § 1 contiene alcuni preliminari sui *circuiti* (privi di punti multipli) nel piano projettivo e sulla divisione in regioni prodottavi da un sistema di circuiti in numero finito. È notevole, per alcune distinzioni in casi, l'intervento del concetto di segmento *di seconda specie* rispetto ad un circuito pari.

I §§ 2, 3, 4, 5 si riferiscono a sistemi Σ di circuiti sottoposti alla restrizione che per un punto del piano passino al più due circuiti del sistema.

Nel § 2 è studiata la « piccola variazione » di un sistema Σ col metodo dei *collegamenti*, cioè mediante un'operazione topologica nell'*intorno* di ogni mutua intersezione O fra circuiti di Σ [soppressione in Σ dei segmenti concorrenti in O e sostituzione con due *collegamenti* in *campi* opposti al vertice (Fig. 2)].

Nel § 3 è introdotto il metodo dei *passaggi* in cui è essenziale la considerazione del numero pari o dispari delle intersezioni di un segmento (o di un circuito) col suo trasformato [*parità dei passaggi*]. Nella determinazione di una « piccola variazione » con tale metodo intervengono il concetto di *Streckencomplex* e quello di *albero*.

Il § 4 stabilisce un limite superiore per il numero a' dei circuiti del sistema Σ' trasformato di Σ. Se Σ possiede a circuiti e presenta $k > 0$ intersezioni, si dimostra la:

$$a' \leq a + k - 2.$$

Supposto però Σ decomponibile in h sistemi $S_i\,(i = 1, 2, \ldots, h)$ tali che circuiti di uno stesso S_i non posseggano mutue intersezioni, si trova:

$$a' \leq a + k - 2(h-1),$$

quando due sistemi S_i, S_j posseggano sempre $k_{ij} \neq 0$ mutue intersezioni. Per $h = 2$, 3, 4 il limite superiore può diventare un massimo colla comparsa di particolari coppie, terne, quaterne di circuiti, mentre ciò si esclude per $h > 4$. L'ipotesi che le k_{ij} non siano necessariamente tutte $\neq 0$ porta all'introduzione di una costante d ed alla relazione:

$$a' \leq a + k - 2(h-d).$$

Il § 5 è uno studio topologico delle coppie, terne e quaterne di circuiti inerenti ai casi di massimo trattati al § 4. I tipi elencati sono rappresentati nelle tavole fuori testo.

Nei §§ 6, 7 è tolta una precedente restrizione, supponendo che per un punto del piano possan passare più di due circuiti di Σ. Nel § 6 è generalizzato in tal senso il concetto di «piccola variazione» coll'introduzione di convenienti operazioni elementari. Nel § 7 si estendono ai nuovi sistemi i risultati del § 4.

Il § 8, che inizia la Parte II, studia la curva (α) nelle ipotesi che per un punto reale del piano passino al più due $f_i = 0$ e che la $g = 0$ non contenga nessuna delle mutue intersezioni reali fra le $f_i = 0$. Risulta che il sistema Σ' dei circuiti di (α) si ottiene da quello Σ dei circuiti della curva spezzata $f_1 f_2 \dots f_h = 0$ con un procedimento di «piccola variazione» nel senso dei §§ 2 e 3.

Sorge il quesito se reciprocamente una «piccola variazione» topologica determinata possa algebricamente effettuarsi nel modo indicato. Il § 9, mantenute le ipotesi restrittive del § 8, risponde affermativamente a tale quesito. Nel caso di due curve $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, la trattazione si riduce alla costruzione di una $g = 0$, la quale (all'infuori eventualmente di una retta) sia nella sua parte essenziale costituita da $m \leq \frac{1}{2} n_1 n_2$ ovali circondanti altrettante mutue intersezioni reali delle $f_1 = 0$, $f_2 = 0$. È notevole l'intervento delle curve d'ordine $\frac{n_1 + n_2}{2}$ oppure $\frac{n_1 + n_2 - 1}{2}$ passanti per le dette m intersezioni. Per $h > 2$ curve $f_i = 0$ la trattazione si fonda su quella del precedente caso $h = 2$.

Il § 10 risolve, con metodi essenzialmente diversi, la questione del § 9 in alcuni casi particolari. In essi una delle $f_i = 0$ è una curva di genere p

dotata di $p+1$ oppure di p circuiti, la $g=0$ una sua curva aggiunta determinata mediante considerazioni di geometria sulla curva.

Il § 11 toglie le sopraindicate restrizioni del § 8; ad una « piccola variazione » algebrica così estesa corrisponde una « piccola variazione » topologica nel senso più esteso del § 6.

Nel § 12 sono stabilite le condizioni necessarie e sufficienti perchè una « piccola variazione » algebrica (nel senso più largo del § 11) produca una curva dotata del massimo numero di circuiti compatibile col suo ordine. La discussione, utilizzando i risultati dei §§ 4 e 7, conduce a soli *cinque tipi* distinti, in ciascuno dei quali il numero delle $f_i=0$ è ≤ 4 (*).

PARTE PRIMA.

La "piccola variazione„ topologica.

§ 1. Preliminari.

1. Considero il *piano* dal punto di vista della Geometria projettiva, cioè come *una superficie chiusa, ad una faccia, riducibile ad un pezzo semplicemente connesso mediante un taglio chiuso* (*di seconda classe*) (**).

(*) Hulburt (loc. cit.), riferendosi al caso di due curve $f_1=0$, $f_2=0$, aveva enunciato che curve col massimo numero di circuiti si possono ottenere soltanto coi metodi di Harnack (n_1 qualunque, $n_2=1$) e di Hilbert, in senso largo (n_1 qualunque, $n_2=2$). Nella mia Nota citata ho dimostrato invece l'esistenza di procedimenti essenzialmente diversi. Le conclusioni del § 12 completano il risultato estendendolo anche al caso di $h>2$ curve $f_i=0$.

(**) Qui ed altrove mi valgo di concetti e denominazioni fondamentali nell'*Analysis situs*. Per ciò cfr. Dehn und Heegaard, *Analysis situs* (Encyclopädie der Math. Wiss., III, 1, Heft 1) specialmente a pag. 158 e a pag. 189 e seg.[1] Per quanto riguarda il piano projettivo vedi segnatamente Schläfli, *Correzione alla Memoria: Quand'è che dalla superficie generale di terz'ordine si stacca un pezzo rientrante?* (Ann. di Mat., T. VII, pag. 193) ed Enriques, *Prinzipien der Geometrie* (Enc. der Math. Wiss., III, 1, Heft 1) a pag. 74. Cfr. pure Steinitz, *Ueber ein merkwürdiges Polyeder von einseitiger Gesamtfläche* (Journal für Math., 130, pagg. 281-307) specialmente a pag. 287 e Mohrmann, *Ueber die automorphe Collineationsgruppe des rationalen Normalkegels n. Ordnung* (Rend. del Circolo mat. di Palermo, T. XXXI) a pag. 175.

È quindi essenziale la distinzione fra *circuiti pari* e *circuiti dispari* (incontrati da una retta generica in un numero pari risp. dispari di punti) (*). Dalla trattazione *escludo circuiti dotati di punti singolari* (*multipli*). Introduco invece talora *circuiti poligonali,* cioè dotati di *punti angolari* in numero finito. Ad essi sono applicabili le considerazioni valide per i circuiti ordinarî, quando nel computo delle intersezioni con altri circuiti si conteggino in modo opportuno quelle eventualmente raccolte nei punti angolari.

Due circuiti (non aventi infiniti punti in comune) si tagliano in un numero pari di punti se uno di essi è pari, in un numero dispari di punti se sono entrambi dispari.

2. Un circuito dispari non divide il piano, ma vi traccia un taglio di seconda classe, cioè vi determina una regione R semplicemente connessa, nella quale non giacciono circuiti dispari. Segue che ogni *segmento* (di curva) congiungente due punti del circuito divide R in due parti.

Un circuito γ pari divide il piano in due regioni $R' R''$, l'una *interna* non contenente circuiti dispari, l'altra *esterna* contenente circuiti dispari. La R' è semplicemente connessa. Invece un segmento σ cogli estremi su γ e giacente in R'' o divide R'' in due regioni (una semplicemente connessa, l'altra del tipo di R'') e si dirà *di prima specie,* oppure non divide R'' ma vi determina una regione semplicemente connessa e si dirà *di seconda specie* (rispetto a γ).

Gli estremi di σ dividono γ in due segmenti, ciascuno dei quali forma con σ un circuito (poligonale) pari o dispari secondo che σ è di prima o di seconda specie. Un circuito δ dispari non secante γ taglia perciò σ, nei due casi, rispettivamente in un numero pari o dispari di punti.

Se $\sigma' = A' B'$, $\sigma'' = A'' B''$ *sono segmenti di seconda specie rispetto ad uno stesso circuito* γ (pari) *e non si tagliano, le coppie* $A' B'$, $A'' B''$ *su* γ *si separano.* Infatti, se non si separassero, sarebbe possibile scegliere su γ uno τ' dei segmenti di estremi $A' B'$ ed uno τ'' dei segmenti di estremi $A'' B''$ in modo che τ' e τ'' non abbiano punti in comune; in tal caso i circuiti $\tau' + \sigma'$, $\tau'' + \sigma''$, entrambi dispari, non si taglierebbero, il che è assurdo. Segue che se $\sigma' = A' B'$, $\sigma'' = A'' B'', \ldots, \sigma^{(q)} = A^{(q)} B^{(q)}$ sono segmenti di seconda specie rispetto a γ, si possono scegliere le notazioni in modo che su γ gli estremi si succedano nell'ordine $A' A'' \ldots A^{(q)} B' B'' \ldots B^{(q)}$.

(*) Sui circuiti nel piano vedi von Staudt, *Geometrie der Lage* (Nürnberg, 1847; trad. it. Pieri, Torino, 1888), § 12; Zeuthen, *Sur les différentes formes des courbes du quatrième ordre* (cit.) e per ulteriori citazioni Berzolari, *Allgemeine Theorie der höheren ebenen algebraischen Kurven* (Enc. der Math. Wiss., III, 2, Heft 3) a pagg. 385-386.

3. Siano $\gamma\gamma'$ due circuiti secantisi; le loro k intersezioni dividono così γ come γ' in k segmenti (considerando per $k=1$ i circuiti come segmenti cogli estremi coincidenti).

Se γ è pari, fra i k segmenti di γ', quelli di seconda specie rispetto a γ sono in numero pari o dispari secondo che γ' è pari oppure dispari. Ciò risulta dall'osservare che le intersezioni di γ' con un circuito δ dispari e non secante γ sono pur quelle di δ coi segmenti di γ' esterni a γ (cfr. num. 2).

Se fra i k segmenti di γ' due $\sigma' = A'B'$, $\sigma'' = A''B''$ sono di seconda specie rispetto a γ, le coppie $A'B'$, $A''B''$ su γ devono separarsi (num. 2), mentre su γ' non si separano. Segue che: *Se le k intersezioni di γ e γ', per opportuna scelta dei sensi, sono ugualmente ordinate sui due circuiti e γ è pari, dei k segmenti su γ' uno al più è di seconda specie rispetto a γ.* Onde *nelle dette ipotesi fra i k segmenti di γ' ne esiste uno ed uno solo di seconda specie rispetto a γ se γ' è dispari, non ne esistono se γ' è pari.*

4. Un sistema di circuiti (in numero finito) determina una divisione del piano in regioni. Due regioni i cui contorni abbiano un segmento in comune si diranno *limitrofe.* Una regione può essere limitrofa con se stessa (tale è la R determinata nel piano da un circuito dispari; vedi num. 2).

Se i circuiti dispari del sistema sono in numeri dispari non è possibile contraddistinguere le regioni coi segni + e — (tinteggiarle con due tinte) in modo che regioni limitrofe abbiano segno diverso (tinta diversa).

Infatti una retta generica (non passante per mutue intersezioni fra circuiti del sistema) taglia il sistema in un numero *dispari* di punti, che determinano sulla retta altrettanti segmenti. D'altra parte su di essa segmenti consecutivi appartengono a regioni limitrofe e, contraddistinti i segmenti come le regioni a cui appartengono, non è possibile ciò avvenga in modo che a segmenti consecutivi competano ovunque segni opposti.

Se i circuiti dispari del sistema sono in numero pari (anche nullo) è possibile contraddistinguere le regioni coi segni + e — (tinteggiarle con due tinte) in modo che regioni limitrofe abbiano segno diverso (tinta diversa).

Sia P un punto non appartenente a circuiti del sistema nè allineato con eventuali tratti rettilinei di tali circuiti. Una retta per P taglia il sistema in un numero pari di punti che su di essa determinano altrettanti segmenti. Sopra ogni retta per P si contraddistinguano alternatamente tali segmenti coi segni + e —, attribuendo il segno + al segmento contenente P e considerando come un segmento cogli estremi coincidenti ogni punto in cui sia raccolto un numero pari di intersezioni della retta con circuiti del sistema. Punti di una stessa regione giacciono così su segmenti ugualmente contrassegnati, punti di regioni limitrofe su segmenti diversamente contrassegnati. Si attribuisca ad ogni regione il segno dei segmenti che le appartengono; le regioni vengono contraddistinte nel modo voluto.

Nel caso di circuiti *tutti pari*, le regioni si possono assai semplicemente contraddistinguere attribuendo ad una di esse il segno $+$ od il segno $-$, secondo che i circuiti del sistema ai quali è interna sono in numero pari o dispari (*).

5. Il sistema consti di due circuiti $\gamma\gamma'$ aventi $k>0$ punti in comune. *Le regioni sono* $k+2$ *se* $\gamma\gamma'$ *sono pari ed inoltre fra i* k *segmenti di* γ' *nessuno è di seconda specie rispetto a* γ; *sono* $k+1$ *in ogni altro caso.*

Nel primo caso infatti γ divide il piano in due regioni e, introducendo successivamente i k segmenti di γ', ognuno di essi stacca una nuova regione. Se $\gamma\gamma'$ sono pari, ma γ' presenta segmenti di seconda specie rispetto a γ, l'insieme di γ e di uno di tali segmenti divide il piano in due regioni semplicemente connesse; nella successiva introduzione degli altri $k-1$ segmenti di γ', ogni segmento stacca una nuova regione. Se infine uno dei circuiti (e sia γ) è dispari, esso determina nel piano una regione semplicemente connessa ed ogni segmento di γ' stacca una nuova regione.

Dalle cose dette segue pure che, se γ' non possiede segmenti di seconda specie rispetto a γ, lo stesso avviene di γ rispetto a γ'. In tal caso inoltre, delle $k+2$ regioni, $k+1$ sono semplicemente connesse, mentre la rimanente è ad una faccia e contiene circuiti dispari; il suo contorno si dirà *contorno esteriore* del sistema. Negli altri casi le $k+1$ regioni sono tutte semplicemente connesse.

6. *Se* $\gamma\gamma'$ *sono pari e privi di mutui segmenti di seconda specie, è possibile scegliere i sensi positivi sui circuiti e contrassegnare le regioni in tal maniera che il contorno delle regioni contraddistinte col* $+$ *si possa percorrere in modo continuo descrivendo i segmenti di* γ *in senso positivo e quelli di* γ' *in senso negativo, mentre il contorno di quelle contraddistinte col* $-$ *si*

(*) Le questioni trattate in questo numero hanno qualche affinità col cosiddetto *Kartenfarbenproblem* (Cfr. Dehn und Heegaard, loc. cit., pagg. 177-178), il quale è però stato studiato specialmente per superficie *a due faccie.* Per le superficie ad una faccia vedasi il breve cenno sulla superficie di Möbius dato da Heffter in nota al suo lavoro: *Ueber das Problem der Nachbargebiete* (Math. Ann., Bd. XXXVIII, pag. 477) a pagg. 479-480.

possa percorrere in modo continuo descrivendo i segmenti così di γ come di γ' in senso positivo.

Dim. — Fra le $k+2$ regioni, le $k+1$ semplicemente connesse si possono considerare come i *pezzi* di una superficie (semplicemente connessa) a due faccie. È perciò possibile (*) percorrere i contorni di tali regioni ed il contorno esteriore in sensi tali che un segmento comune ai contorni di due regioni (limitrofe) venga percorso sui due contorni in sensi opposti. Su γ [su γ'] si assuma come positivo il senso nel quale è percorso *un* suo segmento pensato come appartenente al contorno di una regione interna a γ [risp. esterna a γ']. Seguirà che tutti i segmenti di γ [risp. di γ'] verranno percorsi in senso positivo o negativo secondo che vengano pensati appartenenti al contorno di regioni interne od esterne a γ [risp. esterne o interne a γ']. Si muti il senso per i contorni delle regioni esterne a γ e si scelgano i segni delle regioni col criterio indicato in fine del num. 3; risulteranno le condizioni espresse nell'enunciato.

Se $\gamma\gamma'$ sono pari e dotati di mutui segmenti di seconda specie, non è possibile scegliere i sensi positivi sui circuiti e contrassegnare le regioni in maniera da soddisfare alle condizioni sopra indicate.

Se ciò fosse possibile, con procedimento inverso a quello seguito nel caso precedente si giungerebbe a stabilire per i contorni delle $k+1$ regioni sensi tali che ogni segmento comune ai contorni di regioni limitrofe venga percorso sui due contorni in sensi opposti. Il piano projettivo risulterebbe così composto di *pezzi* ad indicatrici concordi, il che è assurdo trattandosi di superficie ad una faccia.

Se $\gamma\gamma'$ sono dispari, è possibile scegliere i sensi positivi sui circuiti e contrassegnare le regioni in maniera da soddisfare alle condizioni sopra indicate.

Infatti tagliando il piano lungo γ si ha una superficie (semplicemente connessa) a due faccie, di cui le $k+1$ regioni determinate da $\gamma\gamma'$ sono i *pezzi*. È dunque lecito immaginare i contorni di tali regioni descritti in modo che segmenti (di γ') comuni ai contorni di due regioni limitrofe siano descritti sui due contorni in senso inverso. Regioni separate da γ non sono, sotto l'aspetto attuale, da considerarsi come adiacenti. Se si seguono i due bordi del taglio γ partendo da un punto su un bordo e ritornando a questo (sullo stesso bordo), si riconosce che nei contorni delle varie regioni i segmenti di γ sono percorsi tutti in ugual senso; e questo si fisserà come po-

(*) Si tenga presente quanto si legge in Dehn und Heegaard, loc. cit., pag. 158.

sitivo. Richiamata l'osservazione precedente sui segmenti di γ', comunque su di esso si fissi il senso positivo, con opportuna scelta dei segni delle regioni, risultano soddisfatte le volute condizioni.

