Über Beziehungen zwischen algebraischen Gebilden vom Geschlechte drei und vier.

Von **Paul Roth** in Wien.

§ 1.

In der vorliegenden Arbeit werden Beziehungen zwischen algebraischen Gebilden vom Geschlechte 3 und 4 einer näheren Erörterung unterzogen und, ähnlich dem früher behandelten Falle der Beziehungen zwischen $p=2$ und $p=3$[1]), das Hauptgewicht auf die Hervorhebung jener geometrischen Gebilde gelegt, die für diese Beziehungen charakteristisch sind.

Die Behandlung des vorliegenden Falles hat gleichfalls zur Grundlage die Göttinger Preisschrift von W. Wirtinger[2]) und kommt für uns namentlich der zweite Teil derselben in Betracht. Auf der unverzweigt doppelt überdeckten Riemann'schen Fläche vom Geschlechte p, die ein Gebilde vom Geschlechte $2p-1$ darstellt, existieren außer den Thetafunktionen von p Variablen des ursprünglichen Gebildes noch $2^{2p}-1$ Systeme von Thetafunktionen von $p-1$ Variablen, deren Argumente Integrale über $p-1$ linear unabhängige Wurzelfunktionen zweiter Stufe und zweiten Grades sind, die zu einer der von der Charakteristik $\begin{vmatrix} 0\,0\ldots 0 \\ 0\,0\ldots 0 \end{vmatrix}$ verschiedenen Charakteristiken gehören. Die bezüglichen Thetafunktionen sind im allgemeinen nicht zu jener von Riemann behandelten Klasse gehörig, die man als Riemannsche zu bezeichnen pflegt, sondern hängen von mehr Parametern ab, sind also allgemeiner als diese. Für den schon behandelten Fall $p=3$ und für $p=4$ sind die eben erwähnten Funktionen von 2, resp. 3 Variablen gleichzeitig Riemannsche Thetafunktionen. Daher entsprechen ihnen algebraische Gebilde vom entsprechenden Range. Die zu behandelnden Beziehungen zwischen $p=3$ und $p=4$ müssen sich also durch die $2^8-1=255$ Systeme von Wurzelfunktionen zweiten Grades, die am Gebilde vom Geschlechte $p=4$ existieren, begründen lassen.

[1]) Monatshefte für Mathematik und Physik, Bd. 18.

[2]) Untersuchungen über Thetafunktionen. Leipzig 1895.

§ 2.

Nach diesen einleitenden Sätzen wird es sich darum handeln, für den hier vorliegenden Fall eine algebraisch-geometrische Grundlage zu präzisieren. Dieselbe ist einer Arbeit Wirtingers[1]) entnommen, die seinen Untersuchungen über Thetafunktionen vorangegangen ist. In derselben wird der Weg gewiesen, der von der ebenen singularitätenfreien C_4 zu algebraischen Gebilden vom Geschlechte $p=4$ führt. Ausgegangen wird von einer viergliedrigen Summe von Integralen erster Gattung

$$w_i = \sum_{k=1}^{4} \int_{g_k}^{x_k} d\,w_i \; (i=1,2,3) \tag{1}$$

die g_k $(k=1..4)$ sind die Schnittpunkte einer beliebigen Geraden $g_x=0$ mit der C_4, die x_k $(k=1..4)$ sollen nicht auf einer Geraden liegen. Dann stellt die Gleichung (1) bei konstant gehaltenem w_i $(i=1,2,3)$ ein Umkehrproblem dar, das nach den allgemeinen Sätzen der Theorie ∞^1 Lösungen besitzt. Aus der so erlangten ∞^1 Quadrupelschar von Punkten x_k $(k=1..4)$ kann man zwei Quadrupel herausgreifen und die durch sie bestimmten Kegelschnittbüschel projektiv so aufeinander beziehen, daß sie die C_4 erzeugen.

Sei $\qquad K_1 + \Lambda K_2 = 0 \qquad$ das eine

und $\qquad K_3 + \mu K_4 = 0 \qquad$ das zweite von ihnen,

dann sei der Einfachheit halber die Projektivität gegeben durch die Gleichung

$$\Lambda = \mu, \tag{2}$$

so daß die C_4 gegeben ist durch

$$C_4 = K_1 K_4 - K_2 K_3 = 0.$$

Projektiv entsprechende Kegelschnitte der beiden Büschel schneiden sich in der zu den beiden Quadrupeln residualen Schar und diese erteilen als obere Grenzen in die Gleichung (1) eingesetzt derselben den Wert $-w$. Das so erhaltene ∞^2 System von Kegelschnitten, das wir mit S_2 bezeichnen, kann als dem ∞^3 System

$$\Sigma = \Lambda_1 K_1 + \Lambda_2 K_2 + \Lambda_3 K_3 + \Lambda_4 K_4 = 0$$

angehörend gekennzeichnet werden durch eine Abbildung in den dreidimensionalen Raum. Interpretiert man die Λ_i $(i=1..4)$ als die vier homogenen Koordinaten eines dreidimensionalen Raumes, so entsprechen den beiden erzeugenden Büscheln projektive Punktreihen und entsprechende Punkte, miteinander verbunden, erzeugen

[1]) Math. Annalen, Bd. 40.

eine Fläche zweiter Ordnung. Nach Gleichung (2) hat sie die Gleichung

$$\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2} = \frac{\Lambda_3}{\Lambda_4} \quad \text{oder}$$

$$F_2 = \Lambda_1 \Lambda_4 - \Lambda_2 \Lambda_3 = 0,$$

und diese ist das Bild von S_2.

Bei der Untersuchung der zu diesen Quadrupelscharen kovarianten Gebilden fragt sich Wirtinger nach dem Ort der zu einem beliebigen Punkt ξ in der Ebene gehörigen konjugierten Punkte η in bezug auf die lineare Quadrupelschar, die symbolisch mit (x, y, z, t) bezeichnet ist. Als Erzeugnis projektiver Geradenbüschel ist derselbe ein Kegelschnitt und wird mit $k\ (x, y, z, t; \xi, \eta) = 0$ bezeichnet. Der Ort derjenigen ξ, für die dieser Kegelschnitt zerfällt, ist eine C_6 mit sechs Doppelpunkten, also ein Gebilde vom Geschlechte $p = 4$. Diese Kurve kommt bereits bei Caporali[1]) vor, daselbst wird sie folgendermaßen definiert. Ein Kegelschnitt eines der beiden die C_4 erzeugenden Büschels, beispielsweise K_1, schneidet auf der C_4 zwei Quadrupel aus, das eine gehört zur Schar der korresidualen, das andere zur Schar der residualen; diese beiden Quadrupel bestimmen zwei Kegelschnittbüschel, u. zw. $K_1 + \Lambda K_2 = 0$ und $K_1 + \Lambda K_3 = 0$, die zusammen ein Netz bilden

$$\mu K_1 + \nu K_2 + \rho K_3 = 0;$$

dieses Netz nennt Caporali das zum Kegelschnitt K_1 gehörige reziproke Netz. Durchläuft man nun die Kegelschnitte des einen erzeugenden Büschels und bildet die Funktionaldeterminanten der zu ihnen gehörigen reziproken Netze und tut das gleiche für das zweite Büschel, bezieht die beiden so erhaltenen C_3-Büschel, die sämtlich durch die sechs Ecken des Vierseits der vier Doppelgeraden des ∞^3 Kegelschnittsystems Σ gehen, projektiv ebenso aufeinander wie die entsprechenden Kegelschnittbüschel, dann erhält man die oben erwähnte C_6 mit sechs Doppelpunkten in den genannten sechs Eckpunkten.

Bezeichnet man die Jakobischen Kurven der bezüglichen Netze

$$(K_1, K_2, K_3),\ (K_1, K_2, K_4),\ (K_1, K_3, K_4),\ (K_2, K_3, K_4)$$

resp, mit $C_3^{(4)}, C_3^{(3)}, C_3^{(2)}, C_3^{(1)}$, so schreiben sich die erzeugenden Büschel

$$\left.\begin{aligned} C_3^{(4)} + \Lambda\, C_3^{(3)} = 0 \\ C_3^{(2)} + \Lambda\, C_3^{(1)} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

und die erzeugte C_6 hat die Gleichung

$$C_6 = C_3^{(1)} C_3^{(4)} - C_3^{(2)} C_3^{(3)} = 0. \qquad (5)$$

[1]) Ettore Caporali: Memorie di Geometria. Napoli 1888.

Bedenkt man, daß die Jakobische Kurve eines Kegelschnittnetzes der Ort der Doppelpunkte ihrer zerfallenden ist, so sieht man leicht ein, daß die C_6 der Ort der Ecken der Polardreiecke ist, die zu den Vierecken der Quadrupelpunkte gehören. Die Kurven $C_3^{(4)}$ und $C_3^{(3)}$ schneiden sich außer in den sechs Ecken des Vierseits der vier Doppelgeraden noch in den drei Ecken des Polardreiecks des Quadrupels (K_1, K_2) und die Kurven $C_3^{(2)}$ und $C_3^{(1)}$ in denen des Quadrupels (K_3, K_4). Die projektiv auf einander bezogenen Büschel (4) schneiden sich dann in der Residualschar der eben genannten Tripel. Diese Verhältnisse lassen nun eine Deutung im dreidimensionalen Raum zu. Faßt man die ebene C_6 als den Ort der Doppelpunkte der zerfallenden Kegelschnitte des Systems S auf, so entspricht ihr im λ-Raum das Schnitterzeugnis der durch die Gleichung (2) gegebenen $F_2 = 0$ mit einer Fläche dritter Ordnung mit vier Doppelpunkten

$$F_3^{(4)} = \emptyset,$$

die den Ort der zerfallenden Kegelschnitte des ∞^3 Systems Σ darstellt, also eine C_6 im R_3, vom Geschlechte $p = 4$, u. zw. eine allgemeine weil sie punktweise eindeutig und eindeutig umkehrbar auf die ebene C_6 bezogen ist.

