Über affine Geometrie XXIX: Die Starrheit der Eiflächen.

Von

Wilhelm Blaschke in Hamburg.

Soll eine Eifläche (= geschlossene konvexe Fläche) *stetig so abgeändert werden, daß die Bogenlängen der auf der Fläche gezogenen Kurven ungeändert bleiben und die Fläche nirgends eingeknickt wird, so ist die Eifläche nur wie ein starrer Körper beweglich.* Dieser bekannte Satz ist in zwingender Art zuerst von H. Liebmann begründet worden[1]. Später habe ich ihn mit H. Minkowskis Theorie von „Volumen und Oberfläche" in Zusammenhang gebracht[2] und auf Grund dieser meiner Bemerkung hat H. Weyl[3] den Satz von der Starrheit der Eiflächen neu bewiesen. Da die schöne Abhandlung Weyls vielleicht nicht ganz leicht lesbar ist, möchte ich den Beweis von Weyl und mir hier noch einmal vorführen, wie ich ihn mir für Vorlesungszwecke zurechtgelegt habe. Außer den ersten Anfangsgründen der Flächentheorie werden dabei keinerlei Vorkenntnisse vorausgesetzt.

§ 1.

Der Drehriß.

Die Umgebung einer Stelle $\mathfrak{x}$ einer Fläche denken wir uns mittels zweier Parameter u, v dargestellt $x_k = x_k(u, v)$. Die x_k sollen dabei etwa rechtwinklige Koordinaten bedeuten. Für die Vektoren mit den Koordinaten

$$x_k; \quad \frac{\partial x_k}{\partial u}, \quad \frac{\partial x_k}{\partial v}; \quad \frac{\partial^2 x_k}{\partial u^2}, \quad \frac{\partial^2 x_k}{\partial u \partial v}, \quad \frac{\partial^2 x_k}{\partial v^2}$$

[1] H. Liebmann, vgl. bes. die Abhandlungen in Math. Annalen, **53** (1900), S. 81–112 und **54** (1901), S. 505–517.

[2] W. Blaschke, Ein Beweis für die Unverbiegbarkeit geschlossener konvexer Flächen, Göttinger Nachrichten 1912, S. 607–610.

[3] H. Weyl, Über die Starrheit der Eiflächen und konvexen Polyeder, Berliner Sitzungsberichte 1917, S. 250–266.

soll zur Abkürzung $\mathfrak{x}$; $\mathfrak{x}_u$, $\mathfrak{x}_v$; $\mathfrak{x}_{uu}$, $\mathfrak{x}_{uv}$, $\mathfrak{x}_{vv}$ geschrieben werden, und wir setzen das Vektorprodukt $\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v$ als von Null verschieden und die sechs Vektoren als stetig von u, v abhängig voraus. Wir denken unsere Fläche $\mathfrak{x}(u, v)$ in eine Schar deformierter Flächen $\mathfrak{x}(u, v; t)$ eingebettet, so daß etwa $\mathfrak{x}(u, v) = \mathfrak{x}(u, v; 0)$ sein möge. Die Teilableitungen nach t für $t = 0$ sollen durch ein vorgesetztes δ gekennzeichnet werden. Soll dann die Formänderung so stattfinden, daß die Bogenlängen der auf unserer Fläche gezogenen Kurven erhalten bleiben, so muß

$$\delta\, ds^2 = \delta (d\mathfrak{x})^2 = 0 \tag{1}$$

sein, oder, wenn man für

$$\delta \mathfrak{x} = \frac{\partial \mathfrak{x}(u, v; 0)}{\partial t} = \mathfrak{z}(u, v) \tag{2}$$

setzt, muß das skalare Produkt verschwinden

$$d\mathfrak{x} \cdot d\mathfrak{z} = 0. \tag{3}$$

Somit kann man den Vektor $d\mathfrak{z}$ mittels eines Hilfsvektors $\mathfrak{y}(u, v)$ durch ein Vektorprodukt darstellen

$$d\mathfrak{z} = \mathfrak{y} \times d\mathfrak{x}. \tag{4}$$

Dieser Vektor $\mathfrak{y}$ ist nichts andres als der Drehvektor des starren Körpers, der an unsere deformierte Fläche an der Stelle $\mathfrak{x}$ angeheftet gedacht werden kann. Trägt man alle Vektoren $\mathfrak{y}(u, v)$ vom Ursprung aus ab, so beschreibt der Endpunkt $\mathfrak{y}$ im allgemeinen eine Fläche, die ich als den „*Drehriß*" der Verbiegung der Fläche $(\mathfrak{x})$ zu bezeichnen pflege.

