

Sechs Punkte eines Kegelschnitts.

Von M. Pasch in Gießen.¹⁾

Werden in einer Ebene homogene ternäre Koordinaten angenommen und dann sechs Punkte eingeführt, so lassen sich aus ihren Koordinaten Formen bilden, deren Verschwinden ausdrückt, daß die Punkte einem Kegelschnitt angehören. Zwischen je zwei solchen Formen muß ein Zusammenhang bestehen und diese Zusammenhänge sind vielfach behandelt worden. Ich nenne: M. Reib, Math. Ann. 1870, Bd. 2, S. 397; Hunyady, Journal f. Math. 1877, Bd. 83, S. 76; August Scholz, Archiv d. Math. u. Phys. 1878, Teil 62, S. 317; Mertens, Journal f. Math. 1878, Bd. 84, S. 355; Pasch, ebd. 1880, Bd. 89, S. 247; Caspary, ebd. 1882, Bd. 92, S. 123; Hunyady, ebd. 1882, Bd. 92, S. 307; Gundelfinger-Dingeldey, Vorlesungen a. d. anal. Geom. d. Kegelschnitte 1895, § 12; Study, Leipziger Berichte 1895, S. 542; Heffter und Köhler, Lehrb. d. anal. Geom. I, 1905, S. 273; Riebesell, Mitteilungen der Math. Ges. in Hamburg 1917, Bd. 5, Heft 6, S. 237; Pasch, Journal f. Math. 1917, Bd. 147, S. 249.

Die Durchsicht der Stelle in dem Werk der Herren Heffter und Köhler führte mich auf einen Zusammenhang mit meinem Aufsatz „Über Teilbarkeit im Gebiet der Determinanten“, Archiv d. Math. u. Phys., dritte Reihe, 1916, Bd. 24, S. 220. Dies veranlaßte mich, den Gegenstand wieder aufzunehmen. Um das Ergebnis darzulegen, will ich zunächst Hilfsmittel zusammenstellen.

§ 1. Hilfsmittel aus der Invariantenlehre.

1. Auf einer Geraden, in der homogene binäre Koordinaten angenommen sind, mögen Punkte $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ mit den Koordinaten $\alpha_1 | \alpha_2$ usw. eingeführt werden, und es sei $\varphi(\alpha\beta\gamma\delta)$ eine rationale ganze Invariante dieser Punkte vom Grade n , $\psi(\alpha\beta\gamma\delta)$ eine ebensolche Form. Gehen also $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ durch eine lineare Substitution mit der Determinante Δ in $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ über, so wird

$$\varphi(\alpha'\beta'\gamma'\delta') = \Delta^{\frac{1}{2}n} \varphi(\alpha\beta\gamma\delta), \quad \psi(\alpha'\beta'\gamma'\delta') = \Delta^{\frac{1}{2}n} \psi(\alpha\beta\gamma\delta).$$

¹⁾ In meinem Aufsatz „Schranken und Grenzen“ im 26. Jahrgang (1915) der Monatshefte wolle man lesen: S. 304, Z. 7, „nicht“ statt „nichts“; S. 306, Z. 4 v. u., $f(x)$ statt x .

Endlich seien α, λ, μ verschiedene Punkte unserer Geraden, also

$$M(\alpha\lambda\mu) \text{ d. i. } (\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)(\mu_1\alpha_2 - \mu_2\alpha_1)(\alpha_1\lambda_2 - \alpha_2\lambda_1) \neq 0.$$

