

MÉMOIRE SUR LES SURFACES HYPERELLIPTIQUES.

PAR

MM. FEDERIGO ENRIQUES et FRANCESCO SEVERI.

à BOULOGNA.

à PADOVA.

Couronné par l'Académie des Sciences de Paris (1907).

VIII. Surfaces hyperelliptiques régulières de rang 3 (type II).

73. — *Transformations hermitiennes périodiques d'ordre trois.* — Soit F une surface de JACOBI admettant une, et par conséquent ∞^3 , transformations hermitiennes périodiques d'ordre 3, correspondant à une transformation τ d'ordre 3 de la courbe associée f .

Rappelons-nous que la transformation singulière τ jouit des propriétés suivantes:

- a) Le groupe formé par un point ξ de f et par les points ξ' , ξ'' correspondants à ξ au moyen de τ et de τ^2 , donne, au varier de ξ , une série linéaire g_2^1 de la courbe f .
- b) La transformation τ admet quatre points de coïncidence qui se distribuent en deux couples de la g_2^1 appartenant à f .

La transformation τ peut être envisagée aussi comme une transformation birationnelle entre les couples de points de f : on a ainsi sur la surface de JACOBI F une transformation de HERMITE T , qui correspond à τ . Pour déterminer le nombre des points de coïncidence de T , il faut chercher les couples de points de f , qui sont invariant par rapport à la transformation τ .

Soient

$$A_1, A_2, B_1, B_2$$

les quatre points de coïncidence de τ ; A_1, A_2 et B_1, B_2 étant respectivement conjugués par rapport à la g_2^1 .

Désignons d'une façon générale par $2P$ le couple donné par deux points coïncidant avec P , et par $P + Q$ le couple donné par les points P, Q . On a alors les couples $2A_1, 2A_2, 2B_1, 2B_2, A_1 + A_2, B_1 + B_2, A_1 + B_1, A_2 + B_2, A_1 + B_2, A_2 + B_1$, invariant par rapport à τ ; et on ne peut pas avoir d'autres couples jouissant de la même propriété, car tout couple $P + Q$ qui est ramené en lui-

même par τ , doit être formé par deux points de coïncidence de la transformation :

$$\tau^2 \equiv \tau^{-1}.$$

Il semble au premier abord qu'on aura sur F , 10 points de coïncidence de la transformation T . Mais il ne faut pas oublier que si la surface F n'a pas de courbes exceptionnelles (n. 17), la correspondance entre les points de F et les couples de f , n'est pas biunivoque sans exception, car tout couple de la g_1^1 vient représenté par un même point de F (n. 14, c); ainsi donc les deux couples

$$A_1 + A_2, B_1 + B_2$$

appartenant à la g_1^1 correspondent à un même point de coïncidence de T sur F . Pourtant on a sur F neuf points de coïncidence de la transformation T .

Envisageons maintenant le système complet Σ , déterminé par les courbes C de F répondant aux couples de f qui renferment un même point. La T change en lui-même le système Σ et fait correspondre les courbes de celui-ci, conçues comme les éléments d'une variété hyperelliptique, suivant une transformation hermitienne d'ordre 3.

En vertu de la dualité entre les points de F et les courbes du système (n. 23), on peut affirmer tout de suite que T change en elles-mêmes neuf courbes du système Σ .

Entre ces courbes et les neuf points de coïncidence, il y a des relations remarquables, que nous allons établir.

Soit O un des points de coïncidence, et H le système ∞^1 formé des courbes C issues par O .

La transformation T change en lui-même le système H , et elle donne naissance à une transformation singulière d'ordre 3 entre les courbes du système H , conçu comme une variété ∞^1 d'éléments, birationnellement identique à la courbe f (n. 22). On a donc quatre éléments de H qui demeurent invariant par rapport à la transformation T , c'est-à-dire que des neuf courbes C unies, quatre passent par le point O .

Les quatre éléments unis, en vertu de la propriété b) rappelée ci-dessus, se distribuent en deux couples de la série g_1^1 appartenant à la variété H .

Comme les couples de cette série sont donnés par les couples de courbes C se touchant en O , on en conclut que les courbes unies issues par O se distribuent en deux couples a, b , et c, d de courbes tangentes.

En considérant d'une façon analogue la transformation d'ordre 3 déterminée par T sur une des courbes unies, on trouve sur cette courbe quatre points de coïncidence distribués en deux couples de la g_1^1 relative à la courbe envisagée.

Mais il y en a davantage. Deux courbes unies se coupent certainement en deux points de coïncidence, car ces points doivent être unis par rapport à la transformation

$$T^2 \equiv T^{-1}.$$

Or ces points peuvent être distincts ou coïncidents.

On a p. ex. le premier cas relativement aux courbes a, c et le second relativement aux courbes a, b .

Analoguement par deux points de coïncidence il peut passer deux courbes unies, distinctes ou coïncidentes. Le second cas se présente seulement lorsque les points unis envisagés sont conjugués par rapport à la g_1^1 de la courbe unie.

Dans la suite nous dirons que *deux points de coïncidence sont conjugués* lorsqu'ils appartiennent à une seule courbe unie; et nous dirons aussi que *deux courbes unies sont conjuguées* lorsqu'elles se touchent.

En résumant, la configuration formée par les courbes et les points unis de la transformation T , jouit des propriétés suivantes:

Par un point passent quatre courbes, distribuées en deux couples de courbes conjugués.

Deux points appartiennent à une ou à deux courbes, suivant qu'ils sont ou qu'ils ne sont pas conjugués.

Une courbe renferme quatre points, distribués en deux couples de points conjugués.

Deux courbes se coupent en un ou en deux points, suivant qu'elles sont ou qu'elles ne sont pas conjuguées.

Ces propriétés peuvent s'exprimer d'une façon élégante et complète au moyen de l'algorithme suivant, qui a une très grande analogie avec l'algorithme adopté par M. HUMBERT pour la c.f.g. des points et des plans singuliers d'une surface de KUMMER (n. 46).

Envisageons les deux séries de nombres

et désignons par

$$1, 2, 3 \text{ et } 1', 2', 3',$$

$$\alpha, \beta, \gamma \text{ et } \alpha', \beta', \gamma'$$

deux permutations quelconque de ces séries. On peut représenter les neuf courbes et les neuf points unis de la transformation T de F , respectivement par les symboles

$$\begin{aligned} &11', 12', 13', 21', 22', 23', 31', 32', 33' \\ &(11'), (12'), (13'), (21'), (22'), (23'), (31'), (32'), (33'); \end{aligned}$$

et cela de façon que

1) Les points appartenant à la courbe $\alpha\alpha'$, soient

$$(\alpha\beta'), (\alpha\gamma'), (\alpha'\beta), (\alpha'\gamma).$$

2) Les courbes passant par le point $(\alpha\alpha')$ soient

$$\alpha\beta', \quad \alpha\gamma', \quad \alpha'\beta, \quad \alpha'\gamma.$$

3) Deux points ou deux courbes soient conjugués lorsque les symboles relatifs ont un caractère commun

$$[\text{p. ex. } \alpha\beta', \alpha\gamma' \quad \text{et} \quad (\alpha\beta'), (\alpha\gamma')].$$

On voit que les points conjugués au point $(\alpha\alpha')$ ont les symboles

$$(\alpha\beta'), \quad (\alpha\gamma'), \quad (\alpha'\beta), \quad (\alpha'\gamma),$$

et par suite ils appartiennent à la courbe $\alpha\alpha'$. Analoguement les courbes conjuguées à une courbe donnée $\alpha\alpha'$ passent par le point $(\alpha\alpha')$.

On exprimera ce rapport en disant que le point $(\alpha\alpha')$ et la courbe $\alpha\alpha'$ sont conjugués. Nous verrons dans la suite comment on peut rattacher l'algorithme que nous avons défini, aux propriétés des fonctions Θ appartenant à la surface de JACOBI F .

74. *Propriétés infinitésimales d'un point uni de la transformation T .* Il nous sera utile de connaître ce qui se passe dans le domaine d'un point de coïncidence O de la transformation T .

On établit aisément que la transformation T détermine une homographie périodique d'ordre 3 entre les points appartenant au domaine du point uni O , et que les coïncidences de cette homographie tombent en les points de contact des couples de courbes unies passant par O .

En effet la transformation T ne peut pas changer entre elles deux courbes arbitraires C de Σ se touchant en O , car dans l'hypothèse contraire ces courbes résulteraient invariantes par rapport à la transformation

$$T^2 \equiv T^{-1},$$

et par suite elles seraient des courbes unies de la transformation T .

Il s'ensuit que T change tout couple de courbes C se touchant en O , en un couple analogue, mais distinct du premier.

Il faudra donc que T change un point arbitraire appartenant au domaine de O , en un autre point du même domaine. Ce point à son tour ne pourra pas être changé en le premier, car autrement T^2 donnerait lieu à une homographie identique dans le domaine de O .

On en conclut que T détermine dans le domaine de O une homographie de 3^{me} ordre, dont les coïncidences tombent évidemment dans les points communs aux couples de courbes unies.

75. L'involution I_3 engendrée par la transformation T . En associant à tout point P de F les points P', P'' correspondants à P par rapport aux transformations T, T^2 , on obtient une involution I_3 , possédant neuf groupes de coïncidences, dont chacun est formé de trois points coïncidents.

Nous nous proposons d'étudier la surface régulière \mathcal{O} qui représente (sans exception) les groupes de I_3 .

Disons C', C'' les courbes de F transformées d'une courbe C de Σ , par rapport à T, T^2 , et observons que la courbe réductible

$$D = C + C' + C''$$

appartient à l'involution I_3 , c'est-à-dire que les points conjugués de tout point de D , appartiennent aussi à cette courbe.

La correspondance $(1, 3)$ entre les points de \mathcal{O} et les points de F , transforme la courbe C de F en une courbe Γ de \mathcal{O} birationnellement identique à C : eh bien cette courbe Γ est aussi la transformée des courbes C', C'' , c'est-à-dire qu'elle représente la série des groupes de I_3 appartenant à la courbe D . La courbe Γ a deux points doubles, car il existe sur C deux couples de points conjugués par rapport à I_3 , qui sont donnés par les quatre intersections des courbes C', C'' avec C .

Lorsque C décrit le système Σ , la courbe Γ décrit un système continu; et comme la surface \mathcal{O} ne possède pas d'intégrales simples de première espèce, d'après M. HUMBERT ce système continu doit être renfermé en un système linéaire $|\Gamma|$ de courbes du même ordre.

Faisons maintenant les remarques suivantes:

1) Le système $|\Gamma|$ n'a pas de points-base. En effet la correspondance $[1, 3]$ entre \mathcal{O}, F n'ayant pas des points fondamentaux sur la surface \mathcal{O} — c'est-à-dire des points de \mathcal{O} auxquels correspondent des courbes de F — au système Σ dépourvu de points-base, correspond sur \mathcal{O} un système jouissant de la même propriété.

2) Le genre du système $|\Gamma|$ est

$$\pi = 4.$$

En effet le genre d'une courbe arbitraire du système linéaire, est égal au genre d'une courbe Γ répondant à une courbe C , augmenté du nombre des points doubles de Γ .

3) Le degré de $|\Gamma|$ (c'est-à-dire le nombre des intersections de deux Γ) est

$$n = 6.$$

En effet les 18 points communs à deux courbes D , se partagent en six groupes de l'involution I_1 .

4) La dimension de $|\Gamma|$ est

$$r \geq 3,$$

car ce système linéaire doit renfermer un système continu ∞^2 , non linéaire, de courbes douées de deux points doubles.

5) Le système $|\Gamma|$ est un système *simple*, c'est-à-dire que les courbes Γ passant par un point quelconque de la surface Φ , ne vont passer en conséquence par d'autres points mobiles avec celui-ci.

Etant donnés sur Φ deux points quelconque M, N , il suffira de prouver qu'il y a des courbes Γ passant par M et non par N .

Soient

$$P P' P'', \quad Q Q' Q''$$

les deux groupes de I_2 répondant aux points M, N de Φ . Comme les courbes C passant par P n'ont d'autres points communs, on pourra fixer une de ces courbes, qui ne passe par aucun des points Q, Q', Q'' . Alors les courbes C', C'' transformées de C , viennent passer respectivement par les points P', P'' , mais non par Q, Q', Q'' . On a ainsi sur Φ une courbe Γ — image de la courbe

$$D = C + C' + C'' -$$

qui passe par M et non par N .

Comme il est bien connu, en vertu des propriétés 4) et 5) on pourra transformer birationnellement la surface Φ en une surface de l'espace à r dimensions, de telle façon qu'aux courbes du système $|\Gamma|$ répondent les sections hyperplanes de la surface transformée, qui résultera d'ordre 6, 6 étant le degré de $|\Gamma|$.

Dans la suite (aucune ambiguïté n'étant pas possible) nous désignerons encore par Φ , ou par Φ_6 , la surface d'ordre 6 de l'espace S_r , et par Γ ses sections hyperplanes, qui seront des courbes de genre 4.

76. — *La surface Φ_6 .* — Remarquons d'abord que la dimension r de l'espace renfermant la surface Φ_6 , ne peut pas être plus grande que 4, car les sections hyperplanes de la surface, étant des courbes d'ordre 6 et de genre 4, ne peuvent pas appartenir à un espace de dimension > 3 . On aura donc

$$r = 3 \quad \text{ou} \quad r = 4.$$

La première valeur de r sera écartée, lorsque nous aurons démontré que «la surface Φ ne peut pas renfermer des lignes multiples»; car une section hyperplane *arbitraire* de Φ résultera alors une courbe d'ordre 6 et de genre 4, dé-

pourvue de points multiples, et par suite elle ne pourra pas appartenir à un plan. Pour établir le fait énoncé, observons que, si P est un point de la surface de JACOBI F , distinct des neuf points de coïncidence, on peut toujours construire deux courbes D passant par le groupe $PP'P''$ déterminé par P , et se coupant, hors de ce groupe, en 5 groupes distincts de l'involution I_3 . Il suffit en effet de choisir deux courbes arbitraires C, C_0 de Σ passant par P , et de considérer les courbes $C', C''; C'_0, C''_0$ qui leur correspondent au moyen de T et de T^2 . On a ainsi deux courbes D

$$C + C' + C'', \quad C_0 + C'_0 + C''_0$$

satisfaisant à la condition énoncée.

Designons par M le point de Φ image du groupe $PP'P''$.

Les courbes D envisagées ont pour images deux sections hyperplanes de Φ , issues par le point M et se coupant hors de M en cinq points: on en conclut que M est un point simple de Φ , c'est-à-dire qu'à tout point P de F , ne tombant pas en un point uni de la transformation T , correspond un point simple M de la surface Φ ; et par suite que cette surface n'a que neuf points multiples (au plus).

Il s'agit maintenant d'examiner la nature des points de Φ qui correspondent aux points de coïncidence.

Soit O le point de Φ correspondant au point de coïncidence $(11')$, ayant adopté pour les points et pour les courbes unis de la transformation T l'algorithme introduit au n. 73.

Lorsque la courbe C variable dans le système Σ , vient coïncider avec la courbe $12'$ issue par $(11')$, les courbes C', C'' transformées de C par rapport à T et à T^2 , viennent aussi coïncider avec $12'$, de sorte que la courbe $12'$ comptée trois fois, donnera une courbe totale du système linéaire $[D]$.

Il s'ensuit qu'en comptant trois fois la courbe de Φ correspondante à la courbe $12'$, on obtient une section hyperplane de Φ ; pourtant à $12'$ correspondra sur Φ une conique, et il y aura un hyperplan ayant un contact d'ordre 2 avec la surface Φ en tout point de cette conique.

On a ainsi sur Φ quatre coniques passant par le point O , et correspondant aux quatre courbes unies, issues par $(11')$.

Nous désignerons ces coniques avec les mêmes symboles qui appartiennent aux courbes unies correspondantes.

Un hyperplan arbitraire passant par O coupe la conique $12'$, hors de O , en un point: donc la courbe D correspondante à la section hyperplane envisagée, doit couper la courbe $12'$ en trois points différents de $(11')$; c'est-à-dire que le point $(11')$ doit absorber 3 parmi les 2.3 intersections des courbes D et $12'$.

La même conclusion peut être rapportée aux courbes $13'$, $1'2$, $1'3$.

Il s'ensuit que la courbe D a en $(11')$ un point multiple d'ordre

$$s = 2 \quad \text{ou} \quad s = 3;$$

dans le premier cas les deux branches de la courbe D touchent les couples de courbes conjuguées $12'$, $13'$, et $1'2$, $1'3$, tandis que dans le second cas on n'a pas des contacts de ces courbes avec D .

On voit tout de suite que le cas $s = 3$ est réellement possible. En effet les courbes C' , C'' transformées d'une courbe C passant par (11) , mais ne touchant aucune des courbes unies, passent aussi par $(11')$ de sorte que la courbe particulière

$$D = C + C' + C''$$

vient passer par $(11')$ avec trois branches non tangentes entre elles. Les points de ces branches infiniment prochains à $(11')$ donnent un groupe de I_3 , c'est-à-dire un cycle de l'homographie périodique d'ordre 3 qui résulte définie dans le domaine de $(11')$ (n. 74).

Remarquons encore que la courbe Γ de genre deux répondant à la courbe $C + C' + C''$, n'a qu'un point double distinct du point O ; en effet la courbe C renferme deux couples de points conjugués par rapport à I_3 , dont l'un est formé par deux points coïncidents avec $(11')$, et l'autre par les intersections ultérieures de la courbe C avec C' , C'' .

Comme une courbe gauche Γ d'ordre 6 et de genre 2, ayant un point double, ne peut pas posséder un autre point multiple d'ordre > 2 , on en conclut que Γ a en O un point double, et par suite que O ne peut pas être un point multiple d'ordre > 2 pour la surface. Cette conclusion conduit tout naturellement aux propriétés suivantes:

1) Une courbe *arbitraire* D passant par $(11')$, c'est-à-dire une courbe répondant à une section hyperplane Γ , issue arbitrairement par O , a en $(11')$ un point multiple d'ordre 2 dont les deux branches touchent respectivement les couples de courbes tangentes

$$12', 13' \quad \text{et} \quad 1'2, 1'3.$$

En effet si pour une D arbitraire l'on avait $s = 3$, deux courbes D auraient communs, hors de $(11')$, seulement

$$18 - 3 \cdot 3 = 9$$

points, et par suite deux sections hyperplanes arbitraires Γ passant par O , se couperaient, hors de O , en $\frac{9}{3} = 3$ points, c'est-à-dire que O serait un point triple de la surface \mathcal{O} .

2) Au système linéaire des sections de Φ avec les hyperplanes passant par O , répond sur F un système linéaire H de courbes D ayant en $(11')$ un point-base double avec deux points-base simples infiniment voisins, qui sont les points de contact des couples de courbes $12', 13'$ et $1'2, 1'3$.

On ne peut pas avoir d'autre points-base *successifs*, car le point O étant double pour la surface Φ , le point $(11')$ doit absorber seulement 3.2 intersections de deux courbes D , répondant à deux sections hyperplanes issues par O .

3) Un hyperplan arbitraire passant par O coupe Φ suivant une courbe Γ ayant en O un point double *nodale* (intersection de deux branches ou cycles non tangentes) car sur la courbe D correspondante à Γ , on a deux groupes distincts de I_3 formés par des points infiniment voisins à $(11')$. On obtient ces groupes en comptant trois fois les points-base simples, c'est-à-dire les points unis de l'homographie d'ordre 3 qui résulte définie dans le domaine de $(11')$.

Cette propriété nous montre que le point O ne peut pas être un point double uniplanaire de la surface Φ (c'est-à-dire un point où le cône tangent se réduit à un plan double), car en cette hypothèse une section hyperplane arbitraire issue par O , aurait en O un point double avec une seule tangente.

Nous démontrerons que le point O est un point double *biplanaire*, c'est-à-dire un point où le cône se réduit à deux plans. Il suffira de prouver qu'il y a un système linéaire ∞^1 d'hyperplans issus par O , donnant des sections qui ont en O un point double avec une seule tangente.

En effet, de la propriété 2) on tire que les courbes D ayant en $(11')$ un point triple, forment un système linéaire ∞^2 , car en imposant à une courbe D du système linéaire ∞^3 H la condition de toucher en $(11')$ une droite différente des deux tangentes fixes, on obtient une courbe ayant en $(11')$ un point triple.

Comme sur une telle courbe il y a un seul groupe de I_3 formé par des points infiniment voisins à $(11')$, à cette courbe répondra une courbe Γ passant par O avec une seule branche; et par suite le point double O , étant origine d'un seul cycle, résultera un point de rebroussement de Γ . On a ainsi un système linéaire de ∞^2 hyperplans coupant Φ suivant des courbes douées d'un point de rebroussement en O , et d'une même tangente o en celui-ci. Il s'ensuit que le cône tangent à Φ en O se réduit à deux plans se coupant dans la droite o . En outre il est aisé de voir que le point o est un point *biplanaire ordinaire*, c'est-à-dire que le point de rebroussement d'une des courbes sections hyperplanes par o , est de première espèce,¹ ou, en d'autres termes, que la droite o a un contact de second ordre avec la surface Φ .

¹ Voir p. e. APPELL et GOURSAT, Théorie des fonctions algébriques. — (Paris, Gauthier Villars, 1895) n° 88.

En effet considérons deux courbes D arbitraires ayant un point triple en $(11')$; comme ces courbes se coupent, hors de $(11')$, en 9 points, deux courbes Γ arbitraires passant par la droite o se coupent, hors de O , en $\frac{9}{3} = 3$ points.

Pour achever l'analyse du point double O , il faut encore remarquer que, en disant E_1 le point de F infiniment voisin à $(11')$ et commun aux courbes unies $12'$, $13'$, la correspondance T vient déterminer dans le domaine de E_1 une homographie identique, de sorte que E_1 résulte une *coïncidence parfaite* de la transformation T . En effet une des branches d'une courbe D ayant en $(11')$ un point double, contient trois points unis *successifs* de la transformation T : deux de ces points — c'est-à-dire $(11')$ et E_1 — restent fixes au varier de D ; tandis que le troisième décrit le domaine de E_1 . On peut répéter les mêmes remarques pour le point E_2 , infiniment voisin à $(11')$ et commun aux courbes $1'2$, $1'3$.

De tout ce qui précède on tire qu'aux points »de Φ infiniment voisins à O sur les deux plans tangents à la surface, répondent respectivement les points de F appartenant aux domaines de E_1 et de E_2 , tandis qu'aux points de Φ infiniment voisins au point simple O_1 successif à O suivant la direction o , répondent des ternes de points appartenant au domaine de $(11')$.*

Les propriétés de la correspondance $[1, 3]$ entre Φ et F résultent ainsi définies d'une façon complète.

Comme sur F les courbes unies $12'$, $13'$ passent par E_1 , tandis qu'elles n'ont pas d'autres points communs successifs à E_1 , il s'ensuit que les coniques $12'$, $13'$ issues par O , touchent un même plan tangent suivant deux directions distinctes entre elles et de la direction o .

Analoguement les coniques $1'2$, $1'3$ touchent l'autre plan tangent.

Désignons les neuf points doubles et les neuf coniques de Φ par les mêmes symboles qui représentent les points et les courbes correspondants de la surface F et appelons conjugués deux éléments de la cfg. considérée sur Φ , lorsqu'ils sont les images de deux éléments conjugués de la cfg. de F (n. 73); on pourra énoncer le théorème suivant:

Toute surface hyperelliptique de rang 3 et du type II, peut être transformée birationnellement en une surface Φ_6 , d'ordre 6, appartenant à l'espace à quatre dimensions. Les sections hyperplanes de cette surface sont des courbes canoniques de genre 4. Il y a neuf points doubles biplanaires ordinaires et neuf coniques, qui forment une configuration jouissant des propriétés suivantes:

Par un point passent quatre coniques.

Deux points appartiennent à une ou deux coniques.

Dans le premier cas les 2 points s'appellent conjugués.

Une conique renferme quatre points.

Deux coniques se coupent suivant un ou deux points.

Dans le premier cas les 2 coniques s'appellent conjuguées.

On peut représenter respectivement les neuf points et les neuf coniques avec les symboles $(\alpha \alpha')$, ... et $\alpha \alpha'$, ... (où $\alpha, \alpha', \dots = 1, 2, 3; 1', 2', 3'$), de façon que:

1) *Les points appartenant à la conique $\alpha \alpha'$, soient*

$$(\alpha \beta'), (\alpha \gamma'), (\alpha' \beta), (\alpha' \gamma).$$

2) *Les coniques passant par $(\alpha \alpha')$ soient*

$$\alpha \beta', \alpha \gamma', \alpha' \beta, \alpha' \gamma.$$

3) *Les points conjugués à $(\alpha \alpha')$ soient*

$$(\alpha \beta'), (\alpha \gamma'), (\alpha' \beta), (\alpha' \gamma).$$

4) *Les coniques conjuguées à $\alpha \alpha'$ soient*

$$\alpha \beta', \alpha \gamma', \alpha' \beta, \alpha' \gamma.$$

Les coniques $\alpha \beta', \alpha \gamma'$ passant par $(\alpha \alpha')$, touchent un même plan tangent à Φ en $(\alpha \alpha')$, tandis que les coniques $\alpha' \beta, \alpha' \gamma$ touchent l'autre plan tangent en $(\alpha \alpha')$.