Nach (4) ist

$$\mathfrak{y} \times d\mathfrak{x} = (\mathfrak{y} \times \mathfrak{x}_u)\, du + (\mathfrak{y} \times \mathfrak{x}_v)\, dv \tag{5}$$

ein vollständiges Differential und somit ist

$$\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{y}_v = \mathfrak{x}_v \times \mathfrak{y}_u. \tag{6}$$

Die Vektoren $\mathfrak{y}_u$, $\mathfrak{y}_v$ müssen danach durch die linear unabhängigen Vektoren $\mathfrak{x}_u$, $\mathfrak{x}_v$ darstellbar sein

$$\mathfrak{y}_u = \alpha \mathfrak{x}_u + \beta \mathfrak{x}_v, \quad \mathfrak{y}_v = \gamma \mathfrak{x}_u + \delta \mathfrak{x}_v \tag{7}$$

und aus (6) folgt für die skalaren Funktionen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ überdies

$$\alpha + \delta = 0. \tag{8}$$

Durch Ableitung nach u, v folgt aus (6) noch

$$\left\{ \begin{aligned} \mathfrak{x}_{uu} \times \mathfrak{y}_v - \mathfrak{x}_{uv} \times \mathfrak{y}_u &= \mathfrak{x}_v \times \mathfrak{y}_{uu} - \mathfrak{x}_u \times \mathfrak{y}_{uv}, \\ \mathfrak{x}_{uv} \times \mathfrak{y}_v - \mathfrak{x}_{vv} \times \mathfrak{y}_u &= \mathfrak{x}_v \times \mathfrak{y}_{uv} - \mathfrak{x}_u \times \mathfrak{y}_{vv}. \end{aligned} \right. \tag{9}$$

Multipliziert man die erste Gleichung skalar mit $\mathfrak{x}_v$, die zweite mit $\mathfrak{x}_u$, so ergibt sich durch Subtraktion zwischen den entstehenden dreireihigen Determinanten die Beziehung

$$(10)\qquad (\mathfrak{x}_v \mathfrak{x}_{uu} \mathfrak{y}_v) - (\mathfrak{x}_v \mathfrak{x}_{uv} \mathfrak{y}_u) = (\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_{uv} \mathfrak{y}_v) - (\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_{vv} \mathfrak{y}_u).$$

Führt man für die Determinanten die Abkürzungen ein

$$(11)\qquad \begin{cases} (\mathfrak{x}_{uu} \mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v) = L, \\ (\mathfrak{x}_{uv} \mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v) = M, \\ (\mathfrak{x}_{vv} \mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v) = N, \end{cases}$$

so folgt aus (10) mittels (7) und (8)

$$(12)\qquad \gamma L - 2\alpha M - \beta N = 0.$$

Ist die Fläche $(\mathfrak{x})$ elliptisch gekrümmt

$$(13)\qquad LN - M^2 > 0,$$

so sind auf $(\mathfrak{x})$ und $(\mathfrak{y})$ entsprechende Umlaufsinne entsprechender Stellen entgegengesetzt, d. h. in (7) ist

$$(14)\qquad \alpha\delta - \beta\gamma = -\alpha^2 - \beta\gamma \leqq 0.$$

In der Tat! Die Punkte (ξ_k homogene Punktkoordinaten in der Ebene!)