Dann gilt der Satz: Können α, λ, μ so gewählt werden, daß

$$\varphi(\alpha\lambda\mu\delta) = \psi(\alpha\lambda\mu\delta) \text{ identisch in } \delta,$$

so fällt $\psi(\alpha\beta\gamma\delta)$ mit $\varphi(\alpha\beta\gamma\delta)$ zusammen. Wähle ich nämlich Punkte $\alpha'\lambda'\mu'\delta'$ auf der Geraden beliebig, jedoch $\alpha'\lambda'\mu'$ von einander verschieden, so kann ich die lineare Substitution so wählen, daß sie $\alpha\lambda\mu$ in $\alpha'\lambda'\mu'$ überführt. Bestimme ich den Punkt δ , der dabei in δ' übergeht, so wird

$$\varphi(\alpha'\lambda'\mu'\delta') = \Delta^{\frac{1}{2}n} \varphi(\alpha\lambda\mu\delta), \quad \psi(\alpha'\lambda'\mu'\delta') = \Delta^{\frac{1}{2}n} \psi(\alpha\lambda\mu\delta),$$

mithin

$$\varphi(\alpha'\lambda'\mu'\delta') = \psi(\alpha'\lambda'\mu'\delta') \text{ für } M(\alpha'\lambda'\mu') \neq 0.$$

Haben hienach $\varphi(\alpha\beta\gamma\delta)$ und $\psi(\alpha\beta\gamma\delta)$ jedenfalls dann denselben Wert, wenn $\alpha\beta\gamma$ verschieden sind, so haben sie (siehe unten in Nr. 3) immer denselben Wert.

2. Die vorstehende Überlegung läßt sich auf Invarianten $\varphi(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\dots)$, $\psi(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\dots)$ von beliebig vielen Punkten der Geraden ausdehnen. Sodann läßt sie sich auf Punkte einer Ebene anwenden, überhaupt auf jedes Gebiet, in dem die Elemente durch homogene Koordinaten in bestimmter Anzahl festgelegt sind. Für unsere Zwecke genügt der Fall von sechs Punkten a, b, c, d, e, f einer Ebene, in der homogene ternäre Koordinaten angenommen sind, und zwar seien $a_1|a_2|a_3$ die Koordinaten von a usw. Ich werde im weiteren (siehe: Archiv d. Math. u. Phys., dritte Reihe, 1917, Bd. 25, S. 232) die Verbindungslinie der Punkte a und b mit \overline{ab} bezeichnen,

$$a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1 \text{ mit } \overline{ab}|_1, \overline{ab}|_2, \overline{ab}|_3,$$

$$\Sigma \pm a_1b_2c_3 \text{ mit } \overline{abc}.$$

Sind nun $\varphi(abcdef)$ und $\psi(abcdef)$ invariante Formen gleichen Grades der sechs Punkte, ferner $\alpha, \lambda, \mu, \nu$ Punkte unserer Ebene, von denen keine drei in gerader Linie liegen, so gilt der Satz: Können $\alpha, \lambda, \mu, \nu$ so gewählt werden, daß

$$\varphi(\alpha\lambda\mu\nu ef) = \psi(\alpha\lambda\mu\nu ef) \text{ identisch in } e, f,$$

so fällt $\psi(abcdef)$ mit $\varphi(abcdef)$ zusammen.

3. Die eingangs erwähnte Arbeit aus Bd. 24 des Archivs d. Math. u. Phys. enthält Bemerkungen über ganze Funktionen, die Produkte von ganzen Funktionen sind. Dort verweise ich in Nr. 6

auf „Veränderliche und Funktion“ (Leipzig und Berlin 1914), S. 74 und 77, sowie „Anhang“ des Buches. In diesen Zusammenhang (S. 74 des Buches) gehört der Satz: Verschwindet ein Produkt aus ganzen Funktionen identisch, so verschwindet identisch mindestens einer der Faktoren. Hierauf beruht der Satz: Besteht für ganze Funktionen φ, ψ, M die identische Gleichung $M\varphi = M\psi$, und verschwindet M nicht identisch, so ist identisch $\varphi = \psi$.

In Nr. 1 der vorliegenden Arbeit verschwindet $M(\alpha\beta\gamma)$ nicht identisch; $\varphi(\alpha\beta\gamma\delta)$ und $\psi(\alpha\beta\gamma\delta)$ sind gleich, wenn $M(\alpha\beta\gamma) \neq 0$; daher ist $M\varphi$ immer $= M\psi$, $\varphi \equiv \psi$. Auf die dabei zu benützenden Sätze bin ich aus den in Nr. 5 und 6 der Arbeit aus Bd. 24 des Archivs dargelegten Gründen auch hier näher eingegangen.