Toute conique $\alpha \alpha'$ de la cfg. appartient à un hyperplan ayant un contact d'ordre 2 avec Φ suivant la conique $\alpha \alpha'$.

Remarquons enfin que les 4 points doubles de Φ appartenant à une même conique, ont sur celle-ci un rapport anharmonique qui ne dépend pas de la conique considérée et qui est l'invariant de la courbe de genre 2 associée à Φ (courbe représentée sur la conique triple ayant 4 points de diramation dans les points indiqués).

77. *Les genres de la surface Φ_6 .* En nous rapportant à la surface Φ_6 qui fournit le modèle des surfaces hyperelliptiques du type II, il est aisé de reconnaître à posteriori que ces surfaces ont les genres

$$p_a = p_g = 1.$$

Remarquons d'abord que la surface Φ_6 est l'intersection d'une variété quadratique et d'une variété cubique de S_4 ; c'est là une conséquence de ce que toute section hyperplane de genre 4 de Φ_6 est l'intersection de deux surfaces

d'ordre 2, 3.¹ Or la surface intersection de deux variétés d'ordre 2, 3 en S_4 a en général les genres $p_a = p_g = 1$; ² mais comme notre surface Φ_6 n'a pas des points singuliers [abaissant le genre numérique, on en conclut que le genre numérique de Φ_6 sera aussi

$$p_a = 1.$$

Il s'ensuit que

$$p_g = 1;$$

ce qui d'ailleurs se reconnaît aussi directement en montrant que le système linéaire $|\Gamma|$ est adjoint à lui même.

78. *La surface hyperelliptique Φ_6 caractérisée par la configuration de ses points et hyperplans singuliers.* Nous venons de reconnaître que toute surface hyperelliptique du type II peut être ramenée par une transformation birationnelle à une surface Φ_6 d'ordre 6 et de genres 1 en S_4 , qui possède 9 points biplanaires et 9 hyperplans ayant un contact d'ordre 2 suivant des coniques; ces points et hyperplans singuliers forment une configuration que nous avons définie au n. 76.

Donnons-nous maintenant une surface Φ_6 d'ordre 6 et de genres $p_a = p_g = 1$, en S_4 , et supposons que cette surface possède une configuration de 9 points et de 9 hyperplans singuliers satisfaisant aux conditions établies; il s'agit de reconnaître si Φ_6 est une surface hyperelliptique de rang 3.

A cet effet nous procéderons par la même méthode que nous avons employé au n. 49.

Nous tâcherons de construire une surface hyperelliptique de rang 1, F , qui soit représentée sur la surface Φ_6 comptée trois fois; on obtiendra une telle surface F en opérant sur les points de Φ_6 par l'extraction d'une racine cubique portant sur une fonction rationnelle de ces points.

Soient $f_1(x_1, \dots, x_5) = 0$, $f_2(x_1, \dots, x_5) = 0$, les équations homogènes (d'ordre 2, 3) qui représentent la surface Φ_6 dans l'espace $S_5(x)$.

Considérons une forme cubique $\varphi(x_1, \dots, x_5)$ et construisons en S_5 la surface F qui est représentée par les équations suivantes:

$$\begin{cases} y_1 = x_1, \dots, y_5 = x_5, & y_6 = \sqrt[3]{\varphi}. \\ f_1 = 0, & f_2 = 0. \end{cases}$$

Nous voulons démontrer que, par un choix convenable de φ , la surface F qui se trouve représentée sur la Φ_6 comptée 3 fois, aura les genres

¹ Cfr. ENRIQUES »Ricerche...» (l. c. V, 5).

² l. c. III, 6.

$$p_a = -1, \quad p_g = P_4 = 1,$$

et sera donc une surface hyperelliptique de rang 1 (et même en ce cas une surface de Jacobi).

Faisons d'abord les remarques générales suivantes.

Si l'on prend φ d'une façon arbitraire, on obtient une surface F qui est représentée sur Φ_6 comptée 3 fois et l'on a sur cette dernière surface une courbe de diramation découpée par

$$\varphi = 0.$$

Cependant:

1) Si de cette courbe fait partie une composante comptée 3 fois, celle-ci n'est pas lieu de points de diramation, mais seulement de points critiques apparents de la surface triple. Pourtant il faudra retrancher de la section de $\varphi = 0$ toute composante qui soit comptée 3 s fois; et on pourra compter comme simple toute composante qui figure 3 $s + 1$ ou 3 $s + 2$ fois dans la même courbe.

2) Si $\varphi = 0$ passe par un point double (biplanaire) O de Φ_6 , on aura que le domaine de Φ_6 , sur chaque nappe de la surface, pourra constituer ou non une courbe de diramation infiniment petite; c'est le premier cas qui a lieu si toute branche linéaire de courbe appartenant à cette nappe a $t = 3s + 1$ ou $3s + 2$ intersections avec $\varphi = 0$; au contraire on tombe dans le deuxième cas si $t = 3s$.

3) La surface F ne saurait être réductible s'il y a sur Φ_6 des points de diramation.

Ceci posé on peut choisir trois hyperplans tangents à Φ_6 suivant des coniques, de façon que ces coniques se coupent deux à deux en trois couples de points doubles appartenant à un même triangle, et qu'elles renferment dans leur ensemble tous les 9 points doubles de Φ_6 . Il suffit de considérer trois hyperplans qui dans notre symbolisme sont représentés par

$$\alpha \alpha', \quad \alpha \beta', \quad \alpha \gamma'.$$

On peut supposer que les équations de ces hyperplans soient respectivement

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0.$$

Posons

$$\varphi = x_1 x_2 x_3,$$

et considérons la surface F qui est représentée par

$$y_1 = x_1, \dots, y_5 = x_5, \quad y_6 = \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}, \quad (f_1 = f_2 = 0).$$

On voit d'abord que, n'existant pas des courbes de diramation propres sur Φ_6 , aux sections hyperplanes de Φ_6 correspondent sur F des courbes se coupant en des groupes canoniques, et par conséquent les genres géométriques de F sont égaux à 1 :

$$p_g = P_2 = \dots = 1, \quad p^{(1)} = 1.$$

En outre les courbes de diramation infiniment petites de Φ_6 donnent lieu sur F , ou sur une transformée de celle-ci, à des courbes exceptionnelles qui se partagent en 9 couples de courbes se coupant en un point; pourtant chaque couple se ramène à un point simple sur une surface de la classe convenablement choisie.

Il s'agit de prouver que le genre numérique de F est

$$p_a = -1.$$

A cet effet il faut montrer que les domaines des points doubles (biplanaires) de Φ_6 , comptent tous comme des courbes de diramation infiniment petites de la surface triple.

Il y a deux sortes de points doubles de Φ_6 ; des points tels que $(\alpha\beta')$, $(\alpha\alpha')$, $(\alpha\gamma')$ appartenant à deux parmi les hyperplans $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$; et des points appartenant à un seul parmi ces hyperplans.

Considérons d'abord le point $(\alpha\beta')$.

Les hyperplans associés $\alpha\alpha'$ et $\alpha\beta'$ qui renferment ce point, ont commun le plan tangent à une nappe de la surface. Or une section hyperplane de celle-ci aura en $(\alpha\beta')$ un point double; et la tangente à une de deux branches étant une droite double pour $\varphi = 0$, cette branche aura 4 intersections avec $\varphi = 0$, tandis que l'autre branche en aura 2. Il s'ensuit que le domaine du point double sur chacune des deux nappes de la surface, compte comme une courbe de diramation infiniment petite.

Il en est de même pour un point, tel que $(\alpha'\beta)$, appartenant à un seul hyperplan parmi ceux qui composent φ . En effet en ce cas le plan tangent à une des deux nappes appartient simplement à φ ; ainsi donc en considérant une section hyperplane par le point double, on trouve qu'une branche a 2 intersections, et l'autre une intersection avec φ .

Ceci posé on peut évaluer l'invariant de Zeuthen-Segre I de F .

Considérons un faisceau de sections hyperplanes C de Φ_6 ; à celles-ci correspondent sur F des courbes K de genre $\pi = 10$, ayant $n = 18$ points-base.

En désignant par δ le nombre des courbes K douées d'un point double, on aura

$$I = \delta - n - 4\pi = \delta - 58;$$

et d'ailleurs, puisque le genre linéaire de F est $p^{(1)} = 1$,

$$I = 12 p_a - p^{(1)} + 9 = 12 p_a + 8;$$

pourtant

$$\delta = 66 + 12 p_a.$$

Il s'agit d'évaluer δ .

On aura

$$\delta = 3 \delta' + 9 h,$$

en désignant par δ' le nombre des courbes C qui ont un point double hors des points biplanaires de la surface, et en supposant qu'en un point simple de F (ou d'une transformée) correspondant à un point biplanair de Φ_6 , il y ait un point multiple pour une courbe K , équivalent à h points doubles.

Mais en calculant l'invariant de Zeuthen-Segre de Φ_6 on trouve

$$I' = \mathcal{A} - 6 - 4 \cdot 4 = 20,$$

où

$$\mathcal{A} = 42$$

désigne le nombre des C qui sont douées d'un point double. En ce nombre \mathcal{A} figurent les 9 points biplanaires de la surface, chacun à compter 3 fois d'après l'abaissement qu'il produit sur la classe de la surface; ainsi donc

$$\mathcal{A} = 42 = \delta' + 3 \cdot 9,$$

$$\delta' = 15.$$

Il s'ensuit

$$3 \cdot 15 + 9 h = 66 + 12 p_a, \quad 9 h = 12 p_a + 21,$$

d'où ($-1 \leq p_a \leq 1$)

$$h = 1, \quad p_a = -1;$$

par conséquent le genre numérique de F est

$$p_a = -1. \quad C.Q.F.D.$$

En conclusion on pourra énoncer le théorème suivant:

La surface hyperelliptique Φ_6 d'ordre 6 et de genres $p_a = p_g = 1$, est caractérisée, parmi les surfaces du même ordre et du même genre de S_4 , par la configuration de ses 9 points doubles et de ses 9 hyperplans singuliers.

Etant données les équations algébriques de la surface, la méthode précédente nous apprend aussi à représenter les coordonnées de ses points par des fonctions hyperelliptiques de deux paramètres u, v ; ces paramètres s'introduisent en construisant les deux intégrales simples de première espèce attachées à la surface F définie ci-dessus.

Dans la suite nous aurons lieu d'étudier en détail cette représentation paramétrique.

Remarque. Il y a lieu de remarquer que l'énoncé du théorème précédent renferme des conditions surabondantes.

En effet la condition de posséder 9 points biplanaires entraîne 18 équations auxquelles on doit satisfaire par les 19 modules appartenant à une surface d'ordre 6 et de genre 1 (intersection d'une variété cubique et d'une quadrique) en S_4 . Cette remarque nous fait comprendre que: *la surface hyperelliptique Φ_6 , dépendant d'un module, résulte déjà caractérisée par la condition de posséder 9 points doubles biplanaires.*

79. *La configuration caractéristique de Φ_6 rattachée à une configuration connue: équations algébriques de Φ_6 .* Pour étudier de plus près la configuration caractéristique de Φ_6 , il convient de la rattacher à une configuration connue, considérée par MM. SEGRE¹ et CASTELNUOVO,² c'est-à-dire à la configuration qui est formée par les 9 points doubles d'un faisceau de variétés cubiques et par les 9 plans appartenant à ces variétés.

D'après MM. SEGRE et CASTELNUOVO, il y a en S_4 ∞^{24} groupes de 9 points G_9 , qui sont doubles pour une variété cubique; il y a toujours un faisceau de variétés analogues possédant les mêmes points doubles de G_9 et renfermant 9 plans; G_9 ne renferme pas des modules.

Nous allons montrer que: *Toute variété cubique passant doublement par les 9 points d'un G_9 , renferme deux surfaces hyperelliptiques Φ_6 ayant comme points biplanaires les points du même G_9 .*

Toute Φ_6 ainsi définie dépend d'un module qui est simplement lié au paramètre dont dépendent les variétés du faisceau considéré; pourtant toute surface hyperelliptique Φ_6 du type II peut être obtenue par la construction indiquée, c'est-à-dire que:

Les 9 points biplanaires d'une surface hyperelliptique Φ_6 , sont les points doubles de ∞^1 variétés cubiques formant un faisceau.

Considérons les 9 points d'un G_9 . D'après M. CASTELNUOVO (l. c. 15, pg. 24) on pourra les représenter très simplement en ajoutant aux coordonnées x_1, \dots, x_5 des points de S_4 , la coordonnée auxiliaire x_6 , où

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0.$$

On a un faisceau de variétés cubiques

¹ C. SEGRE »Sulle varietà cubiche dello spazio a 4 dimensioni...» Memorie Accad. Torino, s. II, t. 39 (1888).

² G. CASTELNUOVO »Sulle congruenze del 3° ordine dello spazio a 4 dimensioni». II. Memoria Atti Istituto Veneto t. VI, s. 6 (1888).

$$(1) \quad x_1 x_2 x_3 + \lambda x_4 x_5 x_6 = 0,$$

qui ont les 9 points doubles

$$\begin{array}{lll} (1 \ 0 \ 0 - 1 \ 0 \ 0) & (1 \ 0 \ 0 \ 0 - 1 \ 0) & (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 - 1) \\ (0 \ 1 \ 0 - 1 \ 0 \ 0) & (0 \ 1 \ 0 \ 0 - 1 \ 0) & (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 - 1) \\ (0 \ 0 \ 1 - 1 \ 0 \ 0) & (0 \ 0 \ 1 \ 0 - 1 \ 0) & (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 - 1) \end{array}$$

que nous désignerons respectivement par 1) 2) 3) 4) 5) 6) 7) 8) 9).

Les 9 points, formant un groupe G_9 , se trouvent quatre à quatre sur 9 plans tels que

$$x_1 = x_4 = 0, \quad x_1 = x_5 = 0, \dots$$

et ces plans appartiennent aux mêmes variétés cubiques de notre faisceau.

Entre les 9 points doubles et les 9 plans-base des (1), il y a les mêmes relations qui passent entre les points doubles d'une surface Φ_6 et les plans de ses coniques.

Or parmi les variétés du faisceau (1) il y en a une douée de 10 points doubles, le dixième point tombant en $P = (1 \ 1 \ 1 - 1 - 1 - 1)$.

Considérons ce point P , covariant du groupe G_9 , et formons la quadrique polaire de P par rapport à la variété

$$x_1 x_2 x_3 + \lambda' x_4 x_5 x_6 = 0$$

on trouvera

$$(2) \quad x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_2 + \lambda' (x_5 x_6 + x_6 x_4 + x_4 x_5) = 0.$$

Cette quadrique coupe le plan

$$x_1 = x_4 = 0$$

suivant la conique

$$x_2 x_3 + \lambda' x_5 x_6 = 0$$

qui renferme les quatre points 5) 6) 8) 9).

Il est aisé d'évaluer le rapport anharmonique que ces quatre points forment sur la conique; il suffit de les projeter par le point 8) suivant les droites

$$x_2 = 0, \quad x_5 = 0, \quad x_3 + x_5 = 0, \quad x_3 - \lambda' x_5 = 0.$$

En prenant les points dans l'ordre 5) 6) 9) 8), on obtient le rapport anharmonique $-\lambda'$.

Cette valeur ne dépend pas des indices des x ; par conséquent la quadrique

(2) coupe les 9 plans-base du faisceau (1) suivant des coniques qui renferment quatre points 1) ... 9), ayant sur la conique respective le même rapport anharmonique.

On obtient ainsi une configuration de 9 points et de 9 coniques satisfaisant aux mêmes conditions que la configuration caractéristique d'une surface hyperelliptique Φ_6 .

Nous allons reconnaître qu'il y a toujours dans le faisceau (1) une variété coupant la quadrique (2) suivant une surface Φ_6 qui renferme les 9 coniques et qui a 9 points biplanaires en 1) ... 9).

A cet effet, étant donnée la quadrique (2), tâchons de déterminer une variété (1) de façon qu'un des points 1) ... 9), p. ex. le point 1), soit un point biplanaire pour la surface intersection de (1), (2).

Remarquons que le cône tangent à (1) en (1, 0, 0, -1, 0, 0) est

$$(3) \quad x_2 x_3 - \lambda x_5 x_6 = 0;$$

d'autre côté l'hyperplan tangent à (2) est

$$(4) \quad x_2 + x_3 - \lambda' (x_5 + x_6) = 0.$$

Il faut exprimer que l'hyperplan (4) est tangent à la quadrique (3).

En éliminant x_2 entre (3), (4), on obtient la quadrique

$$x_3^2 - \lambda' x_3 x_5 - \lambda' x_3 x_6 + \lambda x_5 x_6 = 0;$$

et en annulant le discriminant de cette quadrique, on trouve la condition de contact de (1), (2) sous la forme suivante:

$$\begin{vmatrix} 2 & -\lambda' & -\lambda' \\ -\lambda' & 0 & \lambda \\ -\lambda' & \lambda & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation peut être divisée par λ ($\lambda = 0$ correspond à une variété (1) réductible à trois hyperplans), et l'on obtient

$$\lambda = \lambda'^2.$$

Cette condition ne dépend pas du point 1) que nous avons choisi parmi les 9 points de notre G_9 . Par conséquent elle exprime que les variétés (1), (2), correspondantes aux paramètres λ'^2 , λ' se coupent suivant une surface Φ_6 qui a 9 points biplanaires en les points de G_9 .

Ainsi donc Φ_6 sera notre surface hyperelliptique du type II, et on obtiendra même la surface la plus générale de cette famille dépendant d'un module arbitraire. Par suite la surface hyperelliptique Φ_6 pourra être représentée très simplement par les équations suivantes

$$(5) \quad \begin{cases} x_1 x_2 x_3 + \lambda x_4 x_5 x_6 = 0 \\ x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_2 \pm \sqrt{\lambda} (x_5 x_6 + x_6 x_4 + x_4 x_5) = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0. \end{cases}$$

80. *Homographies qui ramènent en elle-même la surface Φ_6 .* La surface Φ_6 admet un groupe remarquable de transformations homographiques en elle-même. Nous nous proposons d'étudier ce groupe et en particulier d'établir quelques propriétés qui nous seront utiles dans la suite, pour l'analyse du type IV.

Rappelons-nous que sur la surface de Jacobi F , les transformations de 1^{re} et de 2^{de} espèce qui ramènent en lui-même le groupe des coïncidences d'une transformation quelconque T , ramènent aussi en elle-même cette transformation (n. 62).

En particulier, dans notre cas, les transformations de 1^{re} et de 2^{de} espèce qui changent en lui-même le groupe des 9 points unis de la transformation cyclique de 3^{me} ordre T , changent aussi en elle-même l'involution I_3 engendrée par T , et par suite elles donnent naissance à des transformations birationnelles entre les points de la surface Φ_6 image de I_3 .

On aura ainsi sur F exactement neuf transformations de 1^{re} espèce et neuf transformations de 2^{de} espèce, parmi ces dernières étant comprise la transformation identique.

Comme les 18 transformations indiquées laissent invariant le système Σ des courbes C , elles laisseront invariant aussi le système linéaire $|D|$ renfermant les courbes $C + C' + C''$; par conséquent les transformations homologues qu'on obtient entre les points de Φ laissent invariant le système $|\Gamma|$, c'est-à-dire qu'elles sont des homographies de l'espace S_4 .

En ayant égard aux propriétés des 18 transformations de 1^{re} et de 2^{de} espèce qui changent en elle-même l'involution I_3 , on arrive tout de suite au théorème suivant:

La surface Φ est transformée en elle-même par les homographies d'un groupe G_{18} d'ordre 18, renfermant 9 involutions, et 8 transformations cycliques d'ordre 3 qui, avec l'identité, forment un sous-groupe G_9 .

Le produit de deux homographies involutoires est une homographie de G_9 , tandis que le produit d'une involution par une homographie de G_9 , est encore une involution.

Le groupe des neuf points doubles et le groupe des neuf coniques appartenant à Φ sont ramenés évidemment en eux-mêmes par toute homographie du groupe G_{18} .

Nous voulons préciser quelles sont les permutations produites par ces homographies entre les points doubles et les coniques. Nous considérerons en particulier les permutations produites par une homographie involutoire du groupe G_{18} , car cela nous sera utile pour l'examen du type IV.

Il suffit de voir comment sont permutés les points et les courbes de coïncidences de la transformation T existant sur F , par une des 9 transformations de 1^{re} espèce qui changent T en elle-même.

Soit K la transformation de 1^{re} espèce envisagée. Elle est définie par la condition qu'un des 16 points unis de K coïncide avec un des 9 points unis de T .

Désignons ce point uni commun, par le symbole $(\alpha \alpha')$; et observons que les courbes $\alpha \beta'$, $\alpha \gamma'$ étant tangentes en $(\alpha \alpha')$, sont correspondantes par rapport à K . De même K transforme la courbe $\alpha' \beta$ en $\alpha' \gamma$.

Il s'ensuit qu'au point $(\beta \beta')$ commun aux courbes $\alpha \beta'$, $\alpha' \beta$ hors de $(\alpha \alpha')$, correspond le point $(\gamma \gamma')$ commun aux courbes $\alpha \gamma'$, $\alpha' \gamma$, hors de $(\alpha \alpha')$; au point $(\alpha \beta')$ conjugué de $(\alpha \alpha')$ par rapport à la g_1^1 de la courbe $\alpha \gamma'$, correspond le point $(\alpha \gamma')$ conjugué de $(\alpha \alpha')$ par rapport à la g_2^1 de $\alpha \beta'$; au point $(\beta \gamma')$ commun aux courbes $\alpha \gamma'$, $\alpha' \beta$, correspond le point $(\gamma \beta')$ commun aux courbes $\alpha \beta'$, $\alpha' \gamma$; etc. On trouve ainsi que K transforme les points

$$(\alpha \alpha'), (\beta \beta'), (\alpha \beta'), (\alpha' \beta), (\beta \gamma')$$

en les points

$$(\alpha \alpha'), (\gamma \gamma'), (\alpha \gamma'), (\alpha' \gamma), (\beta' \gamma);$$

et les courbes

$$\alpha \alpha', \beta \beta', \alpha \beta', \alpha' \beta, \beta \gamma'$$

en les courbes

$$\alpha \alpha', \gamma \gamma', \alpha \gamma', \alpha' \gamma, \beta' \gamma.$$

Donc:

Chacun des points doubles de Φ est uni par rapport à une involution de G_{18} . Cette involution fait correspondre deux à deux les autres points doubles. Elle laisse invariant la conique de Φ qui est conjuguée au point uni et fait correspondre deux à deux les 8 coniques restant.

Dans la suite il nous faudra aussi connaître le nombre des points de coïncidence d'une des involutions qui transforment en elle-même la surface Φ . Cela revient à chercher le nombre des groupes de l'involution I_3 de F , qui sont invariant par rapport à la transformation de 1^{re} espèce K .

Nous avons déjà établi qu'entre les neuf groupes de I_3 formés par des points coïncidants, il y en a un qui reste invariant par rapport à K : c'est le groupe formé par le point uni ($\alpha\alpha'$) compté trois fois.

Cherchons maintenant s'il peut exister des groupes invariants formés par trois points distincts.

Comme K est une transformation cyclique de 2^{de} ordre, entre les trois points d'un groupe invariant, on trouvera nécessairement une coïncidence de K , et par suite les deux points restant seront aussi unis par rapport à K , car la transformation T , étant permutable avec K , doit ramener en lui-même le groupe des 16 points unis de K .

Les 15 points unis distincts du point ($\alpha\alpha'$) — qui ne sont pas unis par rapport à T , se distribuent ainsi en cinq groupes invariants de I_3 .

On en conclut que sur la surface Φ l'homographie ω , image de la transformation K , laisse invariants six points de Φ : le point double ($\alpha\alpha'$) et cinq points *simples* de la surface.

Mais un examen plus approfondi nous montre qu'au point de vue des transformations birationnelles, le point double ($\alpha\alpha'$) est équivalent à trois coïncidences, c'est-à-dire que sur une surface dépourvue de points multiples et de courbes exceptionnelles, qui soit birationnellement identique à Φ , la transformation correspondante à ω possède huit coïncidences distinctes.

A cet effet il s'agit de prouver qu'entre les points de Φ infiniment voisins au point ($\alpha\alpha'$), il y en a trois qui sont unis par rapport à ω .

Remarquons d'abord que la droite d commune aux plans tangents à Φ en ($\alpha\alpha'$) doit être unie, et par suite que le point successif à ($\alpha\alpha'$) suivant la direction de cette droite, est aussi uni.