§ 3.

Die eben auseinandergesetzten Verhältnisse sollen im folgenden analytisch genauer präzisiert werden.

Das Kegelschnittsystem Σ enthält, wie schon erwähnt, im ganzen vier Doppelgerade.[1]) Dieselben seien gegeben durch die Gleichungen

$$x_1 = 0,\; x_2 = 0,\; x_3 = 0,\; x_4 = -x_1 - x_2 - x_3 = \emptyset, \tag{1}$$

also die drei Koordinatengeraden und die Einheitsgerade. Für sie gilt also die Relation

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \emptyset, \tag{2}$$

Dann drücken sich die vier Kegelschnitte K_1, K_2, K_3, K_4 durch die Gleichungen aus

$$\begin{aligned}
K_1 &= A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + A_3 x_3^2 + A_4 x_4^2 = \emptyset,\\
K_2 &= B_1 x_1^2 + B_2 x_2^2 + B_3 x_3^2 + B_4 x_4^2 = \emptyset,\\
K_3 &= C_1 x_1^2 + C_2 x_2^2 + C_3 x_3^2 + C_4 x_4^2 = \emptyset,\\
K_4 &= D_1 x_1^2 + D_2 x_2^2 + D_3 x_3^2 + D_4 x_4^2 = \emptyset.
\end{aligned} \tag{3}$$

---

[1]) Salmon-Fiedler, Anal. Geometrie der Kegelschnitte.

Die C_4 ist dann gegeben durch die Gleichung

$$K_1 K_4 - K_2 K_3 = 0 \tag{4}$$

Die Jakobische Kurve $C_3^{(4)}$ ist gegeben durch

$$C_3^{(4)} = \begin{vmatrix} A_1 x_1 - A_4 x_4, & A_2 x_2 - A_4 x_4, & A_3 x_4 - A_4 x_4 \\ B_1 x_1 - B_4 x_4, & B_2 x_2 - B_4 x_4, & B_3 x_3 - B_4 x_4 \\ C_1 x_1 - C_4 x_4, & C_2 x_2 - C_4 x_4, & C_3 x_3 - C_4 x_4 \end{vmatrix}. \tag{5}$$

also

$$C_3^{(4)} = \delta_4 x_1 x_2 x_3 + \delta_3 x_1 x_2 x_4 + \delta_2 x_1 x_3 x_4 + \delta_1 x_2 x_3 x_4 = 0 \tag{6}$$

und analog die drei anderen Kurven

$$\begin{aligned} C_3^{(3)} &= \gamma_4 x_1 x_2 x_3 + \gamma_3 x_1 x_2 x_4 + \gamma_2 x_1 x_3 x_4 + \gamma_1 x_2 x_3 x_4 = 0, \\ C_3^{(2)} &= \beta_4 x_1 x_2 x_3 + \beta_3 x_1 x_2 x_4 + \beta_2 x_1 x_3 x_4 + \beta_1 x_2 x_3 x_4 = 0, \qquad (6a) \\ C_3^{(1)} &= \alpha_4 x_1 x_2 x_3 + \alpha_3 x_1 x_2 x_4 + \alpha_2 x_1 x_3 x_4 + \alpha_1 x_2 x_3 x_4 = 0. \end{aligned}$$

Dabei bedeuten $\alpha_\nu, \beta_\nu, \gamma_\nu, \delta_\nu$ $(\nu = 1..4)$ die bezüglichen Unterdeterminanten der Größen $A_\nu, B_\nu, C_\nu, D_\nu$ $(\nu = 1..4)$ in der Determinante

$$D = \begin{vmatrix} A_1, & A_2, & A_3, & A_4 \\ B_1, & B_2, & B_3, & B_4 \\ C_1, & C_2, & C_3, & C_4 \\ D_1, & D_2, & D_3, & D_4 \end{vmatrix} \tag{7}$$

multipliziert mit den ihnen zukommenden Vorzeichen.

Aus der Form der Gleichungen (6) geht deutlich der im vorigen Paragraphen erwähnte Satz hervor, daß die sämtlichen C_3 durch die sechs Ecken des Vierseits der vier Doppelgeraden gehen.

Die C_6 mit sechs Doppelpunkten ist dann gegeben durch die Gleichung

$$C_3^{(1)} C_3^{(4)} - C_3^{(2)} C_3^{(3)} = 0 \tag{8}$$

Schreibt man Gl. (8) in den Doppelgeraden, so kommen in ihr Glieder von der Form $x_\alpha^2 x_\beta^2 x_\gamma^2$ und solche von der Gestalt $x_\alpha^2 x_\beta^2 x_\gamma x_\delta$ vor, wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Zahlen 1, 2, 3, 4 in einer beliebigen Reihenfolge bedeuten; Glieder der ersten Art gibt es vier, Glieder der zweiten Art gibt es sechs, im ganzen enthält die Gleichung zehn homogene Konstanten. Die neun Verhältnisse derselben können als die neun Moduln des algebraischen Gebildes angesehen werden.

Daraus ergibt sich aber, daß man die C_6 mit sechs Doppelpunkten in den 6 Ecken eines vorgegebenen Vierseits wohl projektiv, aber nicht modular einschränkt, man kann nach Vorgabe des Vierseits immer noch die ganze ∞^9 Mannigfaltigkeit von modular verschiedenen C_6 erreichen. Es ist wichtig, sich über diese Verhältnisse klar zu werden, die eben gemachte Bemerkung wird später benützt.

Endlich sind die Verhältnisse im Λ-Raum noch festzulegen. Die F_2 war gegeben durch

$$F_2 = \Lambda_1 \Lambda_4 - \Lambda_2 \Lambda_3 = 0. \tag{9}$$

Die $F_3^{(4)}$[1]) ist die Diskriminante von

$$\Sigma = \Lambda_1 K_1 + \Lambda_2 K_2 + \Lambda_3 K_3 + \Lambda_4 K_4 = 0.$$

Das System Σ kann, wenn man allgemein setzt

$$\varepsilon_i = \Lambda_1 A_i + \Lambda_2 B_i + \Lambda_3 C_i + \Lambda_4 D_i \quad (i = 1 \ldots 4), \tag{10}$$

geschrieben werden in der Form

$$\Sigma = \varepsilon_1 x_1^2 + \varepsilon_2 x_2^2 + \varepsilon_3 x_3^2 + \varepsilon_4 x_4^2 = 0. \tag{11}$$

Die Diskriminante und damit die $F_3^{(4)}$ ist gegeben durch

$$F_3^{(4)} = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 + \varepsilon_4, & \varepsilon_4, & \varepsilon_4 \\ \varepsilon_4, & \varepsilon_2 + \varepsilon_4, & \varepsilon_4 \\ \varepsilon_4, & \varepsilon_4, & \varepsilon_4 \end{vmatrix} = \emptyset \tag{12}$$

oder explizit

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_4 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 \varepsilon_4 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 = \emptyset$$

Die vier Doppelpunkte sind die Eckpunkte des aus den vier Ebenen

$$\varepsilon_i = \emptyset \ (i = 1 \ldots 4)$$

gebildeten Tetraeders. Macht man dasselbe zum Koordinatentetraeder, geht also von der ursprünglichen C_6 zu einer kollinear verwandten C_6 über, so transformiert sich die Fläche zweiter Ordnung in eine solche Gestalt, daß ihre zehn homogenen Konstanten den zehn Konstanten der C_6 in der Ebene resp. gleich werden. Bezieht man also die C_6 im R_3 auf das Tetraeder der vier Doppelpunkte der $F_3^{(4)}$, so sind die neun Konstanten, von denen die F_2 abhängt, die neun Moduln des algebraischen Gebildes.

---

[1]) Mit $F_3^{(4)}$ soll im folgenden stets eine Fläche dritter Ordnung mit vier Doppelpunkten bezeichnet werden.

§ 4.

In den vorhergehenden Abschnitten ist also ein Gebilde vom Geschlechte $p=4$ von der singularitätenfreien C_4 aus nachgewiesen worden, u. zw. in zweierlei Form, erstens als ebene C_6 mit sechs Doppelpunkten und anderseits als singularitätenfreie C_6 im R_3. Bevor nun der Zusammenhang dieser Gebilde in dem Sinne, der in der Einleitung erwähnt wurde, näher erörtert wird, soll vorher ein Satz über die ebene C_6 abgeleitet werden, der die nachfolgenden Auseinandersetzungen noch deutlicher hervortreten läßt.

Die ebene C_6 war das Erzeugnis der projektiv aufeinander bezogenen Büschel von Jakobischen Kurven der reziproken Netze der die C_4 erzeugenden Kegelschnittbüschel. Man kann nun die Begriffe von reziproken Netzen auch auf die ebene C_6 übertragen, die betreffenden in § 2 gegebenen Verhältnisse genau analogisieren und nach dem so zu erlangenden Resultat fragen. Die C_6 war gegeben durch die Gleichung

$$C_3^{(1)} C_3^{(4)} - C_3^{(2)} C_3^{(3)} = 0,$$

die Kurve $C_3^{(4)}$ schneidet dann auf der C_6, abgesehen von den sechs Doppelpunkten die zwei Tripel $\left(C_3^{(4)}, C_3^{(2)}\right)$ und $\left(C_3^{(4)}, C_3^{(3)}\right)$ aus, das zur $C_3^{(4)}$ gehörige reziproke Netz schreibt sich also

$$\lambda C_3^{(4)} + \mu C_3^{(3)} + \nu C_3^{(2)} = 0 \tag{1$_1$}$$

und dementsprechend sind die zu den Kurven $C_3^{(3)}$, $C_3^{(2)}$, $C_3^{(1)}$ gehörigen Netze gegeben durch

$$\lambda C_3^{(3)} + \mu C_3^{(4)} + \nu C_3^{(1)} = 0 \tag{1$_2$}$$

$$\lambda C_3^{(2)} + \mu C_3^{(4)} + \nu C_3^{(1)} = 0 \tag{1$_3$}$$

$$\lambda C_3^{(1)} + \mu C_3^{(2)} + \nu C_3^{(3)} = 0 \tag{1$_4$}$$

Wir wollen also die Jakobischen Kurven dieser vier Netze bilden, wir nennen sie resp. J_1, J_2, J_3, J_4, und uns nach dem Erzeugnis der durch die Gleichung

$$\lambda = \mu \tag{2}$$

projektiv aufeinander bezogenen Büschel

$$\begin{aligned} J_1 + \lambda J_2 &= 0 \\ J_3 + \mu J_4 &= 0, \end{aligned} \tag{3}$$

also nach der Kurve

$$J_1 J_4 - J_2 J_3 = 0 \tag{4}$$

fragen.