§ 2. Hilfsmittel aus der Determinantenlehre.

4. An der in der Einleitung erwähnten Stelle des Buches von Heffter und Köhler kommt die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_2 a_3 & a_3 a_1 & a_1 a_2 \\ b_2 b_3 & b_3 b_1 & b_1 b_2 \\ c_2 c_3 & c_3 c_1 & c_1 c_2 \end{vmatrix}$$

vor, die ich hier mit $E(abc)$ bezeichnen will. Schreibt man a_{1i}, a_{2i}, a_{3i} statt a_i, b_i, c_i , so erkennt man den Zusammenhang mit meiner in der Einleitung erwähnten Arbeit aus Bd. 24 des Archivs, indem $E(abc)$ dadurch in die dort (S. 221) mit E bezeichnete Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{12} a_{13} & a_{13} a_{11} & a_{11} a_{12} \\ a_{22} a_{23} & a_{23} a_{21} & a_{21} a_{22} \\ a_{32} a_{33} & a_{33} a_{31} & a_{31} a_{32} \end{vmatrix}$$

übergeht. Aus dieser Arbeit entnehme ich zunächst:

$$E(abc) = \prod a_i b_i c_i \cdot \Sigma \pm \frac{1}{a_1} \frac{1}{b_2} \frac{1}{c_3} = \begin{vmatrix} b_1 c_1 & c_1 a_1 & a_1 b_1 \\ b_2 c_2 & c_2 a_2 & a_2 b_2 \\ b_3 c_3 & c_3 a_3 & a_3 b_3 \end{vmatrix}$$

und schließe:

$$E(abc) = a_1 b_2 c_3 \begin{vmatrix} \frac{b_1 c_1}{a_1} & c_1 & b_1 \\ c_2 & \frac{c_2 a_2}{b_2} & a_2 \\ b_3 & a_3 & \frac{a_3 b_3}{c_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 c_1 & b_2 c_1 & b_1 c_3 \\ c_2 a_1 & c_2 a_2 & c_3 a_2 \\ a_1 b_3 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{vmatrix}.$$

In $E(abc)$ darf man $a_2 a_3 b_1 b_3 c_1 c_2$ mit $b_1 c_1 a_2 c_2 a_3 b_3$ vertauschen. Ersetzt man a, b, c oder $1, 2, 3$ durch eine Permutation, so tritt nur der Faktor 1 oder -1 hinzu, je nachdem die Permutation gerade oder ungerade war.

5. Aus Nr. 3 derselben Arbeit entnehme ich: $E = -F$, wo

$$F = a_{11} a_{22} (a_{23} a_{31} - a_{21} a_{33}) (a_{13} a_{32} - a_{12} a_{33}) - \\ - a_{12} a_{21} (a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}) (a_{11} a_{33} - a_{13} a_{31}),$$

so daß

$$-E(abc) = a_1 b_2 (b_3 c_1 - b_1 c_3) (c_2 a_3 - c_3 a_2) - \\ - a_2 b_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) (c_3 a_1 - c_1 a_3) = \\ = a_1 b_2 \overline{bc}|_2 \overline{ca}|_1 - a_2 b_1 \overline{bc}|_1 \overline{ca}|_2.$$

Mithin ist auch

$$-E(abc) = a_2 b_3 \overline{bc}|_3 \overline{ca}|_2 - a_3 b_2 \overline{bc}|_2 \overline{ca}|_3, \\ -E(abc) = b_2 c_3 \overline{ca}|_3 \overline{ab}|_2 - b_3 c_2 \overline{ca}|_2 \overline{ab}|_3.$$

Gemäß Nr. 8 jener Arbeit bilde ich noch:

$$-E(abx) = a_1 b_1 \overline{ab}|_1 x_2 x_3 + a_2 b_2 \overline{ab}|_2 x_3 x_1 + a_3 b_3 \overline{ab}|_3 x_1 x_2; \\ -4 \det E_x(abx) = a_1 a_2 a_3 b_1 b_2 b_3 \overline{ab}|_1 \overline{ab}|_2 \overline{ab}|_3.$$

Endlich entnehme ich ebenda aus Nr. 9 die sich auf Nr. 7 stützende Tatsache, daß $E(abc)$ als Funktion der neun Argumente a, b, c irreduzibel ist.