Comme l'homographie ω change la conique $\alpha\beta'$ en la conique $\alpha\gamma'$ qui touche le même plan tangent π , elle changera en lui-même ce plan tangent, et entre les droites tangentes issues par le point ($\alpha\alpha'$) sur le plan π , elle engendrera une involution non identique, un couple de cette involution étant donné par les droites distinctes r, s tangentes aux coniques $\alpha\beta', \alpha\gamma'$. Les deux droites unies de cette involution sont: la droite d et la droite d' conjuguée harmonique à d par rapport à r, s .

On trouve analoguement que l'homographie ω a une autre droite unie d'' , sur l'autre plan tangent à Φ en ($\alpha\alpha'$).

On a ainsi en correspondance aux droites d, d', d'' , trois points simples, successifs à ($\alpha\alpha'$), qui sont unis par rapport à ω . C. Q. F. D.

81. *Représentation analytique de la transformation T .* Nous voulons achever ce Ch. en étudiant de plus près la représentation paramétrique de la surface Φ .

Commençons par représenter analytiquement la transformation T d'ordre 3, qui donne naissance à cette surface.

Rapportons-nous donc à la surface de Jacobi F , que T transforme en elle-même, et tâchons d'écrire la substitution linéaire produite par T sur les intégrales normales u, v .

Ainsi que nous l'avons rappelé au n. 66, les périodes normales de u, v sont:¹

$$(1) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & g & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & g' \end{pmatrix} \quad \left(g g' = -\frac{1}{12} \right).$$

Soit

$$\begin{aligned} u' &= \lambda u + \mu v \\ v' &= \lambda' u + \mu' v \end{aligned}$$

la substitution linéaire représentant T ; il s'agit de calculer les constantes $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$.

Ces constantes s'expriment au moyen des périodes g, h, g' par les relations (1) du n. 45, et les quatre équations fondamentales (A), (B), (C), (D) auxquelles conduit l'élimination de $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$ entre ces relations, doivent actuellement se réduire aux relations singulières (de Humbert)

$$h = \frac{1}{2}, \quad g g' = -\frac{1}{12}$$

c'est-à-dire à

$$2h - 1 = 0, \quad 12gg' + 1 = 0.$$

En exprimant que les équations (A), (B), (C), (D) deviennent des identités pour $h = \frac{1}{2}, g g' = -\frac{1}{12}$, on obtient entre les 16 entiers a_i, b_i, c_i, d_i les relations

$$\begin{aligned} a_1 = b_0 = a_3 = b_2 = c_3 = d_2 = c_1 = d_0 = 0, \\ 3(c_0 + d_1) = -(a_2 + b_3) = 2(a_0 - d_3) = 2(b_1 - c_2). \end{aligned}$$

Ces relations, comparées aux (1) du n. 59, (caractérisant les transformations de Hermite d'ordre 1), permettent de calculer les valeurs des entiers a_i, b_i, c_i, d_i . On trouve ainsi:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 & a_1 &= 0 & a_2 &= -3 & a_3 &= 0 \\ b_0 &= 0 & b_1 &= 1 & b_2 &= 0 & b_3 &= -3 \\ c_0 &= 1 & c_1 &= 0 & c_2 &= -2 & c_3 &= 0 \\ d_0 &= 0 & d_1 &= 1 & d_2 &= 0 & d_3 &= -2, \end{aligned}$$

¹ BOLZA «American Journal» 1888.

ou bien:

$$\begin{aligned} a_0 &= -2 & a_1 &= 0 & a_2 &= 3 & a_3 &= 0 \\ b_0 &= 0 & b_1 &= -2 & b_2 &= 0 & b_3 &= 3 \\ c_0 &= -1 & c_1 &= 0 & c_2 &= 1 & c_3 &= 0 \\ d_0 &= 0 & d_1 &= -1 & d_2 &= 0 & d_3 &= 1. \end{aligned}$$

On en tire

$$\begin{aligned} \lambda &= a_0 + a_3 g + a_2 h = -\frac{1}{2} \\ \mu &= b_0 + b_3 g + b_2 h = -3g \\ \lambda' &= a_1 + a_3 h + a_2 g' = -3g' \\ \mu' &= b_1 + b_3 h + b_2 g' = -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

ou bien

$$\lambda = -\frac{1}{2}, \quad \mu = 3g, \quad \lambda' = 3g', \quad \mu' = -\frac{1}{2},$$

et par suite on a les substitutions linéaires périodiques d'ordre 3

$$\begin{cases} u' = -\frac{1}{2}u - 3gv \\ v' = -3g'u - \frac{1}{2}v, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u' = -\frac{1}{2}u + 3gv \\ v' = 3g'u - \frac{1}{2}v, \end{cases}$$

qui sont l'une inverse de l'autre, ou l'une le carré de l'autre.

On remarquera que le déterminant $\frac{1}{4} - 9gg'$ de ces substitutions, est égal à l'unité. On pourra désigner par T la première parmi les substitutions que nous avons écrites; alors T^2 désignera la seconde.

Nous avons déjà démontré que la substitution T a neuf points de coïncidence (n. 73); nous pouvons maintenant retrouver ce résultat en calculant aussi les valeurs des intégrales u, v aux points de coïncidence.

Soit (u, v) un point uni de T : on aura

$$\begin{aligned} u &\equiv -\frac{1}{2}u - 3gv \\ v &\equiv -3g'u - \frac{1}{2}v, \end{aligned}$$

les congruences ayant lieu par rapport aux périodes. On en tire

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}u + g v &= \frac{\vartheta_1}{3} \\ g' u + \frac{1}{2}v &= \frac{\vartheta_2}{3}\end{aligned}$$

ϑ_1, ϑ_2 étant un couple de périodes simultanées de u, v . De là on déduit

$$\begin{aligned}u &= \frac{1}{2}\vartheta_1 - g \vartheta_2 \\ v &= \frac{1}{2}\vartheta_2 - g' \vartheta_1,\end{aligned}$$

qui donnent seulement neuf couples incongrus par rapport aux périodes, c'est-à-dire les couples

$$(0, 0), \quad \left(0, \frac{1}{3}\right), \quad \left(0, \frac{2}{3}\right), \quad \left(\frac{1}{3}, 0\right), \quad \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \quad \left(\frac{2}{3}, 0\right), \quad \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

On obtient le premier couple pour $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0$, le second pour $\vartheta_1 = g, \vartheta_2 = \frac{1}{2}$, le troisième pour $\vartheta_1 = 2g, \vartheta_2 = 1$, etc.

82. *Équations des courbes C de Σ qui sont invariant par rapport à T .* Considérons la fonction thêta normale à caractéristique nulle, d'ordre 1, définies par les conditions fonctionnelles

$$(2) \quad \begin{cases} \vartheta(u+1, v) &= \vartheta(u, v+1) = \vartheta(u, v) \\ \vartheta(u+g, v+h) &= e^{-\pi i(2u+g)} \vartheta(u, v) \\ \vartheta(u+h, v+g') &= e^{-\pi i(2v+g')} \vartheta(u, v) \end{cases}$$

où les périodes appartiennent au tableau de BOLZA (n. 81). Comme il est bien connu, ces conditions déterminent *une seule fonction*, à un facteur constant près (n. 28).

La substitution hermitienne T change toute courbe C en une courbe C , c'est-à-dire toute fonction thêta de premier ordre en une fonction analogue: il s'agit de trouver, en particulier, la fonction thêta correspondante à la D normale envisagée.

On voit tout de suite que la fonction

$$\varphi(u, v) = \vartheta\left(-\frac{1}{2} - 3gv, -3g'u - \frac{1}{2}v\right) e^{3\pi i(3gv^2 + uv + 3g'u^2)}$$

satisfait elle-même aux conditions fonctionnelles (2). On aura par conséquent

$$\varphi(u, v) = c \mathcal{J}(u, v)$$

où c est un facteur constant à calculer.

Il est aisé de prouver que $c = 1$. En effet étant $\mathcal{J}(0, 0) \neq 0^1$, il vient

$$\varphi(0, 0) = \mathcal{J}(0, 0) = c \mathcal{J}(0, 0)$$

d'où l'on tire $\mathcal{J} = 1$.

On a donc la relation

$$\mathcal{J}(u', v') e^{3\pi i (3gv^2 + uv + 3g'u^2)} = \mathcal{J}(u, v),$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} u' &= -\frac{1}{2}u - 3gv \\ v' &= -3g'u - \frac{1}{2}v. \end{aligned}$$

En changeant u en $u - \alpha$, v en $v - \alpha'$, on obtient

$$\mathcal{J}(u' - \beta, v' - \beta') e^{3\pi i [3g(v - \beta)^2 + (u - \alpha)(u - \beta) + 3g'(u - \alpha)^2]} = \mathcal{J}(u - \alpha, v - \alpha')^2$$

(β, β') étant le point de F qui correspond à (α, α') par rapport à T .

Cette relation montre que la transformation T change la courbe

$$\mathcal{J}(u - \alpha, v - \alpha') = 0$$

qui est une courbe quelconque C de Σ , dans la courbe

$$\mathcal{J}(u - \beta, v - \beta') = 0$$

(β, β') étant le point homologue de (α, α') .

Il s'ensuit que, si (α, α') est un point uni de T , l'équation

$$\mathcal{J}(u - \alpha, v - \alpha') = 0$$

vient représenter une courbe C invariant par rapport à T .

On peut donc énoncer que:

Etant donnée une surface de Jacobi correspondante au tableau

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & g \\ 0 & 1 & g' \end{array} \right. \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} \quad \left(g g' = -\frac{1}{12} \right)$$

¹ Voir p. e. HUMBERT, Journal de Math., 1893, pag. 40.

² Voir HERMITE, Comptes rendus 1855, t. 40, p. 366.

il y a une transformation hermitienne périodique d'ordre 3

$$(T) \quad \begin{cases} u' = -\frac{1}{2}u - 3gv \\ v' = -3g'u - \frac{1}{2}v \end{cases}$$

qui ramène la surface en elle-même; cette transformation possède neuf coïncidences en les points

$$u = \frac{\alpha}{3}, \quad v = \frac{\alpha'}{3} \quad (\alpha, \alpha' = 0, 1, 2)$$

et laisse invariant neuf courbes C ayant les équations

$$\vartheta \left(u - \frac{\alpha}{3}, v - \frac{\alpha'}{3} \right) = 0,$$

où ϑ est la fonction thêta normale du 1^{er} ordre à caractéristique nulle.

En poursuivant l'analyse on arrive aussi à démontrer que la courbe

$$\vartheta \left(u - \frac{\alpha}{3}, v - \frac{\alpha'}{3} \right)$$

contient les quatre points unis

$$\frac{\alpha}{3} \frac{\beta'}{3}, \frac{\alpha}{3} \frac{\gamma'}{3}, \frac{\alpha'}{3} \frac{\beta}{3}, \frac{\alpha'}{3} \frac{\gamma}{3},$$

où $\alpha \beta \gamma, \alpha' \beta' \gamma'$ sont deux permutations des nombres 0, 1, 2.

On retrouve ainsi le symbolisme introduit par une voie différente au n. 73.

83. *Représentation paramétrique de la surface Φ_6 .* La correspondance [1, 3] entre la surface Φ_6 de l'espace à quatre dimensions et la surface de Jacobi F , transforme le système linéaire découpé sur Φ par les hyperplans, dans le système linéaire

$$|D| = |C + C' + C''|$$

C', C'' étant les courbes de Σ correspondantes à une C donnée par rapport à T, T^2 (n. 75). Si

$$\vartheta(u - \alpha, v - \alpha') = 0$$

est l'équation de C , l'équation de $C + C' + C''$ résulte (n. préc.):

$$\vartheta(u - \alpha, v - \alpha') \vartheta(u - \beta, v - \beta') \vartheta(u - \gamma, v - \gamma') = 0$$

où l'on a posé :

$$\begin{cases} \beta = -\frac{1}{2}\alpha - 3g\alpha' \\ \beta' = -3g'\alpha - \frac{1}{2}\alpha' \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma = -\frac{1}{2}\alpha + 3g\alpha' \\ \gamma' = 3g'\alpha - \frac{1}{2}\alpha'. \end{cases}$$

Soient C_0, C_1, C_2, C_3, C_4 cinq positions de la courbe C telles que les cinq courbes D :

$$C_i + C'_i + C''_i \quad (i = 0, 1, 2, 3, 4)$$

représentées par les équations

$$\Theta_i(u, v) = \vartheta(u - \alpha_i, v - \alpha'_i) \vartheta(u - \beta_i, v - \beta'_i) \vartheta(u - \gamma_i, v - \gamma'_i) = 0 \\ (i = 0, 1, \dots, 4)$$

résultent linéairement indépendantes. Comme toute courbe du système $|D|$ est linéairement dépendante des cinq courbes fixées, l'équation d'une courbe D quelconque aura la forme

$$\lambda_0 \Theta_0(u, v) + \lambda_1 \Theta_1(u, v) + \dots + \lambda_4 \Theta_4(u, v) = 0.$$

Dans l'espace S_4 de Φ_6 prenons comme hyperplans d'équations

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0, \quad \dots \quad x_4 = 0$$

les cinq hyperplans qui renferment les courbes Γ répondant aux courbes $C_i + C'_i + C''_i$.

On obtient alors les formules

$$\varrho x_i = \Theta_i(u, v) \quad (i = 0, 1, \dots, 4)$$

qui donnent la représentation de la surface Φ_6 au moyen des paramètres u, v .

IX. Surfaces hyperelliptiques régulières de rang 4 (type III).

84. — *Transformations hermitiennes périodiques d'ordre quatre.* — Soit τ une transformation singulière, cyclique d'ordre 4, appartenant à la courbe de genre deux f . La surface de Jacobi F attachée à f , possède une transformation hermitienne T (correspondante à τ) appartenant à une série continue ∞^2 de transformations semblables.

Des propriétés de τ on déduit tout de suite les propriétés de T . Cherchons en particulier le nombre des points de coïncidence de la transformation T . On doit chercher combien y a-t-il de couples de points de f , qui soient changés en eux-mêmes par τ . Remarquons que τ laisse invariant deux points M, N de f , qui sont aussi unis par rapport à la g_2^1 de f , et que les quatre points unis restant de la g_2^1 , se distribuent en deux couples de points homologues A_1, A_2, B_1, B_2 par rapport à la τ ; on obtient ainsi les couples unis

$$2M, 2N, M+N, A_1+A_2, B_1+B_2.$$

Partant sur la surface F il y a quatre points de coïncidence de la transformation T , car la F , étant toujours supposée dépourvue de courbes exceptionnelles, les couples $2M, 2N$ sont représentés par un même point de F (n. 5).

Comme la transformation τ^2 coïncide avec la correspondance déterminée par la g_2^1 entre les points de f , la transformation T^2 de F sera une transformation K de la 1^{re} espèce.

Cette transformation K possède 16 points unis, dont quatre tombent en les points unis de T ; les 12 qui restent correspondent aux couples de points de f :

$$\begin{aligned} &A_1+M, A_2+M; A_1+N, A_2+N; B_1+M, B_2+M \\ &B_1+N, B_2+N; A_1+B_1, A_2+B_2; A_1+B_2, A_2+B_1. \end{aligned}$$

On a ainsi 6 couples de points de F qui forment des cycles d'ordre 2 par rapport à T .

Envisageons maintenant le système Σ qui contient totalement les courbes C de F correspondantes aux séries des couples de f qui renferment un point fixé; tâchons de déterminer les courbes de Σ qui sont invariantes par rapport à T et les liens entre ces courbes et les points unis de la même transformation. Il nous sera ici très utile le symbolisme introduit par M. HUMBERT (n. 46). Désignons donc par $(\alpha\alpha')$ et respectivement par $\alpha\alpha'$ — où $\alpha=1, 2, 3, 4$; $\alpha'=1', 2', 3', 4'$ — les points et les courbes invariants par rapport à la transformation de la 1^{re} espèce K . Soit $(11')$ un des 4 points unis qui sont aussi invariants par rapport à T , et H le système de courbes C issues par $(11')$.

La transformation T établit entre les éléments (courbes) de la variété H , une correspondance singulière cyclique d'ordre 4, parfaitement analogue à la transformation τ donnée sur la courbe f .

Rappelons-nous que les couples de courbes C issues par $(11')$ et conjuguées par rapport à K , forment la g_2^1 appartenant à la variété de genre deux H qui a pour éléments ces $\infty^1 C$; il s'ensuit que parmi les six courbes

$$12', 13', 14', 1'2, 1'3, 1'4$$

passant par le point envisagé et unies par rapport à K , deux seront aussi unies par rapport à T et les quatre restant se partageront en deux cycles de 2^d ordre par rapport à cette dernière transformation.

Soient $12', 1'2$ les courbes unies, et

$$13', 1'3; 14', 1'4$$

les deux cycles d'ordre 2. Il s'ensuit que les points $(22'), (33'), (44')$ où se coupent ces couples de courbes hors du point $(11')$, sont des points unis par rapport à T . On considérera alors la correspondance établie par T entre les courbes C passant par $(22')$, et on trouvera deux nouveaux cycles de 2^d ordre de la transformation T . Ce raisonnement pouvant être répété pour les autres points unis, on arrivera à la conclusion qui est exprimée par le tableau suivant:

Points	
unis	cycles de 2 ^d ordre
$(11'), (22'), (33'), (44')$	$(12'), (1'2); (13'), (2'4); (14'), (2'3);$ $(23'), (1'4); (24'), (1'3); (34'), (3'4).$
Courbes C	
unies	cycles de 2 ^d ordre
$12', 1'2, 34', 3'4$	$13', 1'3; 14', 1'4; 23', 2'3;$ $24', 2'4; 11', 22'; 33', 44'.$

On voit de suite que les cycles de 2^d ordre formés par les points ou par les courbes de notre tableau ne jouent pas un rôle symétrique.

On a en effet quatre cycles de points, c'est-à-dire les cycles

$$(1) \quad (13'), (2'4); (14'), (2'3); (23'), (1'4); (24'), (1'3)$$

qui appartiennent à des courbes unies, tandis que les cycles restant

$$(2) \quad (12'), (1'2); (34'), (3'4),$$

n'appartiennent à aucune courbe unie. Analogiquement on a quatre cycles de courbes

$$(3) \quad 13', 1'3; 14', 1'4; 23', 2'3; 24', 2'4,$$

qui passent par des points unis, tandis que les cycles

$$(4) \quad 11', 22'; \quad 33', 44'$$

ne jouissent pas de cette propriété.

Les cycles (1), (3) seront nommés *cycles de rang 1*, et les cycles (2), (4) *cycles de rang 2*.

85. — *L'involution I_4 engendrée par la transformation T et la surface Φ_8 , d'ordre 8, qui en donne l'image projective.* — Considérons l'involution engendrée sur la surface de Jacobi F par la transformation T ; c'est-à-dire l'involution dont un groupe quelconque est formé en associant à un point P de F les points P', P'', P''' correspondants à P par rapport à T, T^2, T^3 .

En suivant la même marche qu'aux n. 75 on établit tout de suite:

1) Que l'involution I_4 possédant un nombre fini de points de coïncidence (c'est-à-dire quatre points 4-ples et douze points doubles, donnant six groupes de I_4), toute surface Φ qui représente birationnellement les groupes de I_4 , est régulière.

2) Que dans la correspondance $[1, 4]$ entre les surfaces Φ, F , au système linéaire $|D|$ appartenant à l'involution I_4 et renfermant totalement la courbe $C + C' + C'' + C'''$ (où C', C'', C''' sont les transformées de C par rapport à T, T^2, T^3) correspond sur Φ un système linéaire simple $\infty^2 |I|$, dépourvu de points-base, ayant le genre 5 et le degré 8.

La variété ∞^2 des groupes de I_4 pourra donc être représentée par une surface Φ_8 de l'espace S_2 de façon que le système linéaire complet $|I|$ soit decoupé sur Φ_8 par les hyperplans de S_2 .

Comme sur une surface régulière, telle que Φ_8 , tout système linéaire complet a la série caractéristique complète, la dimension r du système $|I|$, c'est-à-dire de l'espace renfermant Φ_8 , sera égale à 5 ou à 4 suivant que cette série caractéristique sera la série canonique ou bien une série non-spéciale; le premier cas aura lieu si le genre de la surface $p_g = 1$, le second si $p_g = 0$.

On verra dans la suite que $p_g = 1$ et par conséquent $r = 5$.

86. — *Relations entre la surface Φ_8 et la surface de Kummer attachée à la même courbe de genre 2.* — *Genre de la surface Φ_8 .* — Pour calculer la valeur du genre de Φ_8 , remarquons d'abord que:

On peut établir une correspondance birationnelle entre les points de la surface Φ_8 et les couples d'une certaine involution I_2 appartenant à la surface de Kummer ψ qui est attachée à la courbe de genre deux f .

En effet les points P, P', P'', P''' d'un groupe de I_4 se distribuent en deux couples P, P'' et P', P''' de points homologues par rapport à la transformation

de 1^{re} espèce $K \equiv T^2$, de sorte qu'à tout groupe de I_4 répondent deux groupes de l'involution I_2 engendrée par K , et réciproquement à tout groupe de I_2 répond un seul groupe de I_4 . Comme les surfaces Φ, ψ dont on parle ci-dessus, sont birationnellement identiques aux variétés I_4, I_2 , on aura entre les points de ces surfaces une correspondance faisant répondre à un point de Φ , deux points de ψ , et à un point de ψ , un seul point de Φ . $C.Q.F.D.$

On dira que la correspondance involutoire qu'on a entre deux points de ψ correspondant à un même point de Φ , est l'image de la correspondance T qu'on a établi sur la surface F .

On démontre de plus que l'involution d'ordre 2 que nous avons définie sur la surface de Kummer ψ , est engendrée par une homographie involutoire qui transforme en elle-même la surface ψ , et laisse invariant quatre points doubles de celle-ci.

Pour établir cette proposition, il faut remarquer d'abord que dans la correspondance $[1, 2]$ entre les points de la surface de Kummer ψ et de la surface de Jacobi F , aux sections planes de ψ répondent les courbes d'un système linéaire $|G|$ renfermant totalement la courbe $C + C''$ ainsi que la $C' + C'''$.

Comme la transformation T change la courbe $C + C''$ en $C' + C'''$, la correspondance involutoire, ω , image de T , changera la section plane de ψ répondant à $C + C''$, dans la section répondant à $C' + C'''$, et par suite elle changera en lui-même le système (complet) des sections planes de ψ . On en conclut que ω est une homographie (involutoire).

Les points de ψ qui sont unis par rapport à ω répondent aux groupes de l'involution I_2 , engendrée par K , qui demeurent invariant par rapport à T . En se rappelant que $K \equiv T^2$, on voit tout de suite que les seuls groupes de K qui restent invariant par rapport à T , sont formés par les points unis $(11')$, $(22')$, $(33')$, $(44')$, dont chacun doit être compté deux fois.

Comme à ces groupes de points coïncidant répondent quatre des 16 points doubles de la surface ψ on arrive ainsi à la conclusion énoncée.

Ceci posé, remarquons que l'homographie ω (par laquelle vient définie I_2 sur ψ) ne saurait être une homologie, car autrement on aurait sur ψ une courbe de points de coïncidences; pourtant ω sera une homographie harmonique à deux axes, et ces axes seront les deux côtés opposés du quadrilatère gauche formé par les quatre points unis nommés ci-dessus.

Or d'après le lemme que nous avons établi au n. 38 on pourra calculer le genre ($p_a = p_g$) de Φ en déterminant s'il y a, ou s'il n'y a pas, des points de coïncidence de l'involution I_2 sur ψ ; on aura

$$p_a = p_g = 1$$

dans la première hypothèse, tandis que la seconde hypothèse amènerait à

$$p_a = p_g = 0.$$

On dirait au premier abord qu'il existe sur ψ quatre coïncidences de I_2 tombant dans les quatre points doubles qui se trouvent sur les deux axes de ω .

Mais il ne faut pas oublier qu'au point de vue des transformations birationnelles, un point double conique doit être considéré comme une courbe rationnelle (de degré -2), de sorte que les points de cette courbe qu'on aurait sur une transformée convenable de la surface, répondent aux points appartenant au domaine du point double, ou, si l'on veut, aux génératrices du cône tangent.

On aura donc à chercher le nombre des génératrices des quatre cônes tangents, qui restent invariant par rapport à ω . Soit M un point double uni et n l'axe de l'homographie ω qui ne renferme pas M ; on voit que les deux droites tangentes en M à la surface ψ et appuyées à l'axe n , sont les seules génératrices du cône tangent, qui restent invariant par rapport à ω . L'involution I_2 engendrée par ω sur ψ possède donc $4 \cdot 2 = 8$ coïncidences, et par suite la surface Φ_8 a le genre $p_a = p_g = 1$.

On en déduit que la surface normale Φ_8 , d'ordre 8, appartient à un espace à cinq dimensions (n. 92).