7. Alcuni dei risultati precedenti (num.[i] 5 e 6) si estendono a sistemi di più circuiti a due a due secantisi. Qui mi limito a brevi osservazioni, supponendo che per un punto del piano passino al più due circuiti del sistema. Sia k il numero delle mutue intersezioni. Se il sistema contiene un circuito dispari il numero delle regioni è $k+1$. Se il sistema è di circuiti *tutti pari*, le regioni sono talora in numero di $k+2$ (di cui $k+1$ sono semplicemente connesse ed una contiene circuiti dispari), talora invece in numero di $k+1$. I due casi si dirimono nel modo seguente. Detti $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 \ldots$ i circuiti del sistema, si supponga che γ_2 sia privo di segmenti di seconda specie rispetto a γ_1, che γ_3 sia privo di tali segmenti rispetto al *contorno esteriore* della coppia $\gamma_1 \gamma_2$, che γ_4 sia nelle stesse condizioni rispetto all'analogo *contorno esteriore* della terna $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ e che così si continui sino ad esaurire il sistema; si verifica allora il primo caso. Se invece il detto procedimento si arresta per la comparsa di segmenti di seconda specie, si verifica il secondo caso. È notevole che il secondo caso può avverarsi anche quando i circuiti presi

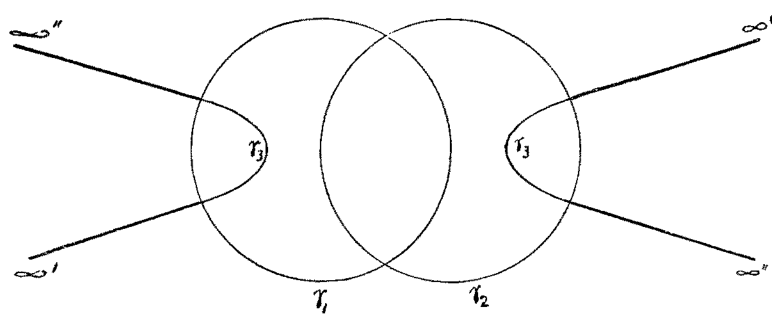


Fig. 1.

a due a due non presentino mutui segmenti di seconda specie, come dimostra la qui annessa Fig. 1, ove i segmenti di γ_3 di seconda specie rispetto al contorno esteriore della coppia $\gamma_1 \gamma_2$ sono segnati con tratto più forte.

§ 2. La « piccola variazione » di un sistema Σ di circuiti col metodo dei *collegamenti*.

8. Due circuiti $\gamma_1 \gamma_2$ si incontrino in un punto O. Nel piano l'intorno di O si scompone in quattro *campi* a due a due opposti al vertice. Si convenga di assegnare a due di essi opposti al vertice il segno $+$ ed ai rimanenti il segno $-$ (Fig. 2). Su γ_1 [risp. su γ_2] in prossimità di O e da bande opposte si prendano due punti A_1, B_1 [risp. A_2, B_2] e si supponga che, ad es., $O A_1$, $O A_2$ fronteggino uno dei campi di segno $+$. Soppressi su γ_1 e γ_2 i segmenti $A_1 O B_1$, $A_2 O B_2$, si sostituiscano con segmenti (*collegamenti*) $B_1 B_2$, $A_1 A_2$ nell'intorno di O e nei campi di segno $+$ (Fig. 2 *bis*) oppure con segmenti (*collegamenti*) $A_1 B_2$, $A_2 B_1$ nell'intorno di O e nei campi di segno $-$ (Fig. 2 *ter*). Tale operazione elementare si dirà « piccola variazione » applicata a γ_1 e γ_2 in O. Essa, dal punto di vista topologico, è individuata dal segno $+$ o $-$ che compete ai campi in cui si tracciano i collegamenti.

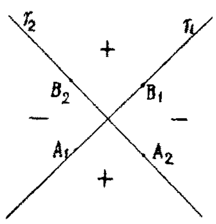


Fig. 2.

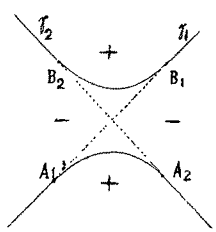


Fig. 2 *bis*.

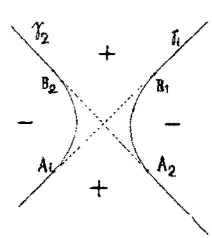


Fig. 2 *ter*.

9. Sia Σ un sistema di circuiti (in numero finito), privi di punti singolari (cfr. num. 1) e di mutui contatti, così disposti che per un punto del piano ne passino al più due.

Sia k il numero dei punti di intersezione e per i campi nell'intorno di ciascuno si proceda alla scelta dei segni secondo il numero precedente. Tale scelta è arbitraria, ma può esser fatta con criterî di opportunità.

Si può ad es. assegnare su ciascun circuito di Σ il senso positivo ed attribuire il segno $+$ (risp. $-$) ai campi fronteggiati da segmenti che, a partire dal punto di intersezione, vengono percorsi in sensi dello stesso nome (risp. di nome diverso) [*1.° criterio*]. Si veda perciò la Fig. 3, dove i sensi positivi dei circuiti sono indicati da freccie.

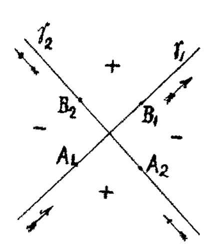


Fig. 3.

Se i circuiti dispari di Σ sono in numero pari (anche nullo), contraddistinte le regioni coi segni $+$ e $-$ secondo il num. 4, si può invece attribuire a ciascuno dei campi (nell'intorno dell'intersezione) il segno della regione a cui esso appartiene [2.° *criterio*].

Il secondo criterio può talora coincidere col primo; ciò ad es. è lecito (num. 6) nel caso in cui Σ consti di due circuiti pari privi di mutui segmenti di seconda specie oppure consti di due circuiti dispari. Talora invece i due criterî, pur essendo entrambi applicabili, differiscono in modo essenziale; ciò avviene ad es. (num. 6) nel caso in cui Σ consti di due circuiti pari dotati di mutui segmenti di seconda specie.

10. Se in alcuni dei k punti d'intersezione si applica (num. 8) ai circuiti ivi concorrenti una «piccola variazione», Σ si trasforma in un sistema di circuiti dotati eventualmente di nodi o di mutue intersezioni nei punti sui quali non si è operato. Poichè in ogni punto si può applicare la «piccola variazione» di segno $+$, o quella di segno $-$, o infine non applicarne alcuna, il numero dei modi in cui il procedimento si esplica (compreso il caso di nessun procedimento) è fornito da quello delle disposizioni con ripetizione di 3 cose a k a k, ossia da 3^k.

Se la «piccola variazione» si applica in tutti e k i punti, si dirà brevemente applicata a Σ. Il sistema Σ' che si ottiene (sistema *trasformato*) è costituito da circuiti privi così di nodi come di mutue intersezioni. Sarà questo il solo caso considerato in seguito.

Il procedimento di «piccola variazione» si può applicare a Σ in 2^k modi, quante cioè sono le disposizioni con ripetizione dei segni $+$ e $-$ a k a k. Una di tali disposizioni infatti individua una distribuzione dei segni nei k punti di intersezione, quindi caratterizza il procedimento.

Ad ogni «piccola variazione» di Σ è annessa quella che se ne ricava mutando tutti i segni e che si dirà *complementare* alla prima.

È infine da osservarsi che, dedotto da Σ il trasformato Σ' col metodo ora esposto dei collegamenti, è sempre lecito, sotto l'aspetto topologico, sostituire ai circuiti di Σ' circuiti prossimi.

§ 3. La «piccola variazione» di Σ col metodo dei *passaggi*.

11. La «piccola variazione» di Σ può essere presentata sotto un diverso aspetto, più opportuno per alcune fra le applicazioni di carattere algebrico.

Si considerino su γ_1 (di Σ) i punti di intersezione cogli altri circuiti e siano O, O' due consecutivi di essi risp. su γ_2, γ'_2 (Figg. 4 e 5). Si prendano su γ_1 in prossimità di O (risp. di O') i punti $A_1\, B_1$ (risp. $C_1\, D_1$), in modo che sul circuito i punti si succedano nell'ordine $A_1\, O\, B_1\, C_1\, O'\, D_1$. Da bande op-

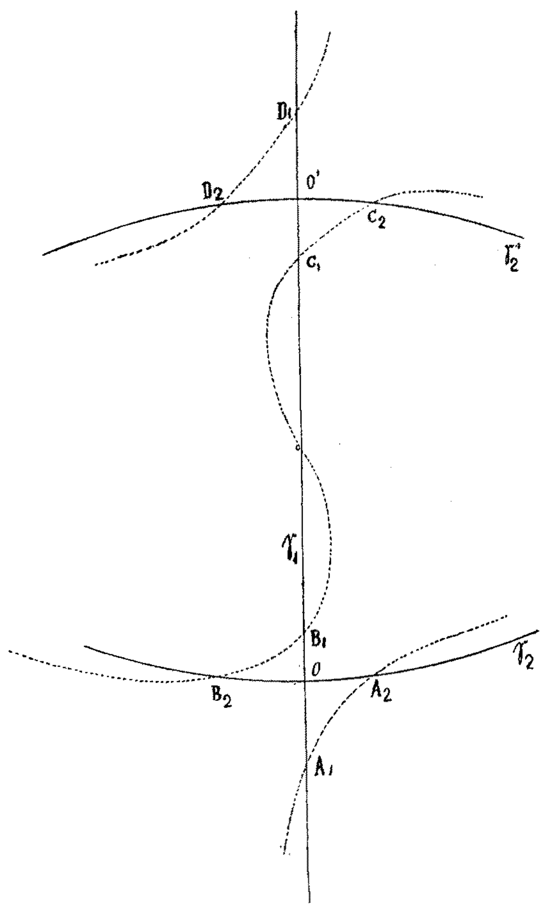


Fig. 4.

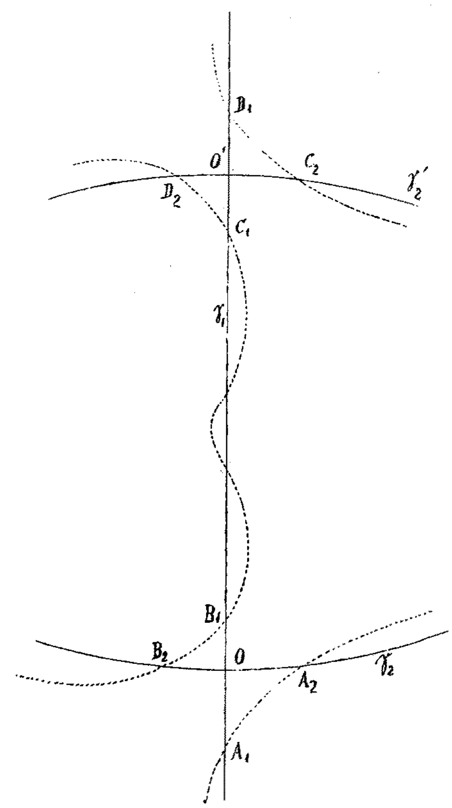


Fig. 5.

poste e in prossimità di O (risp. di O') su γ_2 (risp. su γ'_2) si segnino i punti $A_2\, B_2$ (risp. $C_2\, D_2$), in modo che i due campi fronteggiati da $O A_2$, $O B_1$ e da $O' C_1$, $O' C_2$ appartengano ad una stessa regione.

Per la «piccola variazione» in O, si introducano i collegamenti $A_1 A_2$, $B_1 B_2$; il procedimento potrà essere continuato in O' coll'introduzione di $C_1 C_2$, $D_1 D_2$, oppure con quella di $C_1 D_2$, $C_2 D_1$. In entrambi i casi il segmento $\sigma = O\,B_1\,C_1\,O'$ di γ_1 si può supporre sostituito da un segmento prossimo che abbia un estremo nel campo $\widehat{B_2\,O\,B_1}$, ma che nel primo caso (Fig. 4) abbia l'altro estremo in $\widehat{C_1\,O'\,C_2}$, quindi ***tagli*** σ ***in un numero dispari di punti***, mentre nel secondo (Fig. 5) abbia l'altro estremo in $\widehat{C_1\,O'\,D_2}$, quindi ***tagli*** σ ***in un numero pari*** (***anche nullo***) ***di punti.***

Analogamente un circuito di Σ non intersecato da altri del sistema si può anche supporre sostituito da un circuito prossimo che lo taglierà in un numero di punti pari o dispari secondo che è pari o dispari il circuito stesso.

Il numero delle intersezioni di un segmento (o di un circuito) col segmento (col circuito) deformato si dirà brevemente in seguito numero dei *passaggi.*

12. Per caratterizzare un procedimento di « piccola variazione » col metodo dei passaggi, si svolgano le seguenti osservazioni.

Preso un circuito di Σ, si considerino in Σ quelli secanti il dato, poi quelli secanti uno almeno dei circuiti nuovamente introdotti e così si prosegua fino a che l'operazione si arresti. Si otterrà un sistema Σ_1, che dirò *sistema connesso.* Se Σ_1 non coincide con Σ, si operi analogamente su uno dei circuiti di Σ rimanenti e così si prosegua. Il sistema Σ risulterà in generale composto di più sistemi connessi:

$$\Sigma_1,\ \Sigma_2,\ \Sigma_3, \ldots$$

i quali posseggano rispettivamente:

$$k_1,\ k_2,\ k_3, \ldots$$

intersezioni, essendo:

$$k_1 + k_2 + k_3 + \cdots = k.$$

Si consideri Σ_1 e si supponga per ora che non possegga circuiti (dispari) dotati di una sola intersezione nè si riduca ad un sol circuito. In tale ipotesi l'insieme dei segmenti di Σ_1 forma (secondo il linguaggio della ***Analysis situs***) uno *Streckencomplex* od una *rete* (*). Poichè ogni segmento passa per due dei k_1 punti e per ciascuno di questi passan quattro segmenti, il numero totale dei segmenti è $2\,k_1$. Secondo un teorema noto (**) è possibile (e in

---

(*) DEHN und HEEGAARD, loc. cit., pag. 171 e seg.ⁱ

(**) DEHN und HEEGAARD, loc. cit., pagg. 171-172.

più maniere) sopprimere $2k_1 - k_1 + 1 = k_1 + 1$ segmenti in modo che lo *Streckencomplex* si muti in un *albero*, cioè in una configurazione senza circuiti (*ohne Kreise*).

Su ciascuno dei $k_1 - 1$ segmenti (*rami*) dell'albero si fissi la parità pel numero dei passaggi (secondo il num. 11). Si osservi che ciascuno dei segmenti di Σ_1 esclusi è segmento di chiusura di un circuito (poligonale) i cui rimanenti lati sono *rami* dell'*albero*, che la parità del numero di intersezioni del circuito poligonale col sistema trasformato di Σ_1 è ben determinata, che quindi infine è pure determinata la parità del numero dei passaggi sul segmento di chiusura.

La scelta della parità sui *rami* dell'*albero*, quindi su tutti i segmenti di Σ_1, si può dunque fare in 2^{k_1-1} modi.

Se Σ_1 possiede un circuito γ_1 dotato di una sola intersezione O, γ_1 è dispari, è pure dispari il circuito γ_2 che lo interseca in O, nè intervengono altri circuiti dispari (che taglierebbero γ_1 fuori di O). Se Σ_1 è composto solo di γ_1 e γ_2, il sistema trasformato taglia necessariamente così γ_1 come γ_2 in un numero pari di punti, onde la scelta della parità dei passaggi si può fare in un sol modo (in 2^{k_1-1} modi per $k_1 = 1$).

Se Σ_1 contiene altri circuiti si prescinda da γ_1 e da O. Il sistema Σ^*_1 che così risulta è uno *Streckencomplex* con $k_1 - 1$ punti e $2(k_1 - 1)$ segmenti, sui quali perciò (v. sopra) la scelta della parità per il numero dei passaggi si può fare complessivamente in 2^{k_1-2} modi. Introdotti ora nuovamente γ_1 ed O, il sistema trasformato deve tagliare γ_1 in un numero pari di punti e resta solo a scegliere la parità per uno dei due segmenti in cui O divide quello di Σ^*_1 al quale appartiene. Il numero complessivo dei modi è quindi $2 \cdot 2^{k_1-2}$, cioè ancora 2^{k_1-1}.

Fissata così su ciascun segmento di Σ_1 la parità del numero dei passaggi, non è ancora individuata la «piccola variazione», rimanendo ancora la scelta fra due «piccole variazioni» *complementari* (cfr. num. 10 in fine). Questa si dirime fissando il *campo* di partenza nell'intorno di uno dei k_1 punti (cioè il segno $+$ o $-$ della «piccola variazione» in quel punto).

Poichè la scelta del segno si può fare in due modi, *le «piccole variazioni» distinte di Σ_1 sono in numero di* $2 \cdot 2^{k_1-1} = 2^{k_1}$. Il risultato è valido anche nel caso finora escluso di un sol circuito che non dà luogo a scelta ($k_1 = 0$, $2^{k_1} = 1$).

Analoghe conclusioni valendo per $\Sigma_2, \Sigma_3, \ldots$, segue che il numero delle «piccole variazioni» essenzialmente distinte di Σ è:

$$2^{k_1} \cdot 2^{k_2} \cdot 2^{k_3} \ldots = 2^{k_1+k_2+k_3+\cdots} = 2^{k}.$$

Si ritrova così il risultato raggiunto al num. 10 col metodo dei collegamenti e ciò implicitamente dimostra che la scelta della parità dei passaggi si può sempre effettuare nel modo detto senza coinvolgere contraddizioni.

13. A complemento di quanto è esposto al num. 12, si aggiunga un ovvio procedimento di costruzione per l'*albero* estratto da un *sistema connesso* di circuiti, sistema che per semplicità dirò Σ e supporrò composto di k punti e $2k$ segmenti.

Siano $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \dots \gamma_r$ $(r > 1)$ i circuiti di Σ e si indichi con $k_{ij} = k_{ji}$ il numero delle intersezioni di γ_i con γ_j. Si potrà sempre supporre un tale ordinamento dei circuiti, che ciascuno tagli uno almeno dei precedenti.

Ciò posto si sopprima un segmento di γ_1 e si mantenga la *catena* dei rimanenti $k_{12} + k_{13} + \cdots + k_{1r} - 1$. I $k_{12} + k_{23} + k_{24} + \cdots + k_{2r}$ segmenti di γ_2 si succedono distribuiti in k_{12} *catene* cogli estremi su γ_1; in ciascuna catena si sopprima un segmento ad arbitrio e si mantengano i rimanenti, in tutto

$$k_{12} + k_{23} + k_{24} + \cdots + k_{2r} - k_{12} = k_{23} + k_{24} + \cdots + k_{2r}.$$

I $k_{13} + k_{23} + k_{34} + \cdots + k_{3r}$ segmenti di γ_3 si succedono distribuiti in $k_{13} + k_{23}$ *catene* coi due estremi su uno dei circuiti γ_1, γ_2; soppresso in ciascuna catena un segmento, si mantengano i rimanenti, in tutto

$$k_{13} + k_{23} + k_{34} + \cdots + k_{3r} - k_{13} - k_{23} = k_{34} + k_{35} + \cdots + k_{3r}.$$

Così si prosegua fino ad esaurire il sistema, osservando che in generale i

$$\sum_{i=1}^{s-1} k_{is} + \sum_{i=s+1}^{r} k_{si}$$

segmenti di γ_s si succedono distribuiti in $\sum_{i=1}^{s-1} k_{is}$ catene cogli estremi sui circuiti γ_i $(i < s)$, sopprimendo in ciascuna catena un segmento, mantenendo i rimanenti, in tutto $\sum_{i=s+1}^{r} k_{si}$.