§ 3. Lage in einem Kegelschnitt.

6. Sollen die in § 1, Nr. 2, eingeführten Punkte $abcdef$ einer Kegelschnittsgleichung genügen, so ergibt sich als die Bedingung das Verschwinden der Determinante

$$\Sigma \pm a_1^2 \cdot b_2^2 \cdot c_3^2 \cdot d_2 d_3 \cdot e_3 e_1 \cdot f_1 f_2,$$

die ich mit $K(abcdef)$ bezeichnen will. K ist alternierend in $a \dots f$.

Die in § 2, Nr. 4, mit E bezeichnete Determinante ist ein besonderer Fall von K . Nimmt man nämlich

$$a = 1 | 0 | 0, \quad b = 0 | 1 | 0, \quad c = 0 | 0 | 1,$$

so geht K in $E(def)$ über. $E(def)$ ist irreduzibel; siehe § 2, Nr. 5.

Aber auch K ist irreduzibel. In der Tat: Zerfiele K in Faktoren, und wären def über mehrere irreduzible Faktoren verteilt, so ergäbe jeder davon einen Faktor von $E(def)$. Demnach müßte K einen irreduziblen Faktor Φ besitzen, der def je im zweiten Grad enthält. Wäre Φ vom Grade 6, so müßte K einen weiteren irreduziblen Faktor 6. Grades besitzen, der z. B. in acf je zweiten Grades ist; wäre Φ von höherem Grade, so wären abc über mehrere Faktoren verteilt. Hienach zerfällt K nicht in Faktoren.

7. Ich führe auf unserer Ebene noch Punkte $a'b'c'd'e'f'$ ein und bilde die allgemeinere Determinante:

$$L \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ a' & b' & c' & d' & e' & f' \end{pmatrix} = \\ = \Sigma \pm 2a_1a'_1 \cdot 2b_2b'_2 \cdot 2c_3c'_3 \cdot (d_2d'_3 + d_3d'_2) \cdot (e_3e'_1 + e_1e'_3) \cdot (f_1f'_2 + f_2f'_1),$$

so daß

$$64 K(abcdef) = L \begin{pmatrix} abcdef \\ abcdef \end{pmatrix}.$$

Da K irreduzibel ist, so ist L ebenfalls irreduzibel.

Endlich führe ich noch Punkte $A \dots F$, $A' \dots F'$ ein. Bedient man sich der Bezeichnung:

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = u_x,$$

so wird

$$A_a A'_{a'} + A_{a'} A'_a = 2a_1a'_1 A_1 A'_1 + 2a_2a'_2 A_2 A'_2 + 2a_3a'_3 A_3 A'_3 + \\ + (a_2a'_3 + a_3a'_2)(A_2 A'_3 + A_3 A'_2) + (a_3a'_1 + a_1a'_3)(A_3 A'_1 + A_1 A'_3) + \\ + (a_1a'_2 + a_2a'_1)(A_1 A'_2 + A_2 A'_1).$$

Man erhält also:

$$L \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ a' & b' & c' & d' & e' & f' \end{pmatrix} \cdot L \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ A' & B' & C' & D' & E' & F' \end{pmatrix} = \\ = 8 \Sigma \pm (A_a A'_{a'} + A_{a'} A'_a) \dots (F_f F'_{f'} + F'_{f'} F'_f).$$