87. — **Remarque.** — Dans le raisonnement qui précède, le lemme du n. 38 nous conduit à la conclusion que le genre de Φ est > 0 , et par conséquent $= 1$, aussitôt que l'on a reconnu qu'il y a $x > 0$ points de coïncidence de I_2 . Il est intéressant de remarquer qu'on peut calculer directement le genre numérique $p_a (= p_g)$ de Φ en fonction du nombre x , d'après le procédé suivant.

Considérons en général une surface ψ de genre numérique P_a , renfermant une involution I_2 ; soit x le nombre des points de coïncidence de I_2 (nombre qu'on suppose fini, ≥ 0) et soit p_a le genre numérique de cette involution, ou d'une surface Φ qui en fournit une image.

Remarquons d'abord que les coïncidences de I_2 sont nécessairement parfaites, c'est-à-dire que dans le domaine de tout point uni on a une homographie identique.

Supposons en effet que dans le domaine du point uni U on ait une involution possédant deux coïncidences, et désignons par $|A|$ un système linéaire quelconque tracé sur ψ et par $|A'|$ le système transformé de $|A|$ par rapport à I_2 . Soit $|B|$ le système linéaire appartenant à l'involution I_2 , et renfermant les courbes réductibles $A + A'$. Une courbe B quelconque que l'on oblige à passer par U , passera nécessairement par ce point avec deux branches tangentes à deux

directions distinctes; et celles-ci seront conjuguées par rapport à l'involution qui résulte définie dans le domaine de U . On en déduit que l'involution d'ordre 2 appartenant à la courbe considérée B , n'aura pas des coïncidences, car à un point qui se meut sur B s'approchant à U sur l'une des deux branches de la courbe, correspond en I_2 un point qui se meut sur l'autre branche. Or on a sur B une involution γ'_2 (formée par les couples de I_2) dont on pourra désigner le genre par q ; en désignant par q' le genre (effectif) de B on a la formule bien connue de M. ZEUTHEN

$$4(q-1) = 2(q'-1) \quad \text{d'où} \quad q' = 2q - 1.$$

Comme la B que nous avons considérée possède un point double en U , le genre effectif d'une B arbitraire ne passant pas par U sera $q' + 1 = 2q$. Mais c'est là une conclusion absurde, car cette B renferme aussi une involution sans coïncidences, formée par les couples de I_2 , et en appliquant à celle-ci la formule de Zeuthen, on trouve que le genre de la courbe est un nombre impair.

Ceci posé considérons la correspondance $[1\ 2]$ entre les surfaces Φ, ψ (Φ étant une image de I_2). On déduit aisément de ce qui précède, qu'aux points unis de I_2 répondent sur Φ des courbes rationnelles de degré -2 . On a alors tous les éléments pour écrire la relation, que M. SEVERI a établie, entre les genres arithmétiques de deux surfaces en correspondance algébrique; cette relation sera

$$x + 4P_a = 8p_a + 4.$$

Dans le cas particulier qui nous intéresse ici, on a $P_a = 1$; la formule précédente nous donne alors

$$p_a = 1, \quad x = 8$$

ou bien

$$p_a = 0, \quad x = 0$$

(le cas $x < 0$, qui répondrait à une involution I_2 douée d'une infinité de coïncidences, est ici écarté à priori).

Par cette remarque se trouve établi le théorème suivant qui renferme celui que nous avons établi au n. 38.

Soit I_2 une involution d'ordre 2, appartenant à une surface de genre numérique 1, et possédant un nombre fini $x (\geq 0)$ de coïncidences; le genre numérique de I_2 est

$$p_a = 0 \quad \text{ou} \quad p_a = 1,$$

et on a respectivement

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 8.$$

En nous rapportant à la I_2 donnée sur une surface de Kummer (I_2 qui est représentée par la surface hyperelliptique Φ_8) nous avons trouvé effectivement

$$x = 8;$$

ainsi la déduction $p_a = 1$ se trouve confirmée.

88. — *Configuration des points doubles et des courbes rationnelles appartenant à la surface Φ_8 .* — Considérons sur la surface de Jacobi F les 10 groupes de l'involution I_4 , qui renferment des points multiples, c'est-à-dire les 4 groupes formés par des points quadruples et les six groupes formés par les cycles de 2^d ordre, dont chacun soit compté deux fois (n. 84). A ces groupes répondent 10 points singuliers de la surface Φ_8 , formant une configuration remarquable que nous nous proposons d'étudier.

De même que sur F les relations essentielles entre les points unis de la transformation T , se rapportent aussi aux courbes C unies, sur la surface Φ , la cfg. des points singuliers résultera étroitement liée à la cfg. formée par les courbes répondant aux courbes unies.

On voit tout d'abord que cette dernière cfg. contient: quatre coniques, répondant aux courbes unies $12', 1'2, 34', 3'4$; quatre courbes de quatrième ordre (que nous dirons de *rang* 1) répondant aux cycles de rang 1; et deux courbes de 4^me ordre (que nous dirons de *rang* 2) répondant aux cycles de rang 2. On démontre aisément que les six courbes de 4^me ordre sont rationnelles.

Ainsi p. e. la courbe répondant au cycle $13', 1'3$, est rationnelle car ses points sont en correspondance birationnelle avec les groupes de la série g'_1 , déterminée sur la courbe $13'$ (ou $1'3$) par la transformation $T^2 \equiv K$.

On peut aussi ajouter qu'il existe 4 hyperplans qui touchent Φ le long des quatre coniques avec un contact de 3^me ordre, et six hyperplans touchant Φ le long des six quartiques avec un contact de 1^r ordre. En effet toute conique comptée 4 fois, doit donner une courbe du système complet $|F|$ coupé sur Φ par les hyperplans, car une des courbes unies $12', 1'2, 34', 3'4$ comptée 4 fois donne sur F une courbe D ; et analogiquement pour les quartiques.

Après ces remarques relatives à la cfg. des courbes rationnelles, passons à examiner la nature des 10 points singuliers.

Démontrons d'abord que ces points ne sauraient être multiples d'un ordre > 2 .

On a plus généralement que: *une surface régulière normale des genres $p_a = p_g = P_2 = 1$, dépourvue de courbes exceptionnelles, ne peut pas posséder des points multiples d'ordre > 2 .*

Rappelons que toute surface normale de genres 1, dépourvue de courbes exceptionnelles, jouit des propriétés suivantes:

- a) elle appartient à un espace S_r dont la dimension r est égale au genre r des sections hyperplanes (canoniques) de la surface;
- b) elle est d'ordre $2r - 2$;
- c) elle ne possède pas des courbes multiples ou des points multiples n'abaissant pas le genre des sections hyperplanes.

Si la surface renferme un point multiple O , en la projetant de O on obtiendra une nouvelle surface de S_{r-1} qui ne contient pas des courbes exceptionnelles¹ de sorte que cette projection devra satisfaire aux propriétés a) et b); il s'ensuit que le point multiple O ne saurait pas être d'ordre > 2 .

Remarque. — *On voit de plus que les points doubles de la surface de genres 1, abaissent le genre des sections hyperplanes d'une seule unité.*

Ceci posé revenons à notre surface Φ de l'espace S_5 .

Appelons P le point de Φ répondant au point uni (11') de F . Des 10 courbes rationnelles appartenant à Φ , il y en a quatre qui passent par P : c'est-à-dire les coniques homologues aux courbes unies 12', 1'2, et les quartiques de rang 1 répondant aux cycles de rang 1, 13', 1'3 et 14', 1'4 (voir le tableau du n. 84).

Comme une section hyperplane arbitraire issue par P , coupe chaque conique hors de P en un seul point, sur la surface F une courbe D issue arbitrairement par (11') coupera les courbes 12', 1'2, hors de (11'), en quatre points, de sorte qu'elle aura quatre intersections avec ces courbes, réunies en (11'). On en conclut que le point (11') est un point de multiplicité $s \geq 2$ pour la courbe D envisagée. Mais dans l'hypothèse $s > 2$ deux courbes D arbitraires issues par (11') auraient t intersections réunies en (11'), où

$$t \geq s^2 \geq 9,$$

et par suite deux sections hyperplanes de Φ , issues par P , auraient $\frac{t}{4} > 2$ intersections réunies en P , et ce point résulterait de multiplicité > 2 . En vertu de la proposition établie ci-dessus, on en déduit que $s = 2$.

En tenant compte de ce que la D envisagée a quatre intersections réunies en (11'), avec les courbes 12', 1'2, on reconnaît que les deux branches de D passant par (11'), doivent avoir respectivement un contact de 2^d ordre avec les courbes susdites. On peut exprimer cette propriété en disant que les courbes D issues par P forment un système linéaire ayant le point-base double P et deux

¹ En effet le genre des sections hyperplanes étant $\pi' \leq r - 1$, on en déduit $\pi' = r - 1$ ($pg > 0$); cette égalité ne saurait subsister s'il y avait sur la surface des courbes exceptionnelles parce qu'en ce cas on aurait $\pi' > r - 1$.

points base simples successifs sur chacune des courbes $12', 1'2$. (Voir la figure.) Ce système linéaire, que nous désignerons par $|D_1|$, est formé par les courbes D de F répondant aux sections hyperplanes de Φ , qui passent par P .

Supposons maintenant qu'un point M de F , se mouvant sur la courbe $13'$, s'approche à $(11')$, et considérons les ∞^3 courbes de $|D_1|$ qui passent par M , courbes que nous nommerons D_2 . Comme le système $|D_1|$ appartient à l'involution I_4 , ces courbes que nous avons obligées à passer par M , passeront en conséquence par les points M', M'', M''' homologues à M en T, T^2, T^3 . En se rappelant que $T^2 \equiv K$, on déduit que le point M'' se meut sur $13'$, tandis que les points M', M''' se meuvent sur $1'3$. De là on tire qu'à la limite, lorsque M coïncide avec $(11')$, les courbes D_1 envisagées viennent avoir au moins deux nouvelles intersections réunies en $(11')$ avec les courbes $13', 1'3$, de sorte qu'elles ont avec ces courbes au moins quatre intersections, tombant en $(11')$. Comme les D_1 ont aussi quatre intersections en $(11')$ avec les courbes $12', 1'2$, il s'ensuit que le point $(11')$ est quadruple pour les ∞^2 courbes D_2 .

On pourrait douter que les D_2 aient en $(11')$ un point multiple d'ordre > 4 ; mais on se passe de ce doute en observant que la courbe $C + C' + C'' + C'''$ composée d'une C passant par $(11')$ et de ses transformées par rapport à T, T^2, T^3 , est une particulière D_2 qui possède en $(11')$ un point quadruple. On voit de plus que les D_2 n'ont pas des tangentes fixes en $(11')$, car la courbe $C + C' + C'' + C'''$ envisagée, a ses tangentes variables au varier de C .

Aux courbes D_2 répondent sur Φ les sections hyperplanes d'un système linéaire ∞^3 contenu dans le système ∞^4 des sections hyperplanes qui passent par P , c'est-à-dire les sections produites par des hyperplans renfermant une certaine droite p par P .

Comme le genre de ces sections doit être égal à la dimension 3 du système complet auquel elles appartiennent, on arrive à la conclusion que la surface possède un point double P_1 infiniment prochain à P , suivant la direction p . Si l'on ajoute qu'une section hyperplane arbitraire par P , passe par ce point avec deux branches non tangentes entre elles — répondant aux branches d'une courbe D_1 en $(11')$ — on en déduit que le point P est biplanaire et que p est la droite commune aux deux plans tangents.

La circonstance que les courbes D_2 , répondant aux sections hyperplanes par p , ont les quatre tangentes variables, nous montre aisément qu'il ne peut pas exister un troisième point double P_2 , successif à P_1 .

On peut aussi établir tout de suite le comportement en P des quatre courbes rationnelles passant par ce point. Il suffit à cet effet de rappeler les propriétés des courbes D_1, D_2 au point $(11')$.

Ainsi p. ex. de ce que les D_1, D_2 ont quatre intersections en $(11')$ avec les $12', 1'2$, on déduit que les coniques répondant à $12', 1'2$ passent par P d'une façon telle que chacune d'elles touche un des deux plans tangents et non la droite p ; etc. etc.

Passons maintenant à étudier la nature du point Q de Φ qui répond au cycle de rang 1: $(13'), (2'4)$. Une courbe D issue d'une façon arbitraire par le point $(13')$ doit passer en conséquence par $(2'4)$; il s'agit d'établir les propriétés de cette D dans le domaine de $(13')$ et de $(2'4)$. A ce but remarquons que par Q passent les coniques répondant aux courbes $12', 3'4$, et qu'une section hyperplane par Q coupe ces coniques, hors de Q , en un seul point. Il s'ensuit qu'une D par $(13'), (2'4)$ doit avoir deux intersections avec les courbes $12', 3'4$ en chacun des points $(13'), (2'4)$, et par suite que la D doit avoir un point double en $(13')$ et un autre point double en $(2'4)$.

Soit $|D_1|$ le système linéaire ∞^4 formé par les courbes D répondant aux sections hyperplanes par Q . On voit aisément que les D_1 ont en $(13'), (2'4)$ les deux couples de tangentes variables, car en transformant au moyen de T, T^2, T^3 une courbe C issue par $(13')$, on obtient une particulière D_1 ayant les tangentes variables. En poursuivant l'analyse on établit que le point Q est un point double conique.

Ce résultat découle des remarques suivantes:

- 1) Une section hyperplane arbitraire passant par Q , possède un point double origine de deux branches *non tangentes* correspondantes aux branches de la courbe homologue D_1 par $(13'), (2'4)$.
- 2) Les points de Φ appartenant au domaine de Q , forment une variété algébrique irréductible, car ils correspondent biunivoquement aux couples de l'involution formée par les tangentes des courbes D_1 en $(13'), (2'4)$.

On conduit d'une façon parfaitement analogue la discussion relative au point R de Φ , correspondant à un cycle de rang 2, tel que $(12'), (1'2)$. On arrive de même à la conclusion que R est un point double conique.

Pour compléter la recherche des relations qui passent entre les 10 courbes rationnelles et les points doubles de Φ , il suffira de remarquer que toute relation entre les courbes et les points unis sur F , se transporte sans aucune difficulté aux éléments singuliers de Φ .

En résumant on arrive à la conclusion suivante:

Toute surface hyperelliptique de rang 4 et du type III, peut être transformée birationnellement en une surface Φ_8 de genres 1 appartenant à l'espace à cinq dimensions, et possédant des sections hyperplanes d'ordre 8 et de genre 5.

La Φ_8 jouit des propriétés suivantes: Elle possède 10 points doubles et 10 courbes rationnelles remarquables. Des 10 points doubles quatre sont biplanaires et les six restant sont coniques. Dans le domaine de 1^r ordre de tout point biplanair on a un autre point double.

Les points doubles coniques se partagent en deux classes jouissant de propriétés différentes: 4 points coniques de rang 1 et 2 de rang 2. Des 10 courbes rationnelles quatre sont des coniques et six des quartiques. Le long de toute conique il y a un hyperplan ayant avec Φ_8 un contact d'ordre 3, et le long d'une quartique un hyperplan ayant un contact simple. Les quartiques se partagent en deux classes: 4 de rang 1 et 2 de rang 2.

Les 10 points doubles et les 10 courbes satisfont aux relations qui suivent:

Par un point biplanair passent
2 coniques et 2 quartiques de rang 1.

Par un point conique de rang 1
passent 2 coniques, 2 quartiques de
rang 1 et les 2 quartiques de rang 2.

Par un point conique de rang 2
passent les 4 quartiques de rang 1 et
1 de rang 2.

Une conique renferme 2 points
biplanaires et 2 points coniques de
rang 1.

Une quartique de rang 1 renferme
2 points biplanaires, 2 points coniques
de rang 1 et les 2 de rang 2.

Une quartique de rang 2 renferme
les 4 points coniques de rang 1 et
passe doublement par 1 point conique
de rang 2.

89. — La surface Φ_8 caractérisée par la configuration de ses points et de ses hyperplans singuliers. — Soit une surface Φ_8 , d'ordre 8 à sections canoniques en S_5 ($p_a = p_g = P_2 = 1$), possédant 10 points doubles et 10 hyperplans tangents suivant des courbes rationnelles, de façon que ces points et ces courbes forment une cfig. jouissant des propriétés établies au n. précédent. On peut démontrer que Φ_8 est une surface hyperelliptique du type III, de façon que la configuration que nous avons définie joue un rôle caractéristique par rapport à cette surface.

A cet effet nous procéderons par une méthode analogue à celle que nous avons développée aux nn. 49, 78.

Nous tâcherons de construire une surface birationnellement identique à la surface de Kummer, qui soit représentée sur la Φ_8 comptée deux fois.

Faisons d'abord les remarques suivantes.

Ainsi que nous l'avons expliqué au n. 86, la surface Φ_8 correspond à une involution I_2 d'ordre 2 appartenant à une surface de Kummer. Transformons celle-ci en faisant correspondre aux quadriques de S_3 les hyperplans de S_5 ; on aura ainsi une surface ψ_{16} de S_9 possédant 16 points doubles et 16 S_3 tangents suivant des courbes rationnelles d'ordre 4.

La surface ψ_{16} transformée de la surface de Kummer renferme une involution I_2 qui est engendrée par une homographie de S_9 . Cette homographie possède un S_3 de points unis ne rencontrant pas ψ_{16} ; et de cet espace S_3 la surface vient projetée en notre Φ_8 .

Ceci posé nous allons montrer comment on peut construire réciproquement ψ_{16} étant donnée Φ_8 .

A cet effet remarquons que parmi les 4 hyperplans tangents à Φ_8 suivant les quartiques de rang 1, on peut choisir deux hyperplans ayant communs 4 points coniques, et renfermant dans leur ensemble les 4 points biplanaires.

Supposons que de tels hyperplans soient représentés par

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0.$$

Construisons la surface de S_9

$$(1) \quad y_1 = x_1, \dots, y_6 = x_6, \quad y_7 = \sqrt{x_1 x_2}$$

(x_1, \dots, x_6 satisfaisant aux équations de Φ_8). Comme la quadrique de diramation $x_1 x_2 = 0$ est tangente à la surface double, Φ_8 , il n'y aura pas sur celle-ci des courbes de diramation proprement dites; par conséquent la surface (1) que nous venons de construire est d'ordre 16, et ses sections hyperplanes sont de genre 9 et se coupent deux à deux en des groupes canoniques: il s'ensuit que cette surface a tous les genres géométriques égaux à 1 ($p_g = P_2 = \dots = 1$). Or il y aura une surface normale d'ordre 16 (que nous désignerons par ψ) dont la surface (1) de S_9 , est une projection.

Nous voulons prouver: d'abord que le genre numérique de ψ [ou de (1)] est $p_a = 1$ et par conséquent que ψ appartient à un S_9 ; ensuite que ψ est identique à la surface ψ_{16} que nous avons obtenue en transformant une surface de Kummer.

A cet effet faisons les remarques suivantes:

- 1) Un point biplanaire de Φ_8 appartient à un des deux hyperplans de diramation $x_1 = 0, x_2 = 0$, de sorte que le domaine de ce point sur chaque nappe de la surface donne lieu à une courbe de diramation infiniment petite.
- 2) Les points coniques communs à $x_1 = 0, x_2 = 0$, sont doubles pour la quadrique de diramation $x_1 x_2 = 0$; on voit donc qu'il n'y a pas des points de diramation dans le domaine de ces points coniques.
- 3) Il en est de même pour les deux points coniques de Φ_8 qui n'appartiennent pas à la quadrique $x_1 x_2 = 0$.

Ceci posé on voit d'abord qu'aux 16 points coniques de Φ_8 correspondent autant de couples de points coniques de ψ , ce qui fait 12 points doubles coniques de cette surface.

A chaque point biplanaire (de diramation) de Φ_8 répondra un point de ψ , et nous supposons qu'il s'agisse d'un point singulier abaissant la classe de la surface d'un certain nombre h (≥ 0).

Or en répétant le raisonnement que nous avons développé aux nn. 49, 78, tâchons d'évaluer l'invariant de Zeuthen-Segre de la surface ψ . Ce calcul nous amène à l'équation

$$4 + 4h = 12p_a$$

p_a désignant le genre numérique de ψ .

Cette équation doit être résolue en nombres entiers, et on doit avoir

$$h \geq 0, \quad p_a \leq 1;$$

pourtant on aura

$$h = 2, \quad p_a = 1.$$

Il s'ensuit qu'aux 4 points biplanaires de Φ correspondent 4 points doubles coniques de ψ .

Nous venons de prouver que la surface ψ est une surface de genre $p_a = 1$ possédant 16 points doubles coniques. Il est aisé de reconnaître qu'elle possède aussi 16 S_8 tangents suivant des quartiques C_4 .

Ces courbes C prennent naissance de la façon suivante:

- 1) Chaque quartique de Φ_8 donne lieu à deux C_4 (ce qui fait 12 C_4). En effet on peut reconnaître qu'une telle quartique ne renferme pas des points de diramation.
- 2) Chaque conique de Φ_8 donne lieu à une courbe irréductible d'ordre 4, parce qu'il y a sur la conique deux points de diramation. On a ainsi 4 C_4 à ajouter aux 12 déjà trouvées.

Ceci posé on voit que la surface ψ de S_9 est une transformée de la surface de Kummer; le système transformant est le système linéaire auquel appartiennent les 16 quartiques de ψ comptées deux fois.

X. Surfaces hyperelliptiques régulières de rang 6 (type IV).

90. — *L'involution I_6 engendrée par une transformation hermitienne cyclique d'ordre 6.* — Sur la surface de Jacobi F considérons la transformation hermitienne T périodique d'ordre 3, envisagée au n. 73, et désignons par K la transformation ordinaire de 1^{re} espèce qui laisse invariant un des 9 points unis de T . On remarquera tout d'abord que les transformations T, K sont échangeables, car T doit transformer K en elle-même (voir le n. 62).

La transformation hermitienne singulière

$$S \equiv T K \equiv K T$$

résulte par conséquent périodique d'ordre 6, car on a

$$S^6 \equiv T^6 K^6 \equiv 1.$$

Nous nous proposons d'étudier dans ce chapitre les surfaces représentant l'involution I_6 , engendrée sur F par la transformation S .

En parcourant la marche suivie dans les cas précédents, on aura d'abord à chercher les points et les courbes C qui restent invariant par rapport à la transformation S ou à une de ses puissances, les C étant courbes d'un système Σ .

A ce but il faut chercher:

- a) La permutation produite par K entre les points et les courbes C invariant par rapport à T .
- b) La permutation produite par T entre les points et les courbes C invariant par rapport à K .

La première recherche a été déjà effectuée au n. 80. En désignant par $(\alpha\alpha')$ le point uni de T , qui est aussi uni par rapport à K , on a trouvé que K transforme les points

$$(\alpha\alpha'), (\beta\beta'), (\alpha\beta'), (\alpha'\beta'), (\beta\gamma')$$

en les points

$$(\alpha\alpha'), (\gamma\gamma'), (\alpha\gamma'), (\alpha'\gamma'), (\beta'\gamma'),$$

et les courbes

$$\alpha\alpha', \beta\beta', \alpha\beta', \alpha'\beta, \beta\gamma'$$

en les courbes

$$\alpha\alpha', \gamma\gamma', \alpha\gamma', \alpha'\gamma, \beta'\gamma.$$

Passons donc maintenant à la recherche b). Désignons les courbes et les points unis de K au moyen des symboles de M. HUMBERT, en combinant les deux séries de caractères

$$a, b, c, d \text{ et } a', b', c', d'.$$

Soit $(a\alpha') = (\alpha\alpha')$ le point uni de K , qui est aussi uni par rapport à T . Entre les éléments de la variété ∞^1 formée par les C qui passent par $(a\alpha')$, il y a une transformation singulière périodique d'ordre 3 définie par S ; partant les six courbes unies de K :

$$ab', ac', ad', a'b, a'c, a'd$$

qui passent par $(a\alpha')$, se partageront en deux cycles de la transformation T :

$$ab', ac', ad' \text{ et } a'b, a'c, a'd.$$

Ceci posé, on voit tout de suite que la T fait correspondre au point (bb') le point (cc') et à ce dernier le point (dd') , car (bb') peut être envisagé comme le point commun aux courbes $ab', a'b$, hors de (aa') ; le point (cc') comme le point commun aux courbes $ac', a'c$ correspondantes aux courbes précédentes, et enfin le point (dd') comme l'intersection, hors de (aa') , de deux courbes $ad', a'd$.

En poursuivant l'analyse par des considérations analogues, on arrive à la conclusion que les termes de points

$$\begin{aligned} & (aa') \quad (aa') \quad (aa') - (bb')(cc')(dd') - (ab')(ac')(ad') \\ & (bc') \quad (cd') \quad (db') - (cb')(dc')(bd') - (ca')(da')(ba'), \end{aligned}$$

et les termes de courbes ayant les mêmes symboles, forment des cycles de la transformation T .

En résumant, on voit que l'involution I_6 engendrée sur F par la transformation hermitienne S , cyclique d'ordre 6, possède 10 groupes renfermant des points multiples: c'est-à-dire un groupe formé par un point 6-ple, quatre groupes dont chacun est formé par deux points 3-ples, cinq groupes dont chacun est formé par trois points doubles.