Wir haben also zu schreiben:

$$J_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial C_3^{(4)}}{\partial x_1}, & \frac{\partial C_3^{(4)}}{\partial x_2}, & \frac{\partial C_3^{(4)}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial C_3^{(3)}}{\partial x_1}, & \frac{\partial C_3^{(3)}}{\partial x_2}, & \frac{\partial C_3^{(3)}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial C_3^{(2)}}{\partial x_1}, & \frac{\partial C_3^{(2)}}{\partial x_2}, & \frac{\partial C_3^{(2)}}{\partial x_3} \end{vmatrix} \tag{5}$$

und entsprechend die drei anderen Ausdrücke; nach einer kurzen Rechnung erhält man für J_1:

$$J_1 = 3\, x_1\, x_2\, x_3\, x_4 \left[P_{\alpha_1} x_1^2 + P_{\alpha_2} x_2^2 + P_{\alpha_3} x_3^2 + P_{\alpha_4} x_4^2\right] \tag{7_1}$$

und in ganz analoger Form die drei anderen Funktionaldeterminanten

$$J_2 = 3\, x_1\, x_2\, x_3\, x_4 \left[P_{\beta_1} x_1^2 + P_{\beta_2} x_2^2 + P_{\beta_3} x_3^2 + P_{\beta_4} x_4^2\right] \tag{7_2}$$

$$J_3 = 3\, x_1\, x_2\, x_3\, x_4 \left[P_{\gamma_1} x_1^2 + P_{\gamma_2} x_2^2 + P_{\gamma_3} x_3^2 + P_{\gamma_4} x_4^2\right] \tag{7_3}$$

$$J_4 = 3\, x_1\, x_2\, x_3\, x_4 \left[P_{\delta_1} x_1^2 + P_{\delta_2} x_2^2 + P_{\delta_3} x_3^2 + P_{\delta_4} x_4^2\right] \tag{7_4}$$

Dabei bedeuten die Größen

$$P_{\alpha_\nu},\ P_{\beta_\nu},\ P_{\gamma_\nu},\ P_{\delta_\nu}\ (\nu = 1 \ldots 4)$$

die respektiven Unterdeterminanten von

$$\alpha_\nu,\ \beta_\nu,\ \gamma_\nu,\ \delta_\nu\ (\nu = 1 \,.\,.\, 4)$$

in der Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & \alpha_4 \\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3, & \beta_4 \\ \gamma_1, & \gamma_2, & \gamma_3, & \gamma_4 \\ \delta_1, & \delta_2, & \delta_3, & \delta_4 \end{vmatrix} \tag{8}$$

genommen mit den bezüglichen ihnen zukommenden Vorzeichen.

Die Determinante Δ ist nach einem bekannten Determinantensatz gleich D^3, wenn D durch Gleichung (7) § 3 gegeben ist.

Aus der Gestalt der Gleichungen (7) geht hervor, daß die Jakobischen Kurven J_ν zerfallen, und zwar in das Produkt der vier Geraden $x_\nu = 0$ $(\nu = 1 \,.\,.\, 4)$, und in einen Kegelschnitt, der in jedem Falle dem ∞^3 Kegelschnittsystem Σ angehört. Nun sind aber diese Kegelschnitte geradezu mit den ursprünglichen

Kegelschnitten identisch, denn die Größen

$$P_{\alpha_\nu},\ P_{\beta_\nu},\ P_{\gamma_\nu},\ P_{\delta_\nu}\ (\nu = 1 \ldots 4)$$

sind den Größen

$$A_\nu,\ B_\nu,\ C_\nu,\ D_\nu\ (\nu = 1 \ldots 4)$$

aus § 3 Gleichung (3) proportional, der gemeinsame Proportionalitätsfaktor ist D^2. Das ist leicht zu zeigen; aus Gleichung (7), § 3 ergibt sich

$$D = A_1\,\alpha_1 + A_2\,\alpha_2 + A_3\,\alpha_3 + A_4\,\alpha_4. \tag{9}$$

und Gleichung (8) läßt sich schreiben in der Form

$$D^3 = P_{\alpha_1}.\alpha_1 + P_{\alpha_2}.\alpha_2 + P_{\alpha_3}.\alpha_3 + P_{\alpha_4}.\alpha_4 \tag{10}$$

Multipliziert man (9) mit D^2 und subtrahiert davon (10), so erhält man

$$\emptyset = \alpha_1\,(A_1\,D^2 - P_{\alpha_1}) + \alpha_2\,(A_2\,D^2 - P_{\alpha_2}) + \alpha_3\,(A_3\,D^2 - P_{\alpha_3}) + \alpha_4\,.\,(A_4\,D^2 - P_{\alpha_4}). \tag{11}$$

Die Beziehung (11) muß identisch bestehen, was nur so möglich ist, daß alle Kooeffizienten verschwinden, also besteht

$$A_\nu\,D^2 = P_{\alpha_\nu}\,(\nu = 1 \ldots 4) \tag{12}$$

und analog die anderen Größen.

Mithin schreiben sich die Gleichungen (7) in der Form

$$J_\nu = 3\,D^2 x_1\,x_2\,x_3\,x_4\,K_\nu\,(\nu = 1 \ldots 4) \tag{13}$$

Also man erhält den Satz:

„Die Jakobischen Kurven der reziproken Netze der die C_6 mit sechs Doppelpunkten erzeugenden C_3 sind, abgesehen von einem konstanten Faktor und dem Produkt der vier Geraden $x_\nu = 0$ $(\nu = 1 \ldots 4)$, die ursprünglichen Kegelschnitte."

Die eben erörterten Verhältnisse entsprechen einem Spezialfall eines ganz allgemeinen, von A. Clebsch[1]) aufgestellten Theorems, das folgendermaßen lautet:

„Es seien $n+1$ homogene Funktionen von n Variablen gegeben; man kombiniere sie zu je n und bilde so die $n+1$ Funktionaldeterminanten; aus diesen bilde man ihrerseits wieder $n+1$ Funktionaldeterminanten, indem man sie zu je n kombiniert, die letzteren müssen bis auf einen gemeinschaftlichen Faktor dieselben Funktionen sein, von denen man ausgegangen ist."

Der gemeinsame Faktor ist in unserem Falle das Produkt der vier Geraden $x_\nu = 0$ $(\nu = 1 \ldots 4)$, multipliziert mit $3\,D^2$.

Die durch Gleichung (4) gegebene Kurve ist also abgesehen von dem Produkt der vier Doppelgeraden und dem Faktor $9\,D^4$

[1]) Crelle Journal: Bd. 69 und 70.

die ursprüngliche C_4. Die C_4 und die C_6 mit sechs Doppelpunkten gehen also auseinander durch die gleichen Prozesse hervor, diese Tatsache läßt sich in den folgenden Satz fassen:

„Die C_6 mit sechs Doppelpunkten ist das Erzeugnis der projektiv aufeinander bezogenen Büschel der Jakobischen Kurven der reziproken Netze der die C_4 erzeugenden Kegelschnittbüschel; und umgekehrt erzeugen die Jakobischen Kurven der reziproken Netze der die C_6 erzeugenden C_3 die Kurve vierter Ordnung."

Dieser Satz setzt die ein-eindeutige Beziehung zwischen Tripel- und Quadrupelschar erst ins rechte Licht.

§ 5.

Man kann nun die ein-eindeutige Beziehung der linearen Punkttripel- und Quadrupelschar zu einer Begründung der Beziehungen zwischen allgebraischen Gebilden vom Geschlechte drei und vier heranziehen. [1])

Trägt man nämlich die Tripelschar auf eine dreiblättrige Riemannsche Fläche auf, die Quadrupelschar auf eine vierblättrige, so muß die erstere vom Geschlechte $p = 4$, die letztere vom Geschlechte drei sein, woraus dann für die Anzahl der Verzweigungspunkte, d. i. der Stellen, wo zwei Punkte eines Tripels resp. Quadrupels zusammenfallen, auf Grund der bekannten Gleichung

$$p = \frac{w}{2} - n + 1$$

in beiden Fällen $w = 12$ resultiert. Die beiden Riemannschen Flächen haben also zwölf Verzweigungspunkte, und zwar haben diese Punkte in beiden Fällen die gleichen Werte. Rücken nämlich zwei Eckpunkte irgend eines Diagonaldreiecks zusammen, so rücken auch in dem zugehörigen Viereck zwei Punkte zusammen und das geschieht zwölfmal.

Diese Begründung gestattet auch, ganz independent die Frage zu lösen, wieviel algebraische Gebilde vom Geschlechte drei zu einem algebraischen Gebilde vom Geschlechte vier gehören, oder in geometrischer Fassung, wieviel ebene singularitätenfreie C_4 in dem hier erörterten Sinn zu einer C_6 mit sechs Doppelpunkten gehört, resp. zu einer singularitätenfreien C_6 im R_3, was ja auf dasselbe herauskommt. Die Frage fällt mit der folgenden zusammen, wieviel vierblättrige Riemannsche Flächen mit zwölf Verzweigungspunkten kann man über einer dreiblättrigen mit den gleichen Verzweigungswerten konstruieren.