8. Wir benützen im folgenden die Determinante

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & 2x_2x_3 & 2x_3x_1 & 2x_1x_2 \\ y_1^2 & y_2^2 & y_3^2 & 2y_2y_3 & 2y_3y_1 & 2y_1y_2 \\ z_1^2 & z_2^2 & z_3^2 & 2z_2z_3 & 2z_3z_1 & 2z_1z_2 \\ y_1z_1 & y_2z_2 & y_3z_3 & y_2z_3 + y_3z_2 & y_3z_1 + y_1z_3 & y_1z_2 + y_2z_1 \\ z_1x_1 & z_2x_2 & z_3x_3 & z_3x_3 + z_1x_2 & z_1x_1 + z_2x_3 & z_2x_2 + z_3x_1 \\ x_1y_1 & x_2y_2 & x_3y_3 & x_2y_3 + x_3y_2 & x_3y_1 + x_1y_3 & x_1y_2 + x_2y_1 \end{vmatrix}$$

und bezeichnen sie mit $Q(xyz)$. Auch sie läßt sich aus L herleiten, indem

$$8Q(xyz) = L \begin{pmatrix} xyz & yzx \\ xyz & zxy \end{pmatrix}.$$

Ebenso ist

$$8Q(uvw) = L \begin{pmatrix} uvw & vwu \\ uvw & wuv \end{pmatrix}.$$

Die in Nr. 7 hergestellte Formel ergibt jetzt:

$$8Q(xyz) \cdot Q(uvw) =$$

$$\begin{vmatrix} 2u_x^2 & 2u_y^2 & 2u_z^2 & 2u_y u_z & 2u_z u_x & 2u_x u_y \\ 2v_x^2 & 2v_y^2 & 2v_z^2 & 2v_y v_z & 2v_z v_x & 2v_x v_y \\ 2w_x^2 & 2w_y^2 & 2w_z^2 & 2w_y w_z & 2w_z w_x & 2w_x w_y \\ 2v_x w_x & 2v_y w_y & 2v_z w_z & v_y w_z + v_z w_y & v_z w_x + v_x w_z & v_x w_y + v_y w_z \\ 2w_x u_x & 2w_y u_y & 2w_z u_z & w_y u_z + w_z u_y & w_z u_x + w_x u_z & w_x u_y + w_y u_z \\ 2u_x v_x & 2u_y v_y & 2u_z v_z & u_y v_z + u_z v_y & u_z v_x + u_x v_z & u_x v_y + u_y v_x \end{vmatrix}.$$

Nehme ich hier $u = \overline{yz}$, $v = \overline{zx}$, $w = \overline{xy}$, so wird $u_x = \overline{xyz}$, $u_y = 0$ usw. und mithin

$$Q(xyz) \cdot Q(\overline{yz} \overline{zx} \overline{xy}) = \overline{xyz}^{12}.$$

Da $Q(xyz)$ von Grade 12 und \overline{xyz} irreduzibel ist, so kann $Q(xyz)$ sich von \overline{xyz}^4 nur um einen Zahlenfaktor unterscheiden, und da beide für das Einheitssystem $= 1$ werden, so ist

$$Q(xyz) = \overline{xyz}^4.$$

9. Wir bereiten hier noch folgende Formel vor:

$$\begin{aligned} & \overline{uvw}^4 L \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ a' & b' & c' & d' & e' & f' \end{pmatrix} = Q(uvw) \cdot L \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ a' & b' & c' & d' & e' & f' \end{pmatrix} = \\ & = \begin{vmatrix} 2u_a u_a' & 2v_a v_a' & 2w_a w_a' & v_a w_a' + v_a' w_a & w_a u_a' + w_a' u_a & u_a v_a' + u_a' v_a \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2u_f u_f' & 2v_f v_f' & 2w_f w_f' & v_f w_f' + v_f' w_f & w_f u_f' + w_f' u_f & u_f v_f' + u_f' v_f \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

§ 4. Anwendung einer linearen Substitution.