I segmenti mantenuti in numero di

$$\begin{aligned} k_{12} + k_{13} + \cdots + k_{1r} - 1 \\ + k_{23} + \cdots + k_{2r} \\ + \cdots\cdots\cdots \\ + k_{r-1,r} = k - 1 \end{aligned}$$

costituiscono l'*albero* cercato. Ad esso *non appartiene alcun segmento di* γ_r (più in generale *non appartiene alcun segmento di un circuito* γ_s *secante solo circuiti* γ_i *per* $i < s$).

Segue che *nel caso di due circuiti l'albero si può ridurre alla catena di* $k-1$ *dei* k *segmenti di uno di essi.* Più in generale *se le* k *intersezioni son tutte raccolte su un circuito* γ_1 *del sistema, l'albero si può ridurre alla catena di* $k-1$ *segmenti di* γ_1 (*).

§ 4. Di un limite superiore per il numero dei circuiti del sistema trasformato Σ'.

14. Sia Σ un sistema di a circuiti con k intersezioni; sia Σ' il suo trasformato per « piccola variazione ».

Se è $k=0$, Σ' *possiede* a *circuiti.*

Se è $k \neq 0$, si domanda il massimo numero di circuiti raggiunto da Σ'. Prescindendo dai circuiti privi di intersezioni, che permangono, per formare un circuito di Σ' occorrono almeno due dei $2k$ segmenti di Σ; l'ipotesi più favorevole sarà quindi che i segmenti si distribuiscano in k coppie a formare k circuiti. Siano σ_1, τ_1 due segmenti così accoppiati ed appartenenti ai circuiti γ, δ; si indichino con O_1, O_2 i loro estremi comuni e su γ, δ si assumano i versi positivi nei sensi $\overline{O_1 O_2}$ dei segmenti σ_1, τ_1. Il segmento successivo di σ_1 su γ (e sia σ_2) dovrà essere accoppiato con un segmento avente l'estremo in O_2, e, non potendo questo essere τ_1, sarà il suo successivo τ_2 su δ. Sia O_3 il secondo estremo comune a σ_2, τ_2 e si continui il procedimento fino a raggiungere nuovamente su γ e δ (come secondo estremo) il punto O_1. Se i punti intervenuti sono $k_1 \leq k$, ai due circuiti si sono sostituiti k_1 circuiti. Se è $k_1 < k$, si prenda una coppia di segmenti diversa da quelle già considerate e si trovi un gruppo analogo di k_2 punti e così via si trovino eventualmente nuovi gruppi analoghi di k_3, k_4,..., k_r punti, essendo:

$$k_1 + k_2 + k_3 + \cdots + k_r = k.$$

(*) Basta dunque fissare la parità dei passaggi sui $k-1$ segmenti di γ_1. Ciò si può stabilire anche direttamente in modo semplice, suscettibile di estensione al caso in cui le intersezioni siano distribuite su più circuiti non secantisi (sempre riferendosi a sistemi connessi).

Il numero dei circuiti di Σ' sarà in tale ipotesi

$$a + k - 2r;$$

esso per $r = 1$ raggiunge il massimo

$$a + k - 2.$$

La « piccola variazione » in discorso si può effettuare attribuendo a tutti i punti d'intersezione il segno $+$ (num. 10), supposto applicato il *1.° criterio* (num. 9), col quale del resto, nel caso di ugual parità per γ e δ, si può far coincidere anche il *2.° criterio* (num. 9 in fine; num. 3 in fine).

Concludendo:

Se un sistema Σ di circuiti possiede a *circuiti e $k > 0$ intersezioni, il trasformato possiede circuiti in numero $\leqq a + k - 2$. Il massimo $a + k - 2$ è raggiunto quando e solo quando*

1.° *le k intersezioni sono raccolte su due soli circuiti e, per opportuna scelta dei sensi, sono su quelli nello stesso ordine,*

2.° *i segni attribuiti secondo il 1.° criterio sono tutti $+$.*

Se si intende applicare il metodo dei passaggi, fissato un *campo* iniziale opportuno (num. 12), alla seconda condizione si può (num. 3 in fine, num. 5, num. 6) sostituire la seguente:

L'assegnazione dei passaggi si fa in numero pari per tutti i segmenti se i due circuiti hanno ugual parità; se i due circuiti hanno parità diversa, si fa eccezione per l'unico segmento (del circuito dispari) di seconda specie (rispetto al circuito pari), segmento al quale si assegna un numero dispari di passaggi (*).

15. Sia Σ un sistema decomponibile nei sistemi $S_1 S_2 \ldots S_h$ $(h > 1)$ tali che i circuiti di uno stesso sistema S_i non abbiano mutue intersezioni, mentre le intersezioni dei circuiti di S_i con quelli di S_j $(i \neq j)$ siano complessivamente $k_{ij} = k_{ji} \neq 0$.

Dico che *limite superiore per il numero dei circuiti del trasformato Σ' è* $a + k - 2(h - 1)$.

Per $h = 2$ il teorema è vero (anzi *il limite superiore è un massimo*), come si vede richiamando il num. 14, immaginando in S_1, S_2 due circuiti γ_1, γ_2

(*) Coppie di circuiti nelle condizioni del presente num. sono rappresentate nelle prime quattro figure della Tavola I (V. in fine).

nelle condizioni di γ, δ del num. cit. e supponendo i rimanenti circuiti privi di intersezioni ($k_{12} = k$).

Basta perciò dimostrare che se il teorema è valido per $h-1$ sistemi S_i, lo è pure per h. Dicasi Σ_0 il sistema ottenuto da Σ colla soppressione di S_h; sia Σ'_0 un suo trasformato.

Se $\Sigma_0\, \Sigma'_0$ posseggono rispettivamente a_0, a'_0 circuiti, per ipotesi è:

$$\left.\begin{aligned} a'_0 \leqq a_0 + k_{12} + k_{13} + \cdots + k_{1,h-1} & \\ + k_{23} + \cdots + k_{2,h-1} & \\ + \cdots\cdots\cdots\cdot & \\ + k_{h-2,h-1} - 2\,(h-2). & \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Una « piccola variazione » di Σ (intesa ad es. nel senso del num. 10) si può pensare effettuata facendo seguire ad una « piccola variazione » di Σ_0 una « piccola variazione » del sistema costituito da Σ'_0 ed S_h. Detto a' il numero dei circuiti di Σ', $a^{(h)}$ quello dei circuiti di S_h, segue (num. 14):

$$a' \leqq a'_0 + a^{(h)} + k_{1h} + k_{2h} + \cdots + k_{h-1,h} - 2, \tag{2}$$

onde, per la (1), anche:

$$a' \leqq a + k - 2\,(h-1). \tag{3}$$

Il teorema è così dimostrato; ma è opportuno osservare che in (3) si ha il segno $=$ (cioè il limite superiore è un massimo) solo quando ciò avvenga insieme in (1) ed in (2). In (2) ciò avviene soltanto se Σ'_0 ed S_h posseggono tutte le loro intersezioni ugualmente ordinate su due circuiti (num. 14), per il che è necessaria in Σ'_0 la presenza di un circuito proveniente da $h-1$ segmenti appartenenti ad altrettanti circuiti dei sistemi $S_1 S_2 \ldots S_{h-1}$.

16. Si esamini *il caso* $h = 3$. Dico che *il limite superiore è un massimo.*

Come condizioni necessarie dal num. prec. si deducono le seguenti: 1.° Le mutue intersezioni fra circuiti di S_1, S_2 sono distribuite su due soli circuiti γ_1, γ_2 ed ugualmente ordinate su di questi; 2.° Esiste in S_3 un circuito γ_3 secante due segmenti di γ_1, γ_2 cogli estremi comuni, rispettivamente in k_{13}, k_{23} punti, ugualmente ordinati (nel loro insieme) su γ_3 e sul circuito proveniente dalla riunione dei due segmenti.

Tali condizioni sono realizzabili. I $2k$ segmenti (dei tre circuiti) vengono distribuiti in $k-3$ coppie ad estremi comuni e in due terne, in ciascuna delle quali i segmenti, di γ_1, γ_2, γ_3, sono disposti triangolarmente (*triangoli*).

Si prendano, com'è lecito, sui tre circuiti sensi positivi tali che uno dei contorni triangolari (quindi anche l'altro) sia percorso con continuità (il che obbliga ad un cambiamento di senso in confronto al caso $h = 2$). La « piccola variazione » corrispondente alla scelta di segni tutti — (num. 10), secondo il *1.° criterio* (num. 9), dà effettivamente luogo ad un sistema Σ' dotato del numero massimo $a + k - 4$ di circuiti.

Fissato un *campo* di partenza si può applicare anche il metodo dei passaggi (num. 12). Il numero dei passaggi va scelto pari su tutti i segmenti fatta eccezione: 1.° nel caso di *un solo* circuito dispari per il segmento (di esso) di seconda specie rispetto al *contorno esteriore* della coppia costituita dai circuiti pari (num. 5 in fine; num. 4 in fine); — 2.° nel caso di *tre* circuiti dispari per i lati di quello fra i due *triangoli* il cui contorno è circuito dispari (*).

17. Anche *per $h = 4$ il limite superiore è un massimo.* Come condizioni necessarie dal num. 15 si deducono le seguenti: 1.° Le intersezioni appartenenti ad $S_1\, S_2\, S_3$ sono distribuite su tre circuiti $\gamma_1\, \gamma_2\, \gamma_3$ nel modo del num. 16. — 2.° Esiste in S_4 un circuito γ_4 le cui intersezioni coi lati di uno dei *triangoli* della terna $\gamma_1\, \gamma_2\, \gamma_3$ sono rispettivamente in numero di k_{14}, k_{24}, k_{34} e complessivamente sono ordinate in ugual modo su γ_4 e sul contorno del *triangolo.*

Tali condizioni sono realizzabili. I $2k$ segmenti vengono distribuiti in $k - 6$ coppie di segmenti ad estremi comuni ed in quattro *triangoli,* ciascuno dei quali ha per lati segmenti di *tre* fra i quattro circuiti (nei quattro modi possibili).

È lecito fissare i sensi positivi sui circuiti in modo che i contorni dei quattro *triangoli* siano percorsi con continuità. La « piccola variazione » corrispondente alla scelta di segni tutti — (num. 10) secondo il *1.° criterio* (num. 9) dà effettivamente luogo a un sistema Σ' dotato del numero massimo $a + k - 6$ di circuiti.

Fissato un *campo* iniziale si può applicare il metodo dei passaggi (num. 12). Il numero dei passaggi va scelto pari su tutti i segmenti, fatta eccezione: 1.° nel caso di *un solo* circuito dispari per il segmento (di esso) di seconda specie rispetto al *contorno esteriore* della terna costituita dai circuiti pari (num. 7); — 2.° nel caso di *tre* circuiti dispari per i lati del *triangolo* da cui è escluso il circuito pari (**).

(*) *Terne* del tipo indicato sono rappresentate nelle Tav. I e II (V. in fine).

(**) *Quaterne* del tipo indicato sono rappresentate nelle Tav. II e III (V. in fine).

Non è lecito passare dal caso $h = 4$ al caso $h = 5$ col procedimento indicato in fine del num. 15, perchè mancano *quadrilateri* su cui operare.

Ne segue, a complemento del num. 15, che il *limite superiore*

$$a + k - 2(h - 1)$$

è un massimo per $h \leq 4$, *mentre per* $h > 4$ *si ha in ogni caso*

$$a' < a + k - 2(h - 1).$$

Maggiori particolari non occorrono per le applicazioni algebriche della Parte II.

18. Mantenute le notazioni del num. 15 si tolga la restrizione $k_{ij} \neq 0$.

Due sistemi $S_i S_j$ di Σ pei quali sia $k_{ij} \neq 0$ si dicano fra loro *collegati*. Preso il sistema S_1, se esiste in Σ un sistema collegato con S_1, p. es. S_2, lo si aggreghi ad S_1; se esiste in Σ un sistema collegato con S_1 o con S_2, lo si aggreghi ai precedenti e così si prosegua finchè si trovino sistèmi collegati con uno almeno dei precedenti; risulterà un sistema Σ_1. Se Σ_1 non esaurisce Σ, si assuma un S_i fuori di Σ_1 e si proceda analogamente alla formazione di un sistema Σ_2 analogo a Σ_1. Se Σ_1 e Σ_2 non esauriscono insieme Σ, si prosegua. Il sistema Σ risulterà in generale decomposto in d sistemi $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_d$ (*).

Sia Σ'_c il trasformato di Σ_c nella « piccola variazione » di Σ ed a_c, a'_c, k_c, h_c abbiano per Σ_c il significato attribuito ad a, a', k, h per Σ. Nella formazione di Σ_c i sistemi S_i si presentano in un ordine determinato; mantenendo tale ordinamento è lecito applicare a Σ_c il procedimento di induzione matematica del num. 15, benchè le k_{ij} non siano tutte $\neq 0$. Si ottiene così la disuguaglianza

$$a'_c \leq a_c + k_c - 2(h_c - 1).$$

Se in essa si pone successivamente $c = 1, 2, \ldots, d$, indi si somma a membro a membro, si deduce:

$$a' \leq a + k - 2(h - d). \tag{4}$$

La (4) comprende come caso particolare la (3) [num. 15], di cui la validità si estende a tutti i casi in cui è $d = 1$.

(*) Se ogni S_i si riduce ad un solo circuito, si ritrova il procedimento del num. 12 per la decomposizione di Σ in sistemi connessi.

§ 5. Studio topologico sui casi di massimo del paragrafo precedente.

19. Nel precedente paragrafo ai num.[i] 14, 16, 17 figurano coppie, terne e quaterne di circuiti, corrispondenti a casi di massimo per il numero dei circuiti del sistema trasformato. Mi propongo di studiare la reciproca posizione dei circuiti di tali *coppie*, *terne* e *quaterne*, enumerando i casi essenzialmente distinti sotto l'aspetto topologico (*).

I due circuiti $\gamma_1 \gamma_2$ di una *coppia*, se sono entrambi pari, dividono il piano in $k+2$ regioni (num. 5, num. 3 in fine). Di esse k hanno per contorno coppie di segmenti e due hanno per contorno circuiti poligonali di k segmenti. Il *contorno esteriore* può essere fornito da una coppia, oppure da un circuito poligonale. Nel primo caso, che indicherò con $(\gamma_1 \gamma_2)_1$, il sistema trasformato (della coppia) consta di $k-1$ circuiti indipendenti (**) e di un circuito che li include; nel secondo, che indicherò con $(\gamma_1 \gamma_2)_2$, il sistema trasformato consta di k circuiti indipendenti (***).

Il caso di due circuiti l'uno γ_1 pari, l'altro γ_2 dispari non presenta distinzioni; sarà indicato con $(\gamma_1 \gamma_2)_3$. Il sistema trasformato possiede un circuito dispari e $k-1$ circuiti (pari) indipendenti.

Così non presenta distinzioni il caso di due circuiti dispari $\gamma_1 \gamma_2$, che si indicherà con $(\gamma_1 \gamma_2)_4$. Il sistema trasformato possiede k circuiti (pari) indipendenti.

20. Si consideri una *terna* di circuiti $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$, tutti pari. Le regioni sono $k+2$ (num. 7; num. 16; num. 3 in fine). Di esse $k-3$ sono contornate da coppie di segmenti, due sono triangolari, tre sono contornate da circuiti poligonali dotati rispettivamente di $k_{12}+k_{13}$, $k_{23}+k_{21}$, $k_{31}+k_{32}$ lati.

Se il contorno esteriore è dato da una coppia di segmenti, i circuiti $\gamma_1 \gamma_2$ a cui questi appartengono presentano il caso $(\gamma_1 \gamma_2)_1$. Il circuito γ_3 presenterà il caso $(\gamma_3 \delta)_2$ col circuito δ composto da altra coppia di segmenti appartenenti a $\gamma_1 \gamma_2$. Se il conteggio per le coppie di segmenti (di $\gamma_1 \gamma_2$) si sup-

(*) Tali casi sono rappresentati nelle Tavole fuori testo; ogni figura è accompagnata dal simbolo relativo al caso considerato.

(**) Dico *indipendenti* due circuiti (pari), di cui *ciascuno* è esterno all'altro.

(***) I due tipi di coppie figurano già nelle ricerche di Hilbert e di Miss Ragsdale, citate nella prefazione, essendo però uno dei circuiti sempre una conica.

pone iniziato dalla prima nominata, potrà la coppia di δ occupare posto dispari o pari. Nel primo caso, che dirò $(\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3)_1$, il circuito γ_3 dà luogo agli aggruppamenti $(\gamma_1 \gamma_3)_1$, $(\gamma_2 \gamma_3)_1$; nel secondo, che dirò $(\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3)_2$, esso dà luogo invece agli aggruppamenti $(\gamma_1 \gamma_3)_2$ $(\gamma_2 \gamma_3)_2$. Precisando il posto occupato dalla coppia di δ si avrebbe una distinzione in sottocasi.

Se il contorno esteriore è triangolare due qualunque dei circuiti, siano $\gamma_1 \gamma_2$, presentano il caso $(\gamma_1 \gamma_2)_1$. Il circuito γ_3 dà il caso $(\gamma_3 \delta)_1$ col contorno esteriore della coppia $\gamma_1 \gamma_2$. La terna si dirà di tipo $(\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3)_3$.

Nei tre casi ora studiati il sistema trasformato (della terna) possiede $k-2$ circuiti indipendenti ed uno che li include.

Se il contorno esteriore è poligonale, possegga ad esempio $k_{12}+k_{13}$ lati. Risultano gli aggruppamenti $(\gamma_1 \gamma_2)_2$, $(\gamma_1 \gamma_3)_2$. Ma, ad es., γ_3 dà il caso $(\gamma_3 \delta)_2$, con δ proveniente da una coppia di segmenti di $\gamma_1 \gamma_2$, il segmento di γ_1 appartenendo al contorno esteriore di $(\gamma_1 \gamma_2)_2$. Ne consegue l'aggruppamento $(\gamma_2 \gamma_3)_1$. Il caso verrà indicato con $(\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3)_4$. Il sistema trasformato consta di $k-1$ circuiti indipendenti.

Nella *terna* $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ siano ora $\gamma_1 \gamma_2$ pari e sia γ_3 dispari. Il circuito poligonale che produce l'unico circuito dispari del sistema trasformato può essere una coppia di segmenti oppure un triangolo.

Nella prima ipotesi, uno dei segmenti della coppia è di γ_3; l'altro sia di γ_1. Il circuito γ_2 sarà nella posizione $(\gamma_2 \delta)_2$ col circuito δ composto da altra coppia di segmenti appartenenti a $\gamma_1 \gamma_3$. Secondo che, a partire dalla coppia prima nominata, quella di δ occupa posto dispari o pari, nasce l'aggruppamento $(\gamma_1 \gamma_2)_1$ oppure l'aggruppamento $(\gamma_1 \gamma_2)_2$; il primo caso sarà indicato con $(\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3)_5$, il secondo con $(\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3)_6$. Si possono introdurre sottocasi.

Nella seconda ipotesi è necessario l'aggruppamento $(\gamma_1 \gamma_2)_1$; il caso sarà indicato con $(\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3)_7$.