En considérant l'involution I_6 engendrée par S entre les courbes C d'un système Σ , on a d'une façon parfaitement analogue 10 groupes renfermant des courbes comptées plusieurs fois. Les algorithmes introduits ci-dessus donnent d'une façon complète les relations entre ces groupes de points et de courbes.

91. — La surface Φ_{12} d'ordre 12 modèle projectif des surfaces hyperelliptiques du type IV. — Pour construire un modèle projectif des surfaces birationnellement identiques à l'involution I_6 , on procédera en suivant la marche plusieurs fois indiquée. On considérera d'abord le système linéaire $|D|$ appartenant à I_6 et renfermant la courbe $D = C + C' + \dots + C^{(5)}$ composée avec C et ses transformées par rapport à S, S^2, \dots, S^5 ; à ce système répond sur une surface hyperelliptique Φ de la classe envisagée, un système linéaire simple $|\Gamma|$, dépourvu de points-base, de sorte qu'on pourra supposer que $|\Gamma|$ soit le système des sections hyperplanes de Φ .

La surface Φ_{12} ainsi obtenue a l'ordre 12 et ses sections hyperplanes ont le genre 7.

Il s'agit maintenant de trouver la valeur du genre arithmétique p_a de Φ_{12} .

A cet effet il suffit de développer des considérations étroitement analogues à celles qu'on a exposées en calculant le genre p_a du type précédent.

Soit Φ_6 une surface de l'espace S_4 (type II) image projective de l'involution I_3 engendrée sur F par la transformation T ; on aura sur Φ_6 une involution I_3 ,

de 2^d ordre, dont les groupes correspondent birationnellement aux points de la surface Φ_{13} .

En effet un groupe

$$P, P', P'', P''', P^{IV}, P^V$$

de I_6 , obtenu du point P au moyen des opérations

$$S, S^2 = T^2, S^3 = K, S^4 = T, S^5 = K T^2$$

donne deux groupes

$$P, P^{IV}, P'' \text{ et } P''', P', P^V$$

de l'involution I_3 .

Comme le second de ces groupes s'obtient du premier au moyen de la transformation K — qui change en elle-même T et par suite I_3 — l'involution I_2 dont on parle ci-dessus sera engendrée sur Φ_6 par une des 9 homographies involutoires qui changent en elle-même cette surface (n. 80).

En se rappelant que l'involution I_2 possède 8 coïncidences (n. 80) on en conclut (nn. 38, 87) que la surface Φ_{12} a le genre $p_a = 1 (= p_g = P_2)$; et par suite qu'elle appartient à l'espace S_7 et que ses sections hyperplanes sont des courbes canoniques. Les 10 groupes de I_6 renfermant des points multiples sont représentés par 10 points singuliers de la surface Φ_{12} , et les 10 groupes de I_6 renfermant des courbes multiples, par 10 courbes rationnelles de la même surface.

Ces courbes sont rationnelles parce que l'involution I_6 établit sur chacune des courbes unies de S, T, K , une série linéaire (d'ordre 6, 3, 2 respectivement). On trouve aisément l'ordre des 10 courbes appartenant à Φ_{12} . Ainsi p. e. on voit qu'à la courbe $\alpha\alpha' = \alpha\alpha'$ répond une conique, car en comptant six fois la $\alpha\alpha'$ on obtient une courbe D ; à la courbe $\beta\beta' + \gamma\gamma'$ répond une quartique, car la courbe $3(\beta\beta' + \gamma\gamma')$ est une D ; etc.

On a donc sur Φ_{12} une conique, 4 quartiques et 5 courbes de sixième ordre. Les 10 points singuliers de Φ_{12} ne peuvent pas avoir une multiplicité plus grande que 2 (n. 88): on voit aisément par des considérations désormais connues, que les 4 groupes de I_6 renfermant des points 3-ples sont représentés par 4 points biplanaires ordinaires de Φ_{12} , et que les 5 groupes de I_6 renfermant des points 2-ples sont représentés par 5 points doubles coniques.

Arrêtons-nous sur le point P de Φ_{12} qui répond au groupe de I_6 renfermant le point 6-ple $(\alpha\alpha') = (\alpha\alpha')$, car l'analyse de la singularité que la surface Φ_{12} possède en P , se présente moins simple.

À priori une courbe D satisfaisant à la condition de passer par le point $(\alpha\alpha')$, pourra avoir une branche tangente à une direction arbitraire d issue par $(\alpha\alpha')$, ou bien une branche tangente à une des courbes $\alpha\beta', \beta\alpha'$. Dans le premier cas la D doit posséder deux autres branches tangentes aux directions

d', d'' correspondantes à d par rapport à T, T^3 , et par suite la D viendra avoir en $(\alpha\alpha')$ un point de multiplicité ≥ 3 .

L'involution d'ordre 6 appartenant à D aura autant de points doubles qu'il y a de branches passant par $(\alpha\alpha')$: comme, d'après la formule de Zeuthen, une involution possède nécessairement un nombre pair de points doubles, le nombre des branches par $(\alpha\alpha')$ devra être pair, et par suite égal à six (car il doit résulter un multiple de 3). Mais alors, en désignant par x le genre de l'involution donnée sur D , on obtient

$$6 + 12(x - 1) = 2(22 - 1)$$

car le genre d'une D arbitraire étant égal à 37, une D douée d'un point 6-ple aura le genre $37 - 15 = 22$. La relation précédente donne $x = 4$, ce qui est absurde, parce qu'une section hyperplane de Φ_{12} , issue arbitrairement par P , doit avoir le genre $7 - 1 = 6$.

Il faut donc conclure qu'une D passant de la façon la plus générale par le point $(\alpha\alpha')$, a une branche tangente à la courbe $\alpha\beta'$ (ou à $\alpha'\beta$). Mais si la D possédait en $(\alpha\alpha')$ une seule branche, l'involution définie sur D aurait seulement un point 6-ple équivalent à 5 points doubles, contrairement à la formule de Zeuthen. On doit donc supposer que D passe par $(\alpha\alpha')$ avec une branche tangente à $\alpha\beta'$ et avec une autre branche tangente à $\alpha'\beta$.

Il s'ensuit que le point P ne peut pas être simple, et par suite qu'il est double (n. 88). Deux courbes D correspondantes à deux sections hyperplanes de Φ_{12} issues par P , auront donc en $(\alpha\alpha')$ la multiplicité d'intersection $6 \cdot 2 = 12$. On en tire que leurs branches ont deux à deux un contact d'ordre 4, c'est-à-dire qu'aux sections de Φ_{12} passant par P répondent sur F les courbes d'un système linéaire $|D_1|$ ayant en $(\alpha\alpha')$ un point-base double et quatre points-base simples sur chacune des branches de ce point double.

Si l'on considère les courbes D_1 passant par un point de F s'approchant à $(\alpha\alpha')$ suivant une direction différente des directions des tangentes fixes, en faisant toujours jouer la formule de Zeuthen, on trouve un système linéaire $\infty^5 |D_2|$ de courbes ayant en $(\alpha\alpha')$ un point 4-ple avec deux points doubles infiniment voisins suivant les directions de $\alpha\beta', \alpha'\beta$.

Le genre de l'involution appartenant à une D_2 résulte égal à 5: donc aux courbes D_2 répondent sur Φ_{12} des sections hyperplanes de genre 5, passant par une certaine droite p issue par P . Il s'ensuit que Φ_{12} possède un point double P_1 infiniment voisin de P suivant la direction p . Le point P resultera donc biplanaire, car une section hyperplane arbitraire issue par P possède deux branches non tangentes, correspondantes aux deux branches d'une courbe D_1 .

Les courbes D_2 passant par un point de F infiniment voisin à $(\alpha\alpha)$ suivant une direction arbitraire, forment un système linéaire $|D_3|$, ∞^4 , de courbes ayant en $(\alpha\alpha')$ un point 6-ple, les six tangentes en ce point étant variables. Comme le genre de l'involution donnée sur une D_3 est égal à 4, on aura sur Φ_{12} en correspondance aux courbes D_3 de F , des sections de genre 4 découpées par des hyperplans qui passent par un certain plan π renfermant p . La surface Φ_{12} possédera donc un autre point double P_2 infiniment voisin à P_1 .

Ainsi l'analyse du point singulier P est achevée. Nous l'avons exposée avec quelque détail, car cela nous dispensera de développer dans la suite les considérations conduisant à des résultats analogues.

En tenant compte des relations entre les courbes et les points unis de la cfg. appartenant à F , on arrive au théorème suivant:

Toute surface hyperelliptique régulière de rang 6, et du type IV, peut être transformée en une surface Φ_{12} , de genres 1, de l'espace S_7 , ayant des sections hyperplanes d'ordre 12 et de genre 7. La Φ_{12} jouit des propriétés suivantes:

Elle possède 10 points doubles et 10 courbes rationnelles remarquables. Parmi les 10 points doubles il y a un point biplanair singulier possédant deux points doubles successifs, 4 points biplanaires ordinaires, et 5 points coniques. Parmi les 10 courbes il y a une conique, 4 quartiques, 5 courbes d'ordre 6. Le long de la conique, des quartiques, des sextiques, on a respectivement des hyperplans ayant de contact d'ordre 5, 2, 1 avec la surface Φ_{12} .

Par rapport aux propriétés de la cfg. on a 2 points biplanaires ordinaires de rang 1; 2 points biplanaires ordinaires de rang 2; 2 points coniques de rang 1 et 3 points coniques de rang 2; 2 quartiques de rang 1 et 2 de rang 2; 2 sextiques de rang 1 et 3 de rang 2.

Entre les éléments de la cfg. on a les relations suivantes:

Par le point biplanair singulier passent les 2 quartiques et les 2 sextiques de rang 1.

Par un point biplanair de rang 1 passent la conique, une quartique de rang 1 et les 2 quartiques de rang 2.

Par un point biplanair de rang 2 passent les 2 quartiques de rang 1 et 1 quartique de rang 2. Cette dernière possède un point double en le point biplanair.

La conique renferme les 2 points biplanaires et les 2 points coniques de rang 1.

Un quartique de rang 1 renferme le point singulier, un point biplanair de rang 1, et les 2 points biplanaires de rang 2.

Une quartique de rang 2 renferme les 2 points biplanaires de rang 1 et 1 point biplanair de rang 2.

Par un point conique de rang 1 passe la conique, 1 sextique de rang 1 et les 3 sextiques de rang 2. La sextique de rang 1 passe doublement par le point envisagé.

Par un point conique de rang 2 passent les 2 sextiques de rang 1 et 2 sextiques de rang 2. Ces dernières passent doublement par le point conique.

Une sextique de rang 1 renferme le point singulier, un point conique de rang 1 et les 3 points coniques de rang 2.

Une sextique de rang 2 renferme les 2 points doubles de rang 1 et 2 points doubles de rang 2.

Remarquons enfin que :

La surface hyperelliptique Φ_{12} est caractérisée par la configuration de ses points et de ses hyperplans singuliers formant la configuration que nous avons définie.

Pour le prouver il suffit de montrer que étant donnée Φ_{12} , on peut construire une surface représentée sur celle-ci comptée deux fois et birationnellement identique à la surface Φ_6 (type II).

Le procédé que nous avons employé déjà en des cas analogues (nn. 49, 78, 89) ne présente ici aucune nouveauté. Pourtant nous pourrions nous dispenser de répéter une analyse qui réussirait un peu longue à suivre dans les détails.

Il suffira d'indiquer qu'on obtiendra une surface du type II (transformée de Φ_6), en posant

$$y_1 = x_1, \dots, y_8 = x_8, \quad y_9 = \sqrt{x_1 x_2},$$

où (x_1, \dots, x_8) est un point mobile sur Φ_{12} et où l'on suppose que

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0$$

représentent les hyperplans de S_7 tangents à Φ_{12} suivant les sextiques de rang 1.

XI. Surfaces hyperelliptiques régulières de rang 8 (types V, VI, VII).

92. — *Surfaces de Jacobi possédant des groupes bidiédriques d'ordre 8.* — D'après l'analyse développée au n. 70 une surface de Jacobi F attachée à la courbe f de genre deux

$$y^2 = x(x^4 - 1)$$

possède à priori quatre groupes bidiédriques distincts de transformations hermitiennes: les groupes que nous avons désignés par G_8, G'_8, G''_8, G'''_8 . Chacun de

ces groupes est en isomorphisme oloedrique avec le groupe bidiédrique Γ_8 formé par les transformations birationnelles

$$\begin{aligned} (x' = -x, y' = \pm iy) & \quad \left(x' = \frac{1}{x}, y' = \pm \frac{iy}{x^3}\right) \\ \left(x' = -\frac{1}{x}, y' = \pm \frac{y}{x^3}\right) & \quad (x' = x, y' = \pm y) \end{aligned}$$

qui changent en elle-même la courbe f .

On peut prendre comme substitutions génératrices du groupes Γ_8 les $x' = -x, y' = iy; x' = \frac{1}{x}, y' = \frac{iy}{x^3}$, dont l'une change l'autre en son inverse. En les appelant u_1, u_2 , le groupe contiendra les substitutions suivantes:

$$u_1, u_2, u_1 u_2, u_1^2, u_2^2, u_1 u_2^2, u_1^2 \equiv u_2^2, u_1^4 \equiv u_2^4 \equiv 1.$$

Nous désignerons toujours dans la suite par $U_1, U_2; U'_1, U'_2; U''_1, U''_2; U'''_1, U'''_2$, les transformations de G_8, G'_8, G''_8, G'''_8 qui répondent respectivement aux transformations u_1, u_2 de Γ_8 .

Étudions tout d'abord les propriétés du groupe G_8 par rapport aux points de F qui restent invariant vis-à-vis des transformations du groupe.

Rappelons-nous que G_8 est le transformé du groupe Γ_8 au moyen d'une correspondance point par couple établie entre la surface F et la courbe f , de sorte que toutes les transformations de G_8 ont en commun le point uni qui représente tout couple de la série g_1^1 .

En désignant par

$$A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2$$

les trois couples de points unis des transformations $u_1, u_2, u_1 u_2$ — qui donnent les six coïncidences de la g_1^1 — on voit (n. 84) que u_1 laisse invariant les couples

$$2 A_1, 2 A_2, A_1 + A_2, B_1 + B_2, C_1 + C_2;$$

u_2 les couples:

$$2 B_1, 2 B_2, A_1 + A_2, B_1 + B_2, C_1 + C_2;$$

et $u_1 u_2$ les couples:

$$2 C_1, 2 C_2, A_1 + A_2, B_1 + B_2, C_1 + C_2.$$

Les transformations U_1, U_2 de la surface F ont donc les mêmes points unis, c'est-à-dire les 4 points répondant aux couples:

$$A_1 + A_2, B_1 + B_2, C_1 + C_2, 2 A_1 \equiv 2 B_1 \equiv 2 C_1 \equiv 2 A_2 \equiv 2 B_2 \equiv 2 C_2.$$

Il s'ensuit que les quatres transformations $U_1, U_2, U_1^2, U_2^2, U_1 U_2^2$ ont aussi ces mêmes coïncidences.

Envisageons maintenant la transformation de 1^{re} espèce

$$K \equiv U_1^2 \equiv U_1^3,$$

et le système Σ qui renferme totalement toute courbe C répondant aux couples de f qui ont un point fixe. En désignant par les symboles de Humbert les points et les courbes C qui restent invariant par rapport à K , on a ce tableau se rapportant à U_1 (n. 84).

Points	
unis	cycles de 2 ^d ordre
(11'), (22'), (33'), (44')	(12') (1'2) — (13') (2'4) — (14') (2'3) — — (23') (1'4) — (24') (1'3) — (34') (3'4).
Courbes C	
unies	cycles de 2 ^d ordre
12' — 1'2 — 34' — 3'4	13', 1'3 — 14', 1'4 — 23', 2'3 — 24', 2'4 — 11', 22' — 33', 44'.

Soit (11') le point uni qui représente la g_1^2 : par ce point doivent passer deux courbes unies de U_2 donnant un cycle de 2^d ordre de la transformation U_1 ; soient 13', 1'3 ces courbes unies, de sorte que 12', 1'2 et 14', 1'4 donneront deux cycles de 2^d ordre de la transformation U_2 .

En raisonnant comme au n. 84 on arrive au tableau

Points	
unis	cycles de 2 ^d ordre
(11'), (22'), (33'), (44')	(13') (1'3) — (12') (3'4) — (14') (3'2) — — (32') (1'4) — (34') (1'2) — (24') (2'4).
Courbes C	
unies	cycles de 2 ^d ordre
13' — 1'3 — 24' — 2'4	12', 1'2 — 14', 1'4 — 32', 3'2 — 34', 3'4 — 11', 33' — 22', 44' —

se rapportant à U_2 .

Comme toute substitution de G_8 s'obtient par multiplication de U_1 , U_2 , on en déduit sans difficulté que l'involution I_8 engendrée entre les points de F par les transformations du groupe bidiédrique G_8 , possède 7 groupes doués de points multiples, c'est-à-dire les groupes formés par les points

$$(11'), (22'), (33'), (44'),$$

comptés 8 fois, et par les quaternes

$$(12') (1'2) (3'4) (34') - (13') (1'3) (24') (2'4) - (14') (1'4) (23') (2'3)$$

comptés 2 fois; tandis que l'involution J_8 engendrée par G_8 entre les courbes C , possède 7 groupes doués d'éléments multiples, c'est-à-dire les groupes formés par les couples

$$12', 1'2 - 34', 3'4 - 13', 1'3 - 24', 2'4 - 14', 1'4 - 23', 2'3$$

comptés 4 fois, et la quaterne

$$11', 22', 33', 44',$$

comptés 2 fois.

93. Étudions maintenant le groupe G'_8 . On sait (n. 70) qu'en désignant par A la transformation de 2^{de} espèce (périodique d'ordre 2) qui amène $(11')$ en $(22')$, le groupe G'_8 est engendré par les substitutions

$$U'_1 \equiv U_1, \quad U'_2 \equiv U_2 A.$$

Il s'agit de voir comment se distribuent par rapport à U'_1, U'_2 les points et les courbes unies de la transformation de 1^{re} espèce

$$K \equiv U'^2_1 \equiv U'^2_2.$$

La transformation U'_1 étant identique à U_1 on n'a ici qu'à imaginer reproduit le 1^{er} tableau du n. préc. Le tableau relatif à U'_2 se déduit aisément du 2^d tableau, lorsqu'on connaît les permutations produites entre les points et les courbes unies de K par la transformation A .

Or, comme A change en elle-même la transformation K ne laissant pas invariant aucun point ni aucune courbe C , les courbes $12', 1'2$ passant par les points $(11'), (22')$, doivent se changer entre elles au moyen de A . En se rappelant que A est permutable avec U'_1 (n. 62) on voit de plus qu'elle change $(33')$ en $(44')$ et par suite que les courbes $34', 3'4$ doivent aussi se changer entre elles.

Comme la courbe $12'$ renferme les cycles

$$(13'), (2'4) - (14'), (2'3),$$

et la $1'2$ les cycles

$$(1'3), (24') - (1'4), (23'),$$

appartenant à U'_1 , aucun de ces cycles ne pourra pas être ramené en lui-même par A .

D'autre côté la $U'_1 A$ doit avoir 4 points unis entre les 16 coïncidences de K , c'est-à-dire que U'_1 et A doivent avoir deux cycles de 2^d ordre communs, donc les deux cycles restant

$$(12'), (1'2) - (34'), (3'4)$$

doivent appartenir aussi à la transformation A .

On en tire que A change la courbe $13'$ renfermant les points $(11')$, $(12')$, $(3'4)$, en la courbe $24'$ renfermant les points $(22')$, $(1'2)$, $(34')$; la courbe $1'3$ renfermant les points $(11')$, $(1'2)$, $(3'4)$, en la courbe $2'4$ renfermant les points $(22')$, $(12')$, $(3'4)$; la courbe $14'$ renfermant les points $(11')$, $(12')$, $(34')$, en la courbe $23'$ renfermant $(22')$, $(1'2)$, $(3'4)$, et la courbe $1'4$ renfermant $(11')$, $(1'2)$, $(3'4)$, en la courbe $2'3$ renfermant $(22')$, $(12')$, $(34')$.

Il s'ensuit enfin que A change entre elles les courbes $11'$, $22'$ et $33'$, $44'$ qui se coupent respectivement en les points $(12')$, $(1'2)$ et $(34')$, $(3'4)$.

On complète aisément l'analyse pour ce qui concerne les points unis de K .

Ainsi au point $(13')$ appartenant aux courbes $11'$, $12'$, $3'4$ répond le point $(24')$ appartenant aux courbes $22'$, $1'2$, $34'$; etc. etc.

En résumant on peut dire que les 16 coïncidences de K se distribuent en 8 cycles de A :

$$(11'), (22') - (33'), (44') - (12'), (1'2) - (34'), (3'4) - \\ (13'), (24') - (1'3), (2'4) - (14'), (23') - (1'4), (2'3),$$

et les 16 courbes unies, en 8 cycles ayant les mêmes symboles.

On arrive ainsi à construire le tableau se rapportant à U'_2 , que nous omettrons de reproduire, car il se déduit tout de suite des tableaux relatifs à U_2 et A .

La conclusion est la suivante:

L'involution I'_8 engendrée sur F par le groupe G'_8 possède 6 groupes formés des couples

$$(11'), (22') - (33'), (44') - (13'), (2'4) - (1'3), (24') - (14'), (2'3) - (1'4), (23')$$

comptés quatre fois, et un groupe formé de la quaterne

$$(12'), (1'2), (34'), (3'4)$$

comptée deux fois; tandis que l'involution J'_8 engendrée entre les C de Σ par G'_8 , possède 4 groupes formés des courbes

$$12', 1'2, 34', 3'4$$

comptées huit fois, et trois groupes formés des quaternes

$$11', 22', 33', 44' - 13', 1'3, 24', 2'4 - 14', 1'4, 23', 2'3$$

comptées deux fois.

Remarque. — On voit que les groupes G_s, G'_s sont liés par cette relation: qu'on passe des propriétés de l'un aux propriétés de l'autre en remplaçant les points de F avec les courbes C de Σ . On peut donc dire brièvement que *les deux groupes G_s, G'_s se correspondent au moyen de la dualité que nous avons signalée entre les points de F et les courbes C d'un système Σ (n. 23).*

94. Passons à étudier le groupe G''_s . En disant B la transformation de 2^{de} espèce faisant passer de $(11')$ à $(33')$, les transformations génératrices de G''_s sont

$$U''_1 \equiv U_1, \quad U''_2 \equiv U_2 B.$$

On doit ici établir les permutations produites entre les points et les courbes C unies de la transformation

$$K \equiv U''_1{}^2 \equiv U''_2{}^2,$$

par la transformation B .

Pour cela on n'a qu'à répéter les considérations analogues à celles qu'on a exposées dans le n. préc.

Comme B change en elles-mêmes les transformations K, U_2 , on aura les cycles

$$(11'), (33') - (22'), (44') - 13', 1'3 - 24', 2'4,$$

appartenant à B .

Mais comme $13'$ renferme les cycles

$$(12'), (3'4) - (14'), (23')$$

et $1'3$ les cycles

$$(1'2), (34') - (1'4), (2'3)$$

de la transformation U_2 , ces cycles ne pourront pas être invariant par rapport à B , et par suit les cycles restants

$$(13'), (1'3) - (24'), (2'4)$$

devront appartenir à B ; etc., etc.

On voit ainsi que les 16 coïncidences de K se distribuent en 8 cycles:

$$\begin{aligned} & (11'), (33') - (22'), (44') - (13'), (1'3) - (24'), (2'4) - \\ & (12'), (34') - (14'), (32') - (1'4), (3'2) - (1'2), (3'4) \end{aligned}$$

de B , et que les 16 courbes se distribuent en 8 cycles ayant les mêmes symboles.

On en déduit aisément le tableau relatif à la transformation U'' , et comme on possède déjà le tableau relatif à U'_1 , il s'ensuit enfin que:

L'involution I''_s engendrée par G''_s entre les points de F possède 6 groupes formés par les couples

$$(11'), (33') - (22'), (44') - (13'), (2'4) - (1'3), (24') - (12'), (1'2) - (34'), (3'4)$$

comptés quatre fois, et un groupe formé par la quaterne

$$(14'), (1'4), (23'), (2'3)$$

comptée deux fois; tandis que l'involution J''_s engendrée par G''_s entre les courbes C possède 6 groupes formés par les couples

$$12', 3'4, - 1'2, 34' - 13', 1'3 - 24', 2'4 - 11', 22' - 33', 44'$$

comptés quatre fois, et un groupe formé par la quaterne

$$14', 1'4, 23', 2'3,$$

comptée deux fois.

Remarque. — L'analyse développée nous montre qu'au moyen de la dualité établie entre les points de F et les courbes C de Σ , au groupe G''_s répond un groupe doué des mêmes propriétés. On peut dire que G''_s est corrélatif à lui-même.