10. In unserer Ebene wähle ich beliebige Gerade r, s, t , für die die Determinante $\overline{rst} = \Delta$ nicht verschwindet. Ich transformiere die Punkte x durch die lineare Substitution:

$$r_x = X_1, \quad s_x = X_2, \quad t_x = X_3$$

und verstehe jetzt unter $A \dots F \ A' \dots F'$ die Punkte, in die $a \dots f \ a' \dots f'$ dabei übergehen. Dann schließe ich mittels der in § 3, Nr. 9, abgeleiteten Formel:

$$\Delta^4 L \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ a' & b' & c' & d' & e' & f' \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ A' & B' & C' & D' & E' & F' \end{pmatrix}$$

und als besonderen Fall hievon:

$$K(AB CDE F) = \Delta^4 K(ab cd ef).$$

Durch diese beiden Identitäten wird die Invarianteneigenschaft der Ausdrücke K und L bestätigt.

Wenn ich in der letzten Formel f durch x und mithin F durch X ersetze, so entstehen quadratische Formen von x und X . Von $K(ab cd ex)$ bilde ich die Determinante nach x ; von $K(AB CDE X)$ kann ich zunächst die Determinante nach X bilden, außerdem eine nach x . Ich erhalte:

$$K(AB CDE X) = \Delta^4 K(ab cd ex),$$

$$\det_x K(AB CDE X) = \Delta^2 \det_X K(AB CDE X),$$

$$\det_x K(AB CDE X) = \Delta^{12} \det_x K(ab cd ex),$$

$$\det_X K(AB CDE X) = \Delta^{10} \det_x K(ab cd ex).$$

11. Unter der Voraussetzung, daß $\overline{abc} \neq 0$, kann ich wählen:

$$r = \overline{bc}, \quad s = \overline{ca}, \quad t = \overline{ab}$$

und erhalte:

$$\Delta = \overline{abc}^2, \quad X_1 = \overline{bcx}, \quad X_2 = \overline{cax}, \quad X_3 = \overline{abx},$$

$$A = \overline{abc} \mid 0 \mid 0, \quad B = 0 \mid \overline{abc} \mid 0, \quad C = 0 \mid 0 \mid \overline{abc};$$

weiter im Hinblick auf § 3, Nr. 6:

$$K(AB CDE F) = \overline{abc}^6 E(DEF),$$

$$K(AB CDE X) = \overline{abc}^6 E(DEX),$$

$$\det_x K(AB CDE X) = \overline{abc}^{18} \det_X E(DEX),$$

endlich nach § 2, Nr. 5:

$$-4 \det_x K(ABCDEX) = \\ = \overline{abc}^{18} D_1 D_2 D_3 E_1 E_2 E_3 \overline{DE}_1 \overline{DE}_2 \overline{DE}_3.$$

Nun ist hier

$$\overline{DE}_1 = \begin{vmatrix} \overline{cad} & \overline{abd} \\ \overline{cae} & \overline{abe} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overline{ca}_1 & \overline{ca}_2 & \overline{ca}_3 \\ \overline{ab}_1 & \overline{ab}_2 & \overline{ab}_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{vmatrix} \text{ usw.,}$$

folglich

$$\overline{DE}_1 = \overline{abc} \overline{ade}, \overline{DE}_2 = \overline{abc} \overline{bde}, \overline{DE}_3 = \overline{abc} \overline{cde}, \\ -4 \det_x K(ABCDEX) = \\ = \Delta^{10} \overline{abc} \overline{bcd} \overline{cad} \overline{abd} \overline{bce} \overline{cae} \overline{abe} \overline{adc} \overline{bde} \overline{cde}.$$

Verbindet man hiemit die letzte Formel in Nr. 10, so gelangt man zur Determinante des Kegelschnitts der fünf Punkte $abcde$:

$$\det_x K(abcdex) = \\ = -\frac{1}{4} \overline{abc} \overline{bcd} \overline{cad} \overline{abd} \overline{bce} \overline{cae} \overline{abe} \overline{adc} \overline{bde} \overline{cde}.$$

Die Bedingung $\overline{abc} \neq 0$, die für die Herleitung gilt, gilt nicht für das Ergebnis (vgl. § 1, Nr. 3).