Mit diesen Verhältnissen haben sich J. Thomae[2]) und A. Hurwitz[3]) beschäftigt und das Resultat ihrer Abzählung

[1]) Wirtinger, Preisschrift. pag. 117.
[2]) Thomae, Math. Ann. Bd. 6 und 18.
[3]) Hurwitz, Math. Ann. Bd. 39.

für den hier vorliegenden Fall ergibt, so wie es sein soll, 255 und die vermittelnden Funktionen sind die Wurzelfunktionen zweiter Stufe und zweiten Grades.

Damit sind wir aber gerade auf jene Verhältnisse zurückgekommen, die wir in der Einleitung erwähnt haben.

Wir glauben über das hier Erörterte um so schneller hinweggehen zu können, als diese Beziehungen mit vollster Deutlichkeit aus den folgenden geometrischen Auseinandersetzungen hervorgehen werden.

§ 6.

Wir verlassen nun den in den beiden letzten Paragraphen eingenommenen Standpunkt, das algebraische Gebilde vorzugsweise in der Form der ebenen C_6 aufzufassen, und wenden uns der Betrachtung der C_6 im dreidimensionalen Raum zu, um auf die Verhältnisse in der Ebene erst zum Schluß zurückzukommen.

Die C_6 im R_3 war definiert als der vollständige Schnitt einer Fläche zweiter Ordnung und einer Fläche dritter Ordnung mit vier Doppelpunkten, die bezw. durch die Gleichungen (9) und (13) § 3 gegeben waren. Die Gesamtheit der Flächen dritter Ordnung, auf denen die C_6 liegt, ist gegeben durch die Gleichung

$$F_3^{(4)} + a_x F_2 = \emptyset, \tag{1}$$

wobei a_x eine beliebige lineare quaternäre Form darstellt.

Die allgemeine Fläche dritter Ordnung hängt bekanntlich von 19 inhomogenen Konstanten ab; daß eine Fläche einen Doppelpunkt besitzt, zählt für eine Bedingung, daher hängt eine $F_3^{(4)}$ von 15 Konstanten ab. Man hat nun im Ausdruck a_x vier Konstante zur Verfügung, um einer Fläche des Büschels vier Doppelpunkte zu erteilen, und zwar auf endlich viele Weisen, soweit eine solche Konstantenabzählung überhaupt bindende Kraft besitzt. Jedenfalls wird es sicher mindestens 255 $F_3^{(4)}$ geben, denn jede der singularitätenfreien C_4 definiert die C_6 im R_3 durch eine solche $F_3^{(4)}$. Die folgenden Untersuchungen geben nun in der Tat eine ganz scharfe Antwort auf die Frage nach der Anzahl der Cayleyschen Flächen im Büschel (1). Die Lösung dieser Abzählungsaufgabe ist für die Erörterung der Beziehungen zwischen $p = 3$ und $p = 4$ geradezu von fundamentaler Bedeutung.

§ 7.

Um nun dieser Frage näher zu treten, ist es notwendig, die geometrischen Verhältnisse der Fläche dritter Ordnung mit vier Doppelpunkten, wohl auch Cayleysche Fläche genannt, weil sie Cayley[1]) als erster untersucht hat, genauer zu betrachten.

[1]) Journal de Liouville. Bd. 9, 1844.

Die Fläche ist den Geometern als Polarreziproke der Steinerschen Römerfläche wohl bekannt. Die Steinersche Fläche ergibt sich gelegentlich des Studiums eines linearen Systems dritter Stufe oder nach der Reyeschen Terminologie eines Gebüsches von Flächen zweiter Ordnung; die für uns wichtigsten Verhältnisse mögen hier kurz rekapituliert werden.

Geht man von einem solchen System, das die Gleichung

$$\Lambda_1 F_2^{(1)} + \Lambda_2 F_2^{(2)} + \Lambda_3 F_2^{(3)} + \Lambda_4 F_2^{(4)} = 0 \tag{1}$$

— $F_2^{(i)}$ $(i = 1\,..\,4)$ bedeuten vier Flächen zweiten Grades, die nicht alle in einem Bündel enthalten sind — haben mag, aus, so kann man dasselbe dadurch, daß man jeder Fläche des Gebüsches die Polarebene eines beliebigen festen Punktes zuordnet, abbilden auf einen Ebenenraum, der zum Unterschied vom Raum des Gebüsches Σ_F als der Polarraum Σ_P angesprochen werden soll. Das F_2-Gebüsch ist so projektiv bezogen auf das räumliche System Σ_P, jeder seiner Flächen entspricht eine Ebene und jedem seiner F_2-Büschel ein zu ihm projektives Ebenenbüschel von Σ_P. Jeder Raumkurve vierter Ordnung von Σ_F, die die Basiskurve eines solchen Büschels ausmacht, entspricht die Achse des zugehörigen Ebenenbüschels, jeder Gruppe von acht assoziierten Punkten, in denen sich drei Flächen F_2 schneiden, der Mittelpunkt des diesem Flächenbündel projektiven Ebenenbündels. Aber auch umgekehrt einer beliebigen Geraden von Σ_P entspricht eine C_4 von Σ_F, einem Punkt von Σ_P eine Gruppe von acht assoziierten Punkten in Σ_F.

So wird durch diese projektive Beziehung eine quadratische ein-achtdeutige Punktverwandtschaft zwischen den beiden Räumen vermittelt, denn durch jeden Punkt von Σ_F geht ein Flächennetz und dem Punkt entspricht eindeutig der Mittelpunkt des zugehörigen Ebenenbündels in Σ_P, jedem Punkt in Σ_P aber acht assoziierte Punkte, wie eben erwähnt.

Bei dieser Transformation entspricht einer beliebigen Geraden von Σ_F ein Kegelschnitt in Σ_P, aber es gibt eine ∞^2 Mannigfaltigkeit von Geraden die Verbindungslinien zweier assoziierter Punkte in Σ_F, denen wieder Gerade entsprechen. Diese Hauptstrahlen, wie sie Reye[1]) nennt, können auch aufgefaßt werden als die Verbindungsgeraden von zwei bezüglich aller Flächen des Gebüsches konjugierten Punkte und dann auch als diejenigen Geraden, durch die ein ganzes F_2-Büschel durchgeht, während durch eine beliebige Gerade nur eine einzige Fläche des Gebüsches geht.

Läßt man einen Punkt in Σ_F eine Ebene φ durchlaufen, so entspricht ihr eine Steinersche Fläche S_4, den Geraden in φ entsprechen Kegelschnitte auf S_4, dieselben liegen zu zweien in einer Tangentialebene der S_4 und ihnen entsprechen Geradenpaare in φ, die vereint einen zerfallenen Kegelschnitt des ∞^3 Kegelschnittsystems

---

[2]) Reye: Geometrie der Lage. 3. Aufl., Leipzig 1892, Seite 140 u. ff.

bestimmen das φ aus dem Gebüsch ausschneidet. Den vier Doppelgeraden entsprechen dann vier Kegelschnitte auf S_4, längs denen vier ausgezeichnete singuläre Ebenen die S_4 berühren. Das zum Vierseit der vier Doppelgeraden gehörige Diagonaldreiseit wird gebildet von den in φ liegenden Hauptstrahlen, denselben entsprechen die drei Doppelgeraden der Steinerschen Fläche, die sich im dreifachen Punkt der Fläche schneiden, dem Bildpunkt der drei Ecken des Dreiseits.

Die vier singulären Kegelschnitte berühren alle einander, ihre Berührungspunkte liegen auf den Doppelgeraden der S_4 und heißen ihre Kuspidalpunkte; es gibt nämlich in jedem Punkt einer Doppellinie zwei Tangentialebenen, dieselben bilden eine Involution, und ihre zwei Doppelelemente berühren die S_4 in den zwei Kuspidalpunkten der Doppelgerade. Es gibt sechs Kuspidalpunkte auf der Fläche, einen auf jeder Schnittlinie zweier singulärer Tangentialebenen.

Einer analytischen Behandlung sind diese Verhältnisse sehr leicht zugänglich, wenn man die für die Steinersche Fläche in keiner Weise einschränkende Annahme macht, daß das Gebüsch von Flächen zweiter Ordnung ein gemeinsames Poltetraeder besitzt.[1] In diesem Falle ist das Gebüsch, wenn man das Poltetraeder zum Koordinatentetraeder in Σ_F wählt, dargestellt durch die Gleichung

$$\Lambda_1 x_1^2 + \Lambda_2 x_2^2 + \Lambda_3 x_3^2 + \Lambda_4 x_4^2 = 0. \tag{2}$$

Nimmt man den Einheitspunkt als festen Punkt, so schreibt sich seine allgemeinste Polarebene in der Form

$$\Lambda_1 X_1 + \Lambda_2 X_2 + \Lambda_3 X_3 + \Lambda_4 X_4 = 0, \qquad (3$$

wobei die Koordinaten in Σ_P zur Unterscheidung mit (X) bezeichnet werden.

Die quadratische Transformation wird durch die Gleichungen gegeben

$$\left.\begin{aligned} \rho X_1 &= x_1^2 \\ \rho X_2 &= x_2^2 \\ \rho X_3 &= x_3^2 \\ \rho X_4 &= x_4^2, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

wobei ρ einen willkürlichen Proportionalitätsfaktor bedeutet.