Nei tre casi ultimamente considerati il sistema trasformato consta di un circuito dispari e di $k-2$ circuiti (pari) indipendenti.

Il caso di un circuito pari γ_1 e di due circuiti dispari $\gamma_2 \gamma_3$ non presenta distinzioni; sarà indicato con $(\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3)_8$. Il sistema trasformato è di $k-1$ circuiti indipendenti.

Così non presenta distinzioni il caso di tre circuiti dispari $(\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3)_9$. Il sistema trasformato consta di un circuito dispari (proveniente da uno dei due triangoli) e di $k-2$ circuiti (pari) indipendenti.

21. Sia una *quaterna* di circuiti $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4$, tutti pari. Il contorno este-

riore potrà esser dato da una coppia di segmenti, da un triangolo, da un poligono ad es. di $k_{12} + k_{13} + k_{14}$ lati.

Se il contorno esteriore è dato da una coppia di segmenti di $\gamma_1 \gamma_2$, si ha uno degli aggruppamenti $(\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3)_1$ oppure $(\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3)_2$, segue rispettivamente $(\gamma_1 \gamma_2 \gamma_4)_1$ oppure $(\gamma_1 \gamma_2 \gamma_4)_2$ ed in ogni caso $(\gamma_3 \gamma_4)_1$. Si hanno così due tipi di quaterne $(\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4)_1$, $(\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4)_2$.

Se il contorno esteriore è un triangolo, si avrà ad esempio l'aggruppamento $(\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3)_3$; il circuito γ_4 coll'altro triangolo τ dà luogo al tipo $(\gamma_4 \tau)_2$ e produce gli aggruppamenti $(\gamma_1 \gamma_4)_1$, $(\gamma_2 \gamma_4)_1$, $(\gamma_3 \gamma_4)_1$. La quaterna si dirà $(\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4)_3$.

Nei tre casi il sistema trasformato (della quaterna) è di $k - 3$ circuiti indipendenti e di un circuito che li include.

Se il contorno esteriore è il poligono di $k_{12} + k_{13} + k_{14}$ lati, si hanno gli aggruppamenti $(\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3)_4$ $(\gamma_1 \gamma_2 \gamma_4)_4$ $(\gamma_1 \gamma_3 \gamma_4)_4$; segue $(\gamma_2 \gamma_3 \gamma_4)_3$. Il tipo si dirà $(\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4)_4$. Il sistema trasformato è di $k - 2$ circuiti indipendenti.

Siano ora $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ pari, γ_4 dispari. Poichè γ_4 ha le sue intersezioni su un triangolo della terna $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$, il contorno esteriore della terna ha in comune col triangolo un lato almeno, quindi o un lato o tre lati.

Nella prima ipotesi si ha, ad es., l'aggruppamento $(\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3)_4$ ed il circuito dispari del sistema trasformato proviene da una coppia di segmenti appartenenti a $\gamma_1 \gamma_4$. Il tipo si dirà $(\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4)_5$.

Nella seconda ipotesi si ha l'aggruppamento $(\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3)_3$; ma il segmento di γ_4 di seconda specie rispetto al contorno esteriore della terna può avere gli estremi su un sol lato (sia di γ_1), oppure su due lati (siano di γ_2, γ_3); onde il circuito dispari o proverrà da una coppia di segmenti (di $\gamma_1 \gamma_4$) o da un triangolo (coi lati appartenenti a $\gamma_2 \gamma_3 \gamma_4$). I due casi si diranno rispettivamente $(\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4)_6$, $(\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4)_7$.

Nei tre casi ora veduti il sistema trasformato consta di un circuito dispari e di $k - 3$ circuiti (pari) indipendenti.

Se $\gamma_1 \gamma_2$ son pari, $\gamma_3 \gamma_4$ dispari, poichè γ_4 deve applicarsi ad un circuito triangolare dispari, è necessario l'aggruppamento $(\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3)_7$. Si ha così pure $(\gamma_1 \gamma_2 \gamma_4)_7$. Il caso, unico, si indicherà con $(\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4)_8$. Il sistema trasformato è di $k - 2$ circuiti indipendenti.

Sia γ_1 pari, siano $\gamma_2 \gamma_3 \gamma_4$ dispari. Il caso, evidentemente unico, si dirà $(\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4)_9$. Il sistema trasformato possiede un circuito dispari e $k - 3$ circuiti (pari) indipendenti.

Così è unico il caso $(\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4)_{10}$ di quattro circuiti dispari. Il sistema trasformato è di $k - 2$ circuiti indipendenti.

22. Su quanto è esposto ai num.[i] 19, 20, 21 è però da osservarsi ciò che segue.

Per $k=1$ una *coppia* di circuiti può in due modi fornire una $(\gamma_1\gamma_2)_4$.

Così una *terna* $(\gamma_1\gamma_2\gamma_3)_9$ per $k_{12}=k_{13}=1$ può essere considerata come tale in due od in quattro modi secondo che sia $k_{23} \neq 1$ oppure $k_{23}=1$.

Analogamente per $k=2$ una *coppia* di circuiti, se i circuiti sono entrambi pari, è ad un tempo una $(\gamma_1\gamma_2)_1$ ed una $(\gamma_1\gamma_2)_2$, mentre, se essi sono di parità diversa, dà luogo ad una $(\gamma_1\gamma_2)_3$ in due modi differenti.

Le proprietà ora esposte dipendono dalla possibilità di mutare il senso positivo su uno o più circuiti, senza che cessino le condizioni fondamentali di ordinamento, il che *avviene solo nei casi elencati.*

§ 6. Estensione del concetto di « piccola variazione » topologica.

23. Le precedenti considerazioni si riferiscono a sistemi Σ, tali che per un punto del piano passino due circuiti di Σ al più (num. 9). Tolgasi ora tale restrizione e si consideri un punto O del piano, pel quale passino $r \geqq 2$ circuiti di Σ:

$$\gamma_1,\quad \gamma_2,\ldots,\quad \gamma_r.$$

Sui $2r$ segmenti (dei circuiti γ_i) uscenti da O, presi ordinatamente, si segnino nell'intorno di O rispettivamente i punti $A_1 A_2 A_3 \ldots A_{2r}$, in modo che A_i ed A_{i+r} siano su γ_i (da bande opposte di O). All'indice j di A_j si convenga di sostituire eventualmente ogni intero $\equiv j$ mod. $2r$.

Nell'intorno di O si determinano $2r$ *campi* $\widehat{A_j O A_{j+1}}$. In seguito ogni *collegamento* di A_j con A_{j+1} si immaginerà tracciato nel campo $\widehat{A_j O A_{j+1}}$.

24. Si introducano le seguenti operazioni (*):

Operazione U. Soppressione dei segmenti OA_j (nell'intorno di O); collegamento di A_{2l-1} con A_{2l} $(l=1, 2,\ldots, r)$ [Fig. 6, per r dispari; Fig. 7, per r pari].

Operazione U'. Soppressione dei segmenti OA_j; collegamento di A_{2l} con A_{2l+1} $(l=1, 2,\ldots, r)$.

(*) La scelta di queste operazioni è suggerita dalle questioni algebriche trattate al § 11.

Operazioni V_i (r dispari $= 2s+1$; $i = 1, 2, \dots, r$). Soppressione dei seg-

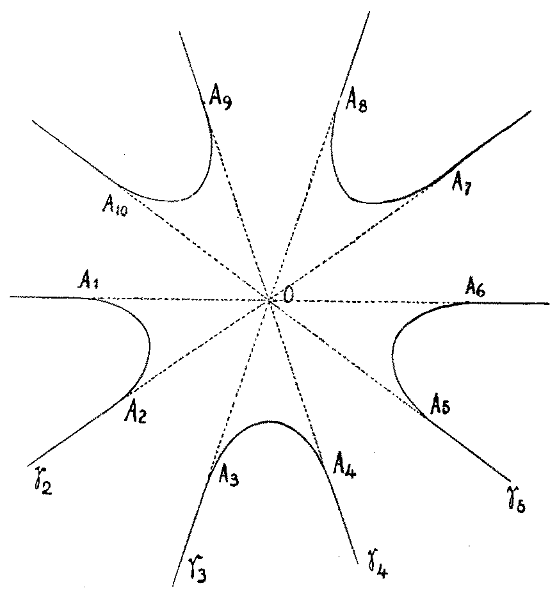


Fig. 6.

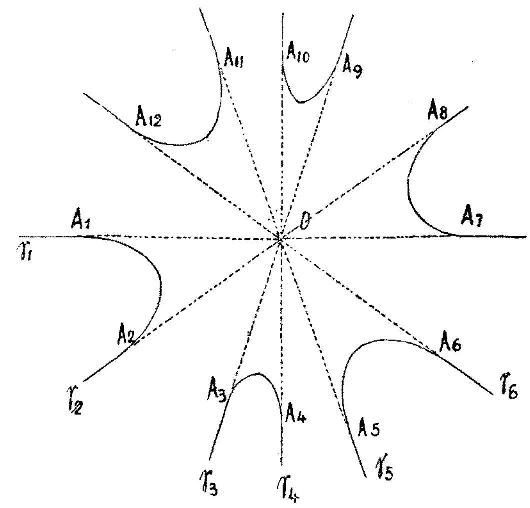


Fig. 7.

menti $O A_j$, esclusi $O A_i$ ed $O A_{i+r}$; collegamento di A_{i+2l-1} con A_{i+2l} ($l = 1, 2, \dots, s$);

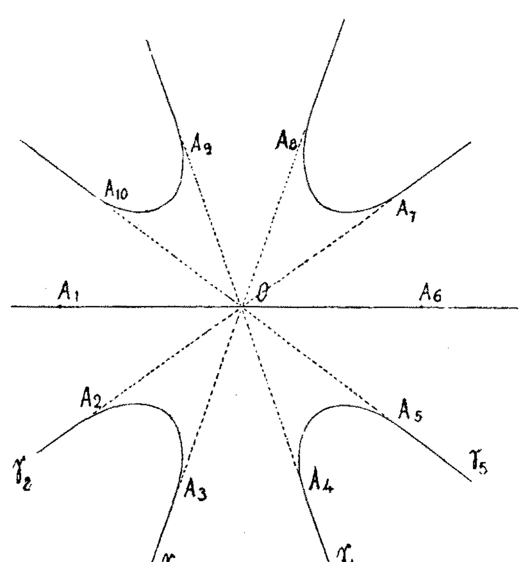


Fig. 8.

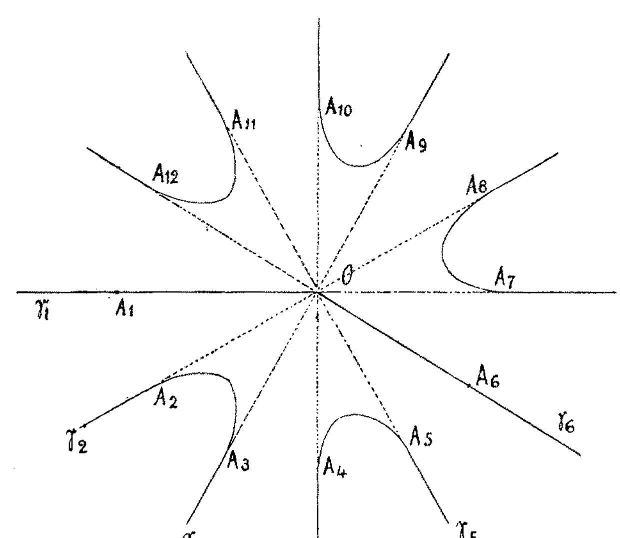


Fig. 9.

collegamento di $A_{i+r+2l-1}$ con A_{i+r+2l} ($l = 1, 2, \dots, s$) [Fig. 8 per $i = 1$, $r = 5$].

Operazioni W_i (r pari $= 2s$; $i = 1, 2, \ldots, 2r$). Soppressione dei segmenti $O A_j$, esclusi $O A_i$ ed $O A_{i+r-1}$; collegamento di A_{i+2l-1} con A_{i+2l} ($l = 1, 2, \ldots, s-1$); collegamento di A_{i+r+2l} con $A_{i+r+2l+1}$ ($l = 0, 1, 2, \ldots, s-1$) [Fig. 9 per $i = 1$, $r = 6$].

Operazioni Z_i (r dispari $= 2s+1$; $i = 1, 2, \ldots, 2r$). Soppressione dei segmenti $O A_j$, esclusi $O A_{i+1}$ ed $O A_{i+r-1}$; collegamento di A_{i+2l} con A_{i+2l+1} ($l = 1, 2, \ldots, s-1$); collegamento di A_{i+r+2l} con $A_{i+r+2l+1}$ ($l = 0, 1, 2, \ldots, s$) [Fig. 10 per $i = 1$, $r = 5$].

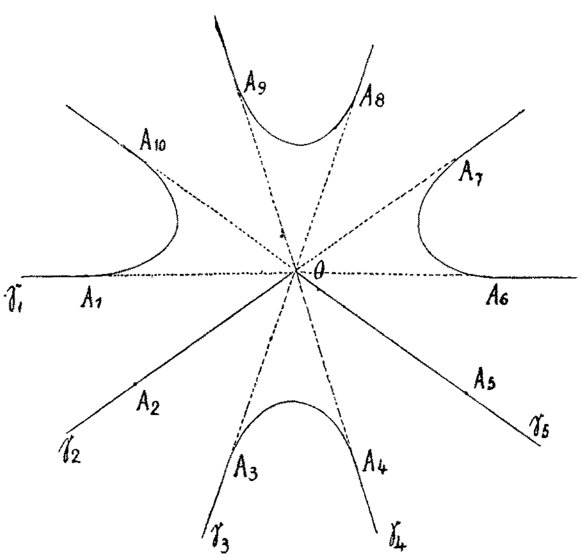


Fig. 10.

Ciascuna delle operazioni U, U', V_i, W_i, Z_i si dirà « piccola variazione » applicata in O ai circuiti $\gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_r$. Esteso così il concetto di « piccola variazione » *in un punto*, si estende immediatamente quello di « piccola variazione » *di un sistema* Σ.

Dal punto di vista topologico la « piccola variazione » di un sistema non muta essenzialmente quando si sostituiscano ai circuiti del sistema trasformato circuiti prossimi; si possono quindi generalizzare anche le considerazioni del § 3, introducendo nuovamente il concetto di *passaggio*.

Sotto l'aspetto più largo ora introdotto, in un punto O, per $r = 2$, le operazioni *di tipo W* si confondono colle operazioni *di tipo U* (coincidenti con quelle definite al num. 8); così per $r = 3$, le operazioni *di tipo Z* si confondono con quelle *di tipo U*, quando, in entrambi i casi, si prescinda dall'appartenenza o meno di O ad un circuito del sistema trasformato (*).

(*) L'osservazione, in quanto si riferisce al caso $r = 2$, dispensa dal trattare nel senso esteso del § 6 la « piccola variazione » pei sistemi Σ del caso ristretto (§§ 2, 3, 4, 5).

§ 7. Estensione dei risultati sul numero dei circuiti di Σ'.

25. Le mutue intersezioni dei circuiti di Σ siano raccolte nei punti $O_1\, O_2 \ldots O_q$ e per O_i passino $r_i \geqq 2$ circuiti. Posto:

$$k = \frac{r_1\,(r_1 - 1)}{2} + \frac{r_2\,(r_2 - 1)}{2} + \cdots + \frac{r_q\,(r_q - 1)}{2}\,, \tag{5}$$

si osservi che in (5) rientra il significato particolare di k al § 2 e segg.

Introducasi, nell'attuale senso più esteso, il trasformato Σ' di Σ mediante « piccola variazione », e si attribuiscano ad a, h, d, a' significati analoghi a quelli indicati nel § 4.

Dico sussiste ancora la

$$a' \leqq a + k - 2\,(h - d), \tag{6}$$

già dimostrata per il caso ristretto [num. 18, form. (4)].

Perciò svolgo le seguenti considerazioni.

Per O passino $r > 2$ circuiti di Σ. Spostando opportunamente nell'intorno di O uno di essi, si deduce da Σ un sistema Σ_0 di cui passano per O soltanto $r - 1$ circuiti, tagliati nell'intorno di O dal circuito spostato in $r - 1$ intersezioni semplici. Poichè è

$$\frac{(r-1)\,(r-2)}{2} + r - 1 = \frac{r\,(r-1)}{2}\,,$$

col passare da Σ a Σ_0 [form. (5)], k non si altera; nè, evidentemente, si alterano a, h, d. Ora, coll'esame dei singoli casi (num. 26), si dimostrerà come si possano scegliere Σ_0 e la sua « piccola variazione » in modo tale che il sistema trasformato Σ'_0 possegga $a'_0 \geqq a'$ circuiti, presentandosi anzi il caso del segno $=$ soltanto eccezionalmente. Se dunque Σ_0 soddisfa ad una relazione del tipo di (6), ad una simile relazione soddisfa pure Σ.

Ma la ripetizione del procedimento conduce infine ad un sistema del caso ristretto per cui la condizione si verifica. Dunque Σ soddisfa alla (6).

26. A completare quanto è esposto nel precedente numero, dimostro la possibilità di scegliere Σ_0 e Σ'_0 in modo che sia $a'_0 \geqq a'$.

Nella « piccola variazione » di Σ si supponga dapprima applicata in O

l'*operazione* U. Se r è dispari $= 2s + 1$ (Fig. 6) si sposti γ_1 in modo che esso venga a tagliare i rimanenti circuiti nei segmenti OA_j con $1 < j \leqq r$ (Fig. 11). Al sistema Σ_0 così ottenuto si applichi una « piccola variazione », che fuori dell'intorno di O coincida con quella di Σ, in O attui un'operazione *di tipo* U equivalente alla data nei campi non attraversati dal circuito spo-

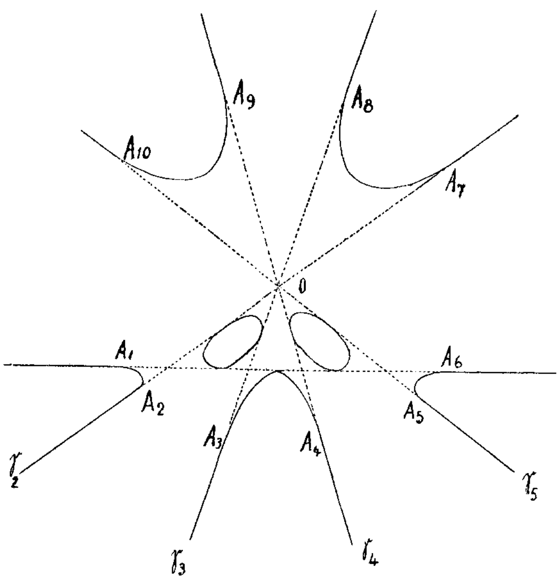


Fig. 11.