In den hieraus ersichtlichen Fällen ist $K(abcdex)$ reduzibel in x . Aber $K(abcdex)$ ist irreduzibel in $abcde$ nach § 3, Nr. 6.

§ 5. Zusammenhang mit der Projektivität.

12. In § 3, Nr. 6, wurden wir dadurch, daß wir unmittelbar an die ternäre quadratische Gleichung anknüpften, zur Form K geführt. Man kann aber auch an die für sechs Punkte $abcdef$ eines Kegelschnitts geltenden geometrischen Sätze anknüpfen. Benützt man den Satz, wonach der Kegelschnitt sich als Erzeugnis projektiver Strahlenbüschel darstellt, so wird die Bedingung für solche sechs Punkte in der projektiven Lage der Strahlenbüschel $e(abcd)$ und $f(abcd)$ bestehen, also in der Gleichheit ihrer Doppelverhältnisse, oder in der Gleichheit der Doppelverhältnisse $e(bcd a)$ und $f(bcd a)$. Diese gibt:

$$\frac{\overline{bde} \overline{cae}}{\overline{bce} \overline{cde}} = \frac{\overline{bdf} \overline{caf}}{\overline{baf} \overline{cdf}}, \text{ d. i. } D(abcdcf) = 0,$$

wenn wir den Ausdruck

$$\overline{abe} | \overline{cde} | \overline{acf} | \overline{bdf} | - \overline{ace} | \overline{bde} | \overline{abf} | \overline{cdf} | \text{ mit } D(abcdef)$$

bezeichnen.

Um diese Invariante 12. Grades mit K zu vergleichen, kann man die in § 1, Nr. 2, angestellte Überlegung benutzen. Wählt man nämlich (wie in § 3, Nr. 6) $a = 1 | 0 | 0$, $b = 0 | 1 | 0$, $c = 0 | 0 | 1$, so geht D über in:

$$- e_3 \overline{de} |_3 f_2 \overline{df} |_2 + e_2 \overline{de} |_2 f_3 \overline{df} |_3.$$

Nach § 2, Nr. 5, hat man aber:

$$E(def) = - e_2 f_3 \overline{fd} |_3 \overline{de} |_2 + e_3 f_2 \overline{fd} |_2 \overline{de} |_3,$$

und dies ist nach § 3, Nr. 6, der Wert von K bei der vorhin für a, b, c getroffenen Wahl. Demnach gibt es Punkte $\alpha, \lambda, \mu, \nu$ im Sinne von § 1, Nr. 2, für die

$$D(\alpha \lambda \mu \nu ef) = K(\alpha \lambda \mu \nu ef) \text{ identisch in } e \text{ und } f,$$

und es folgt aus dem ebendasselbst abgeleiteten Satze die Identität:

$$\begin{aligned} K(abcdef) &= D(abcdef) = \\ &= \overline{abe} | \overline{cde} | \overline{acf} | \overline{bdf} | - \overline{ace} | \overline{bde} | \overline{abf} | \overline{cdf} |. \end{aligned}$$

Diese Identität ist hier auf weniger künstlichem Wege abgeleitet, als in meiner Arbeit von 1880.

§ 6. Zusammenhang mit dem Pascalschen Satze.

13. Um den Pascalschen Satz auf die Punkte $abcdef$ anzuwenden, bilde ich aus den Gruppen abc und def die Paare bc und ef , ca und fd , ab und de , daraus die Verbindungslinien \overline{bf} und \overline{ce} , \overline{cd} und \overline{af} , \overline{ae} und \overline{bd} und endlich deren Schnittpunkte

$$\overline{bf} | \overline{ce} | = \alpha, \overline{cd} | \overline{af} | = \beta, \overline{ae} | \overline{bd} | = \gamma.$$