Sei nun

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \tag{5}$$

[1]) Man vergleiche Reye l. c. und die Arbeit von H. E. Timerding: Über die quadratische Transformation, durch welche die Ebenen des Raumes in ein System von Flächen zweiten Grades mit gemeinsamem Poltetraeder übergeführt werden. Annali di Matematica. Serie III, Tomo I. Milano 1898.

die Bildebene φ, dann kann man ρ immer so bestimmen, daß sich die ihr entsprechende Steinersche Fläche in der Form schreibt

$$\sqrt{X_1} + \sqrt{X_2} + \sqrt{X_3} + \sqrt{X_4} = 0. \tag{6}$$

In rationaler Form heißt die Gleichung der Steinerschen Fläche

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 - 2(X_1 X_2 + X_1 X_3 + X_1 X_4 + X_2 X_3 + \\ + X_2 X_4 + X_3 X_4) = 0. \tag{6'}$$

Hiebei ist der Einheitspunkt der dreifache Punkt, die singulären Ebenen sind die Koordinatenebenen $X_i = 0$. Die Gleichungen der in ihnen liegenden Kegelschnitte ergeben sich, wenn man in (6) eine der Koordinaten gleich Null setzt. Die Kegelschnitte berühren also die Kanten des Haupttetraeders in den Punkten, für welche zwei der nicht gleich Null gesetzten Koordinaten einander gleich werden. Die Verbindungslinien von je zwei Berührungspunkten auf gegenüberliegenden Kanten sind die Doppelgeraden. Ihre Gleichungen sind gegeben durch die drei Gleichungspaare

$$X_1 = X_2,\ X_3 = X_4;\ X_1 = X_3,\ X_2 = X_4;\ X_1 = X_4,\ X_2 = X_3; \tag{7}$$

ihnen entsprechen in φ die Geraden

$$x_1 + x_2 = 0,\ x_3 + x_4 = 0;\ x_1 + x_3 = 0,\ x_2 + x_4 = 0; \\ x_1 + x_4 = 0,\ x_2 + x_3 = 0. \tag{7'}$$

Das sind aber die Diagonalen des Vierseits der vier Doppelgeraden des ∞^3 Kegelschnittsystems in φ, die ja durch die Schnittlinien von φ mit den Koordinatenebenen gegeben sind.

Übertragen wir nun die hier gegebenen Verhältnisse auf die Polarreziproke der S_4 auf die Cayleysche Fläche dritter Ordnung mit vier Doppelpunkten. Um die Gleichung, die wir schon aufgestellt haben, aus S_4 zu erhalten, hat man bloß die Tangentialebene der S_4 in einem beliebigen Punkt (X) derselben, die sich explizit in die Form setzen läßt

$$\frac{y_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{y_2}{\sqrt{X_2}} + \frac{y_3}{\sqrt{X_3}} + \frac{y_4}{\sqrt{X_4}} = 0 \tag{8}$$

— die $y_i\ (i = 1..4)$ sind vorübergehend die Koordinaten in Σ_P — der beliebigen Ebene

$$\varepsilon_1 y_1 + \varepsilon_2 y_2 + \varepsilon_3 y_3 + \varepsilon_4 y_4 = 0 \tag{9}$$

gleichzusetzen, also zu schreiben

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{X_1}},\quad \varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{X_2}},\quad \varepsilon_3 = \frac{1}{\sqrt{X_3}},\quad \varepsilon_4 = \frac{1}{\sqrt{X_4}}. \tag{10}$$

Setzt man dann für die (X) ihre Werte in den ε in (6) ein, so ergibt sich

$$\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} + \frac{1}{\varepsilon_3} + \frac{1}{\varepsilon_4} = 0 \tag{11}$$

und damit, wie schon bekannt, als Gleichung der Fläche

$$F_3^{(4)} = \varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\varepsilon_3 + \varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\varepsilon_4 + \varepsilon_1\,\varepsilon_3\,\varepsilon_4 + \varepsilon_2\,\varepsilon_3\,\varepsilon_4 = 0. \tag{11'}$$

Dabei sollen die $\varepsilon_i\,(i = 1\ldots 4)$ die Bedeutung haben, wie sie durch Gleichung (10) § 3 gegeben ist.

Den vier singulären Ebenen $X_i = 0$ von S_4 entsprechen die vier Doppelpunkte, die Ecken des aus den vier Ebenen $\varepsilon_i = 0$ gebildeten Tetraeders. Den Kegelschnitten, längs denen die Ebenen $X_i = 0$ berühren, entsprechen auf $F_3^{(4)}$ Kegel zweiten Grades mit den Mittelpunkten in den Ecken des ε-Tetraeders, die die $F_3^{(4)}$ längs Raumkurven dritter Ordnung berühren. Ihre Gleichungen lauten:

$$\begin{aligned} M_1 &= \varepsilon_2\,\varepsilon_3 + \varepsilon_2\,\varepsilon_4 + \varepsilon_3\,\varepsilon_4 = 0 \\ M_2 &= \varepsilon_1\,\varepsilon_3 + \varepsilon_1\,\varepsilon_4 + \varepsilon_3\,\varepsilon_4 = 0 \\ M_3 &= \varepsilon_1\,\varepsilon_2 + \varepsilon_1\,\varepsilon_4 + \varepsilon_2\,\varepsilon_4 = 0 \\ M_4 &= \varepsilon_1\,\varepsilon_2 + \varepsilon_1\,\varepsilon_3 + \varepsilon_2\,\varepsilon_3 = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

oder allgemein

$$M_\alpha = \varepsilon_\beta\,\varepsilon_\gamma + \varepsilon_\beta\,\varepsilon_\delta + \varepsilon_\gamma\,\varepsilon_\delta = 0, \tag{12'}$$

dabei sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die vier Zahlen 1, 2, 3, 4 in irgend einer beliebigen Reihenfolge, der Kegel M_α hat seine Spitze in dem Durchschnittspunkt der Ebenen $\varepsilon_\beta = 0$, $\varepsilon_\gamma = 0$, $\varepsilon_\delta = 0$, der kurz als der Punkt (α) bezeichnet werden soll.

Die Raumkurven dritter Ordnung bestehen jedesmal aus den drei im bezüglichen Eckpunkt zusammenlaufenden Tetraederkanten, die, wie man unmittelbar aus (11) sieht, ganz auf der $F_3^{(4)}$ liegen. Dem Umstande, daß je zwei singuläre Kegelschnitte auf der Steinerschen Fläche in den Kuspidalpunkten sich berühren entspricht, daß auch je zwei Kegel $M_i\,(i = 1..4)$ sich längs der Tetraederkante, die ihre Mittelpunkte verbindet, berühren und ihre gemeinsame Tangentialebene längs dieser Kante entspricht dem Kuspidalpunkt auf der S_4.

So haben die Kegel

$$M_\alpha = 0,\ M_\beta = 0 \tag{13}$$

die gemeinsame Tangentialebene

$$\varepsilon_\gamma + \varepsilon_\delta = 0, \tag{14}$$

die auch die $F_3^{(4)}$ längs der Kante $\varepsilon_\gamma = 0$, $\varepsilon_\delta = 0$ berührt.

Außer den sechs Tetraederkanten besitzt die $F_3^{(4)}$ noch drei in der Ebene

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 = \emptyset \tag{15}$$

liegende Geraden, die Ebene (15) ist also dreifache Tangentialebene und entspricht dem dreifachen Punkt der S_4.

In jeder Tangentialebene der S_4 liegt ein Kegelschnittpaar, dem entspricht auf der $F_3^{(4)}$, durch jeden Punkt der $F_3^{(4)}$ gehen zwei Kegel, die sie längs Raumkurven dritter Ordnung berühren. Für einen Doppelpunkt vereinigen sich die beiden Kegel im Berührungskegel desselben, wie eben auseinandergesetzt. Den drei Doppelgeraden auf der S_4, die natürlich auch als Kegelschnitte derselben aufgefaßt werden können, entsprechen drei in Ebenenpaare zerfallende Kegel, deren Gleichungen lauten

$$\begin{aligned}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(\varepsilon_3 + \varepsilon_4) &= \emptyset,\\ (\varepsilon_1 + \varepsilon_3)(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) &= \emptyset,\\ (\varepsilon_1 + \varepsilon_4)(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) &= \emptyset.\end{aligned} \tag{16}$$

Dabei ist beispielsweise $\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta = 0$ Tangentialebene an die die Punkte (γ) und (δ) verbindende Kante des Tetraeders und $\varepsilon_\gamma + \varepsilon_\delta = \emptyset$ die Tangentialebene in der gegenüberliegenden Kante, die beiden Ebenen schneiden sich dann in einer der drei in der dreifachen Tangentialebene (15) liegenden Geraden.

Damit sind die wichtigsten Details aus der Geometrie der $F_3^{(4)}$ gegeben.

§ 8.

Aus den eben gegebenen Erörterungen geht hervor, daß es ein zweifach unendliches System von Kegeln auf der $F_3^{(4)}$ gibt, die dieselbe längs Raumkurven dritter Ordnung berühren, und zwar gehen von jedem Punkt der Fläche im allgemeinen zwei aus. Damit ist für die C_6, die der vollständige Schnitt der $F_3^{(4)}$ und einer Fläche zweiter Ordnung ist, Φ-Formen aufgewiesen, denn jeder dieser Kegel wird die C_6 in den sechs Punkten berühren, in denen die Raumkurve dritter Ordnung die F_2 schneidet.

Die nächste Frage, die sich einem hier aufdrängt, ist natürlich die, gehören diese Φ-Formen, die man so auf e i n e r $F_3^{(4)}$ nachgewiesen hat, zu demselben System, das heißt sind sie durch die gleiche vierreihige Elementarcharakteristik zu bezeichnen, und zweitens, falls sie zum selben System gehören, erschöpfen sie dasselbe oder gibt es noch andere $F_3^{(4)}$ im Büschel

$$F_3 + a_x F_2 = \emptyset, \tag{1}$$

die Φ-Formen mit der gleichen Charakteristik tragen? Die letzte Frage fällt mit der zu Ende des § 6 gestellten zusammen, die

die Zahl der $F_3^{(4)}$ zu bestimmen wünscht, die im Büschel (1) enthalten sind.