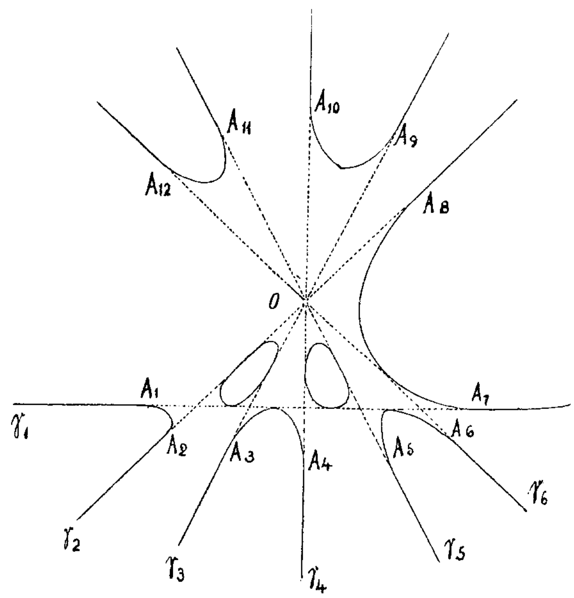


Fig. 12.

stato, e nelle nuove intersezioni semplici si comporti in modo da conservare gli antichi collegamenti (vedasi ancora la Fig. 11). Risulta:

$$a'_0 = a' + s, \tag{7}$$

per l'apparire in Σ'_0 di s nuovi circuiti (intorno ad O) accanto agli antichi di Σ'.

Se r è pari $= 2s$ (Fig. 7) si sposti γ_1 in modo che venga a tagliare (p. es.) i segmenti OA_j con $1 < j \leqq r$ (Fig. 12).

Sul sistema Σ_0 così ottenuto si operi in modo simile a quello esposto per r dispari (vedi ancora Fig. 12). Risulterà:

$$a'_0 = a' + s - 1. \tag{8}$$

Qualora in O fosse applicata, anzichè l'operazione U, l'*operazione* U', si opererebbe analogamente, raggiungendo analoghi risultati.

Si supponga invece in O applicata *l'operazione* V_i, per il che dev'essere r dispari $= 2s + 1$ (Fig. 8, $i = 1$, $r = 5$). Si sposti γ_i in modo che esso venga a tagliare i segmenti $O A_j$ con $i < j < i + r$ (Fig. 13). A Σ_0 così dedotto si applichi una « piccola variazione » che, fuori dall'intorno di O coincida con quella di Σ, che in O attui una operazione *di tipo* W equivalente a V_i nei campi non attraversati dal circuito spostato, e che nelle nuove intersezioni semplici si comporti così da conservare gli antichi collegamenti (vedi ancora Figura 13). Sarà

$$a'_0 = a' + s - 1 \qquad (9)$$

per l'apparire di $s - 1$ circuiti nuovi nell'intorno di O.

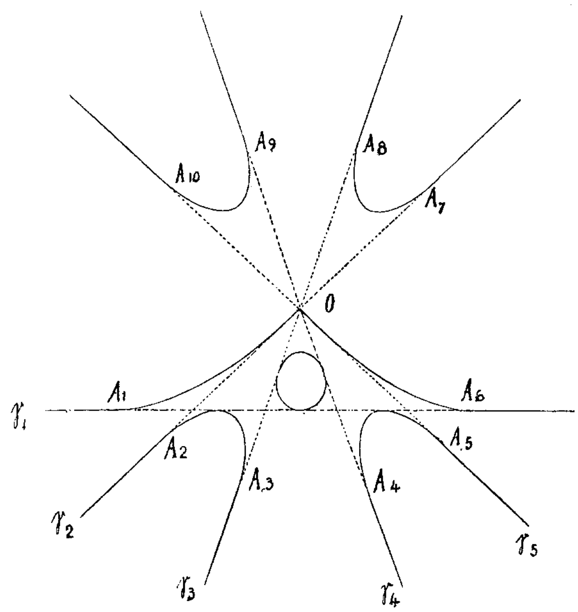


Fig. 13.

Si supponga poi che in O, a Σ, sia applicata *l'operazione* W_i, onde è r pari $= 2s$ (Fig. 9, $i = 1$, $r = 6$). Si sposti γ_i in modo che esso venga a tagliare i segmenti $O A_j$ con $i + r < j < i + 2r$ (Fig. 14). A Σ_0 così ottenuto si applichi una « piccola variazione » analoga alle precedenti, attuante in O un'operazione *di tipo* V, in cui il circuito di Σ'_0 passante per O provenga (nell' intorno) dall'antico γ_{i+r-1} (vedasi ancora Fig. 14). Sarà:

$$a'_0 = a' + s - 1. \qquad (10)$$

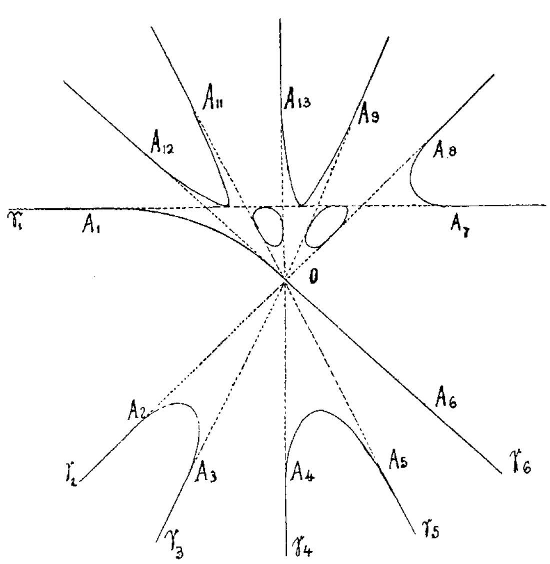


Fig. 14.

Si supponga infine che in O, a Σ, si applichi *l'operazione* Z_i, ond'è r dispari $=2s+1$ (Fig. 10, $i=1$, $r=5$). Si sposti γ_i in modo che venga a tagliare i segmenti $O\,A_j$ con $i+r<j<i+2r$ (Fig. 15). A Σ_0, così ottenuto, si applichi una « piccola variazione » analoga alle precedenti, attuante in O un'operazione *di tipo W*, che, per i campi non attraversati dal circuito spostato, equivalga a Z_i. Sarà:

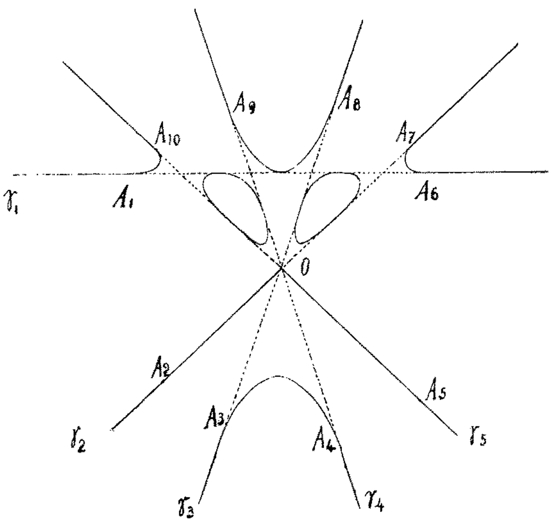


Fig. 15.

$$a'_0 = a' + s. \qquad (11)$$

27. Per $r>2$ le (7), (8), (10), (11) conducono ad $a'_0 > a'$; la (9) conduce ad $a'_0 > a'$ per $r>3$, ad $a'_0 = a'$ per $r=3$.

Affinchè il limite superiore fornito da (6) sia un massimo è dunque necessario che *per un punto del piano non passino più di tre circuiti di* Σ *e che nei punti per cui ne passano tre si applichi una operazione di tipo V.*

Allo scopo di circoscrivere la questione, *riprendo la restrizione* $k_{ij} \neq 0$ (introdotta dal num. 15 al 17 incluso), supponendo esteso il significato delle k_{ij} con quello di k [secondo la (5)].

Prescindo dai casi già considerati al § 4 ed al sistema Σ (sottoposto alle condizioni necessarie sopra enunciate) applico la trasformazione studiata al num. 26, in *ciascuno* dei punti per cui passano tre circuiti. Indico con $\Sigma_{(0)}$ il sistema ottenuto.

Risulta: *Condizione necessaria e sufficiente perchè la « piccola variazione » di* Σ *dia luogo ad un massimo è che ciò avvenga per* $\Sigma_{(0)}$.

Poichè ad uno dei punti O di Σ si sostituisce in $\Sigma_{(0)}$ un *triangolo* $O\,O'\,O''$, $\Sigma_{(0)}$ sarà dei tipi studiati ai num.[i] 16 e 17.

Ma *in generale* la « piccola variazione » applicata a $\Sigma_{(0)}$ non è quella indicata ai num.[i] citati, che dovrebbe riunire i lati del triangolo in un solo circuito (vedasi Fig. 16). Fa eccezione (num. 22), per la duplice possibilità di collegamento, soltanto il caso in cui $\Sigma_{(0)}$, all'infuori di eventuali circuiti isolati, consti di una *terna* $(\gamma_1\,\gamma_2\,\gamma_3)_9$, essendo O una delle intersezioni di γ_2 con γ_3 ed O' (risp. O'') l'*unica* intersezione di γ_1 con γ_2 (risp. con γ_3) (vedasi ancora Fig. 16).

Segue che *il limite superiore fornito da* (6) *è un massimo nei soli casi seguenti:* 1.° *Se* Σ *e la «piccola variazione» si scelgono secondo uno dei numeri* 14, 16, 17. 2.° *Se* Σ, *all'infuori di eventuali circuiti isolati, è composto*

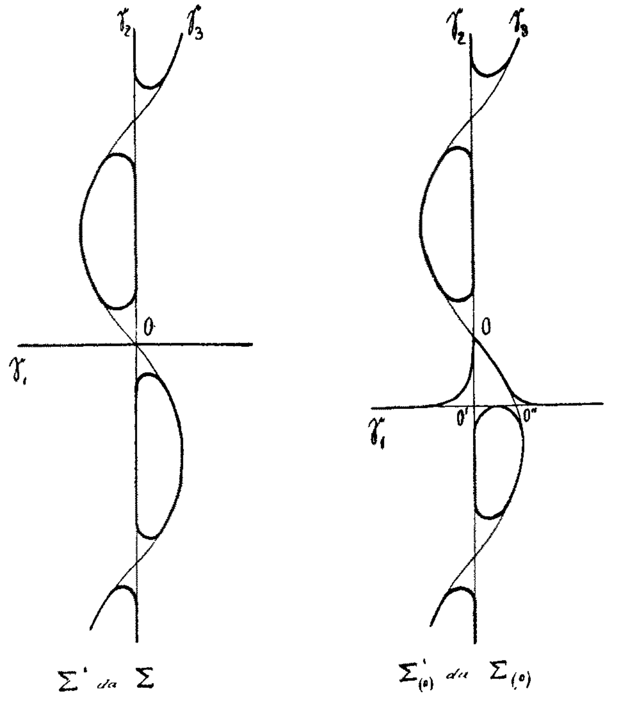


Fig. 16.

di tre circuiti $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ *dispari,* $\gamma_2 \gamma_3$ *hanno le mutue intersezioni ugualmente ordinate e* γ_1 *li taglia soltanto in una O di queste; se inoltre la «piccola variazione» attua in O l'operazione* V_1 *e nelle altre intersezioni (di* $\gamma_2 \gamma_3$*) operazioni di tipo U colleganti le coppie di segmenti ad estremi comuni* (Fig. 16).

PARTE SECONDA.

La "piccola variazione" algebrica.

§ 8. La «piccola variazione» di una curva piana algebrica reale spezzata.

28. Si consideri la curva (piana) spezzata nelle h curve algebriche a punti reali:

$$C^{n_1},\ C^{n_2}, \ldots,\ C^{n_h}$$

rispettivamente di ordini $n_1, n_2, \ldots, n_h$, irriducibili, prive di singolarità in punti reali e di mutui contatti reali (ma eventualmente dotate così di singolarità immaginarie-conjugate come di mutui contatti immaginarî-conjugati). *Per un punto reale del piano passino al più due C^{n_i}.*

Sia

$$f_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, h)$$

l'equazione di C^{n_i} in coordinate projettive con elementi di riferimento reali (e del resto arbitrarî); sia

$$g = 0$$

l'equazione di una curva *reale* d'ordine $n_1 + n_2 + \cdots + n_h$, generica (cioè *non passante per le mutue intersezioni reali delle C^{n_i}*).

Nella

$$f_1 f_2 \ldots f_h + t g = 0 \tag{12}$$

si attribuiscano a t valori reali; essa rappresenterà una curva reale pure d'ordine $n_1 + n_2 + \cdots + n_h$.

Qualora l'insieme dei circuiti della curva spezzata si consideri come un sistema Σ, l'insieme di quelli della (12) *per $|t|$ abbastanza piccolo* potrà considerarsi come un sistema Σ' dedotto da Σ per «piccola variazione», nel senso dei §§ 2 e 3.

Se Σ è *connesso* (num. 12) [o composto di un sistema connesso e di circuiti staccati], le intersezioni di $g=0$ coi segmenti [e circuiti] di Σ fissano la *parità dei passaggi* ed il segno di t dirime la scelta fra le due «piccole variazioni» complementari. Onde la «piccola variazione» è in questo caso topologicamente determinata.

Più in generale si osservi che il sistema composto di Σ e dei circuiti di $g=0$, possedendo complessivamente un numero pari di circuiti dispari, determina una divisione del piano in regioni contraddistinguibili coi segni $+$ e $-$ (num. 4).

Si consideri

$$t=-\frac{f_1 f_2 \ldots f_h}{g}$$

come *funzione* delle coordinate di un punto, e si noti che t prende segni opposti in regioni di segno opposto, perchè il passare attraverso un punto *generico* del contorno di una regione muta il segno o di una delle f_i o di g. La (12) è una delle curve $t=\text{cost.}$, quindi si svolge in regioni di ugual segno. Perciò nell'intorno di una intersezione (reale) $f_i=0$ $f_j=0$ sono ben determinati i *campi* in cui passa la (12), come quelli appartenenti a regioni di dato segno.

La «piccola variazione» è dunque pienamente determinata (ad es. nel senso del num. 10) dal comportamento di $g=0$ e dal segno di t, dipendendo ancora da quest'ultimo la scelta fra «piccole variazioni» complementari.

La (12), per gli opportuni valori di t, si dirà appunto dedotta dalla curva spezzata mediante «piccola variazione» (algebrica).

§ 9. Esistenza di una «piccola variazione» algebrica equivalente ad una data «piccola variazione» topologica.

29. Da quanto si legge nel precedente paragrafo nasce il quesito se una «piccola variazione» *topologicamente possibile* lo sia pure *algebricamente*, cioè se *ad una data scelta dei campi negli intorni delle intersezioni corrisponda sempre un'opportuna scelta della $g=0$ e del segno di t.*

Il quesito ha risposta affermativa, come si dimostra in questo paragrafo.

Si prenda in esame il caso di due curve. La (12) diverrà:

$$f_1 f_2 + t g = 0. \qquad (12)'$$

Detto k il numero delle intersezioni (reali) di $C^{n_1} C^{n_2}$, sarà

$$k \leq n_1 n_2 \,. \tag{13}$$

Si supponga dapprima $n_1 + n_2$ *pari*. Il sistema Σ, contenendo zero o due circuiti dispari, produce una divisione D del piano in parti contraddistinguibili coi segni $+$ e $-$ (num. 4). Una «piccola variazione» della curva spezzata si può perciò determinare con una distribuzione di segni nei k punti (num. 10), fissati i segni nei *campi* col *2.° criterio* (num. 9).

Sia m il numero dei punti contrassegnati col $-$ e si immagini la $g = 0$ costituita da altrettanti piccoli ovali circondanti i detti punti ed ulteriormente da eventuali circuiti ciascuno dei quali seghi al più un *segmento* di Σ.

L'insieme di Σ e dei circuiti di $g = 0$ produce nel piano una divisione D' in regioni le quali si possono contraddistinguere coi segni $+$ e $-$ in tal guisa, che nell'intorno dei punti non circondati [risp. circondati] i segni delle regioni nelle divisioni D e D' siano concordi [risp. discordi].

Nell'ipotesi fatta per la $g = 0$, a t si attribuisca tal segno che la (12)' si svolga nelle regioni di segno $+$ secondo D'; la (12)' si comporterà negli intorni dei k punti in tal modo da porre in atto la «piccola variazione» assegnata.

Lo stesso scopo si sarebbe raggiunto circondando con ovali i punti contrassegnati col $+$ ed attribuendo a t segno tale che (12)' si svolga nelle regioni di segno $-$, secondo la nuova divisione D' del piano in regioni (*).

L'arbitrarietà che nasce dall'ultima osservazione permette di riferirsi in ogni caso ad una $g = 0$ con ovali circondanti m fra i k punti, essendo

$$m \leq \frac{1}{2} k,$$

quindi anche, per la (13):

$$m \leq \frac{1}{2} n_1 n_2 \,. \tag{14}$$

(*) Se Σ è connesso, oppure composto di un sistema connesso e di circuiti isolati, la trattazione si può semplificare e ridurre ad un computo di *passaggi*. Invero un segmento congiungente due punti di ugual segno, essendo tagliato da due o zero ovali, presenta un numero pari di passaggi, mentre un segmento congiungente punti di segno opposto, essendo segato da un sol ovale, presenta un numero dispari di passaggi (non alterando gli eventuali ulteriori circuiti di $g = 0$ la parità); e ciò appunto deve essere (vedi num. 11).

Le considerazioni svolte riducono, nel caso attuale, la soluzione del quesito posto in principio di questo num. alla costruzione di una curva $g = 0$ del tipo indicato. Per questo si veda il num. seguente.

30. Si osservi dapprima che le curve d'ordine $\frac{1}{2}(n_1 + n_2)$ passanti per gli m punti da circondarsi formano un sistema lineare (C) di dimensione

$$r \geqq \frac{1}{8}(n_1 + n_2)(n_1 + n_2 + 6) - m. \tag{15}$$

Supposto $n_1 \geqq n_2$, da (14) e (15) si deduca

$$r \geqq \frac{1}{8}\left[(n_1 - n_2)(n_1 - n_2 + 6) + 12 n_2\right],$$

onde anche:

$$r > \frac{1}{8}(n_1 - n_2)(n_1 - n_2 + 6) + 1. \tag{16}$$

Ne segue che (C) non può possedere C^{n_2} come parte fissa, quindi che, per l'irriducibilità di C^{n_2}, è di curve irriducibili. Risulta anzi che esso descrive su C^{n_2} una serie lineare almeno ∞^1, onde, *se C^{n_1} C^{n_2} sono in posizione algebricamente generica*, all'infuori degli m punti assegnati, non possiede altri punti-base su C^{n_2}; in particolare (C) *non possiede punti-base nelle ulteriori intersezioni reali di C^{n_1} e C^{n_2}*. È quanto per ora suppongo (*).

Siano $w = 0$, $\bar{w} = 0$ due curve di (C) immaginarie-conjugate e del resto generiche. Sia $g_0 = 0$ una curva d'ordine $n_1 + n_2$ reale a punti immaginarî. La:

$$g \equiv w\bar{w} + z\, g_0 = 0, \tag{17}$$

per z (reale) di valor assoluto abbastanza piccolo e di segno opportuno, sarà composta di piccoli ovali circondanti le intersezioni reali di $w = 0$, $\bar{w} = 0$, cioè da m ovali circondanti i punti assegnati ed eventualmente da altri ovali di cui ciascuno taglia al più un segmento di Σ. La (17) è la curva richiesta.