Als die Bedingung dafür, daß $abcdef$ auf einem Kegelschnitt liegen, erscheint dann das Verschwinden des Ausdrucks

$$P(abcdef) = \alpha \beta \gamma |.$$

Auch hier benutzen wir die Wahl: $a = 1 | 0 | 0$, $b = 0 | 1 | 0$, $c = 0 | 0 | 1$. Bei dieser wird (vgl. Heffter und Köhler a. a. O.):

$$\overline{bf} = f_3 | 0 | - f_1, \overline{ce} = - e_2 | e_1 | 0, \alpha = e_1 f_1 | e_2 f_1 | e_1 f_3,$$

$$\overline{cd} = - d_2 | d_1 | 0, \overline{af} = 0 | - f_3 | f_2, \beta = f_2 d_1 | f_2 d_2 | f_3 d_2,$$

$$\overline{ae} = 0 | - e_3 | e_2, \overline{bd} = d_3 | 0 | - d_1, \gamma = d_1 e_3 | d_3 e_2 | d_3 e_3,$$

und P geht über in:

$$\begin{vmatrix} e_1 f_1 & e_2 f_1 & e_1 f_3 \\ f_2 d_1 & f_2 d_2 & f_3 d_2 \\ d_1 e_3 & d_3 e_2 & d_3 e_3 \end{vmatrix}, \text{ d. i. } E(def) \text{ nach § 2, Nr. 4.}$$

Die am Ende des § 5 benutzte Überlegung führt daher jetzt zu der Identität:

$$P(ab cdef) = K(ab cdef).$$

14. Hienach fallen auch D und P miteinander zusammen. Man kann P unmittelbar in D überführen auf dem von Gundelfinger-Dingeldey, a. a. O. eingeschlagenen Wege. Zunächst ist

$$\begin{aligned} P = \overline{\alpha\beta\gamma} &= \overline{bf} \overline{ce} |_1 \beta\gamma |_1 + \overline{bf} \overline{ce} |_2 \beta\gamma |_2 + \overline{bf} \overline{ce} |_3 \beta\gamma |_3 = \\ &= \begin{vmatrix} \overline{bf} |_1 & \overline{bf} |_2 & \overline{bf} |_3 \\ \overline{ce} |_1 & \overline{ce} |_2 & \overline{ce} |_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overline{bf\beta} & \overline{bf\gamma} \\ \overline{ce\beta} & \overline{ce\gamma} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

sodann

$$\overline{bf\beta} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \overline{cd} |_1 & \overline{cd} |_2 & \overline{cd} |_3 \\ \overline{af} |_1 & \overline{af} |_2 & \overline{af} |_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overline{bcd} & \overline{baf} \\ \overline{fcd} & \overline{faf} \end{vmatrix} = -\overline{baf} \overline{fcd},$$

$$\overline{ce\gamma} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \overline{ae} |_1 & \overline{ae} |_2 & \overline{ae} |_3 \\ \overline{bd} |_1 & \overline{bd} |_2 & \overline{bd} |_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overline{cae} & \overline{cbd} \\ \overline{eae} & \overline{ebd} \end{vmatrix} = \overline{cae} \overline{ebd},$$

$$\overline{bf\gamma} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \overline{ae} |_1 & \overline{ae} |_2 & \overline{ae} |_3 \\ \overline{bd} |_1 & \overline{bd} |_2 & \overline{bd} |_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overline{bae} & \overline{bbd} \\ \overline{fae} & \overline{fbd} \end{vmatrix} = \overline{bae} \overline{fbd},$$

$$\overline{ce\beta} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \overline{cd} |_1 & \overline{cd} |_2 & \overline{cd} |_3 \\ \overline{af} |_1 & \overline{af} |_2 & \overline{af} |_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overline{ccd} & \overline{caf} \\ \overline{ecd} & \overline{eaf} \end{vmatrix} = -\overline{caf} \overline{ecd}$$

und schließlich

$$\begin{aligned} P &= \overline{bf\beta} \overline{ce\gamma} - \overline{bf\gamma} \overline{ce\beta} \\ &= -\overline{baf} \overline{fcd} \overline{cae} \overline{ebd} + \overline{bae} \overline{fbd} \overline{caf} \overline{ccd} = D. \end{aligned}$$