$$(15)\qquad \begin{cases} \xi_1 = +L, & \xi_2 = +M, & \xi_3 = +N; \\ \xi_1' = -\beta, & \xi_2' = +\alpha, & \xi_3' = +\gamma \end{cases}$$

sind wegen (12) oder $\xi_1 \xi_3' - 2\xi_2 \xi_2' + \xi_3 \xi_1' = 0$ zum Kegelschnitt $\xi_1 \xi_3 - \xi_2^2 = 0$ konjugiert und der erste ist nach (13) innerer, also der zweite äußerer Punkt dieses Kegelschnitts. Somit ist im allgemeinen $\xi_1' \xi_3' - \xi_2'^2 = -\alpha^2 - \beta\gamma < 0$. Insbesondere kann

$$(16)\qquad -\alpha^2 - \beta\gamma = 0$$

nur dann sein, wenn die homogenen Punktkoordinaten ξ' versagen, wenn also

$$(17)\qquad \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$$

ist.

§ 2.

Formeln für H. Minkowskis gemischten Rauminhalt.

Haben wir zwei aufeinander bezogene einfach zusammenhängende Flächenstücke $\mathfrak{x}(u, v)$, $\mathfrak{y}(u, v)$, so soll das Doppelintegral Minkowskis

$$(18)\qquad \iint (\mathfrak{x}\, \mathfrak{y}_u\, \mathfrak{y}_v)\, du\, dv$$

umgeformt worden.

Es ist

$$(19)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial v}(\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}_u\,\mathfrak{y}) = (\mathfrak{x}_v\,\mathfrak{y}_u\,\mathfrak{y}) + (\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}_{uv}\,\mathfrak{y}) + (\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}_u\,\mathfrak{y}_v) \\ \dfrac{\partial}{\partial u}(\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}_v\,\mathfrak{y}) = (\mathfrak{x}_u\,\mathfrak{y}_v\,\mathfrak{y}) + (\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}_{uv}\,\mathfrak{y}) + (\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}_v\,\mathfrak{y}_u) \end{cases}$$

und durch Abziehen

$$(20)\qquad 2(\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}_u\,\mathfrak{y}_v) = (\mathfrak{x}_u\,\mathfrak{y}_v\,\mathfrak{y}) - (\mathfrak{x}_v\,\mathfrak{y}_u\,\mathfrak{y}) + \frac{\partial}{\partial v}(\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}_u\,\mathfrak{y}) - \frac{\partial}{\partial u}(\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}_v\,\mathfrak{y}).$$

Somit ist

$$(21)\quad 2\iint(\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}_u\,\mathfrak{y}_v)\,du\,dv = \iint\{(\mathfrak{x}_u\,\mathfrak{y}_v\,\mathfrak{y}) - (\mathfrak{x}_v\,\mathfrak{y}_u\,\mathfrak{y})\}\,du\,dv + \int(\mathfrak{x}\,d\mathfrak{y}\,\mathfrak{y}),$$

wo das letzte Integral in einem geeigneten Umlaufsinn längs des Randes zu erstrecken ist.

Aus dem Integral (18) erkennt man durch Einführung neuer (gleichsinniger) Parameter u, v, daß der Integralwert von der Parameterwahl nicht abhängt. Ebenso ist das Randintegral in (21) offenbar von den Parametern unabhängig.

§ 3.

Der Starrheitsbeweis.

Wenden wir jetzt die Formel (21) auf den Fall von § 1 an, wo die Flächen $(\mathfrak{x})$, $(\mathfrak{y})$ durch die Beziehung (6) aneinander gebunden sind, so fällt das Doppelintegral rechter Hand weg:

$$(22)\qquad 2\iint(\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}_u\,\mathfrak{y}_v)\,du\,dv = \int(\mathfrak{x}\,d\mathfrak{y}\,\mathfrak{y}).$$

Ist ferner $(\mathfrak{x})$ eine geschlossene konvexe Fläche, so können wir sie durch eine doppelpunktfreie geschlossene Linie in zwei Teilflächen zerschneiden und auf jede die Formel (22) anwenden. Dann folgt durch Addition, da sich die beiden Randintegrale gegenseitig tilgen,

$$(23)\qquad \iint(\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}_u\,\mathfrak{y}_v)\,du\,dv = 0.$$