Es ist nun zunächst leicht zu sehen, daß die Kegel unserer $F_3^{(4)}$ Φ-Formen desselben Systems sind. Nimmt man zunächst zwei der Kegel aus den Doppelpunkten, beispielsweise M_α und M_β, dann ergibt sich sofort die leicht zu verifizierende Relation

$$M_\alpha . M_\beta - (\varepsilon_\gamma + \varepsilon_\delta)\, F_3^{(4)} = \varepsilon_\gamma^2\, \varepsilon_\delta^2 \tag{2}$$

oder in Form einer Kongruenz geschrieben

$$M_\alpha . M_\beta \equiv \varepsilon_\gamma^2\, \varepsilon_\delta^2 \left(\operatorname{mod} F_3^{(4)}\right) \tag{3}$$

und analog noch fünf andere Kongruenzen, entsprechend den fünf anderen Kombinationen der vier Größen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ zu je zwei.

Die Kongruenz (3) kann man nun durch Quadratwurzelziehen in die Form setzen

$$\sqrt{M_\alpha} . \sqrt{M_\beta} \equiv \pm\, \varepsilon_\gamma \varepsilon_\delta \left(\operatorname{mod} F_3^{(4)}\right). \tag{4}$$

Vom Vorzeichen abgesehen, über welches nachträglich verfügt wird, sagt die Kongruenz aus, daß sich das Produkt $\sqrt{M_\alpha} . \sqrt{M_\beta}$ am Gebilde wie die rationale Form $\varepsilon_\gamma \varepsilon_\delta$ verhält, daß also die $2.6 = 12$ Nullstellen von $\sqrt{M_\alpha}$ und $\sqrt{M_\beta}$ auf der in ein Ebenenpaar zerfallenden Fläche zweiter Ordnung $\varepsilon_\gamma \varepsilon_\delta = 0$ liegen, bekanntlich eine notwendige und hinreichende Bedingung, um daraus schließen zu können, daß die beiden Kegel und damit alle vier Kegel von den Doppelpunkten der $F_3^{(4)}$ aus Φ-Formen der gleichen Charakteristik darstellen.

Zu (4) analoge Relationen kann man nun auch aufstellen für irgend welche beliebige zwei Kegel der $F_3^{(4)}$, dazu ist es notwendig, das ganze System der Φ-Formen, die zu derselben Charakteristik gehören wie die vier Ausgangskegel, explizit hinzuschreiben.

Das geschieht mittels des Riemann-Rochschen Satzes, der ja aussagt, daß die allgemeinste $\sqrt{\Phi}$-Form darstellbar ist in der Form

$$\sqrt{M_c} = c_1 \sqrt{M_1} + c_2 \sqrt{M_2} + c_3 \sqrt{M_3}, \tag{5}$$

also

$$\begin{aligned} M_c = c_1^2\, M_1 + c_2^2\, M_2 + c_3^2\, M_3 + 2\, c_1\, c_2 \sqrt{M_1} . \sqrt{M_2} + \\ + 2\, c_1\, c_3 \sqrt{M_1} . \sqrt{M_3} + 2\, c_2\, c_3 \sqrt{M_2} . \sqrt{M_3} . \end{aligned} \tag{6}$$

Setzt man für die Produkte der Quadratwurzeln ihre rationalen Werte aus (4) ein und verfügt über das in (4) willkürlich gelassene Vorzeichen so, daß zwischen den vier Ausgangskegeln die Relation besteht,

$$\sqrt{M_1} + \sqrt{M_2} + \sqrt{M_3} + \sqrt{M_4} = 0 \tag{7}$$

— die eben aufgestellte Relation ist konform der durch (6) § 7 gegebenen Gleichung der Steinerschen Fläche — dann schreibt sich das allgemeine M_c in der Form

$$M_c = c_1^2 M_1 + c_2^2 M_2 + c_3^2 M_3 - 2 c_1 c_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 - 2 c_1 c_3 \varepsilon_2 \varepsilon_4 - 2 c_2 c_3 \varepsilon_1 \varepsilon_4. \quad (8)$$

Es ist nun eine durch direkte Ausrechnung leicht zu erhärtende Tatsache, daß (8) in Determinantenform geschrieben werden kann, und zwar in der folgenden Art

$$M_c = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 + \varepsilon_4, & \varepsilon_4, & \varepsilon_4, & c_1 \\ \varepsilon_4, & \varepsilon_2 + \varepsilon_4, & \varepsilon_4, & c_2 \\ \varepsilon_4, & \varepsilon_4, & \varepsilon_3 + \varepsilon_4, & c_3 \\ c_1, & c_2, & c_3, & 0 \end{vmatrix} \quad (9)$$

M_c ergibt sich also einfach durch Ränderung der Determinante, die gleich Null gesetzt die Gleichung der $F_3^{(4)}$ darstellt (Gl. 12, § 3).

Durch die Darstellung (9) sind wir auf ein Theorem gekommen, das Hesse[1]) aufgestellt hat und das man ungefähr folgendermaßen in Worte fassen kann:

„Kann man irgend eine beliebige Mannigfaltigkeit in einem Raum von beliebig vielen Dimensionen durch Nullsetzen einer symmetrischen Determinante n^{ter} Ordnung darstellen, dann braucht man diese Determinante nur zu rändern, um ein $n-1$-fach unendliches System von Berührungsmannigfaltigkeiten an dieselbe zu erhalten."

Die Richtigkeit dieses Satzes ergibt sich aus der in der eben zitierten Arbeit aufgestellten Determinantenidentität, die sich folgendermaßen schreibt.

Ist $u_{ki} = u_{ik}$, dann besteht identisch

$$\begin{vmatrix} u_{11}, & u_{12}, & \ldots & u_{1n} \\ u_{21}, & u_{22}, & \ldots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{n1}, & u_{n2}, & \ldots & u_{nn} \end{vmatrix} . U =$$

$$= \begin{vmatrix} u_{11}, & u_{12}, \ldots & u_{1n}, & c_1 \\ u_{21}, & u_{22}, \ldots & u_{2n}, & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{n1}, & u_{n2}, \ldots & u_{nn}, & c_n \\ c_1, & c_2, \ldots & c_n, & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_{11}, & u_{12}, \ldots & u_{1n}, & c_1' \\ u_{21}, & u_{22}, \ldots & u_{2n}, & c_2' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{n1}, & u_{n2}, \ldots & u_{nn}, & c_n' \\ c_1', & c_2', \ldots & c_n', & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} u_{11}, & u_{12}, \ldots & u_{1n}, & c_1' \\ u_{21}, & u_{22}, \ldots & u_{2n}, & c_2' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{n1}, & u_{n2}, \ldots & u_{nn}, & c_n' \\ c_1, & c_2, \ldots & c_n, & 0 \end{vmatrix}^2 . \quad (10)$$

[1]) Hesse: Über Determinanten und ihre Anwendung in der Geometrie, insbesondere auf Kurven vierter Ordnung. Crelle Journal, Bd. 49, Ges. Werke, S. 320.

Dabei bedeutet U eine ganze homogene Form in bezug auf c und c' vom zweiten Grad und vom $(n-2)^{\text{ten}}$ Grad in den Größen u, die für jedes n speziell ausgerechnet werden muß und keine Determinantendarstellung zuläßt.

Die geänderte Determinante stellt dann in der Tat eine die ursprüngliche Mannigfaltigkeit durchgängig berührende vor, denn die geänderte Mannigfaltigkeit ist, wie die Identität (10) lehrt, modulo der ursprünglichen einem vollen Quadrat kongruent, was ja vollständig hinreicht, um daraus den eben erwähnten Schluß zu ziehen.

Schreiben wir die Identität (10) noch explizit für den uns hier gegebenen Fall der $F_3^{(4)}$ hin, so ergibt sich

$$F_3^{(4)}\, U = M_c \,.\, M_{c'} - \begin{vmatrix} \varepsilon_1 + \varepsilon_4, & \varepsilon_4, & \varepsilon_4, & c'_1 \\ \varepsilon_4, & \varepsilon_2 + \varepsilon_4, & \varepsilon_4, & c'_2 \\ \varepsilon_4, & \varepsilon_4, & \varepsilon_3 + \varepsilon_4, & c'_3 \\ c_1, & c_2, & c_3, & 0 \end{vmatrix}^2 \tag{11}$$

Dabei bedeutet U den Ausdruck

$$\begin{aligned} U = {} & (\varepsilon_1 + \varepsilon_4)(c_2 c'_3 - c_3 c'_2)^2 + (\varepsilon_2 + \varepsilon_4)(c_3 c'_1 - c_1 c'_3)^2 + \\ & + (\varepsilon_3 + \varepsilon_4)(c_1 c'_2 - c_2 c'_1)^2 + 2 \,.\, \varepsilon_4 \,[(c_3 c'_1 - c_1 c'_3)(c_1 c'_2 - c_2 c'_1 + \\ & + (c_1 c'_2 - c_2 c'_1)(c_2 c'_3 - c_3 c'_2) + (c_2 c'_3 - c_3 c'_2)(c_3 c'_1 - c_1 c'_3)], \end{aligned} \tag{12}$$

$U = 0$ stellt die Gleichung einer Ebene im Λ-Raume vor.

Man erhält also das Resultat, das allgemeine M_c stellt eine die $F_3^{(4)}$ berührende Fläche zweiten Grades dar, und zwar ist sie ein Kegel, weil sie auch die Ebene $U = 0$ längs einer Geraden berühren muß, denn für U gilt ja ganz die gleiche Argumentation wie für die Determinante selbst.