95. Nous allons enfin achever l'étude des groupes bidiédriques, en remarquant que les groupes G''_s et G'''_s conduisent au même type de surface hyperelliptique (VII).

C'est ce qu'on peut établir tout naturellement en répétant par G'''_s l'analyse développée par les autres groupes: mais on peut aussi arriver à la même conclusion par des considérations *à priori*.

Les quatre points unis

$$(11'), (22'), (33'), (44')$$

communs aux transformations U_1, U_2 , se distribuent en deux couples

$$(11'), (22') - (33'), (44')$$

possédant des mêmes propriétés par rapport à chacune des transformations U_1, U_2 .

En effet par rapport à U_1 chacun de ces couples peut se définir comme le couple des points *unis* communs à deux courbes unies, tandis qu'*aucun* des couples envisagés ne jouit pas de la même propriété par rapport à U_2 .

Il s'ensuit que les transformations de 2^{de} espèce déterminées par les couples

$$(11'), (33') \text{ et } (11'), (44')$$

se comportent de la même façon par rapport à U_1 , U_2 , et par suite que les groupes G''_8 , G'''_8 ne sont pas essentiellement distincts.

96. En résumant on conclut que *sur la surface F il y a trois groupes bi-diédriques birationnellement distincts qui se trouvent en isomorphisme oloédrique entre eux; ce sont les groupes G_8 , G'_8 , G''_8 . Le premier est caractérisé par la condition de laisser invariant un point de F , le second (correlatif à G_8) par la condition de laisser invariant une courbe C , le troisième (correlatif à lui-même) par la condition de ne laisser invariant aucun point ni aucune courbe C .*

Les trois types de surfaces hyperelliptiques correspondantes aux groupes G_8 , G'_8 , G''_8 seront désignés respectivement par V, VI, VII.

97. *Genre des surfaces hyperelliptiques V, VI, VII.* — La méthode suivie pour calculer le genre $p_a = p_g$ des surfaces hyperelliptiques répondant à des groupes cycliques G_4 , G_8 , s'étend aisément aux surfaces relatives à G_8 , G'_8 , G''_8 .

Examinons tout d'abord une surface hyperelliptique Φ image de l'involution I_8 engendrée sur F par G_8 ; et démontrons qu'on peut poser une correspondance birationnelle entre les points de Φ et les groupes d'une certaine involution d'ordre 2 existant sur la surface ψ , d'ordre 8, qui répond au groupe cyclique G_4 engendré par U_1 .

Soient $P, P', P'', P''', P^{IV}, P^V, P^{VI}, P^{VII}$ les points d'un groupe de I_8 : ces points s'obtiennent de P au moyen des transformations

$$(1) \quad 1, U_1, U_2, U_1 U_2, U_1^2, U_2^2, U_1 U_2^2, U_1^2,$$

et par suite ils se distribuent en les quaternes

$$P, P', P^{IV}, P^{VII} \text{ et } P^V, P''', P'', P^{VI}$$

engendrées par le groupe

$$1, U_1, U_1^2, U_1^3,$$

c'est-à-dire qu'ils donnent deux groupes de l'involution I_4 engendrée par U_1 . On passe de la première quaterne à la seconde au moyen de la transformation U_2^2 .

Il s'ensuit que tout groupe de I_8 vient être représenté par un couple de points de la surface ψ image de I_4 . On voit aisément que la transformation involutoire qu'on trouve ainsi entre les points de ψ , comme image de la transformation U_2^8 , est une homographie. En effet en disant $C, C', C'', C''', \dots, C^{VII}$ les courbes de Σ , obtenues de C au moyen des transformations (1), les courbes réductibles

$$C + C' + C^{IV} + C^{VII} \text{ et } C^V + C''' + C'' + C^{VI},$$

correspondantes entre elles par rapport à U_2^8 , sont homologues à deux sections hyperplanes de ψ dans la correspondance [1, 4] qu'on a entre ψ et F . On en tire que la transformation involutoire appartenant à ψ change toute section hyperplane en une section hyperplane, et par suite qu'elle est une homographie.

Les tableaux relatifs aux transformations U_1, U_2 permettent très aisément de trouver les permutations produites par cette homographie entre les éléments de la configuration caractéristique de la surface ψ .

On arrive ainsi au résultat suivant:

Toute surface hyperelliptique du type V répondant au groupe bi-diédrique G_8 , est birationnellement identique à une involution I_2 , d'ordre 2, appartenant à une surface hyperelliptique ψ_8 d'ordre 8, du type III.

L'homographie ω engendrant I_2 laisse invariant les 4 points biplanaires et les 4 quartiques de rang 1 appartenant à ψ_8 , change par couples les 4 points coniques de rang 1 et les 4 coniques de la surface, change entre eux les 2 points coniques et les 2 quartiques de rang 2.

L'involution I_2 possède sur ψ huit coïncidences distinctes au point de vue des transformations birationnelles. En effet comme il n'y a pas des coniques invariant par rapport à l'homographie ω , et comme les deux coniques issues par un point biplanair P de ψ ne touchent pas le même plan tangent, l'homographie I_2 changera entre eux les plans tangents en P , et par suite on n'aura pas sur ces plans d'autre droite unie que leur intersection p . Le point double conique P_1 infiniment voisin à P , suivant la direction p , reste invariant par rapport à I_2 , et dans le domaine de P_1 on aura une involution douée de 2 coïncidences. On trouve ainsi deux coïncidences dans le domaine (d'ordre 2) de tout point biplanair, et par suite, en total huit coïncidences.

D'une façon semblable on arrive aux résultats analogues se rapportant aux groupes G'_8, G''_8 :

Toute surface hyperelliptique du type VI répondant au groupe bi-diédrique G'_8 peut se transformer birationnellement en une involution I'_2 engendrée par une homographie ω' qui change en elle-même une surface ψ_8 du type III.

L'homographie ω' change par couples les 4 points biplanaires et les 4 quartiques de rang 1 appartenant à ψ_8 , laisse invariant les 4 points coniques de la surface, et change entre eux les 2 points coniques et les 2 quartiques de rang 2.

L'involution I_2 possède sur ψ huit coïncidences: en chacun des 4 points doubles de rang 1 tombent 2 coïncidences, c'est-à-dire les points unis de l'involution engendrée par I_2 dans le domaine du point double.

Toute surface hyperelliptique du type VII (répondant au groupe G''_8) est identique à une involution I_2 engendrée par une homographie ω'' , qui change en elle-même la surface ψ_8 envisagée ci-dessus.

L'homographie ω'' :

fait correspondre par couples les 4 points biplanaires,

laisse invariant 2 points coniques de rang 1, changeant entre eux les deux restant,

laisse invariant les 2 points coniques de rang 2.

fait correspondre par couples les 4 coniques,

laisse invariant 2 quartiques de rang 1, changeant entre elles les deux restant,

laisse invariant les 2 quartiques de rang 2.

On a encore huit coïncidences de I_2 , tombant à couples en chacun des 4 points doubles coniques.

Il s'ensuit que le genre $p_a (= p_g)$ de toute surface répondant à un groupe bi-diédrique est égal à 1 (n. 86).

98. Les modèles projectifs des surfaces hyperelliptiques V, VI, VII. Pour obtenir un modèle projectif simple de la classe des surfaces répondant à un des groupes bi-diédriques, on n'a qu'à suivre le procédé développé plusieurs fois.

On commence à considérer le système linéaire

$$|D| = |C + C' + \dots + C^{VII}|$$

qui appartient à l'involution engendrée sur F par le groupe envisagé, C', C'', \dots, C^{VII} étant les courbes correspondantes à une C au moyen des transformations du groupe.

La correspondance [8, 1] entre la surface de Jacobi F et une surface image de l'involution, transforme le système $|D|$ en un système linéaire simple $|F|$, ayant le degré 16, le genre 9 et la dimension 9,¹ de sorte que l'on peut prendre comme modèle de la surface image de l'involution, une surface Φ_{16} d'ordre 16 de l'espace S_9 .

Les points singuliers de Φ correspondent aux groupes de l'involution doués d'éléments multiples: l'analyse de la singularité en chacun de ces points vient

¹ Le calcul de la dimension se fait tout de suite car on connaît le genre de la surface renfermant $|F|$.

être facilitée, car on sait à priori qu'il s'agit de points doubles (n. 88). A la configuration des points doubles vient liée la cfig. des courbes rationnelles répondant aux courbes C qui admettent des transformations du groupe.

Nous omettrons l'étude de ces points et de ces courbes, car à présent le lecteur est en mesure de développer cet étude par lui-même; et nous nous bornerons à énoncer les résultats suivants:

Toute surface hyperelliptique du type V peut être transformée birationnellement en une surface Φ_{16} , d'ordre 16, appartenant à l'espace S_9 . Cette surface possède 7 points doubles et 7 courbes rationnelles remarquables. Parmi les points doubles 4 sont des points uniplanaires ordinaires, et les restants sont des points coniques; parmi les courbes rationnelles 6 sont des quartiques et une est une courbe d'ordre 8. La configuration de ces points et de ces courbes jouit des propriétés suivantes:

Par tout point uniplanaire passent simplement 3 quartiques, dont chacune renferme aussi un des 3 points doubles infiniment voisins au point uniplanaire.

Par tout point conique passent 4 quartiques et la courbe d'huitième ordre: les premières y passent simplement, la seconde doublement.

Toute quartique renferme deux points uniplanaires et deux points coniques, tandis que la courbe d'huitième ordre renferme (doublement) les 3 points coniques.

Le modèle projectif des surfaces hyperelliptiques du type VI, est une surface Φ'_{16} , d'ordre 16, de l'espace S_9 , qui renferme 7 points doubles et 7 courbes rationnelles. Parmi les points doubles, 6 sont des points biplanaires dont chacun possède un point double infiniment voisin, et le restant est un point double conique; parmi les courbes, 4 sont des coniques et 3 des courbes d'ordre 8. La configuration relative est caractérisée par les propriétés suivantes:

Par un point biplanaire passent (simplement) deux coniques et deux courbes d'8^{me} ordre.

Par le point conique passent doublement les 3 courbes d'8^{me} ordre.

Une conique renferme 3 points biplanaires, tandis qu'une courbe d'8^{me} ordre renferme (simplement) 4 points biplanaires et (doublement) le point conique.

Toute surface hyperelliptique de rang 8 et du type VII peut être transformée en une surface Φ''_{16} , d'ordre 16, appartenant à l'espace S_9 et renfermant 7 points doubles et 7 courbes rationnelles.

<i>Parmi les points doubles, 6 sont des points biplanaires (possédant un point double dans leurs domaines de 1^r ordre) et le restant est un point conique.</i>	<i>Parmi les courbes rationnelles, 6 sont des quartiques et la courbe restant est d'ordre 8.</i>
---	--

La configuration appartenant à Φ'_{16} est caractérisée par les propriétés suivantes:

Par tout point biplanair passent Toute quartique renferme 3 points
(simplement) 3 quartiques et la courbe biplanaires et le point conique.
d'ordre 8.

Par le point conique passent La courbe d'ordre 8 renferme les
(simplement) les 6 quartiques. 6 points biplanaires.

En chacun des cas V, VI, VII, il y a des hyperplans tangents à notre surface-modèle (Φ , Φ' , ou Φ''). Et précisément il y a un hyperplan ayant un contact d'ordre $\frac{16}{m} - 1$ le long de toute courbe rationnelle d'ordre m ($= 2, 4, 8$).

99. Les surfaces Φ_{16} , Φ'_{16} , Φ''_{16} , caractérisées par leurs configurations de points et de hyperplans singuliers. En nous rapportant d'abord au cas V, nous allons prouver que:

La configuration de points et d'espaces singuliers que nous venons de définir, joue un rôle caractéristique par rapport à la surface hyperelliptique Φ_{16} .

Pour le prouver nous procédons par la même méthode que nous avons expliquée en des cas analogues.

Nous supposons donnée la surface Φ_{16} . Parmi ses 6 quartiques on peut en choisir deux qui n'aient pas commun un point uniplanaire de la surface (ce choix peut être fait de trois façons différentes, correspondantes aux trois partages des quatre points uniplanaires en deux couples). On peut supposer que les hyperplans renfermant ces deux quartiques soient

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0.$$

Etant (x_1, \dots, x_{10}) un point mobile de S_9 , posons

$$y_1 = x_1, \dots, y_{10} = x_{10}, \quad y_{11} = \sqrt{x_1 x_2}.$$

Ces équations représentent une surface décrite par le point (y) , surface qui est birationnellement identique à la surface Φ_8 que nous avons choisie comme modèle du type III.

Ici encore nous nous épargnerons de développer la démonstration dans ses détails. Il suffira de remarquer que la surface double que nous avons définie par les équations précédentes n'a pas de points de diramation dans le domaine d'un point conique de Φ_{16} , tandis qu'il y a diramation en tout point infiniment voisin à un point uniplanaire, sauf en deux points de ce domaine. On en déduit qu'aux 3 points coniques de Φ_{16} correspondent 6 points coniques, aux 4 points

uniplanaires correspondent 4 points biplanaires etc. de la surface normale d'ordre 32 en S_{14} , qui a pour projection la surface (y) .

D'une façon analogue on aura que :

La configuration de points et d'espaces singuliers que nous venons de définir joue un rôle caractéristique par rapport à la surface hyperelliptique Φ'_{16} .

Etant donnée une telle Φ'_{16} considérons deux hyperplans tangents à Φ'_{16} suivant des quartiques qui se coupent en deux points biplanaires et en le point conique; soient

$$x_1 = 0, x_2 = 0$$

les équations de ces hyperplans. Posons

$$y_1 = x_1, \dots, y_{10} = x_{10}, y_{11} = \sqrt{x_1 x_2}.$$

La surface ainsi définie résultera birationnellement identique à la surface Φ_8 que nous avons choisie comme modèle du type III.

De même que dans les cas précédents *la configuration de points et d'espaces que nous venons de définir, joue un rôle caractéristique par rapport à la surface hyperelliptique Φ'_{16} .*

En effet étant donnée une Φ'_{16} possédant une telle configuration, on obtiendra une surface hyperelliptique du type III (identique à notre Φ_8), en posant

$$y_1 = x_1 \dots y_{10} = x_{10}, y_{11} = \sqrt{x_1 x_2},$$

où l'on suppose que

$$x_1 = 0, x_2 = 0,$$

soient deux parmi les trois hyperplans tangents à Φ'_{16} suivant des courbes d'ordre 8.

XII. Surfaces hyperelliptiques régulières de rang 12 (type VIII).

100. *Surfaces de Jacobi possédant des groupes G_{12} .* Envisageons la surface de Jacobi F attachée à la courbe f de genre deux

$$y^2 = x^6 - 1,$$

qui admet le groupe des 12 transformations birationnelles

$$(x' = \varepsilon x, y' = \pm y) \quad \left(x' = \frac{1}{x}, y' = \pm \frac{iy}{x^3}\right) \quad \left(x' = \frac{\varepsilon}{x}, y' = \pm \frac{\varepsilon}{x^3}\right) \\ \left(x' = \frac{\varepsilon^2}{x}, y' = \pm \frac{iy}{x^3}\right) \quad (x' = \varepsilon^2 x, y' = \pm y) \quad (x' = x, y' = \pm y)$$

où :

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}};$$

et soit G_{12} le groupe de F répondant au groupe de f au moyen de la correspondance point par couple existant entre la courbe et la surface.

En représentant respectivement par T, U les transformations hermitiennes de F correspondantes aux transformations

$$(x' = \varepsilon x, y' = y), \quad \left(x' = \frac{1}{x}, y' = \frac{iy}{x^3}\right),$$

le groupe G_{12} renfermera les substitutions $T, U, K, TK, UK, UT, UTK, T^2, T^2K, UT^2, UT^2K, 1$, où l'on a posé

$$K \equiv U^2.$$

On remarquera que U change T en T^2 , et que parmi les 11 transformations non identiques de G_{12} une, K , est cyclique de 2^d ordre; deux T, T^2 , sont cycliques d'ordre 3; six, $U, UK, UT, UTK, UT^2, UT^2K$, d'ordre 4; et les deux restant, TK, T^2K d'ordre 6.

Nous désignons encore par Σ le système complet renfermant totalement les courbes C de F qui répondent aux séries des couples ayant un point fixe.

Il s'agit tout d'abord de chercher les points et les courbes C qui restent invariant par rapport aux transformations du groupe et d'établir les relations entre ces éléments invariants.

Ainsi que nous l'avons remarqué, les transformations du groupe G_{12} de F auront un même point uni, qui correspond à la série g_2^1 , invariant par rapport aux transformations de f .

Pour désigner les points et les courbes invariant de la transformation K , nous adopterons le symbolisme de M. HUMBERT, en construisant les symboles au moyen des deux séries de nombres

$$a, b, c, d \text{ et } a', b', c', d';$$

tandis que les éléments invariants de T seront désignés par le symbolisme introduit au Chapitre VIII, en combinant les deux séries

$$\alpha, \beta, \gamma \text{ et } \alpha', \beta', \gamma'.$$

On pourra toujours supposer qu'au point uni commun répondent les symboles

$$(a a') \text{ et } (\alpha \alpha'),$$

de sorte que les six courbes invariants de K qui passent par $(a a')$ seront

$$a b', a c', a d', a' b, a' c, a' d,$$

tandis que les quatre courbes invariants de T par le même point seront

$$\alpha \beta', \alpha \gamma', \alpha' \beta, \alpha' \gamma.$$

Cherchons quelles sont les permutations produites par U entre les points et les courbes invariant de T ; et les permutations produites par T, U entre les éléments invariant de K .

Comme U change entre eux les deux points unis de T appartenant au domaine de $(\alpha \alpha')$, le couple des courbes $\alpha \beta', \alpha \gamma'$ sera changé en le couple $\alpha' \beta, \alpha' \gamma$: soit par exemple $\alpha' \beta$ la transformée de $\alpha \beta'$, et $\alpha' \gamma$ la transformée de $\alpha \gamma'$. En tenant compte du fait que la transformation de 1^{re} espèce $K \equiv U^2$ change entre elles les $\alpha \beta', \alpha \gamma'$ et les $\alpha' \beta, \alpha' \gamma$, on déduit que

$$\alpha \beta', \alpha' \beta, \alpha \gamma', \alpha' \gamma$$

est un cycle de 4^{me} ordre par rapport à U .

Il s'ensuit que le point $(\beta \beta')$ commun aux courbes $\alpha' \beta, \alpha \beta'$ hors de $(\alpha \alpha')$, vient changé en le point $(\beta \gamma')$ commun aux courbes homologues $\alpha \gamma', \alpha' \beta$ et analogiquement que $(\beta \gamma')$ vient changé en $(\gamma \gamma')$ et ce point en $(\beta' \gamma)$; de sorte que l'on a le cycle d'ordre 4

$$(\beta \beta') (\beta \gamma') (\gamma \gamma') (\beta' \gamma).$$

La U change le point $(\alpha \gamma')$ conjugué de $(\alpha \alpha')$ par rapport à la g_2^1 de la courbe $\alpha \beta'$, en le point $(\alpha' \gamma)$ conjugué de $(\alpha \alpha')$ sur la courbe homologue $\alpha' \beta$; et analogiquement $(\alpha' \gamma)$ en $(\alpha \beta')$, et $(\alpha \beta')$ en $(\alpha' \beta)$, de sorte qu'on a le cycle

$$(\alpha \gamma') (\alpha' \gamma) (\alpha \beta') (\alpha' \beta).$$

Comme ces 4 points appartiennent à la courbe $\alpha \alpha'$, on en tire que cette courbe est unie par rapport à U . On déduit de plus que les 4 courbes restant forment le cycle

$$\beta \beta', \beta \gamma', \gamma \gamma', \beta' \gamma,$$

car à la courbe $\beta\beta'$ renfermant les points $(\beta\alpha')(\beta\gamma')(\beta'\alpha)(\beta'\gamma)$, répond la courbe $\beta'\gamma$ renfermant les points correspondants, etc.

En résumant on a par rapport à U le tableau suivant:

Points	
unis	cycles de 4 ^{me} ordre
$(\alpha\alpha')$	$(\alpha\beta')(\alpha'\beta)(\alpha\gamma')(\alpha'\gamma) - (\beta\beta')(\beta\gamma')(\gamma\gamma')(\beta'\gamma)$.
Courbes	
unies	cycles de 4 ^{me} ordre
$\alpha\alpha'$	$\alpha\beta', \alpha'\beta, \alpha\gamma', \alpha'\gamma - \beta\beta', \beta\gamma', \gamma\gamma', \beta'\gamma$.

Le tableau qui sert à indiquer les permutations produites par T entre les éléments invariant de K , se construit aisément en supposant que les ternes

$$ab', ac', ad' \text{ et } a'b, a'c, a'd$$

donnent deux cycles de T . On n'a ici qu'à rappeler le résultat obtenu au n. 90:

Points	
unis	cycles de 3 ^{me} ordre
$(aa') = (\alpha\alpha')$	$(bb')(cc')(dd') - (ab')(ac')(ad') - (bc')(cd')(db') - (cb')(dc')(bd') - (ca')(da')(ba')$
Courbes	
unies	cycles de 3 ^{me} ordre
$aa' = \alpha\alpha'$	$bb', cc', dd' - ab', ac', ad' - bc', cd', db' - cb', dc', bd' - ca', da', ba'$.

On reconnaît aisément que parmi les 6 courbes invariant par rapport à K , qui passent par (aa') , les $ab', a'b$ sont aussi unies par rapport à U , et que les

$$ac', ad' - a'c, a'd$$

forment deux cycles de 2^d ordre; ceci posé on aura par rapport à U le tableau suivant:

Points	
unis	cycles de 2 ^{de} ordre
$(aa'), (bb'), (ab'), (a'b)$	$(ac')(ad') - (a'c)(a'd) - (bc')(bd') - (b'c)(b'd) - (cd')(cd') - (cc')(dd')$

Courbes

unies	cycles de 2 ^{de} ordre
$aa', bb', ab', a'b$	$ac', ad' - a'c, a'd - b'c, b'd - bc', bd' - c'd, cd' - cc', dd'$.

En appliquant les opérations du groupe G_{12} à tout point et à toute courbe appartenant aux configurations relatives à T et à K , on conclut que :

L'involution I_{12} engendrée sur F par G_{12} possède :	L'involution J_{12} engendrée par G_{12} entre les courbes de Σ possède :
1) Un groupe formé du point 12-ple $(aa') = (aa')$;	1) Un groupe formé par la courbe $aa' = aa'$ comptée 12 fois.
2) Trois groupes formés des ternes $(bb')(cc')(dd') - (ab')(ac')(ad')$ $(a'b)(a'c)(a'd)$	2) Trois groupes formés d'éléments 4-ples $bb', cc', dd' - ab', ac', ad' - a'b, a'c, a'd$.
comptés 4 fois;	
3) Deux groupes formés des quaternes $(\beta\beta')(\gamma\gamma')(\beta'\gamma)(\beta'\gamma) - (\alpha\beta')(\alpha'\beta)(\alpha'\gamma)(\alpha'\gamma)$	3) Deux groupes formés d'éléments 3-ples: $\beta\beta', \gamma\gamma', \beta'\gamma, \beta'\gamma - \alpha\beta', \alpha'\beta, \alpha'\gamma, \alpha'\gamma$.
comptés 3 fois.	
4) Un groupe formé par les 6 points doubles: $(bc')(cd')(b'd)(b'd)(b'c)(d'c')$	4) Un groupe formé d'éléments doubles: $bc', cd', b'd, bd', b'c, d'c'$.

101. *Le genre de la surface hyperelliptique du type VIII.* Remarquons que les transformés d'un point de F , au moyen des transformations du groupe G_{12} , se partagent en deux groupes homologues par rapport à U , groupes qui sont engendrés par la transformation TK , d'ordre 6; on en déduit que toute surface hyperelliptique Φ , image de l'involution I_{12} , pourra être transformée birationnellement en une involution I_2 , d'ordre 2, appartenant à une surface ψ_{12} du type IV. On peut établir, comme avant, que la I_2 vient engendrée sur ψ par une homographie involutoire, etc., etc., de sorte que l'on obtient le résultat suivant:

Toute surface hyperelliptique répondant au groupe G_{12} , c'est-à-dire toute surface hyperelliptique du type VIII, est birationnellement identique à une involution I_2 engendrée sur une surface ψ_{12} d'ordre 12, du type IV, par une homographie involutoire.

Cette homographie :

Laisse invariant le point biplanar singulier, les deux points coniques de rang 1 et un point conique de rang 2 appartenant à la surface;

change entre eux les deux points biplanaires de rang 1, les deux points biplanaires de rang 2 et les deux points coniques restant de rang 2.

Laisse invariant la conique, les deux sextiques de rang 1 et une sextique de rang 2 appartenant à la surface;

change entre elles les deux quartiques de rang 1, les deux quartiques de rang 2 et les deux sextiques restant de rang 2.