31. Il sistema (C) abbia oltre agli m punti assegnati, che dirò punti P, altri $m' > 0$ punti fondamentali (semplici), che dirò punti P', in ulteriori in-

(*) La restrizione sarà tolta al numero seguente. È bene però osservare come nella maggior parte dei problemi di «piccola variazione» sia lecito ridursi ad una posizione algebricamente generica, sostituendo ad una delle curve date una curva prossima, senza alterare le condizioni topologiche, le quali generalmente sono le sole essenziali.

tersezioni di $C^{n_1} C^{n_2}$ (reali od, in parte, immaginarie-conjugate). Se fra gli m punti assegnati solo $m_0 \leq m$ forniscono alle (C) condizioni lineari indipendenti, una nota proprietà delle *serie lineari speciali* (*), applicata alla *serie caratteristica* di (C), conduce in modo semplice alla

$$2\, m_0 - m > m',$$

onde alla

$$m > m'. \tag{18}$$

Sia (C') il sistema delle curve d'ordine $\frac{1}{2}(n_1 + n_2)$ passanti per gli m' punti P' e si supponga che esso non possegga ulteriori punti fondamentali nelle intersezioni di $C^{n_1} C^{n_2}$. Se $w' = 0$, $\overline{w}' = 0$ sono due curve di (C') immaginarie conjugate e del resto generiche e $g_0 = 0$ è ancora una curva d'ordine $n_1 + n_2$ reale a punti immaginarî, la

$$g' \equiv w' \overline{w}' + z' g_0 = 0,$$

per z' opportuno, è una curva costituita da ovali circondanti le intersezioni reali di $w' = 0$, $\overline{w}' = 0$, cioè dagli ovali circondanti quelli fra i punti P' che sono reali ed eventualmente da altri ovali di cui ciascuno sega al più un segmento di Σ.

Se inoltre $w = 0$, $\overline{w} = 0$ rappresentano ancora curve immaginarie conjugate generiche di (C), la

$$g \equiv w \overline{w} + z g' = 0,$$

per z opportuno, è la curva richiesta. Ed invero, poichè i punti P' reali sono interni ad ovali di $g' = 0$, mentre i punti P sono esterni ad ogni ovale di essa, si potrà sempre scegliere il segno di z in modo che, per $|z|$ abbastanza piccolo, la $g = 0$ (priva di punti reali negli intorni dei punti P' reali) sia costituita da m ovali circondanti i punti P ed eventualmente da altri di cui ciascuno seghi al più un segmento di Σ.

Si supponga ora che (C'), oltre agli m' punti P', possegga m'' punti fon-

(*) L'ordine di una serie speciale è $\geqq$ al doppio della sua dimensione (teorema di Clifford); v. ad es.: Bertini, *La geometria delle serie lineari sopra una curva piana secondo il metodo algebrico* (Ann. di Mat., serie 2.ª, T. XXII), num. 25, cfr. num. 38; Segre, *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito* (Ibid.), num.ⁱ 72 ed 84; — Berzolari, *Allgemeine Theorie der höheren ebenen algebraischen Kurven* (cit.), num. 27.

damentali P'' in ulteriori intersezioni di $C^{n_1} C^{n_2}$ (necessariamente fra i punti P). Sussiste la

$$m' > m'' \tag{19}$$

analoga alla (18) e si può introdurre il sistema (C'') delle curve d'ordine $\frac{1}{2}(n_1 + n_2)$ per i punti P'', del quale dapprima si suppone l'assenza di punti fondamentali nelle ulteriori intersezioni delle $C^{n_1} C^{n_2}$. In tale ipotesi, dette $w'' = 0$, $\overline{w}'' = 0$ curve immaginarie conjugate generiche di (C'') e posto:

$$g'' \equiv w'' \overline{w}'' + z'' g_0,$$

$$g' \equiv w' \overline{w}' + z' g'',$$

$$g \equiv w \overline{w} + z g',$$

per opportuni valori di z'' z', z, sarà $g = 0$ la curva richiesta.

Nell'ipotesi contraria si continua il procedimento, il quale, per le (18), (19) ed analoghe, necessariamente finisce.

È così tolta la restrizione posta al numero precedente.

32. Sia $n_1 + n_2$ *dispari.* Il sistema Σ contiene un sol circuito dispari. Detta $u = 0$ una retta generica, cioè non passante per le intersezioni delle $C^{n_1} C^{n_2}$, il sistema composto di Σ e della retta determina nel piano una divisione D in regioni contraddistinguibili coi segni + e —. Ai campi negli intorni delle k intersezioni reali si attribuiscano i segni delle regioni a cui appartengono secondo la D.

Si fissi una distribuzione di segni nelle k intersezioni; essa determina una « piccola variazione » di Σ e reciprocamente.

Si immagini la $g = 0$ spezzata nella retta $u = 0$ ed in una curva $g_1 = 0$ (d'ordine $n_1 + n_2 - 1$) costituita da piccoli ovali circondanti i punti contrassegnati col — [oppure quelli contrassegnati col +] ed ulteriormente da circuiti ciascuno dei quali seghi al più un segmento di Σ. L'insieme di Σ e dei circuiti appartenenti a $g \equiv u\, g_1 = 0$ produce nel piano una divisione D' in regioni, le quali si possono contraddistinguere coi segni + e — in tal guisa che nell'intorno dei punti non circondati (risp. circondati) i segni delle regioni nelle divisioni D e D' siano concordi (risp. discordi). Nell'ipotesi fatta si attribuisca a t segno tale che (12)' si svolga nelle regioni di segno + [oppure in quelle di segno —] secondo D'; si attuerà così la « piccola variazione » assegnata.

Il problema si riduce alla costruzione di una $g_1 = 0$ del tipo indicato, valendo per il numero m dei punti da circondarsi ancora la (14).

Interviene il sistema (C) delle curve d'ordine $\frac{1}{2}(n_1 + n_2 - 1)$ passante per gli m punti, di dimensione

$$r \geqq \frac{1}{8}(n_1 + n_2 - 1)(n_1 + n_2 + 5) - m. \qquad (15)'$$

Supposto $n_1 > n_2$, da (14) e (15)' si deduce:

$$r \geqq \frac{1}{8}(n_1 - n_2 - 1)(n_1 - n_2 + 5) + n_2,$$

onde (escluso il caso ovvio $n_1 = 2$, $n_2 = 1$, $m = 1$, $r = 1$):

$$r > \frac{1}{8}(n_1 - n_2 - 1)(n_1 - n_2 + 5) + 1. \qquad (16)'$$

Se C^{n_1}, C^{n_2} sono algebricamente generiche, l'ulteriore trattazione si svolge analoga a quella per la costruzione di $g = 0$ al num. 30 e conduce alla

$$g_1 \equiv w\bar{w} + z\, g_0 = 0$$

per opportuni valori di z, essendo $w = 0$, $\bar{w} = 0$ immaginarie conjugate generiche in (C) e $g_0 = 0$ reale a punti immaginarî (d'ordine $n_1 + n_2 - 1$).

Se C^{n_1}, C^{n_2} sono tali che (C), oltre agli m punti assegnati, abbia ulteriori punti fondamentali nelle intersezioni reali delle curve stesse, valgono considerazioni analoghe a quelle svolte al num. 31.

Il caso di due curve è dunque esaurito, anche per $n_1 + n_2$ dispari.

33. Il metodo seguito nei num.[i] 29, 30, 31, 32 per il caso di due curve non si può sempre immaginare esteso al caso di più curve.

Il sistema Σ possiede un numero pari o dispari di circuiti dispari, secondo che è pari o dispari $n_1 + n_2 + \cdots + n_h$. L'estensione del procedimento conduce dunque sostanzialmente, nelle due ipotesi, alla ricerca di una curva d'ordine $n_1 + n_2 + \cdots + n_h$ oppure $n_1 + n_2 + \cdots + n_h - 1$, composta di m ovali circondanti altrettante fra le mutue intersezioni (reali) delle C^{n_i} ed eventualmente da ulteriori circuiti, ciascuno dei quali seghi al più un segmento di Σ. È inoltre lecito supporre:

$$m \leqq \frac{1}{2} k,$$

onde:

$$m \leq \frac{1}{2}(n_1 n_2 + n_1 n_3 + \cdots + n_{h-1} n_h). \tag{20}$$

Però la (20) non è condizione sufficiente per l'esistenza del sistema (C) delle curve d'ordine $\frac{1}{2}(n_1+n_2+\cdots+n_h)$ oppure $\frac{1}{2}(n_1+n_2+\cdots+n_h-1)$ passanti per gli m punti da circondarsi, se non si aggiunge la condizione:

$$\left.\begin{aligned} n_1^2+n_2^2+\cdots+n_h^2+6(n_1+n_2+\cdots+n_h) > \\ > 2(n_1 n_2 + n_1 n_3 + \cdots + n_{h-1} n_h), \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

oppure (rispettivamente) la:

$$\left.\begin{aligned} n_1^2+n_2^2+\cdots+n_h^2+4(n_1+n_2+\cdots+n_h) > \\ > 2(n_1 n_2 + n_1 n_3 + \cdots + n_{h-1}) + 5. \end{aligned}\right\} \tag{21)'$$

All'infuori d'ogni validità generale, rimane tuttavia la possibilità di continuare il procedimento quando esista il sistema (C), cioè quando per le curve d'ordine $\frac{1}{2}(n_1+n_2+\cdots+n_h)$ o (rispettivamente) $\frac{1}{2}(n_1+n_2+\cdots+n_h-1)$ il gruppo degli m punti rappresenti un numero di condizioni lineari indipendenti:

$$m_0 < \frac{1}{8}(n_1+n_2+\cdots+n_h)(n_1+n_2+\cdots+n_h+6)$$

o (rispettivamente):

$$m_0 < \frac{1}{8}(n_1+n_2+\cdots+n_h-1)(n_1+n_2+\cdots+n_h+5).$$

Le considerazioni analoghe a quelle svolte nel num. 31 richiederebbero più minuto esame, presentandosi qui il caso nuovo di un sistema (C) con parti fisse (una o più delle C^{n_i}).

Ma il problema posto all'inizio di questo paragrafo sarà risolto per altra via nel numero seguente in tutta la sua generalità.

34. Date le C^{n_s} $(s=1, 2, \ldots, h)$ si contraddistinguano i campi negli intorni delle k loro mutue intersezioni reali coi segni $+$ e $-$ (num. 9). S'immagini una « piccola variazione » di Σ determinata da una distribuzione di segni nelle dette intersezioni (num. 10).

Si fissino due curve $C^{n_i} C^{n_j}$ $(i<j)$ e si prescinda, per un momento, dalle

rimanenti. Negli intorni delle loro intersezioni si mantenga la precedente indicazione dei campi mediante segni e nelle intersezioni stesse si distribuiscano i segni in accordo colla fissata distribuzione generale. Nascerà per il sistema Σ_{ij} dei circuiti di $C^{n_i} C^{n_j}$ una « piccola variazione », realizzata algebricamente assumendo come curva trasformata la:

$$f_i f_j + t_{ij} g_{ij} = 0, \tag{22}$$

dove $g_{ij} = 0$, t_{ij} son scelti, ad es., nel modo indicato ai num.[i] 29, 30, 31, 32.

Il segno di t_{ij} è così ben determinato, ma si supporrà, come è lecito, *che sia il* $+$, includendo eventualmente un fattore (-1) nel primo membro della $g_{ij} = 0$. Inoltre l'arbitrarietà che rimane nella scelta delle $g_{ij} = 0$ permette di escluderne il passaggio per mutue intersezioni delle C^{n_s}.

Si indichi con f_{ij} il prodotto di tutte le f_s, escluse le f_i, f_j. Dico che, *per effettuare algebricamente l'assegnata « piccola variazione » di* Σ, *basta nella* (12) [del num. 29] *porre*:

$$g \equiv f_{12} g_{12} + f_{13} g_{13} + \cdots + f_{ij} g_{ij} + \cdots + f_{h-1,h} g_{h-1,h} \tag{23}$$

e $t > 0$, *ma abbastanza piccolo.*

Ai parametri t, t_{ij} delle (12) e (22) si ridoni l'intiera variabilità, considerandoli come funzioni delle coordinate di un punto corrente nel piano:

$$t = -\frac{f_1 f_2 \cdots f_i \cdots f_j \cdots f_h}{g}, \tag{24}$$

$$t_{ij} = -\frac{f_i f_j}{g_{ij}}. \tag{25}$$

Dalle (23), (24), (25) segue:

$$\frac{1}{t} \equiv \frac{1}{t_{12}} + \frac{1}{t_{13}} + \cdots + \frac{1}{t_{ij}} + \cdots + \frac{1}{t_{h-1,h}}. \tag{26}$$

Se si procede mediante la (26) al calcolo di $\frac{t_{ij}}{t}$, i termini del secondo membro del tipo $\frac{t_{ij}}{t_{qs}} = \frac{f_i f_j g_{qs}}{f_q f_s g_{ij}}$ possono essere distinti in quattro gruppi: un termine cogli indici q, $s = i, j$; $h-2$ termini con uno di essi $= j$; $h-2$ termini con uno di essi $= i$; i rimanenti cogli indici diversi entrambi da i, j. Si stabilisce così una identità del tipo seguente:

$$\frac{t_{ij}}{t} \equiv 1 + f_i T_i + f_j T_j + f_i f_j T_{ij}. \tag{27}$$

Si faccia ora tendere comunque il punto corrente ad una delle intersezioni (reali) di $C^{n_i} C^{n_j}$; poichè T_i, T_j, T_{ij} tendono a limiti finiti ed f_i, f_j tendono al limite zero, segue

$$\lim \frac{t_{ij}}{t} = 1. \tag{28}$$

Se ne deduce che è possibile immaginare un intorno della intersezione in cui t e t_{ij} posseggano lo stesso segno, onde *nei campi in cui è* $t_{ij} > 0$ *è pure* $t > 0$. Ossia *i campi degli intorni delle intersezioni di* $C^{n_i} C^{n_j}$ *percorsi da* (22) *sono pure percorsi da* (12) [*per* $t > 0$ *abbastanza piccolo e* g *data da* (23)].

Tenuta presente la scelta delle « piccole variazioni » applicate ai sistemi Σ_{ij}, si conclude d'aver raggiunto pure per Σ la « piccola variazione » assegnata.

§ 10. Altre dimostrazioni d'esistenza per alcuni casi notevoli.

35. In casi particolari la $g = 0$, corrispondente ad una « piccola variazione » assegnata, può ottenersi con procedimenti essenzialmente diversi da quelli indicati nella trattazione generale del § 9. A qualche esempio per se stesso interessante è dedicato il presente paragrafo.

1.° esempio. Sia dapprima C^{n_1} di genere p, dotata del numero massimo di circuiti compatibile col genere, cioè (*) di $p+1$ circuiti. Le k intersezioni (reali) siano tutte raccolte sopra un solo circuito γ di C^{n_1} (onde manchino le mutue intersezioni reali fra le rimanenti C^{n_s}) (**).

Essendo Σ composto di un sistema connesso e di eventuali circuiti staccati, interverranno soltanto considerazioni di *parità di passaggi* (§ 3) e queste potranno restringersi ai soli segmenti di γ (num. 13 in fine).

Le *curve aggiunte* della C^{n_1} di ordine $n_1 + n_2 + \cdots + n_h$ segnano su di essa una serie lineare di dimensione

$$r = p + n_1 (n_2 + n_3 + \cdots + n_h + 3) - 2 \tag{29}$$

(*) Harnack, loc. cit.

(**) Il caso *B*), che verrà considerato al num. 44, rientra nelle attuali ipotesi.

e di ordine $r+p$ (*). Con

$$k' \leq k \leq n_1 (n_2 + n_3 + \cdots + n_h)$$

si indichi il numero dei segmenti di γ che esigono numero dispari di passaggi secondo la « piccola variazione » assegnata.

Si determini un gruppo della serie mediante r punti (algebricamente generici) distribuiti come segue: 1.º un punto su ciascuno dei k' segmenti indicati; 2.º un punto su ciascuno dei circuiti di C^{n_1} diversi da γ, escluso l'eventuale circuito dispari; 3.º i rimanenti $r-k'-p$ oppure $r-k'-p+1$ necessariamente in numero pari (**), raggruppati comunque in coppie di punti immaginari conjugati, o di punti appartenenti ad uno stesso segmento di γ, o di punti sopra uno stesso degli ulteriori circuiti di C^{n_1} (raggruppati cioè in modo tale da non alterare la parità dei passaggi).

Il gruppo sarà necessariamente completato da p punti, fra cui quelli reali disposti in numero dispari su ciascuno dei p circuiti di C^{n_1} diversi da γ, cioè da p punti tutti reali giacenti rispettivamente sui p circuiti stessi.

Le condizioni offerte dal gruppo alle curve aggiunte d'ordine

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_h$$

sono tutte reali, quindi per esso passano aggiunte (di tale ordine) reali. Una generica di queste si può assumere come curva $g=0$.

36. Si consideri ora il seguente:

2.º ESEMPIO. Sia ancora C^{n_1} dotata di $p+1$ circuiti. Le k intersezioni siano però distribuite su due circuiti γ, δ della C^{n_1}, ma Σ sia, all'infuori di circuiti isolati, connesso [per il che basta l'esistenza di un circuito appartenente ad una $C^{n_s}(s>1)$ e secante così γ come δ]. Inoltre la « piccola variazione » assegnata sia tale che su δ due segmenti al più richiedano un numero dispari di passaggi. Sarà sufficiente fissare la parità dei passaggi su γ e δ (vedi nota al num. 13).

Supposto $p>1$ (***), si riprenda il sistema delle aggiunte d'ordine

---

(*) Vedi ad es. BERTINI, loc. cit., num. 22 *c*); BERZOLARI, loc. cit., num. 27.

(**) Se n_1 è pari, $r-p$ per la (29) è pari, γ è circuito pari, onde k' è pari, $r-k'-p$ è pari. Se n_1 è dispari e γ pure è dispari così $r-p$ come k' hanno la parità di $n_1+n_2+\ldots+n_h$, onde $r-k'-p$ è pari. Se n_1 è dispari e γ è pari, le $C^{n_s}(s>1)$ non contengono circuiti dispari, cioè sono d'ordine pari, $r-p$ è dispari, k' è pari, $r-k'-p+1$ è pari.

(***) Il caso $p=1$ si tratta direttamente in modo semplice.

$n_1 + n_2 + \cdots + n_h$ e si determini un gruppo della serie da esso segnata su C^{n_1} mediante r punti, distribuendoli così: 1.° uno in ciascuno dei k' segmenti di γ richiedenti numero dispari di passaggi; 2.° uno su ciascuno dei p circuiti diversi da γ, escluso l'eventuale dispari, in modo però che, se δ richiede numero dispari di passaggi su due segmenti (ed è quindi pari), il punto su δ sia preso in uno di questi; 3.° i rimanenti $r - k' - p$ od $r - k' - p + 1$ in coppie non alteranti la parità dei passaggi, coll'avvertenza che per $p = 2$, n_1 dispari, γ e δ pari, una coppia sia presa sul rimanente circuito (dispari).