Das System der M_c ist quadratisch in den Parametern c_ν $(\nu = 1, 2, 3)$, von jedem Punkte der $F_3^{(4)}$ gehen zwei solche Kegel aus, woraus ersichtlich ist, daß wir das den Kegelschnitten der Steinerschen Fläche reziproke System von Kegeln vor uns haben. Diese Kegel gehören also zur selben Charakteristik, wie die Ableitung aus dem Riemann-Rochschen Satze zeigt, und sie erschöpfen das zugehörige System aus dem gleichen Grunde. Das Produkt der Quadratwurzeln von irgend zwei unter ihnen $\sqrt{M_c} \,.\, \sqrt{M_{c'}}$ verhält sich am Gebilde wie eine rationale Funktion, und zwar ist dieselbe dargestellt durch die mit c und c' gleichzeitig geänderte Determinante, durch die $F_3^{(4)}$ dargestellt wird, wie man aus (11) ersieht. Die Identität (2) stellt also bloß einen speziellen Fall von (11) dar.

Damit sind also die eingangs erwähnten Fragen beantwortet und die Antwort kleidet sich in die folgenden beiden Sätze:

1. Jede Fläche dritter Ordnung mit vier Doppelpunkten des Büschels

$$F_3 + a_x F_2 = \emptyset$$

trägt ein zweifach unendliches System von sie einhüllenden Kegeln zweiten Grades und dieselben gehören als Φ-Formen der C_6 zur gleichen Charakteristik; aber auch umgekehrt, jedes System von Φ-Formen der C_6 wird durch ein eine $F_3^{(4)}$ des obigen Büschels einhüllendes System von Berührungskegeln gegeben.

Nun gibt es 255 Systeme von Φ-Formen an der C_6 und daher erhält man

2. Im Büschel

$$F_3 + a_x F_2 = \emptyset$$

gibt es 255 $F_3^{(4)}$.

Bevor hier in der Untersuchung weiter gegangen werden soll, seien einige Bemerkungen über das Vorhergehende eingeflochten.

Der Hessesche Satz sagt aus, daß man durch Ränderung einer beliebigen symmetrischen Determinante Berührungsmannigfaltigkeiten erhält, wenn man das auf den uns hier interessierenden Spezialfall der $F_3^{(4)}$ anwendet, so ist doch immerhin hervorzuheben, daß wirklich jede symmetrische Determinante dritter Ordnung, deren einzelne Glieder lineare quaternäre Formen sind, gleich Null gesetzt eine $F_3^{(4)}$ darstellt. In der Tat, eine solche Determinante kann stets aufgefaßt werden als Diskriminante eines dreifach unendlichen linearen Kegelschnittsystems und ein solches besitzt vier Doppelgerade, daher die dargestellte Fläche vier Doppelpunkte. Die spezielle Form der Gleichung, die hier stets benützt wurde und bei der sogar alle von den Diagonalgliedern verschiedenen lateralen Glieder einander gleich sind, rührt von der speziellen Koordinatenwahl in der Ebene her.

Eine zweite Bemerkung bezieht sich auf die geometrische Deutung des allgemeinen Berührungskegels M_c. Aus Gleichung (9) ersieht man nämlich, daß man dieselben auffassen kann als den Ort derjenigen Kegelschnitte des dreifach unendlichen Kegelschnittsystems

$$\Sigma = \varepsilon_1 x_1^2 + \varepsilon_2 x_2^2 + \varepsilon_3 x_3^2 + \varepsilon_4 x_4^2 = 0,$$

die die Gerade mit der Gleichung

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 = \emptyset$$

berühren. Also jedem Kegel M_c ist dadurch eine Gerade der Bildebene zugeordnet. Diese Zuordnung zwischen den Kegeln der $F_3^{(4)}$

und den Geraden der Ebene ist eigentlich schon erwähnt worden; denn gelegentlich der referierenden Auseinandersetzungen über die Steinersche Fläche als das einer Ebene φ in Σ_F entsprechende Gebilde in Σ_P war bemerkt worden, daß einer Geraden in φ ein Kegelschnitt auf S_4 entspricht; setzen wir für diesen Kegelschnitt den ihm reziproken Kegel M_c, so haben wir die eben erwähnte Zuordnung und die Methode der Ränderung gibt ihr eine analytische Fassung.

§ 9.

Das funktionentheoretisch Merkwürdige an der Darstellung der Φ-Formen der C_6 ist, daß sie nur von der $F_3^{(4)}$ abhängen und gar nicht von der F_2, als deren vollständiger Schnitt mit der $F_3^{(4)}$ die C_6 definiert ist. Daraus ergibt sich, daß das System der Berührungskegel der $F_3^{(4)}$ ein System von Φ-Formen für jede C_6 darstellt, die auf ihr liegt. Will man aber ausdrücklich hervorheben, daß man das System der Φ für eine ganz bestimmte C_6 meint, dann muß man die F_2 hinzuziehen und die einzelnen Φ-Formen erklären durch die Gesamtheit der Flächen, die in dem Büschel

$$M_c + \varkappa F_2 = 0 \tag{1}$$

enthalten sind.

In der Tat, jede einzelne Fläche des Büschels (1) ist eine Φ-Form, die man für die bezügliche M_c setzen kann. Von diesem Standpunkte wäre es ja eigentlich auch richtiger, von Systemen von Kurven vierter Ordnung, die die C_6 in sechs Punkten berühren, anstatt von Flächen zweiter Ordnung, die das tun, zu sprechen.

Aus der Theorie der Abelschen Funktionen weiß man auch den Satz, daß es in jedem System von Φ-Formen 28mal vorkommt, daß die betreffende Form in das Produkt $\varphi_1 . \varphi_2$ zweier φ-Formen zerfällt oder, geometrisch gesprochen, aus zwei Tritangentialebenen besteht. Wirtinger[1]) nennt dieses System zerfallender Φ-Formen das zur betreffenden Charakteristik gehörige Steinersche System. Man kann natürlich dieses Zerfallen der Φ-Formen bei der hier gegebenen Darstellung auch nur verstehen, wenn man sie in der erweiterten, durch die Gleichung (1) gegebenen Form definiert. Dann sagt dieser Satz aus, es gibt 28 Wertesysteme c_ν $(\nu = 1, 2, 3)$, so daß in dem Büschel

$$M_{c_\nu} + \varkappa F_2 = \emptyset \tag{2}$$

ein Tritangential-Ebenenpaar vorkommt.

Zum Schluß des vorigen Paragraphen war die Abbildung der Berührungskegel M_c auf die Geraden der Ebene hervorgehoben; diese Tatsache ist vom funktionentheorischen Gesichtspunkt eigentlich eine selbstverständliche Bestätigung der diesen Erörterungen zu Grunde liegenden Theorie. Denn die $\sqrt{\Phi}$ sind ja akzessorisch

[1]) Preisschrift, p. 99.

hinzutretende Integranden erster Gattung in dem durch unverzweigte Doppelüberdeckung der C_6 hervorgehenden Gebilde vom Geschlechte $p' = 7$. Die mit ihnen gebildeten Integrale geben zur Bildung von Thetafunktionen von drei Argumenten Veranlassung, die modular zu jener ebenen C_4 gehören, für die das betreffende Φ-System das entsprechende ist. Und diese akzessorisch hinzutretenden Integranden sind also abgebildet auf die Geraden der Ebene die Integranden erster Gattung der ebenen C_4.

Nun hat die Zuordnung der M_c zu den Geraden der Ebene eine tiefere Bedeutung, als man zunächst annehmen sollte; denn hat man das System der Φ-Formen, so kann man dasselbe natürlich stets auf ein beliebiges Geradenfeld abbilden. Man braucht dazu nur irgend drei von ihnen Φ_1, Φ_2, Φ_3 beliebigen drei Geraden der Ebene, die man als Koordinatengeraden ansieht, zuzuordnen einer vierten Φ_4, die mit den ersten drei durch die Relation verbunden ist,

$$\sqrt{\Phi_1} + \sqrt{\Phi_2} + \sqrt{\Phi_3} + \sqrt{\Phi_4} = 0 \tag{3}$$

die Einheitsgerade, und der durch die Gleichung gegebenen

$$\sqrt{\Phi_c} = c_1 \sqrt{\Phi_1} + c_2 \sqrt{\Phi_2} + c_3 \sqrt{\Phi_3} \tag{4}$$

die Gerade mit den Koordinaten (c_1, c_2, c_3) entsprechen zu lassen.

Aber bei der hier besprochenen Zuordnung der M_c zu den Geraden der Ebene der C_4 gibt es keine Willkürlichkeit im Herausgreifen dieser vier Φ und ebenso keine in der Wahl des Koordinatensystems in der Ebene, wenn man von einer projektiv bestimmten C_4 ausgeht.

Diese Erwägung veranlaßt nun die Vermutung, daß den 28 ausgezeichneten Kegeln, die zum Steinerschen System der bezüglichen Charakteristik gehören, die 28 Doppeltangenten der C_4 entsprechen und das ist in der Tat der Fall, wie die folgende Diskussion zeigt.

Nach H. Weber[1]) definiert man die Moduln der singularitätenfreien C_4 folgendermaßen; seien sieben Doppeltangenten eines Aronholdschen Systems gegeben und nimmt man drei unter ihnen zu Koordinatengeraden und definiert sie durch

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0 \tag{4}$$

und eine vierte x_4 als Einheitsgerade, so daß besteht

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \tag{4'}$$

dann kann man die drei restlichen g_1, g_2, g_3 in der Form schreiben:

$$\begin{aligned} g_1 &= a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 \\ g_2 &= b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 \\ g_3 &= c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3. \end{aligned} \tag{5}$$

[1]) Weber: Abelsche Funktionen vom Geschlechte 3. Berlin 1876.

Die $3.2=6$ Verhältnisse dieser neun Konstanten sind dann die sechs Moduln der C_4; durch Vorgabe von vier Doppeltangenten wird eine C_4 modular nicht eingeschränkt.