L'involution I_2 possède sur ψ huit coïncidences distinctes au point de vue des transformations birationnelles: deux coïncidences tombent dans le domaine du dernier point double conique infiniment voisin au point biplanar singulier, et deux coïncidences dans le domaine de tout point double conique invariant.

Il s'ensuit (n. 87) que »le genre $p_a = p_g$ de toute surface hyperelliptique VIII est égal à 1».

102. *Le modèle projectif des surfaces hyperelliptiques du type VIII.* La surface Φ_{24} dont les sections hyperplanes répondent aux courbes du système linéaire

$$|D| = |C + C' + \dots + C^{(XI)}|$$

tracé sur F , est d'ordre 24.

Comme la Φ_{24} a le genre $p = 1$ et ses sections hyperplanes sont des courbes de genre 13, la dimension de l'espace renfermant Φ_{24} résulte égale à 13.

Aux 7 groupes de I_{12} doués d'éléments multiples répondent 7 points doubles de Φ , et aux 7 groupes singuliers de I_{12} répondent 7 courbes rationnelles.

L'étude des points doubles et de la configuration formée par ces points et par les courbes rationnelles se fait en suivant la marche plusieurs fois indiquée.

On arrive ainsi au théorème suivant:

Toute surface hyperelliptique du type VIII peut être transformée en une surface Φ_{24} , d'ordre 24, appartenant à l'espace S_{13} . Cette surface renferme 7 points doubles et 7 courbes rationnelles remarquables; c'est-à-dire:

Un point uniplanar singulier, possédant trois points doubles successifs (dans les domaines de 1^r, 2^de, 3^me ordre); trois points biplanaires singuliers, dont chacun possède un point double infiniment voisin; deux points biplanaires ordinaires et un point conique; une courbe d'ordre 2, trois courbes d'ordre 6, deux d'ordre 8 et une d'ordre 12.

Par rapport aux propriétés de la configuration appartenant à Φ_{24} , on a deux points biplanaires singuliers de rang 1 et un de rang 2; un point biplanar

ordinaire de rang 1 et un de rang 2; deux sextiques de rang 1 et une de rang 2; une courbe d'ordre 8 et rang 1, une de rang 2.

Par le point uniplanaire passent simplement les deux sextiques de rang 1 et la courbe d'ordre 8 et rang 1 avec un point de rebroussement.

Par un point biplanaire singulier de rang 1 passent la conique, une sextique de rang 1, la sextique de rang 2, et la courbe d'ordre 12.

Par le point biplanaire singulier de rang 2 passent les deux sextiques de rang 1 et la courbe d'ordre 12.

Par le point biplanaire ordinaire de rang 2 passent la conique et les deux courbes d'ordre 8. La courbe d'ordre 8 et de rang 2, y passe doublement.

Par le point biplanaire ordinaire de rang 2 passent les deux courbes d'ordre 8. La courbe d'ordre 8 et de rang 1 y passe doublement.

Par le point conique passent les trois sextiques et la courbe d'ordre 12. La sextique de rang 2 et la courbe d'ordre 12 y passent doublement.

Ajoutons que:

La configuration des points et des hyperplans singuliers qui touchent Φ_{24} , suivant ses courbes rationnelles, joue un rôle caractéristique par rapport à cette surface hyperelliptique.

Pour le prouver on se donnera une surface possédant une telle configuration de points et de hyperplans singuliers, et on tâchera de construire une surface ψ représentée sur la Φ_{24} comptée deux fois, qui appartienne au type IV.

On devra obtenir sur ψ une involution I_2 , qui agira d'une façon connue sur les éléments de la configuration caractéristique de ψ (n. 101).

En s'aidant par cette connaissance on trouvera qu'on peut obtenir une surface ψ transformée de la Φ_{12} du type IV, en procédant de la façon suivante.

La conique renferme les deux points biplanaires singuliers de rang 1 et le point biplanaire ordinaire de rang 1.

Une sextique de rang 1 renferme, le point uniplanaire, un point biplanaire singulier de rang 1, le point biplanaire singulier de rang 2 et le point conique.

La sextique de rang 2 renferme les deux points biplanaires singuliers de rang 1 et le point conique.

La courbe d'ordre 8 et de rang 1 renferme le point uniplanaire et les deux points biplanaires ordinaires.

La courbe d'ordre 8 et de rang 2 renferme les deux points biplanaires ordinaires.

La courbe d'ordre 12 renferme les trois points biplanaires singuliers et le point conique.

Soient

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0$$

les hyperplans tangents à Φ_{24} suivant les deux sextiques de rang 1, et posons

$$y_1 = x_1, \dots, y_{14} = x_{14}, \quad y_{15} = \sqrt{x_1 x_2}.$$

La surface définie par ces formules résultera birationnellement identique à la Φ_{12} (type IV).

C'est ce qu'on montrerait par une analyse détaillée dont nous croyons de pouvoir nous passer, attendu qu'elle ne présenterait aucune nouveauté.

XIII. Surfaces hyperelliptiques régulières de rang 24 (types IX, X, XI).

103. *Surfaces de Jacobi possédant des groupes bi-tétraédriques.* On a ici à considérer la surface de Jacobi F attachée à la courbe f de genre deux

$$y^2 = x(x^4 - 1),$$

qui admet le groupe bi-tétraédrique:

$$\begin{aligned} & (x' = -x, y' = \pm iy) \left(x' = \frac{1}{x}, y' = \pm \frac{iy}{x^3} \right) \left(x' = -\frac{1}{x}, y' = \pm \frac{y}{x^3} \right) \\ & (x' = x, y' = \pm y) \left(x' = \frac{i-x}{i+x}, y' = \pm \frac{2y\sqrt{2i}}{(i+x)^3} \right) \left(x' = \frac{x+i}{x-i}, y' = \pm \frac{2y\sqrt{2i}}{(x-i)^3} \right) \\ & \left(x' = \frac{x-i}{x+i}, y' = \pm \frac{2y\sqrt{-2i}}{(x+i)^3} \right) \left(x' = \frac{i+x}{i-x}, y' = \pm \frac{2y\sqrt{2i}}{(i-x)^3} \right) \\ & \left(x' = i\frac{1+x}{1-x}, y' = \pm \frac{2y\sqrt{-2i}}{(1-x)^3} \right) \left(x' = i\frac{x+1}{x-1}, y' = \pm \frac{2y\sqrt{2i}}{(x-1)^3} \right) \\ & \left(x' = i\frac{1-x}{1+x}, y' = \pm \frac{2y\sqrt{2i}}{(1+x)^3} \right) \left(x' = i\frac{x-1}{x+1}, y' = \pm \frac{2y\sqrt{-2i}}{(x+1)^3} \right). \end{aligned}$$

Ce groupe est engendré par les 3 substitutions

$$(1) \quad (x' = -x, y' = iy) \left(x' = \frac{1}{x}, y' = \frac{iy}{x^3} \right) \left(x' = \frac{i-x}{i+x}, y' = \frac{2y\sqrt{2i}}{(i+x)^3} \right),$$

dont les deux premières sont cycliques d'ordre 4 et la troisième d'ordre 3 ou 6, suivant que l'on prend

$$\sqrt{2}i = -(i + 1) \text{ ou } \sqrt{2}i = i + 1.$$

Nous désignerons par G_{24} le groupe de F qui répond au groupe envisagé de f au moyen de la correspondance point par couple entre la courbe et la surface. On peut prendre comme substitutions génératrices de G_{24} les transformations hermitiennes U_1, U_2, S_1 correspondantes aux transformations (1), où l'on a pris $\sqrt{2}i = -(i + 1)$.

Le groupe G_{24} renferme le sous-groupe bi-diédrique G_8 engendré par U_1, U_2 : hors des substitutions de ce sous-groupe on a en G_{24} 8 transformations cycliques d'ordre 3 $S_1, S_2, S_3, S_4, S_1^2, S_2^2, S_3^2, S_4^2$, et 8 cycliques d'ordre 6 qu'on obtient de ces dernières en les multipliant par la transformation de 1^{re} espèce:

$$K \equiv U_1^2 \equiv U_2^2.$$

Les transformations de G_{24} ont un point uni commun répondant aux couples de la g_1^1 .

En désignant les éléments unis de K (points et courbes C du système Σ) par les symboles obtenus en combinant les nombres des deux séries

$$1, 2, 3, 4 \text{ et } 1', 2', 3', 4',$$

et les éléments unis de S_i par les symboles obtenus en combinant les caractères des deux séries

$$a_i, b_i, c_i, \text{ et } a'_i, b'_i, c'_i,$$

on peut toujours supposer qu'au point uni commun appartiennent les symboles:

$$(11'), (a_1 a'_1), (a_2 a'_2), (a_3 a'_3), (a_4 a'_4).$$

Il y a sur F 48 points qui restent invariant par rapport à des transformations de G_{24} : c'est-à-dire le point uni commun, les 32 points unis appartenant ultérieurement aux transformations S_1, S_2, S_3, S_4 et les 15 points unis appartenant ultérieurement à K . Les permutations produites par U_1, U_2 entre les points et les courbes unies de K sont données par les tableaux au n. 92: il s'agit donc d'établir quelles sont les permutations produites par S_1 , entre les éléments unis de K , et par U_1, U_2 entre les éléments unis de S_1, S_2, S_3, S_4 .

En faisant usage de considérations analogues à celles qu'on a exposées plusieurs fois dans l'analyse des types précédents, on arrive aisément aux tableaux cherchés que nous omettrons de transcrire ici.

La conclusion à laquelle on est amené par l'examen de ces tableaux est la suivante:

L'involution I_{24} engendrée par G_{24} entre les points de F renferme 7 groupes doués d'éléments multiples, c'est-à-dire:

- 1) Un groupe formé par le point uni commun compté 24 fois.
- 2) Un groupe formé par les 12 points doubles:

$$(12') (1'2) (13') (1'3) (14') (1'4) (23') (2'3) (34') (3'4) (24') (2'4).$$

- 3) Un groupe formé par les 8 points 3-ples:

$$(a_1b'_1) (a_1c'_1) (a_2b'_2) (a_2c'_2) (a_3b'_3) (a_3c'_3) (a_4b'_4) (a_4c'_4).$$

- 4) Un groupe formé par les 8 points 3-ples:

$$(a'_1b_1) (a'_1c_1) (a'_2b_2) (a'_2c_2) (a'_3b_3) (a'_3c_3) (a'_4b_4) (a'_4c_4).$$

- 5) Un groupe formé par les 8 points 3-ples:

$$(b_1b'_1) (c_1c'_1) (b_2b'_2) (c_2c'_2) (b_3b'_3) (c_3c'_3) (b_4b'_4) (c_4c'_4).$$

- 6) Un groupe formé par les 8 points 3-ples:

$$(b_1c'_1) (b'_1c_1) (b_2c'_2) (b'_2c_2) (b_3c'_3) (b'_3c_3) (b_4c'_4) (b'_4c_4).$$

- 7) Un groupe formé par les 3 points 8-ples:

$$(22') (33') (44').$$

L'involution J_{24} engendrée par G_{24} entre les courbes C du système Σ , possède 7 groupes doués d'éléments multiples, c'est-à-dire:

- 1) Un groupe formé par les 4 courbes 6-ples:

$$11' \equiv a_1a'_1, 22' \equiv a_2a'_2, 33' \equiv a_3a'_3, 44' \equiv a_4a'_4.$$

- 2) Un groupe formé par les 6 courbes 4-ples:

$$12', 1'2, 13', 1'3, 14', 1'4.$$

- 3) Un groupe formé par les 6 courbes 4-ples:

$$23', 2'3, 24', 2'4, 34', 3'4.$$

- 4) Un groupe formé par les 8 courbes 3-ples:

$$a_1b'_1, a_1c'_1, a_2b'_2, a_2c'_2, a_3b'_3, a_3c'_3, a_4b'_4, a_4c'_4.$$

5) Un groupe formé par les 8 courbes 3-ples:

$$a'_1 b_1, a'_1 c_1, a'_2 b_2, a'_2 c_2, a'_3 b_3, a'_3 c_3, a'_4 b_4, a'_4 c_4.$$

6) Un groupe formé par les 8 courbes 3-ples:

$$b_1 b'_1, c_1 c'_1, b_2 b'_2, c_2 c'_2, b_3 b'_3, c_3 c'_3, b_4 b'_4, c_4 c'_4.$$

7) Un groupe formé par les 8 courbes 3-ples:

$$b_1 c'_1, b'_1 c_1, b_2 c'_2, b'_2 c_2, b_3 c'_3, b'_3 c_3, b_4 c'_4, b'_4 c_4.$$

Disons quelques mots du groupe G'_{24} qui renferme le sous-groupe bi-diédrique invariant G'_8 , engendré par les substitutions

$$U'_1 \equiv U_1, U'_2 \equiv U_2 A,$$

A étant une convenable transformation de 2^{de} espèce (n. 70).

Comme G'_8 répond à G_8 au moyen de la dualité entre les points de F et les courbes C du système Σ , le groupe G'_{24} sera corrélatif à G_{24} , et l'on pourra par conséquent obtenir les propriétés de la configuration relative à G'_{24} en changeant entre elles dans le dernier énoncé les involutions I_{24} et J_{24} et les symboles entre () en symboles sans (), et réciproquement.

Considérons maintenant le groupe G''_{24} , corrélatif à lui-même, qui renferme le sous-groupe invariant G''_8 (n. 70) engendré par

$$U''_1 \equiv U_1, U''_2 \equiv U_2 B.$$

Comme

$$K'' \equiv U''_1{}^2 \equiv U_1{}^2 \equiv K,$$

on trouve tout de suite les permutations produites par U''_1, U''_2 entre les éléments unis de K'' . Pour construire les tableaux restant, on commencera à remarquer que le groupe G''_{24} étant oloedriquement isomorphe à G_{24} , on doit trouver en G''_{24} une substitution S''_1 , répondant à S_1 et changeant U''_1 en U''_2 , etc. etc.

En ce cas la conclusion relative à la configuration des éléments unis est la suivante:

L'involution I''_{24} engendrée par G''_{24} entre les points de F renferme 7 groupes doués d'éléments multiples, c'est-à-dire:

Un groupe formé par les 4 éléments 6-ples:

$$(14') (1'4) (23') (2'3) \equiv (a_1 a'_1) (a_2 a'_2) (a_3 a'_3) (a_4 a'_4).$$

Deux groupes formés par 6 éléments 4-ples

$$(11') (33') (12') (1'2) (13') (2'4) - (22') (44') (1'3) (24') (34') (3'4).$$

Quatre groupes formés par 8 éléments 3-ples:

$$\begin{aligned} & (a_1 b'_1) (a_2 b'_2) (a_3 b'_3) (a_4 b'_4) (a_1 c'_1) (a_2 c'_2) (a_3 c'_3) (a_4 c'_4), \\ & (a'_1 b_1) (a'_2 b_2) (a'_3 b_3) (a'_4 b_4) (a'_1 c_1) (a'_2 c_2) (a'_3 c_3) (a'_4 c_4), \\ & (b_1 b'_1) (b_2 b'_2) (b_3 b'_3) (b_4 b'_4) (c_1 c'_1) (c_2 c'_2) (c_3 c'_3) (c_4 c'_4), \\ & (b_1 c'_1) (b_2 c'_2) (b_3 c'_3) (b_4 c'_4) (b'_1 c_1) (b'_2 c_2) (b'_3 c_3) (b'_4 c_4). \end{aligned}$$

L'involution J''_{24} engendrée par G''_{24} entre les courbes C du système Σ , renferme 7 groupes doués d'éléments multiples, c'est-à-dire:

Un groupe formé par les 4 éléments 6-ples:

$$14', 1'4, 23', 2'3 \equiv a_1 a'_1, a_2 a'_2, a_3 a'_3, a_4 a'_4.$$

Deux groupes formés par 6 éléments 4-ples:

$$11', 22', 12', 3'4, 13', 1'3 - 33', 44', 1'2, 34', 24', 2'4.$$

Quatre groupes formés par 8 éléments triples. Ces groupes ont les mêmes symboles des 4 groupes correspondants de I''_{24} .

Dans la suite nous désignerons respectivement par IX, X, XI les classes de surfaces hyperelliptiques correspondantes aux groupes G_{24} , G'_{24} , G''_{24} .

104. — *Modèles projectifs des surfaces hyperelliptiques IX, X, XI.* — Toute surface hyperelliptique Φ , image de l'involution I_{24} , peut aussi représenter une involution I_3 appartenant à une surface ψ , d'ordre 16, du type V. En effet les points d'un groupe de I_{24} , se partagent en trois groupes engendrés par les transformations du sous-groupe bidiédrique G_8 renfermé en G_{24} . On passe d'un des trois groupes aux deux restant au moyen des transformations S_1 , S_1^2 , de sorte que tout groupe de I_{24} vient être représenté par un groupe de trois points de ψ , formant un cycle de l'homographie ω , périodique d'ordre 3, image de S_1 .

On voit très aisément quelles sont les permutations produites entre les points doubles et les courbes rationnelles de ψ par l'homographie ω , car il suffit de chercher les permutations produites par S_1 entre les groupes singuliers des involutions I_8 et J_8 engendrées sur F et sur le système Σ , par le sous-groupe G_8 .

On remarquera que la transformation S_1 laisse invariant quatre groupes de I_8 renfermant 8 points distincts: c'est-à-dire les groupes qui appartiennent aussi à I_{24} , lorsque on compte trois fois chacun de leurs points; de sorte que la ω

laissera aussi invariant quatre points simples de ψ . On arrive ainsi au théorème suivant:

Toute surface hyperelliptique Φ répondant au groupe bi-tétraédrique G_{24} peut représenter une involution I_3 appartenant à une surface ψ_{16} du type V: cette involution étant engendrée par une homographie ω périodique d'ordre 3, qui change en elle-même ψ . L'homographie ω change en lui-même un point uniplanaire de ψ et distribue les trois uniplanaires restant, ainsi que les trois points coniques de ψ , en deux cycles; elle laisse invariant la courbe d'huitième ordre et distribue en deux cycles les six quartiques tracées sur ψ . Hors des points doubles il y a encore sur ψ quatre points unis de ω .

Au point de vue des transformations birationnelles on a sur ψ six coïncidences, car dans le domaine du point uniplanaire invariant P , il existe deux points unis simples, qui sont les coïncidences de la correspondance projective (dont un cycle est formé par les trois points doubles infiniment voisins à P) existant dans le domaine de P .

En connaissant le nombre des coïncidences de I_3 on pourrait calculer le genre p_a de la surface image de I_3 , et l'on trouverait $p_a = 1$.

Cette conclusion s'accorde avec la propriété, dont jouit un modèle convenable de la surface Φ , de ne posséder que des points doubles abaissant d'une unité le genre des sections hyperplanes qui les renferment. On peut établir ce résultat directement de la façon suivante.

Soit, comme d'habitude,

$$|D| = |C + C' + \dots + C^{(23)}|$$

le système linéaire de F qui renferme toute courbe C et ses transformées par rapport aux transformations de G_{24} . Désignons encore par Φ ou par Φ_{48} la surface d'ordre 48, dont les sections hyperplanes répondent aux courbes D . L'espace renfermant Φ aura la dimension $r = 25$; cette valeur étant la seule possible lorsque le genre p_a de Φ est égal à 1. En vertu de la correspondance [1, 3] entre les surfaces Φ et ψ , aux sections hyperplanes F de Φ répondent sur ψ les courbes d'un système linéaire $|A|$ renfermant les courbes réductibles formées de toute section hyperplane de ψ et de ses transformées par rapport à ω, ω^2 .

Les points singuliers de Φ répondent:

- 1) Au point uniplanaire invariant P .
- 2) Au cycle formé par les trois points uniplanaires restant.
- 3) Au cycle formé par les trois points coniques.
- 4) A chacun des 4 points unis simples de la surface ψ .

On voit aisément qu'au cycle 2) répond un point uniplanaire *ordinaire* de Φ , car le domaine de ce point vient correspondre *biunivoquement* au domaine d'un quelconque des trois points uniplanaires ordinaires qui lui sont homologues. Et d'une façon analogue on conclut qu'au cycle 3) répond un point double conique de Φ .

Comme la ω établit entre les points appartenant au domaine d'un point uni simple Q , une homographie cyclique d'ordre trois ayant deux points unis, au point Q répondra sur Φ un point biplanaire ordinaire: les deux domaines de ce point répondant aux deux points unis susdits, et le domaine du point simple infiniment voisin suivant la direction de la droite commune aux deux plans tangents, répondant aux cycles de ω infiniment voisins à Q .

Il s'agit enfin d'étudier le point P' de Φ qui répond au point uniplanaire P de ψ .

On voit par des considérations désormais habituelles qu'aux sections hyperplanes issues par P' répondent sur ψ des courbes \mathcal{A} ayant en P un point triple dont les trois branches renferment les trois points doubles de ψ infiniment voisins à P . On en tire tout de suite que les sections hyperplanes susdites ont en P' un point de rebroussement (ordinaire) de sorte que le point P' est un point uniplanaire (non tacnodale). On peut ainsi poursuivre l'analyse du point singulier P' ; mais ce qu'on a établi suffit pour affirmer que «la surface n'a que des points doubles abaissant d'une seule unité le genre des sections hyperplanes issues arbitrairement par un de ces points».

Par la même marche plusieurs fois indiquée, on arrive à compléter l'étude de la configuration des points doubles et des courbes rationnelles existant sur Φ ; de sorte que l'on peut énoncer le théorème suivant:

Toute surface hyperelliptique de rang 24 correspondant à un groupe G_{24} (type IX) peut être transformée birationnellement en une surface Φ_{48} , d'ordre 48, appartenant à l'espace S_{23} . Cette surface renferme 7 points doubles et 7 courbes rationnelles remarquables; c'est-à-dire:

Un point uniplanaire singulier, un point uniplanaire ordinaire, quatre points biplanaires ordinaires et un point conique; une courbe d'huitième ordre, deux courbes de 12^{me} ordre, quatre de 16^{me} ordre.

La surface Φ_{48} renferme de plus trois points doubles infiniment voisins à chacun des deux points uniplanaires: ces points doubles appartenant au domaine de 1^{er} ordre ou aux domaines successifs de 1^{er}, 2^d, 3^{me} ordre, suivant qu'il s'agit du point uniplanaire ordinaire ou du point singulier.

Par rapport aux propriétés de la configuration existant sur Φ_{48} , on a deux points biplanaires de rang 1 et deux de rang 2; une courbe de 12^{me} ordre et

rang 1, une courbe de 12^{me} ordre et rang 2, deux courbes de 16^{me} ordre et rang 1 et deux courbes de 16^{me} ordre et rang 2.

Par le point uniplanaire singulier passent la courbe de 12^{me} ordre et rang 1, et les deux courbes de 16^{me} ordre et rang 2. Chacune de ces courbes passe par le point en question avec un rebroussement.

Par le point uniplanaire ordinaire passent les deux courbes de 12^{me} ordre : la courbe de rang 1 y passe simplement et la courbe de rang 2 doublement.

Par un point biplanaire de rang 1 passent simplement la courbe d'ordre 8, une courbe de 16^{me} ordre et rang 1, et les deux courbes de 16^{me} ordre et rang 2.

Par un point biplanaire de rang 2 passent simplement les deux courbes de 16^{me} ordre et rang 1, doublement une courbe de 16^{me} ordre et rang 2.

Par le point conique passent doublement la courbe d'ordre 8 et les deux courbes de 12^{me} ordre.

La courbe d'ordre 8 renferme le point conique (point nodal) et les deux points biplanaires de rang 1 (points simples).

La courbe d'ordre 12 et rang 1 renferme le point uniplanaire singulier (point de rebroussement), le point conique (point nodal), le point uniplanaire ordinaire (point simple).

La courbe d'ordre 12 et rang 2 renferme le point conique (nodal) et le point uniplanaire ordinaire (simple).

Une courbe d'ordre 16 et rang 1 renferme le point uniplanaire singulier (rebroussement), un point biplanaire de rang 1 et deux points biplanaires de rang 2 (simples).

Une courbe d'ordre 16 et rang 2 renferme un point biplanaire de rang 2 (nodal) et les deux points biplanaires de rang 1 (simples).

105. — Pour les surfaces répondant aux groupes G'_{24} , G''_{24} , on a des résultats analogues, que nous nous bornerons à énoncer :

Toute surface hyperelliptique répondant à G'_{24} est birationnellement identique à une involution I_3 engendrée par une homographie ω' de troisième ordre, qui change en elle-même une surface ψ' , d'ordre 16, du type VI. La ω' change en lui-même le point conique de ψ' et distribue en deux cycles les six points biplanaires; change en elle-même une des quatre coniques de ψ' et distribue en deux cycles les 3 coniques restant et les trois courbes d'ordre 8. Hors du point conique invariant il y a encore sur ψ' quatre points unis simples.

On a ainsi sur ψ' six coïncidences de I_3 , dont deux tombent dans le domaine du point conique invariant.

Partant:

Toute surface hyperelliptique de rang 24 correspondant à G'_{24} (type X) peut être ramenée à une surface Φ'_{48} d'ordre 48, appartenant à S_{25} et renfermant 7 points doubles biplanaires et 7 courbes rationnelles.