Il gruppo sarà completato da p punti rispettivamente sui p circuiti di C^{n_1} diversi da γ e rispetterà la parità dei passaggi ovunque, fuorchè, in generale, su δ. Tale parità si potrà ristabilire riconducendo quello fra i p punti indicati appartenente a δ sul segmento opportuno.

Perciò sopra un circuito ε di C^{n_1}, diverso da γ e δ, contenente uno, almeno, degli r punti determinanti il gruppo, si sposti tale punto fino a descrivere l'intero circuito (lasciando fissi su C^{n_1} gli altri $r - 1$ punti). Il gruppo, detratti i punti fissi, varia così in una serie lineare semplicemente infinita d'ordine $p + 1$ e viene a coincidere con tutti i gruppi di questa aventi due punti su ε, nessun punto su γ, un punto su ciascuno dei rimanenti circuiti. In particolare il punto mobile sul circuito δ lo descrive per intiero, e, variando opportunamente il gruppo, può essere condotto sul segmento voluto.

Una generica aggiunta reale d'ordine $n_1 + n_2 + \cdots + n_h$, passante per il gruppo (di $r + p$ punti) così ottenuto, è la richiesta $g = 0$ (*).

37. Si passi infine al seguente:

3.° Esempio. Sia C^{n_1} dotata di p circuiti e le k intersezioni siano raccolte sopra un suo circuito γ (onde Σ, all'infuori di circuiti isolati, è connesso).

Si determini un gruppo della serie segnata su C^{n_1} dalle aggiunte d'ordine $n_1 + n_2 + \cdots + n_h$ mediante r punti così distribuiti: 1.° un punto su ciascuno dei k' segmenti di γ richiedenti numero dispari di passaggi; 2.° un punto su ciascuno dei p circuiti di C^{n_1} (il punto su γ dicasi A), escluso l'eventuale circuito dispari se è diverso da γ; 3.° i rimanenti $n - k' + p$ od $n - k' + p + 1$ punti in coppie non alteranti la parità dei passaggi.

Il gruppo, completato da p punti rispettivamente sui p circuiti, in ge-

(*) Nei due esempi è notevole l'uso della geometria sopra una curva di genere p dotata di $p + 1$ circuiti. Per altre applicazioni di questa si veda la mia Nota: *Serie lineari e corrispondenze sopra una curva di genere p dotata di $p + 1$ circuiti* (Rend. R. Ist. Lomb., serie 2ª, XLIII, 1910).

nerale su γ (ma non altrove) contravviene alla parità dei passaggi. Se però uno degli r punti determinanti il gruppo descrive un circuito (di C^{n_i}) diverso da γ, mentre gli altri $r-1$ son fissi, il punto mobile su γ può essere condotto sul segmento contenente A, ristabilendo la parità dei passaggi.

Una generica aggiunta (d'ordine $n_1+n_2+\cdots+n_h$) passante per il gruppo fornisce ancora la $g=0$.

§ 11. Estensione del concetto di « piccola variazione » algebrica.

38. Riprendo la trattazione del § 8, sulla

$$f_1 f_2 \ldots f_h + t g = 0, \tag{30}$$

ma abbandono due delle restrizioni ivi imposte, ammettendo: 1.° che per un punto (reale) del piano passino eventualmente anche più di due C^{n_i}; 2.° che la $g=0$ possa passare [semplicemente (*)] per alcune (anche per tutte) le mutue intersezioni (reali) delle C^{n_i}.

Osservo che il sistema dei circuiti delle C^{n_i} è un sistema Σ nel senso (più esteso) del § 6; dico inoltre che, per $|t|$ abbastanza piccolo il sistema dei circuiti di (30) è il trasformato Σ' di Σ in una « piccola variazione » intesa nel senso (più esteso) del paragrafo stesso.

Ciò verrà dimostrato nei num.[i] seguenti riprendendo le notazioni ivi introdotte.

39. Sia O un punto del piano pel quale passino $r \geqq 2$ circuiti di Σ e si supponga dapprima che $g=0$ *non passi per* O. In un intorno di O non contenente punti di $g=0$ si considerino i $2r$ campi $A_j \widehat{O} A_{j+1}$ (num. 23); in punti di uno stesso campo la

$$t = -\frac{f_1 f_2 \ldots f_h}{g}$$

ha uno stesso segno ben determinato, mentre in punti rispettivamente di due campi consecutivi $A_j \widehat{O} A_{j+1}$, $A_{j+1} \widehat{O} A_{j+2}$ ha segni opposti.

(*) Il supporre per $g=0$ una singolarità in una intersezione delle C^{n_i}, porterebbe conseguentemente ad un punto multiplo ivi per la (30), e ciò si vuol qui escludere (vedi la prefazione).

Segue che t assume segni alternati nei $2r$ campi intorno ad O. Se, per fissare le idee, si suppone $t > 0$ nel campo $\widehat{A_1 O A_2}$, *la trasformazione di* $f_1 f_2 \ldots f_h = 0$ *in* (30) *dà luogo in* O *ad una « piccola variazione » e precisamente ad una operazione* U *od* U' *secondo che è* $t > 0$ *oppure* $t < 0$.

40. Si supponga ora che $g = 0$ *passi per* O *senza toccare ivi alcuna delle* C^{n_i}.

Se su $g = 0$ da bande opposte di O, e nell'intorno di questo, si prendono due punti $G_1\, G_2$ (Figg. 17 e 18), i segmenti $O\,G_1$, $O\,G_2$ giacciono in due

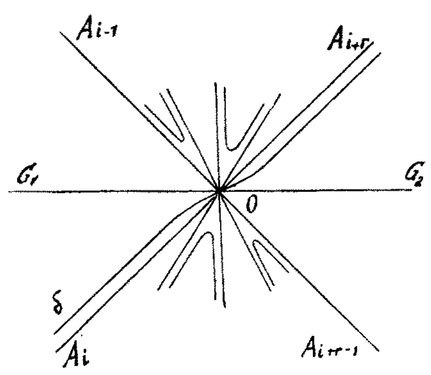


Fig. 17.

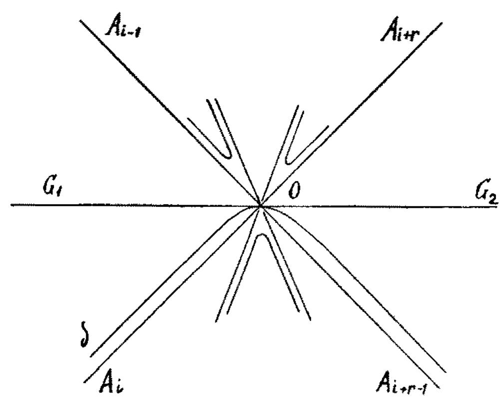


Fig. 18.

campi opposti al vertice $\widehat{A_{i-1}\, O\, A_i}$, $\widehat{A_{i+r-1}\, O\, A_{i+r}}$, dividendo ciascuno di questi in due nuovi campi.

Si hanno così in tutto $2r + 2$ campi intorno ad O e in essi t assume ordinatamente segni alternati. Per es. *in* $\widehat{G_1\, O\, A_i}$ *sia* $t > 0$.

La (30) ha in O con $g = 0$ contatto r-punto, ed il circuito δ di essa tangente la $g = 0$ l'attraversa in O oppure non l'attraversa, secondo che r è dispari $(= 2s + 1)$ o pari $(= 2s)$.

Per r *dispari e* $t > 0$, il circuito δ, nell'intorno di O, si svolgerà nei campi $\widehat{G_1\, O\, A_i}$, $\widehat{G_2\, O\, A_{i+r}}$ e risulterà quindi dall'unione in O dei segmenti prossimi ad $O\,A_i$, $O\,A_{i+r}$. La rimanente parte di (30) nell'intorno di O si svolgerà nei campi $\widehat{A_{i+2l-1}\, O\, A_{i+2l}}$, $\widehat{A_{i+r+2l-1}\, O\, A_{i+r+2l}}$ $(l = 1, 2, \ldots, s)$ [vedasi Fig. 17].

Per r *dispari e* $t < 0$ si presentano considerazioni analoghe coll'intervento di $O\,A_{i-1}$, $O\,A_{i+r-1}$ in luogo di $O\,A_i$, $O\,A_{i+r}$.

Dunque *la trasformazione di* $f_1 f_2 \ldots f_h = 0$ *in* (30) *dà luogo in* O *ad una «piccola variazione» e precisamente ad una operazione* V_i *oppure* V_{i-1}, *secondo che è* $t > 0$ *oppure* $t < 0$.

Per r *pari e* $t > 0$, il circuito δ, nell'intorno di O, si svolgerà nei campi $\widehat{G_1 O A_i}$, $\widehat{A_{i+r-1} O G_2}$ e risulterà quindi dall'unione in O dei segmenti prossimi ad $O A_i$, $O A_{i+r-1}$. La rimanente parte di (30) nell'intorno di O si svolgerà nei campi $\widehat{A_{i+2l-1} O A_{i+2l}}$ $(l = 1, 2, \ldots, s-1)$ ed $\widehat{A_{i+r+2l} O A_{i+r+2l+1}}$ $(l = 0, 1, 2, \ldots, s-1)$ [vedasi Fig. 18].

Per r *pari e* $t < 0$ si presentano considerazioni analoghe coll'intervento di $O A_{i+r}$, $O A_{i-1}$ in luogo di $O A_i$, $O A_{i+r-1}$.

Dunque *la trasformazione di* $f_1 f_2 \ldots f_h = 0$ *in* (30) *dà luogo in* O *ad una «piccola variazione» e precisamente ad una operazione* W_i *oppure* W_{i+r} *secondo che è* $t > 0$ *oppure* $t < 0$.

41. *Se* $g = 0$ *ha con* γ_i *contatto dispari* (*in* O), il circuito δ di (30) tangente $g = 0$ si comporta come nel caso del precedente numero, del quale persistono perciò le conclusioni.

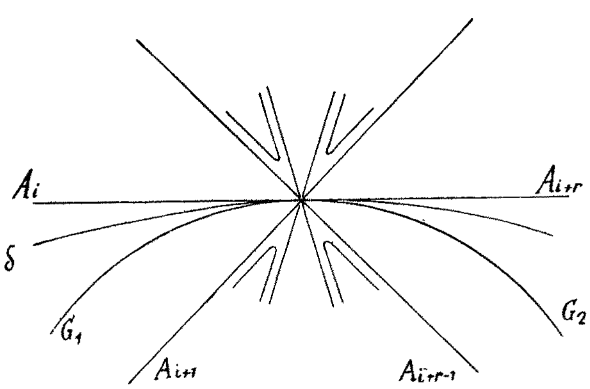


Fig. 19.

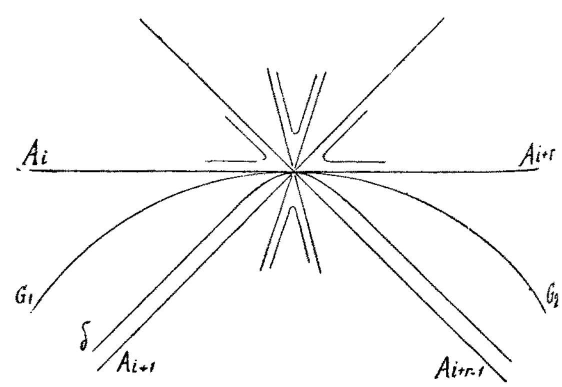


Fig. 20.

Se $g = 0$ *ha con* γ_i *contatto pari*, il circuito δ non attraversa od attraversa $g = 0$, secondo che r è dispari o pari.

Si supponga che, nell'intorno di O, $g = 0$ si svolga nei campi $\widehat{A_i O A_{i+1}}$, $\widehat{A_{i+r-1} O A_{i+r}}$ e dicansi $O G_1$, $O G_2$ i segmenti di essa in detti campi (Figg. 19, 20, 21).

Nei $2r + 2$ campi (intorno ad O) t presenta ordinatamente segni alternati; *sia* $t > 0$ *in* $\widehat{A_i O G_1}$.

Sia r dispari. Per $t > 0$, δ, presso O, si svolge nei campi $\widehat{A_i O G_1}$, $\widehat{G_2 O A_{i+r}}$ e risulta dall'unione in O dei segmenti prossimi ad $O A_i$, $O A_{i+r}$ [Fig. 19]. Per $t < 0$, δ, presso O, si svolge nei campi $\widehat{G_1 O A_{i+1}}$, $\widehat{A_{i+r-1} O G_2}$ e risulta dall'unione in O dei segmenti prossimi ad $O A_{i+1}$, $O A_{i+r-1}$ [Fig. 20]. È ovvio in entrambi i casi l'ulteriore comportamento di (30) nell'intorno di O. Onde:

La trasformazione di $f_1 f_2 \ldots f_h = 0$ *in* (30) *dà luogo in O ad una operazione* V_i *oppure* Z_i, *secondo che è* $t > 0$ *oppure* $t < 0$.

Sia r pari. Secondo che è $t > 0$ oppure $t < 0$, δ si svolge, presso O, nei campi $\widehat{A_i O G_1}$, $\widehat{A_{i+r-1} O G_2}$ oppure $\widehat{G_1 O A_{i+1}}$, $\widehat{G_2 O A_{i+r}}$ e risulta quindi dall'unione in O dei segmenti prossimi ad $O A_i$, $O A_{i+r-1}$ oppure $O A_{i+1}$, $O A_{i+r}$. È ovvio l'ulteriore comportamento di (30) nell'intorno di O. Onde la *trasformazione di* f_1, $f_2, \ldots, f_h = 0$ *in* (30) *dà luogo in O ad una operazione* W_i *oppure* W_{i+1}, *secondo che è* $t > 0$, *oppure* $t < 0$ (vedi Figura 21 per $t > 0$).

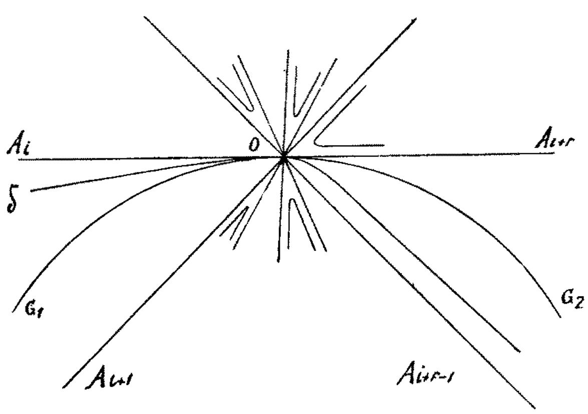


Fig. 21.

42. Da quanto è svolto nei precedenti numeri risulta che ad ogni scelta di $g = 0$ e del segno di t corrisponde (per $|t|$ abbastanza piccolo) una « piccola variazione » *topologicamente* ben determinata. Qui, come nel caso ristretto del § 8 (cfr. § 9), sorge la questione se inversamente ogni « piccola variazione » topologica si possa ottenere *algebricamente* con opportuna scelta di $g = 0$ e di t. Il quesito ha in alcuni casi risposta affermativa, ma la trattazione generale offre qualche difficoltà.

Il solo caso che si presenterà nel seguito è però del tutto ovvio. Esso è quello di tre rette concorrenti in un punto O, nel quale è da operarsi una V. Basta perciò assumere come $g = 0$ una cubica reale che passi semplicemente per O attraversando campi opportuni e dare a t segno opportuno, sempre in conformità alle condizioni esposte al num. 40. Tale determinazione è evidentemente possibile in più modi.

§ 12. Condizioni necessarie e sufficienti perchè la curva trasformata abbia il massimo numero di circuiti compatibile col suo ordine.

43. Una curva d'ordine n possiede al più $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1$ circuiti e, per ogni valore di n, esistono curve dotate di circuiti in tal numero (*). Nel presente paragrafo stabilisco condizioni necessarie e sufficienti perchè una « piccola variazione » algebrica (nel senso più esteso del § 11) produca una curva del tipo detto.

I sistemi costituiti dai circuiti delle singole C^{n_i} ($i=1, 2,\ldots, h$) si possono considerare come sistemi S_i, nel senso del § 4 (num. 15 e segg.), del quale si riprendono qui le notazioni (cfr. § 7).

Il numero k, anche nel senso più esteso del § 7 [form. (5)], rappresenta il numero totale delle mutue intersezioni reali fra le C^{n_i}. Infatti gli r circuiti passanti per un punto O appartengono ad r distinte C^{n_i}; in O son dunque raccolte $\frac{r(r-1)}{2}$ mutue intersezioni.

Applicando a ciascuna delle C^{n_i} la proprietà richiamata all'inizio di questo numero, poi sommando, si ottiene:

$$a \leqq \frac{(n_1-1)(n_1-2)}{2}+\cdots+\frac{(n_h-1)(n_h-2)}{2}+h$$

ossia:

$$\left.\begin{aligned} a \leqq \frac{1}{2}(n_1+n_2+\cdots+n_h-1)(n_1+n_2+\cdots+n_h-2)+ \\ +2h-n_1n_2-n_1n_3-\cdots-n_{h-1}n_h-1 \end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

ove *il segno = figura solo se ogni* C^{n_i} *ha numero massimo di circuiti.*

Per la (6) [num. 25], da (31) segue:

$$a' \leqq \frac{1}{2}(n_1+n_2+\cdots+n_h-1)(n_1+n_2+\cdots+n_h-2)+1-Y, \qquad (32)$$

posto:

$$Y=(n_1n_2+n_1n_3+\cdots+n_{h-1}n_h-k)-2(d-1), \qquad (33)$$

(*) Harnack, loc. cit.

coll'avvertenza che *in* (32) *figura il segno* $=$ *solo se ciò avviene così in* (6) *come in* (31).

Poichè sistemi S_i appartenenti a sistemi Σ_j diversi non hanno intersezioni comuni (num. 18), così il numero delle k_{sq} nulle è $\geq \frac{d(d-1)}{2}$. D'altra parte, se è $k_{sq}=0$, è $n_s n_q \geq 2$ perchè pari; ossia l'annullarsi di una k_{sq} porta alla differenza $n_1 n_2 + \cdots + n_{h-1} n_h - k$ il contributo di due unità almeno. Perciò è:

$$n_1 n_2 + n_1 n_3 + \cdots + n_{h-1} n_h - k \geq d(d-1) \tag{34}$$

ove *per* $d>1$ *il segno* $=$ *figura soltanto se ogni* Σ_j *consta di un solo* S_i $(d=h)$ *e se inoltre ad ogni* $k_{sq}=0$ *corrisponde* $n_s n_q = 2$.

Da (33) e (34) si deduce

$$Y \geq (d-2)(d-1)$$

onde:

$$Y \geq 0 \tag{35}$$

ove *il segno* $=$ *figura solo se ciò avviene in* (34) *ed inoltre d assuma uno dei valori* 2, 1.

44. Condizioni necessarie perchè la curva trasformata sia del tipo richiesto sono ora *l'annullarsi di* Y *e la comparsa del segno* $=$ *in* (32). Tali condizioni risultano pure sufficienti, quando si aggiunga la possibilità di tradurre algebricamente la relativa « piccola variazione » topologica.