Gesetzt wir hätten nun das ∞^3 Kegelschnittsystem

$$\Sigma = \varepsilon_1 x_1^2 + \varepsilon_2 x_2^2 + \varepsilon_3 x_3^2 + \varepsilon_4 x_4^2 = 0,$$

dann gibt es, wie wir schon in § 2 gesehen haben, eine ∞^9 Mannigfaltigkeit projektiv verschiedener C_4, die durch projektiv aufeinander bezogene Kegelschnittbüschel erzeugt werden können, die ganz dem System Σ angehören, zu jeder Fläche zweiter Ordnung im ε-Raum — es sei für das hier unmittelbar Folgende gestattet, die ε_i $(i=1\ldots4)$ selbst als die homogenen Punktkoordinaten des R_3 anzusehen, also die Doppelpunkte der $F_3^{(4)}$ in die Ecken des Koordinatentetraeders verlegt zu denken — gehört eine solche C_4. Jede solche C_4 hat eine ganz bestimmte Doppeltangentenkonfiguration und man kann dann sicher acht von den Konstanten so wählen, daß die vier Doppelgeraden von Σ selbst mit drei anderen g_1, g_2, g_3 ein Aronholdsches Siebenersystem von Doppeltangenten einer zu Σ gehörigen C_4 ausmachen, wie das durch die obigen Gleichungen explizit fixiert ist. Diesen sieben Geraden sind sieben Kegel zugeordnet, den vier Doppelgeraden die vier Kegel M_ν $(\nu=1\ldots4)$ aus den Doppelpunkten der $F_3^{(4)}$ — für sie besteht die Beziehung

$$\sqrt{M_1} + \sqrt{M_2} + \sqrt{M_3} + \sqrt{M_4} = 0$$

und den drei anderen Geraden drei Kegel M_{g_1}, M_{g_2}, M_{g_3}, die mit den drei M_ν $(\nu=1, 2, 3)$ durch die den Gleichungen (5) analogen Relationen

$$\begin{aligned}
\sqrt{M_{g_1}} &= a_1 \sqrt{M_1} + a_2 \sqrt{M_2} + a_3 \sqrt{M_3} \\
\sqrt{M_{g_2}} &= b_1 \sqrt{M_1} + b_2 \sqrt{M_2} + b_3 \sqrt{M_3} \qquad (5') \\
\sqrt{M_{g_3}} &= c_1 \sqrt{M_1} + c_2 \sqrt{M_2} + c_3 \sqrt{M_2}
\end{aligned}$$

verbunden sind.

Nun hat Schottky[1]) sich mit den Relationen zwischen den 28 Paaren von Tritangentialebenen eines Steinerschen Systems beschäftigt; er hat gezeigt, daß für sie ganz die gleichen Relationen Geltung haben wie für die Doppeltangenten einer ebenen C_4 und daß für sie insbesondere die Darstellung durch 7 unter ihnen, die eine Hauptreihe bilden — man kann durch eine näher durchgeführte Bezeichnung durch vierreihige Charakteristiken diese Beziehungen genau fixieren —, ganz der Darstellung der 28 Doppeltangenten der C_4 durch 7 unter ihnen entspricht, woraus Schottky auf die Existenz der C_4, die natürlich der Ausgangspunkt unserer Untersuchung ist, schließt.

[1]) Crelle Journal, Bd. 102: Über Abelsche Funktionen von vier Argumenten.

Die Überlegung von Schottky lehrt also, daß man mit den $\sqrt{\Phi}$ gerade so rechnen kann, als ob sie Integranden erster Gattung einer C_4 wären, man kann 7 unter ihnen als eine Hauptreihe zerfallender $\sqrt{\Phi}$ auffassen, dann ist durch diese ein bestimmtes Gebilde vom Geschlechte drei fixiert, das zu einer wohl bestimmten C_6 gehört, die einer eindeutig festgelegten F_2, auf der sie liegt, korrespondiert, wenn man die $F_3^{(4)}$ festhält. Aber der Schottkysche Satz sagt weiter aus, daß die Webersche Normierung in der Ebene und im Raume zu modular gleichen C_6, also zu derselben F_2 im ε-Raum führen müssen. Es wäre den Schottkyschen Ausführungen widersprechend, wenn das durch die Gleichungen (5') gegebene Gebilde vom Geschlechte drei — die Ausgangskegel M_ν $(\nu = 1 \ldots 4)$ und die drei anderen Kegel M_{g_1}, M_{g_2}, M_{g_3} sollen dabei eine Hauptreihe zerfallender Φ-Formen bilden — zu einer im System Σ enthaltenen C_4 führen würde, die von derjenigen verschieden wäre, die durch die Gleichungen (5) charakterisiert ist, eben aus dem Grunde, weil man zu modular verschiedenen C_6 käme. Es ist eben die durch das Hessesche Ränderungstheorem gegebene Zuordnung der Umhüllungskegel der $F_3^{(4)}$ zu den Geraden der Ebene die funktionentheoretisch allein zulässige Zuordnung der Φ-Formen zum Geradenfeld der Ebene der C_4; und es ist nicht etwa die im funktionentheoretischen Sinne richtige Zuordnung aus der durch das Hessesche Ränderungstheorem gegebene erst durch eine von der Identität verschiedene Kollineation erreichbar, was ja zunächst nicht ausgeschlossen wäre. Damit ist der oben gegebene Satz, der eigentlich schon vollständig von Schottky l. c. angegeben wurde, bewiesen und läßt sich ungefähr folgendermaßen aussprechen:

Die 28 Tritangentialebenenpaare eines der 255 Steinerschen Systeme an der C_6 im R_3 sind in denjenigen Büscheln:

$$M_{c_\nu} + \varkappa F_2 = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots 28)$$

enthalten, in denen die M_{c_ν} die Kegel bezeichnen, die als Orte jener Kegelschnitte des ∞^3 Kegelschnittsystems Σ anzusehen sind, die bezüglich die 28 Doppeltangenten der C_4 berühren, die diesem Steinerschen System entspricht.[1])

[1]) An dieser Stelle sei eine Bemerkung eingeschaltet, die sich auf noch einen Berührungspunkt der eben zitierten Abhandlung von Herrn Schottky mit den in dieser Arbeit durchgeführten Darlegungen bezieht. Der Endzweck, den Schottky l. c. verfolgt, ist die Herleitung der Relation, die zwischen den Moduln der Thetafunktionen von vier Argumenten besteht, wenn sie der Riemannschen Theorie angehören sollen. Dieses Ziel wird schließlich dadurch erreicht, daß in eine gewisse Determinanten-Identität (es ist die erste Gleichung im § 7 der Schottkyschen Arbeit) für die dort vorkommenden Ausdrücke gewisse ihnen proportionale Produkte aus Nullwerten der geraden Thetas, eigentlich Quadrat-

§ 10.

Nach diesen Erörterungen an der C_6 im R_3 kehren wir zum Schlusse noch mit einigen Worten zur C_6 in der Ebene zurück. Dieselbe war definiert durch die Gleichung

$$C_3^{(1)} C_3^{(4)} - C_3^{(2)} C_3^{(3)} = 0. \tag{1}$$

Das System der Integranden erster Gattung ist hier durch das ∞^3-System der adjungierten Kurven dritter Ordnung gegeben, die 255 Systeme der Φ-Formen durch Systeme von Kurven sechster Ordnung, die in den Doppelpunkten der C_6 selbst Doppelpunkte haben und sonst überall berühren, in jedem solchen System gibt es 28 in C_3-Paare zerfallende.

Die bezüglichen Gebilde weist man auf an den ihnen im R_3 entsprechenden und ihre Gleichungen bestimmt man einfach durch Einsetzung der Λ-Werte aus der die Abbildung vermittelnden Relation

$$\Lambda_1 : \Lambda_2 : \Lambda_3 : \Lambda_4 = C_3^{(1)} : C_3^{(2)} : C_3^{(3)} : C_3^{(4)}. \tag{2}$$

Dabei ist Gleichung (2) nur eine der 255 Möglichkeiten, diese Abbildung zu beschreiben, entsprechend den 255 $F_3^{(4)}$. Man könnte freilich die Frage aufwerfen, ob man die 255 Systeme überall berührender C_6 und die ihnen entsprechenden Steinerschen Systeme nicht ganz independent von der durch (2) gegebenen Abbildung und den analogen an der ebenen C_6 aufzeigen könnte im Sinne der gemeinen Invariantentheorie.

Die in einem System von Φ-Formen enthaltenen C_6 werden als vom zweiten Grad in den C_3 sich durch gewisse projektiv aufeinander bezogene C_3-Büschel erzeugen lassen, aber die Art, wie dieselben herausgegriffen werden müssen und wie sie projektiv aufeinander zu beziehen sind, das leistet die Abbildung in den Raum. Jedenfalls würde nun eine derartige independente Darstellung an der C_6 in der Ebene, wenn sie möglich wäre, was dahingestellt bleiben mag, kaum einen wesentlich neuen Gesichtspunkt zu Tage fördern und es ist nicht wahrscheinlich, daß dadurch die in jeder Beziehung präzisen und einfachen Verhältnisse, wie sie die Abbildung ergibt, eine vertieftere Fassung erhielten.

---

wurzeln aus diesen Produkten, eingesetzt werden. Die Determinanten-Identität von Herrn Schottky kommt auch in unseren Ausführungen vor, sie ist nichts anderes als die identisch verschwindende Diskriminante der allgemeinen Berührungsfläche M_c (Gl. 8, § 8); man kann das durch Identifizierung der beiderseitigen Bezeichnungsweisen leicht zeigen. Diese, wie uns scheint, nicht uninteressante Bemerkung läßt sich dahin zusammenfassen, daß der Relation zwischen den Moduln der Riemannschen Thetas von vier Argumenten ein algebraisches Äquivalent parallel geht, welches besagt, daß die Flächen zweiten Grades, welche die C_6 im R_3 überall berühren, Systeme von Kegeln sind.