Parmi les points doubles il y en a un qui possède un point double infiniment voisin dans chacun des domaines de 1^r et de 2^d ordre, deux possèdent un point double dans leurs domaines de 1^r ordre et les 4 restant sont des points biplanaires ordinaires. Parmi les courbes rationnelles une est d'ordre 2, une d'ordre 6, quatre d'ordre 16 et une d'ordre 24.

Par rapport aux propriétés de la configuration, on a un point biplanaire de rang 1 (c'est le premier point biplanaire singulier dont on a parlé ci-dessus), un point biplanaire singulier de rang 2 et un point de rang 3; deux points biplanaires ordinaires de rang 1 et deux de rang 2. Les courbes d'ordre 12 se distribuent en deux classes: deux de rang 1 et deux de rang 2.

Par le point singulier de rang 1 passent simplement les deux courbes d'ordre 16 et rang 1 et doublement (avec un *osnode*) la courbe d'ordre 24.

Par le point singulier de rang 2 passent simplement la conique et la courbe d'ordre 6 et doublement (avec un *tacnode*) la courbe d'ordre 24.

Par le point singulier de rang 3 passent doublement la courbe d'ordre 6 (avec un *node*) et la courbe d'ordre 24 (avec un *tacnode*).

Par un point ordinaire de rang 1 passent simplement la conique, une courbe d'ordre 16 et rang 1 et les deux courbes d'ordre 16 et rang 2.

Par le point ordinaire de rang 2 passent simplement les deux courbes d'ordre 16 et rang 1 et doublement (avec un *node*) une courbe d'ordre 16 et rang 2.

La conique renferme le point singulier de rang 2 et les 2 points ordinaires de rang 1.

La courbe d'ordre 6 renferme les trois points singuliers de rang 2 et 3.

Une courbe d'ordre 16 et rang 1 renferme le point singulier de rang 1, un point ordinaire de rang 1 et les 2 points ordinaires de rang 2.

Une courbe d'ordre 16 et rang 2 renferme les 2 points ordinaires de rang 1 et un point ordinaire de rang 2.

La courbe d'ordre 24 renferme les 3 points singuliers.

106. — *Toute surface hyperelliptique répondant à G''_{24} correspond aussi à une involution I_3 appartenant à une surface ψ''_8 du type VII; cette involution étant engendrée par une homographie cyclique ω'' d'ordre 3. — La ω''*

distribue en deux cycles les 6 points biplanaires de ψ'' ;

distribue en deux cycles les 6 quartiques de ψ'' ;

ramène en lui-même le point conique de la surface. *ramène en elle-même la courbe d'ordre 8 de la surface.*

Il y a sur ψ'' , hors du point conique invariant, quatre points unis simples.

Il s'ensuit encore que I_3 possède six coïncidences, dont deux tombent dans le domaine du point conique, et par suite que le genre p_a de toute surface répondant à $G''_{2,4}$ est égal à 1.

Après cela on a que :

Toute surface hyperelliptique répondant à $G''_{2,4}$ (type XI) peut être transformée en une surface $\Phi''_{4,8}$, d'ordre 48, appartenant à l'espace S_{25} et renfermant 7 points doubles biplanaires et 7 courbes rationnelles remarquables. On a précisément :

Un point biplanair singulier possédant deux points doubles successifs, deux points biplanaires singuliers, dont chacun possède un point double successif, et quatre points biplanaires ordinaires.

Parmi les 7 courbes une est d'ordre 8, deux d'ordre 12, quatre d'ordre 16.

Par rapport aux propriétés de la configuration, le premier point biplanair singulier, dont on parle ci-dessus, est de rang 1, et les deux points singuliers restant sont de rang 2. On a ensuite deux points biplanaires ordinaires de rang 1 et deux de rang 2, deux courbes d'ordre 16 et rang 1 et deux de rang 2.

Par le point singulier de rang 1 passent simplement les 2 courbes d'ordre 12 et les 2 courbes d'ordre 16 et rang 1.

Par un point singulier de rang 2 passent simplement une courbe d'ordre 8 et une d'ordre 12 et doublement la courbe restant d'ordre 12.

Par un point ordinaire de rang 1 passent simplement la courbe d'ordre 8, une courbe d'ordre 16 et rang 1 et les 2 courbes d'ordre 16 et rang 2.

Par un point ordinaire de rang 2 passent simplement les 2 courbes d'ordre 16 et rang 1 et doublement une courbe d'ordre 16 et rang 2.

La courbe d'ordre 8 renferme les points singuliers de rang 2 et les points ordinaires de rang 1.

Une courbe d'ordre 12 renferme les 3 points singuliers.

Une courbe d'ordre 16 et rang 1 renferme le point singulier de rang 1, un point ordinaire de rang 1 et les 2 points ordinaires de rang 2.

Une courbe d'ordre 16 et rang 2 renferme les 2 points ordinaires de rang 1 et un point ordinaire de rang 2.

107. — *Les surfaces hyperelliptiques $\Phi_{4,8}$, $\Phi'_{4,8}$, $\Phi''_{4,8}$ caractérisées par la configuration de leurs points et de leurs hyperplans singuliers.* — Nous venons de con-

struire trois surfaces-modèles représentant les types IX, X, XI; ce sont les surfaces Φ_{48} , Φ'_{48} , Φ''_{48} .

Chacune de celles-ci possède une configuration de points doubles et de hyperplans tangents suivant des courbes rationnelles; plus précisément toute courbe rationnelle C d'ordre m ($= 2, 6, 8, 12, 16, 24$) appartient à un hyperplan qui a un contact d'ordre $\frac{48}{m} - 1$ le long de C .

Or il y a lieu de reconnaître que »si une surface d'ordre 48, à sections hyperplanes de genre 25 en S_{25} , possède des points et des hyperplans singuliers formant une configuration qui jouit des propriétés correspondantes à celles de Φ_{48} , Φ'_{48} , Φ''_{48} , cette surface est hyperelliptique et appartient respectivement aux types IX, X, XI».

C'est ce que l'on exprime en disant que:

La configuration des points et des hyperplans singuliers joue un rôle caractéristique par rapport aux surfaces hyperelliptiques Φ_{48} , Φ'_{48} , Φ''_{48} .

Rapportons nous d'abord à une surface Φ_{48} . Il s'agit de montrer que la configuration des points et des hyperplans singuliers permet de représenter paramétriquement les coordonnées des points de la surface par des fonctions hyperelliptiques Θ . Et cette question se ramène à la question analogue concernant une surface du type V, que l'on construit par le procédé suivant.

Soient

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0,$$

les deux hyperplans tangents suivant des courbes C_{16} d'ordre 16 et de rang 1. Posons

$$y_1 = x_1, \dots, y_{26} = x_{26}, \quad y_{27} = \sqrt[3]{x_1 x_2}.$$

Par ces formules on définit une surface qui possède 3 points coniques correspondants au point conique de Φ_{48} , 3 points uniplanaires correspondants au point uniplanaire ordinaire de Φ_{48} , et un quatrième point uniplanaire (ordinaire) correspondant au point uniplanaire singulier de Φ_{48} ; tout point biplanaire de rang 1, 2 de Φ_{48} résulte un point de diramation sur chaque nappe de Φ_{48} qui le contient, et correspond à un point simple de la surface qui est représentée sur la Φ_{48} comptée trois fois. Une analyse approfondie montre que cette surface est birationnellement identique à la Φ_{16} du type V.

On procédera par la même méthode par rapport à une surface Φ'_{48} .

Analoguement à ce que nous avons fait pour le type IX, nous choisirons les deux hyperplans tangents suivant les courbes C_{16} de rang 1. Ces hyperplans étant représentés par

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0,$$

nous poserons

$$y_1 = x_1, \dots, y_{26} = x_{26}, \quad y_{27} = \sqrt[3]{x_1 x_2^2}.$$

Nous obtiendrons ainsi une surface renfermant 6 points biplanaires singuliers correspondants à ceux de rang 2, 3 de Φ'_{48} et un point conique correspondant au point singulier de rang 1 (qui est un point de diramation sur chaque nappe de Φ'_{48}). Cette surface résulte birationnellement identique à la Φ'_{16} (type VI).

Soit enfin une surface possédant la même configuration que la Φ''_{16} du type XI.

Choisissons de même les hyperplans

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0,$$

tangents suivant des courbes C_{16} de rang 1.

En posant

$$y_1 = x_1, \dots, y_{26} = x_{26}, \quad y_{27} = \sqrt[3]{x_1 x_2^2},$$

on obtient une surface birationnellement identique à la Φ''_{16} (type VII).

XIV. Quelques remarques concernant les surfaces hyperelliptiques régulières II, ... XI.

108. — *Transformation des surfaces-modèles II, ... XI en des surfaces du quatrième ordre.* Nous avons choisi comme modèles des surfaces hyperelliptiques de rang $r > 1$, II, ... XI des surfaces d'ordre $2r$, Φ_{2r} , appartenant à des hyperespaces.

Or toute Φ_{2r} peut être projetée successivement par ses points doubles, ou par quelques unes de ses courbes rationnelles remarquables. Par ce procédé on peut toujours transformer une surface hyperelliptique Φ_{2r} en une surface d'ordre 4 de l'espace ordinaire.

Pour ce qui concerne les surfaces II, ... VIII, il suffit de les projeter successivement par des points doubles. Dans le cas IX considérons p. ex. l'espace S_{16} qui renferme une courbe C_{16} de rang 2, et projetons de S_{16} la Φ_{48} en une surface Φ_{14} de S_8 ; Φ_{14} possède 4 points doubles infiniment voisins, un point uniplanaire ordinaire (auquel sont voisins trois points doubles), un point biplanar et

un point conique, de sorte que elle pourra être projetée en une surface d'ordre 4 de S_3 en prenant successivement comme centres de projection 5 points doubles.

D'une façon analogue on réussit à projeter en une surface d'ordre 4 les autres surfaces Φ'_{48} , Φ''_{48} .

109. — *Représentation sur un plan double.* — Les surfaces du quatrième ordre auxquelles on est amené de plusieurs façons différentes par des projections successives de nos Φ_{2r} , possèdent des points doubles; en prenant un de ces points comme centre de projection on ramènera la surface à un plan double ayant une courbe de diramation d'ordre 6.

Par les remarques qui précède se trouve établi le théorème suivant:

Toute surface hyperelliptique de rang $r > 1$ admettant une représentation paramétrique propre par des Θ irréductibles relatives à un tableau de périodes primitives

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & g & h \\ 0 & 1 & h & g', \end{array}$$

peut être transformée en une surface du quatrième ordre, ou, si l'on aime mieux, en une surface du sixième ordre

$$z^2 = f(x, y).$$

La surface du quatrième ordre aura en général des points doubles et des surfaces tangentes suivant des courbes rationnelles; ces points et ces courbes formeront une configuration caractéristique qui dépend non seulement du type auquel appartient la surface hyperelliptique donnée, mais aussi des liens en partie arbitraires qui rattachent cette configuration à celle de la surface typique correspondante, Φ_{2r} .

De même les courbes $f = 0$, d'ordre 6, correspondantes à des surfaces hyperelliptiques $z^2 = f(x, y)$ auront des points doubles et des courbes pluritangentes jouant un rôle caractéristique.

110. — *Surfaces hyperelliptiques du quatrième ordre de rang 3 (type II).* — Considérons la surface hyperelliptique Φ_6 (type II).

En la projetant par le point double (11') on aura une surface du quatrième ordre qui renfermera quatre droites 1'2, 1'2', 1'3', 1'3', contenant chacune trois points doubles biplanaires, et formant un quadrilatère gauche, dont les sommets sont les points doubles (22') (2'3) (33') (3'2).

Ainsi donc on obtient une surface du quatrième ordre possédant 8 points biplanaires qui sont situés trois par trois sur 4 droites. Il y a en outre 5 coniques appartenant à la surface et renfermant chacune 4 points biplanaires etc.

Il est aisé d'écrire l'équation de cette surface du quatrième ordre.

En supposant que Φ soit représentée par les équations (5) du n. 79, et que le centre de projection tombé en le point $(1, 0, 0, -1, 0, 0)$, posons

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + \varepsilon, & y_2 &= x_2, & y_3 &= x_3, \\ y_4 &= x_4 - \varepsilon, & y_5 &= x_5, & y_6 &= x_6. \end{aligned}$$

Supposons que la projection soit faite sur l'hyperplan

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0;$$

il faudra poser

$$\varepsilon = -(x_1 + x_2 + x_3).$$

On aura

$$\begin{aligned} y_1 y_2 y_3 + \lambda y_4 y_5 y_6 - \varepsilon (y_2 y_3 - \lambda y_5 y_6) &= 0 \\ y_1 y_2 + \dots + V\lambda y_4 y_5 + \dots - \varepsilon (y_4 V\lambda - y_1) &= 0. \end{aligned}$$

Éliminons ε , remplaçons y_3, y_6 par $-y_1 - y_2, -y_4 - y_5$, et enfin posons

$$x = y_1, \quad y = y_2, \quad z = y_4, \quad 1 = y_5;$$

on aura l'équation de la surface du quatrième ordre sous la forme suivante :

$$[y(x+y) - \lambda(z+1)] [xy - (x+y^2) + V\lambda z - V\lambda(z+1)^2] - [xy(x+y) + \lambda z(z+1)] = 0.$$

III. — *Quelques exemples de surfaces hyperelliptiques* $z^2 = f(xy)$. Reprenons la surface hyperelliptique du quatrième ordre du type II considérée ci-dessus et projetons-la sur un plan double en prenant comme centre de projection le point $(22')$.

Sur le plan double on trouvera une courbe de diramation d'ordre 6 possédant 7 points doubles $(13') (2'3) (1'3) (23') (33') (12') (1'2)$, parmi lesquels il y a deux couples de points infiniment voisins $(13') (2'3), (1'3) (23')$; il y aura deux droites renfermant chacune trois points doubles et se coupant en le point double $(33')$ etc.

Nous ne développerons pas l'étude de ce plan double qui en somme n'est pas très élégant à cause du défaut de symétrie de sa configuration caractéristique. Il suffira de remarquer que la projection du modèle que nous avons construit en un hyperespace, conduit en ce cas, aussi bien que dans les cas successifs, à déterminer les plans doubles correspondants au type hyperelliptique donné.

Parmi les autres types de surfaces hyperelliptiques, il y en a un qui amène à un plan double extrêmement simple et très élégant. Nous nous arrêterons sur cet exemple.

Considérons la surface Φ_{16} de S_9 (type V). Elle possède 4 points doubles uniplanaires ordinaires (dont chacun a 3 points doubles infiniment voisins) et 3 points coniques; en projetant de ceux 7 points doubles la surface vient représentée sur un plan double. La courbe de diramation de celui-ci sera une courbe C_6 , d'ordre 6, possédante 12 points doubles qui se réunissent en 6 couples de points infiniment voisins, c'est-à-dire en 6 tacnodes correspondants aux quartiques de Φ . Les 6 tacnodes se trouveront trois à trois sur une droite représentant le domaine d'un point uniplanaire de Φ .

En conclusion la surface Φ vient représentée sur un plan double dont la courbe de diramation C_6 passe doublement par les 6 sommets d'un quadrilatère complet, et a en ces points des tacnodes.

Il est aisé de caractériser une telle C_6 .

D'abord son genre (numérique) étant -2 , la courbe se décompose en trois parties, et on peut reconnaître que ces parties sont des coniques.

Or il s'agit de construire trois coniques se touchant deux à deux deux fois, de façon que les points de contact tombent en les sommets d'un quadrilatère complet. Ces conditions suffisent à déterminer un triplet de coniques, bien défini au point de vue projectif.

Par une transformation homographique du plan on peut ramener le quadrilatère à un carré; alors, parmi les trois coniques, deux deviendront des hyperboles équilatères égales ayant les mêmes asymptotes, et la troisième devient un cercle passant par les quatre sommets du carré, qui sont aussi les sommets de nos hyperboles.

Ainsi donc la courbe C_6 se réduit à

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 - y^2 - 1)(y^2 - x^2 - 1) = 0;$$

le cercle imaginaire

$$x^2 + y^2 + 1 = 0,$$

qui touche en deux points chaque conique faisant partie de C_6 , représente sur le plan double la courbe d'ordre 8 de Φ (courbe qui passe doublement par les 3 points coniques de cette surface).

En conclusion on a le théorème suivant:

Toute surface hyperelliptique du type V (premier cas bi-diédrique) peut être transformée birationnellement en la surface

$$z^2 = (x^2 + y^2 - 1)(x^2 - y^2 - 1)(y^2 - x^2 - 1).$$

Sommaire.

Première partie (tome 32).

	Page
I. Introduction	
1.	283
2. Premiers caractères des surfaces hyperelliptiques: le diviseur	284
3. Le rang	285
4. Surfaces rationnelles et réglées elliptiques	286
5. La surface de Jacobi	286
6. Transformées rationnelles d'une surface hyperelliptique	287
II. Les surfaces hyperelliptiques de rang 1	
7.	289
8. Transformations de la surface de Jacobi en elle-même	290
9. Transformations de seconde espèce cycliques	292
10.	293
11. Construction des surfaces de Picard de diviseur δ	294
12.	298
13. Les surfaces de Picard considérées comme des surfaces qui admettent un groupe de transformations en elles-mêmes	299
14. Sur les conditions pour qu'une surface soit hyperelliptique de rang 1. Thé- rème de M. Picard	300
15. Rappel de notions appartenant à la théorie des surfaces algébriques	302
16. Les surfaces de Picard caractérisées par leurs nombres invariants	303
17. Courbes appartenant à une surface de Picard: courbes rationnelles	304
18. Courbes elliptiques	304
19.	305
20. Courbes de genre deux	305
21. Systèmes Σ appartenant à une surface de Jacobi	307
22.	308
23. Remarque concernant une certaine dualité	309
24. Autres remarques concernant les courbes de genre deux sur une surface de Jacobi	309
25. Systèmes Σ_δ appartenant à une surface de Picard F_δ	310
26. Courbes de genre quelconque appartenant à une surface de Jacobi de mo- dules généraux	311
27. Courbes de genre quelconque appartenant à une surface de Picard de mo- dules généraux	312

	Page
28. Rapprochement entre les résultats qui précèdent et la théorie des séries Θ . Représentation des courbes tracées sur une surface de Jacobi	313
29. Représentation des courbes tracées sur une surface F_δ	317
30. Surfaces de Picard d'ordre minimum dépourvues de courbes exceptionnelles.	320
III. Classification des involutions appartenant à une surface de Jacobi	
31. Invariants des involutions appartenant à une surface de Jacobi	322
32. Les involutions classifiées d'après leurs transformations en elles-mêmes . .	325
33.	326
34. Les involutions classifiées d'après leurs coïncidences	327
35.	327
36.	328
37.	329
38. Involutions appartenant à une surface régulière de genres r	329
IV. Théorème fondamental au sujet des surfaces hyperelliptiques de rang $r > 1$	
39.	331
40.	333
41.	334
42.	336
43.	337
44. Théorème fondamental	338
V. Surfaces hyperelliptiques de rang $r > 1$ dépendant de trois modules arbitraires .	
45. Surfaces hyperelliptiques de rang $r > 1$ dépendant de trois modules arbitraires	339
46. Surface de Kummer	341
47. Cas de dégénérescence	344
48. La surface hyperelliptique ($r = 2$, $\delta = 1$) représentée sur un plan double .	345
49. La surface du quatrième ordre hyperelliptique caractérisée par ses 16 points doubles	345
50. Surfaces hyperelliptiques de diviseur $\delta > 1$	349
51. La surface hyperelliptique d'ordre 4δ en $S_{2\delta+1}$ caractérisée par ses points et ses hyperplans singuliers	350
52. Surfaces hyperelliptiques du quatrième ordre ($\delta > 1$)	352
53. Quelques remarques au sujet du problème qui a pour objet de reconnaître si une surface donnée est hyperelliptique	354
VI. Surfaces hyperelliptiques irrégulières de rang $r > 1$	
54.	355
55. Rappel de quelques notions concernant les surfaces elliptiques	355
56. Construction d'une surface de Picard représentée sur une surface elliptique multiple renfermant deux faisceaux de courbes elliptiques	358
57. Détermination de la valeur du diviseur δ	361
VII. Surfaces hyperelliptiques admettant une représentation propre par des fonctions Θ irréductibles	
58. Quelques remarques au sujet des surfaces admettant une représentation paramétrique par des fonctions hyperelliptiques irréductibles	367

	Page
59. Transformations d'une surface de Jacobi en elle-même: transformations de Hermite et transformations de Humbert	369
60.	371
61. Sur la représentation paramétrique d'une surface hyperelliptique par des fonctions Θ	372
62. Quelques propriétés des transformations d'une surface de Jacobi en elle-même	374
63. Transformations hermitiennes	375
64. Aperçu sur les surfaces hyperelliptiques de diviseur $\delta > 1$	376
65. La classification des surfaces hyperelliptiques admettant une représentation propre par des Θ irréductibles, ramenée à l'analyse des courbes de genre deux qui possèdent un groupe de transformations en elles-mêmes	377
66. Courbes de genre 2 admettant des transformations en elles-mêmes	378
67. Comment on passe des groupes de la courbe de genre 2 à ceux de la surface de Jacobi associée	384
68. Cas à écarter	384
69. Genres des surfaces hyperelliptiques correspondantes aux types qui ne sont pas de dégénérescence	388
70. Analyse des groupes bi-diédriques et bi-tétraédriques, d'ordre 8, 24, appartenant à une surface de Jacobi	389
71. Groupes bi-diédriques d'ordre 12	391
72. Résumé et programme de l'étude qui suit	391

Deuxième partie (tome 33).

VIII. Surfaces hyperelliptiques régulières de rang 3 (type II)	
73. Transformations hermitiennes périodiques d'ordre 3 sur une surface de Jacobi	321
74. Propriétés infinitésimales d'un point uni de la transformation T	324
75. L'involution I_3 engendrée par la transformation T	324
76. La surface Φ_6	326
77. Les genres de la surface Φ_6	331
78. La surface hyperelliptique Φ_6 caractérisée par la configuration de ses points et hyperplans singuliers	332
79. La configuration caractéristique de Φ_6 rattachée à une configuration connue: équations algébriques de Φ_6	336
80. Homographies qui ramènent en elle-même la surface Φ_6	339
81. Représentation analytique de la transformation T	341
82. Equations des courbes C de Σ qui sont invariants par rapport à T	344
83. Représentation paramétrique de la surface Φ_6	346
IX. Surfaces hyperelliptiques régulières de rang 4 (type III)	
84. Transformations hermitiennes périodiques d'ordre 4	347
85. L'involution I_4 engendrée par la transformation T et la surface Φ_8 qui en donne l'image projective	350
86. Relations entre la surface Φ_8 et la surface de Kummer attachée à la même courbe de genre deux	350

	Page
87. Remarque	352
88. Configuration des points doubles et des courbes rationnelles appartenant à la surface Φ_8	354
89. La surface Φ_8 caractérisée par la configuration de ses points et de ses hyperplans singuliers	358
X. Surfaces hyperelliptiques de rang 6 (type IV)	
90. L'involution I_6 engendrée par une transformation hermitienne cyclique d'ordre 6	360
91. La surface Φ_{12} d'ordre 12 modèle projectif des surfaces hyperelliptiques du type IV	362
XI. Surfaces hyperelliptiques régulières de rang 8 (types V, VI, VII)	
92. Surfaces de Jacobi possédant des groupes bi-diédriques d'ordre 8	366
93.	369
94.	371
95.	372
96.	373
97. Genres des surfaces hyperelliptiques V, VI, VII	373
98. Les modèles projectifs des surfaces hyperelliptiques V, VI, VII	375
99. Les surfaces Φ_{16} , Φ'_{16} , Φ''_{16} caractérisées par leurs configurations de points et de hyperplans singuliers	377
XII. Surfaces hyperelliptiques régulières de rang 12 (type VIII)	
100. Surfaces de Jacobi possédant des groupes G_{12}	378
101. Le genre de la surface hyperelliptique du type VIII	382
102. Le modèle projectif des surfaces hyperelliptiques du type VIII	383
XIII. Surfaces hyperelliptiques régulières de rang 24 (types IX, X, XI)	
103. Surfaces de Jacobi possédant des groupes bi-tétraédriques	385
104. Modèles projectifs des surfaces hyperelliptiques IX, X, XI	389
105.	392
106.	393
107. Les surfaces hyperelliptiques Φ_{48} , Φ'_{48} , Φ''_{48} caractérisées par la configuration de leurs points et de leurs hyperplans singuliers	394
XIV. Quelques remarques concernant les surfaces hyperelliptiques régulières II...XI.	
108. Transformation des surfaces II...XI en des surfaces du quatrième ordre	396
109. Représentation sur un plan double	397
110. Surface hyperelliptique du quatrième ordre de rang 3	397
111. Quelques exemples de surfaces hyperelliptiques $z^2 = f(x, y)$	398