Der „gemischte Rauminhalt“ von $(\mathfrak{x})$ und $(\mathfrak{y})$ ist also Null. Andrerseits ist für jede der beiden Teilflächen nach (7), (8)

$$(24)\qquad \iint(\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}_u\,\mathfrak{y}_v)\,du\,dv = \iint(\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}_u\,\mathfrak{x}_v)(-\alpha^2-\beta\gamma)\,du\,dv.$$

Demnach ist, wenn wir den Ursprung im Innern der Eifläche und die u, v-Linien in beiden Teilstücken der zerschnittenen Eifläche etwa so wählen, daß

$$(25)\qquad (\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}_u\,\mathfrak{x}_v) > 0$$

ausfällt, wegen (14) der Integrand $\leqq 0$ und das Integral kann wegen der Stetigkeit des Integranden nur so verschwinden, daß $-\alpha^2-\beta\gamma = 0$, also nach (16), (17) α, β, γ einzeln identisch Null sind. Dann ist aber nach (7) der Vektor $\mathfrak{y}$ für alle Punkte $\mathfrak{x}$ derselbe. Die Formel (4) gibt integriert

$$\mathfrak{z} = \delta \mathfrak{x} = \mathfrak{z}_0 + \mathfrak{y} \times \mathfrak{x} \tag{26}$$

und bedeutet, daß die Fläche ($\mathfrak{x}$) als starrer Körper bewegt wird, denn die geradlinige Entfernung irgend zweier Flächenpunkte $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2$ bleibt fest:

$$\delta(\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1)^2 = 2(\mathfrak{z}_2 - \mathfrak{z}_1)(\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1) = 2(\mathfrak{y}, \mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1) = 0. \tag{27}$$

Soll zu jeder Zeit t für unsere deformierte Fläche $\mathfrak{x}(u, v, t)$ die Erhaltung des Bogenelements gelten

$$\frac{\partial}{\partial t} ds^2 = 0, \tag{28}$$

so bleibt demnach die geradlinige Entfernung irgend zweier Flächenpunkte $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2$ von t unabhängig: d. h. die Fläche ist nur als starrer Körper beweglich. Damit ist der gewünschte Nachweis erbracht.

Deutet man den Drehriß statisch als Kräfteplan[4]), so kann man das gefundene Ergebnis auch so aussprechen:

In einer Eifläche, die aus einem biegsamen und undehnbaren Material (etwa Papier) hergestellt ist, können keine Selbstspannungen herrschen.

Es wäre wünschenswert, den Starrheitssatz für Eiflächen ohne die einschränkenden Differenzierbarkeitsannahmen von § 1 in voller Allgemeinheit zu beweisen.

Schließlich bliebe auch noch zu rechtfertigen, daß ich diese kleine Arbeit unter die zur „Affingeometrie" aufgenommen habe. Es ist aber in der Tat der Zusammenhang zwischen einer Fläche ($\mathfrak{x}$) und ihrem „Drehriß" ($\mathfrak{y}$) oder der Zusammenhang zwischen zwei derartigen „reziproken Kräfteplänen" affininvariant, und damit ist gezeigt, daß die Theorie der infinitesimalen Biegungen zur affinen Geometrie gehört[5]).

Hamburg, zu Pfingsten 1920.

[4]) Vgl. etwa W. Blaschke, Wackelige Achtflache, Math. Zeitschr., 6 (1920), S. 85–93 oder besonders H. Liebmann, Bedingte Flächenverbiegungen, Münchener Sitzungsberichte 1920, S. 21–48, bes. S. 25.

[5]) In gewissem Sinn gehört diese Theorie sogar zur *projektiven* Geometrie, wie für krumme Flächen G. Darboux (Théorie des surfaces IV, 1896, S. 76, Nr. 900) und für Vielflache (Fachwerke) kürzlich H. Liebmann (Ausnahmefachwerke und ihre Determinante, Münchener Sitzungsberichte 1920, S. 197–227, bes. S. 220) gezeigt hat.

(Eingegangen am 28. Mai 1920.)