Si supponga $d=2$; da precedenti osservazioni si deduce: $h=2$, $n_1 n_2 = 2$, onde $n_1=2$, $n_2=1$. Si perviene così al *sistema di una conica e di una retta che non si tagliano.* Poichè una « piccola variazione » qualunque del sistema produce una cubica con due circuiti (numero massimo) così, per questo primo caso, le condizioni risultano sufficienti.

Si supponga $d=1$; perchè sia $Y=0$ occorre che sia

$$k = n_1 n_2 + n_1 n_3 + \cdots + n_{h-1} n_h,$$

cioè che *le mutue intersezioni delle* C^{n_i} *siano tutte reali.* Sussiste dunque la $k_{sq} \neq 0$ per ogni coppia di indici. Perchè in (32) valga il segno $=$, deve esso valere in (31) [cioè *le singole* C^{n_i} *debbono avere il massimo numero di circuiti*] ed anche in (6) [cioè *deve presentarsi uno dei casi indicati al num.* 27 *in fine* (cfr. num.[i] 14, 16, 17), coll'avvertenza che *nell'ultimo di essi dalle* $n_1 n_2 = k_{12} = 1$, $n_1 n_3 = k_{13} = 1$ *segue* $n_1 = n_2 = n_3 = 1$]. In tali casi la « piccola variazione » è algebricamente attuabile (§ 9 e § 11 al num. 42), onde ancora le condizioni risultano sufficienti.

Concludendo:

Condizione necessaria e sufficiente perchè la « piccola variazione » di una curva spezzata (nel senso del § 11) produca una curva dotata del massimo numero di circuiti compatibile coll'ordine è che si verifichi uno dei seguenti casi:

A) *La curva si spezza in una conica e in una retta non secantisi; la « piccola variazione » è arbitraria.*

B) *La curva si spezza in due curve C^{n_1} C^{n_2} provvedute del massimo numero di circuiti compatibile coi relativi ordini, aventi le intersezioni tutte reali (e distinte) raccolte su due circuiti $\gamma_1\,\gamma_2$ rispettivamente di C^{n_1} C^{n_2} e su questi (per opportuna scelta dei sensi) ugualmente ordinate. La « piccola variazione » proviene dall'attribuire il segno $+$ a tutte le intersezioni, secondo il 1.° criterio* (num. 9) [*in relazione alla detta scelta dei sensi*].

C) *La curva si spezza in tre C^{n_1} C^{n_2} C^{n_3} provvedute del massimo numero di circuiti compatibile coi relativi ordini, aventi le mutue intersezioni tutte reali (distinte), collocate su tre circuiti $\gamma_1\,\gamma_2\,\gamma_3$ rispettivamente di C^{n_1} C^{n_2} C^{n_3}, in modo che le intersezioni appartenenti a γ_i si possano pensare ugualmente ordinate su di esso e sul circuito risultante dalla riunione di due « segmenti » di $\gamma_j\,\gamma_l$ cogli estremi in comune (i, j, $l = 1$, 2, 3). I segmenti dei circuiti $\gamma_1\,\gamma_2\,\gamma_3$ son collegati in $k-3$ coppie e in due « triangoli »; se i sensi su $\gamma_1\,\gamma_2\,\gamma_3$ si scelgono in modo che un « triangolo » (quindi anche l'altro) sia percorso con continuità, la « piccola variazione » proviene dall'attribuire il segno $-$ a tutte le intersezioni, secondo il 1.° criterio.*

D) *La curva si spezza in quattro C^{n_1} C^{n_2} C^{n_3} C^{n_4} provvedute del massimo numero di circuiti compatibile coi relativi ordini, aventi le mutue intersezioni tutte reali (distinte), collocate su quattro circuiti $\gamma_1\,\gamma_2\,\gamma_3\,\gamma_4$ rispettivamente di C^{n_1} C^{n_2} C^{n_3} C^{n_4}, in modo che le intersezioni appartenenti a γ_i (per opportuna scelta dei sensi) siano ugualmente ordinate su di esso e sul contorno di un « triangolo » avente per lati segmenti rispettivamente di $\gamma_j\,\gamma_l\,\gamma_m$ (i, j, l, $m = 1$, 2, 3, 4). La « piccola variazione » proviene dall'attribuire il segno $-$ a tutte le intersezioni secondo il 1.° criterio (in relazione alla detta scelta dei sensi).*

E) *La curva si spezza in tre rette uscenti da un punto O, nel quale si attua un'operazione di tipo V* (§ 6) (*).

(*) I casi *A*) ed *E*) sono ovvii. Del caso *B*) forniscono esempi i metodi di HARNACK, di HILBERT, della cubica ausiliare, della quartica ausiliare, di moltiplicazione mediante generatrici bifronti. Per i primi due metodi vedansi i lavori citati nella prefazione; per i rimanenti

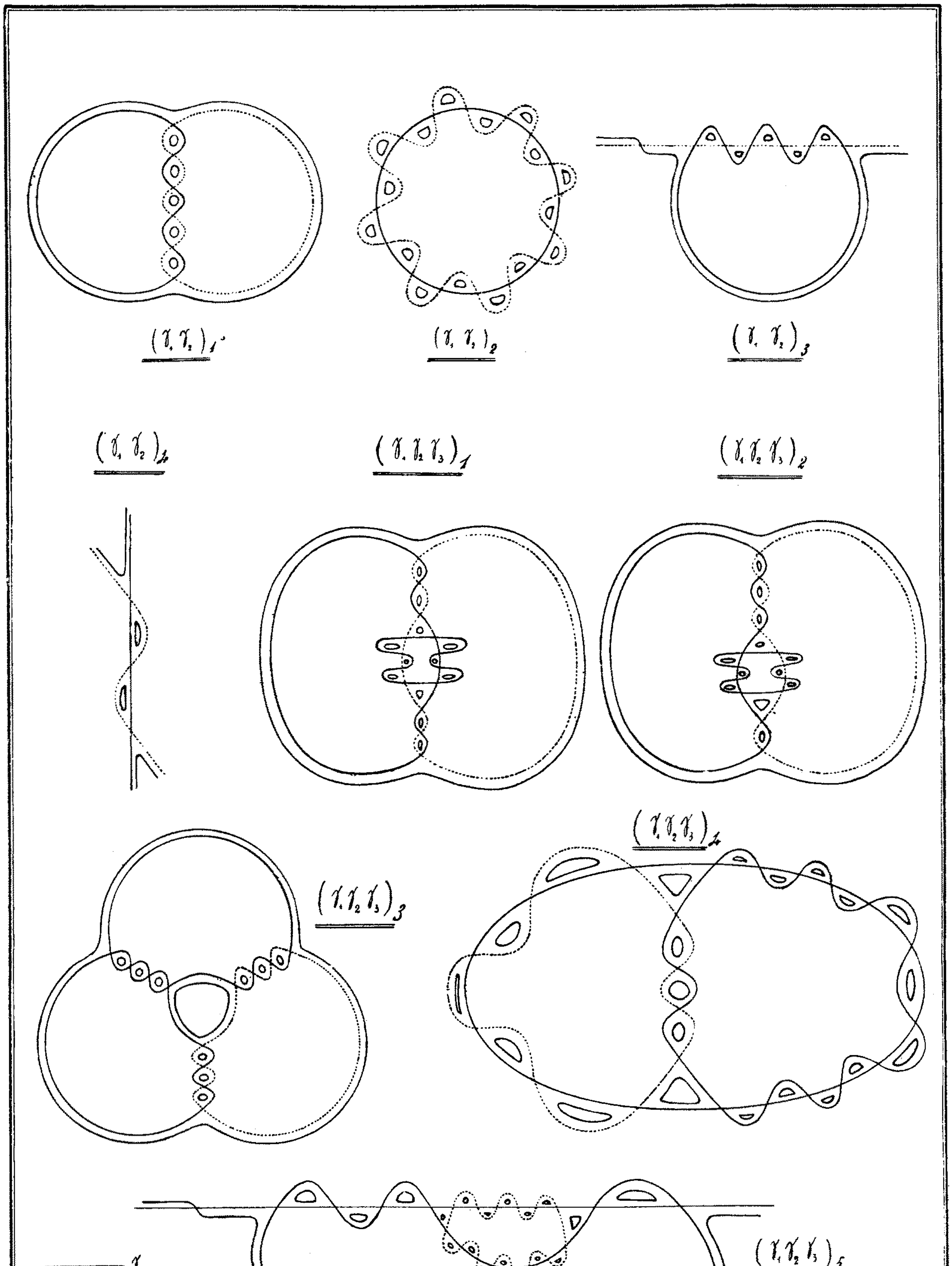
Come corollario si deduce *l'impossibilità di generare curve col massimo numero di circuiti mediante curve spezzate in cinque o più C^{n_i}* (*).

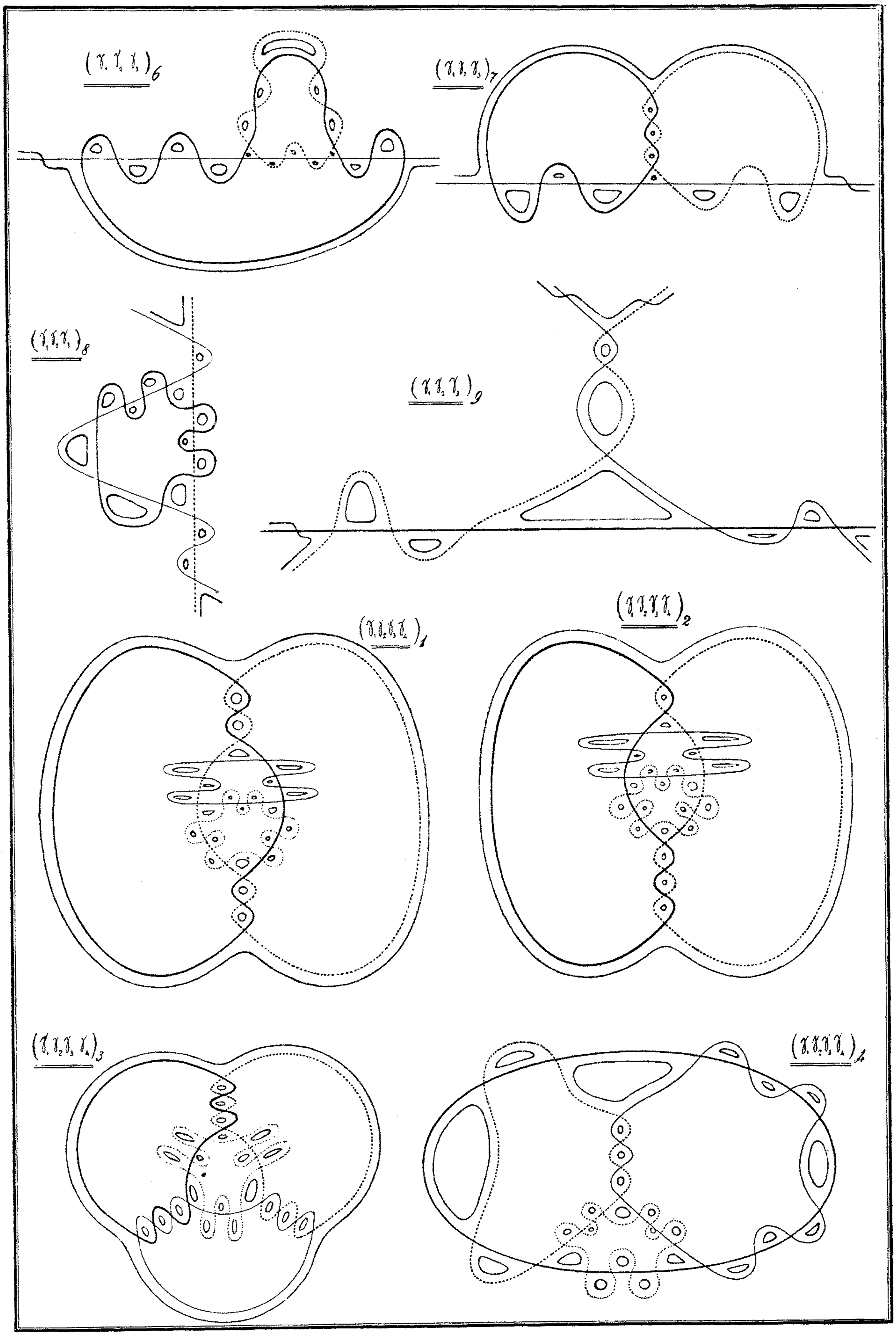
---

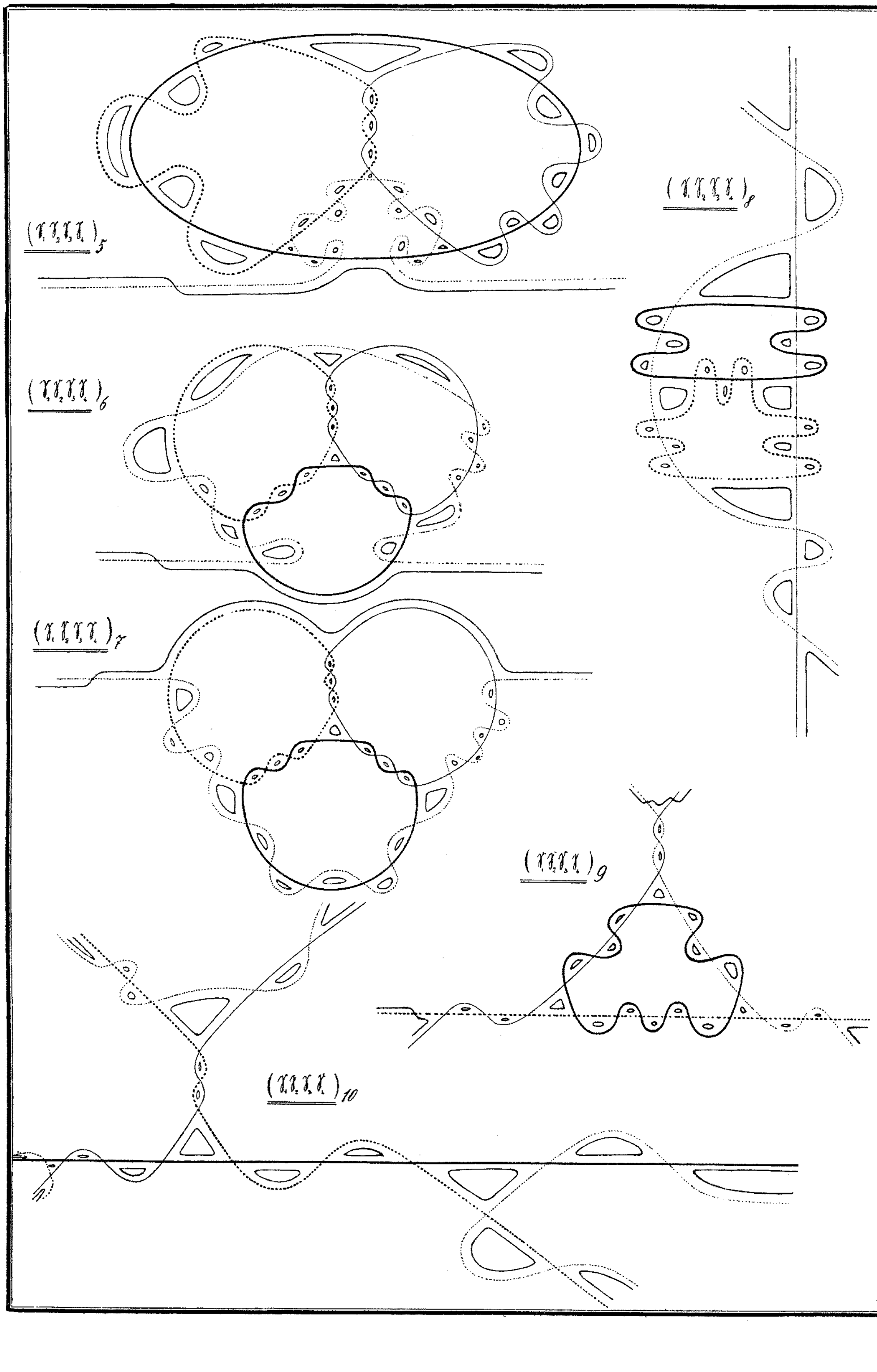
vedasi la mia Nota: *Sulla generazione delle curve piane di genere p dotate di $p+1$ circuiti* (cit.), ove le condizioni del caso *B*) sono dimostrate sufficienti coll'inclusione di una condizione superflua riflettente la projettabilità al finito dei segmenti sui quali sono ordinate le intersezioni. Esempî del caso *C*) sono forniti da una generatrice a circuito bifronte e da due rette *secanti* le rispettive fronti; ed anche da una generatrice a circuito bifronte, dalla bifronte prossima e dalla curva dedotta per duplicazione (Nota cit.; num. 6) Un esempio del caso *D*) è dato da una generatrice a circuito trifronte e da tre rette secanti le rispettive fronti (Nota cit.; num. 5). Ulteriori esempî, specialmente del caso *B*), saranno oggetto di prossima pubblicazione.

(*) Sul campo di validità per le conclusioni raggiunte osservo quanto segue. Le restrizioni poste sono: 1.° la $g=0$ non ha punti multipli nelle mutue intersezioni reali delle C^{n_i}; 2.° le C^{n_i} non hanno mutui contatti reali; 3.° le C^{n_i} non hanno punti multipli reali. La prima restrizione non influisce sul risultato; infatti l'ipotesi contraria attribuirebbe alla curva trasformata punti multipli, il che non avviene se essa possiede il massimo numero di circuiti compatibile coll'ordine. È presumibile che anche la seconda restrizione non abbia valore sostanziale, se si riflette alle conseguenze prodotte dal sostituire ai contatti convenienti intersezioni. Ad *A*) si dovrebbe però aggregare (come caso limite) l'opportuna « piccola variazione » della curva che si spezza in una conica ed in una tangente di questa. La terza restrizione è invece essenziale.

Pavia, 9 Aprile 1913.


$(\gamma_1\gamma_2)_1$
$(\gamma_1\gamma_2)_2$
$(\gamma_1\gamma_2)_3$
$(\gamma_1\gamma_2)_4$
$(\gamma_1\gamma_2\gamma_3)_1$
$(\gamma_1\gamma_2\gamma_3)_2$
$(\gamma_1\gamma_2\gamma_3)_3$
$(\gamma_1\gamma_2\gamma_3)_4$
$(\gamma_1\gamma_2\gamma_3)_5$
γ_1
γ_2
γ_3
γ_4
Σ'
Indic= per le tavole 1.2.3.


(γ₁γ₂γ₃)₆
(γ₁γ₂γ₃)₇
(γ₁γ₂γ₃)₈
(γ₁γ₂γ₃)₉
(γ₁γ₂γ₃γ₄)₁
(γ₁γ₂γ₃γ₄)₂
(γ₁γ₂γ₃γ₄)₃
(γ₁γ₂γ₃γ₄)₄


$(\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4)_5$
$(\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4)_6$
$(\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4)_7$
$(\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4)_8$
$(\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4)_9$
$(\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4)_{10}$