Über Anzahlen und Summen von Teilern.

Von **M. Kiseljak** in Agram.

§ 1. Eine Cesàrosche Funktion.

Bei einigen späteren Untersuchungen werde ich die Funktion $\iota(n)$ benützen, die folgendermaßen definiert werden soll:

Es ist $\iota(n) = \alpha$, wenn α den Exponenten der höchsten, in $n = 2^{\alpha} . p_1^{\alpha_1} . p_2^{\alpha_2} \ldots p_\varrho^{\alpha_\varrho}$ aufgehenden Potenz der Zahl 2 bedeutet; für ein ungerades n ist natürlich $\iota(n) = 0$. Diese zahlentheoretische Funktion wurde von E. Cesàro [1]) eingeführt; er behandelt sie nur ganz kurz und kommt bis zu den zwei Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{n} \left[\frac{n}{k} + \frac{1}{2}\right] . j(k) = \sum_{k=1}^{n} I\left[\frac{2n}{2k-1}\right] \tag{1}$$

und

$$\sum_{d}{}' \iota\left(\frac{2n}{d}\right) = t(n). \tag{2}$$

Dabei bedeutet $j(x)$ die der Zahl x nächste ganze Zahl; im Falle $x = m + \frac{1}{2}$ (m eine natürliche Zahl) wird $j(x) = m + 1$ festgesetzt. Die Summe in (2) erstreckt sich über alle ungeraden Teiler der geraden Zahl $2n$; $t(n)$ bedeutet wie gewöhnlich die Anzahl der Teiler der Zahl n und $I(x)$ die summatorische Funktion

$$I(x) = \sum_{k=1}^{x} \iota(k). \tag{3}$$

Ich betrachte gleich die Gleichung (3); es ist offenbar

$$I(x) = \left[\frac{x+1}{2}\right] . 0 + \left[\frac{x+2}{4}\right] . 1 + \left[\frac{x+4}{8}\right] . 2 + \cdots \tag{4}$$

[1]) Eventualités de la division arithmétique. Annali di matematica pura ed applicata, (2) 13 (1885), S. 269—290.

oder kürzer

$$I(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{x}{2^n}+\frac{1}{2}\right].(n-1), \tag{5}$$

was wir auch so schreiben können:

$$I(x)=x.\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{2^n}-\sum_{n=2}^{\infty}(n-1).\varepsilon\left(\frac{x}{2^n}+\frac{1}{2}\right). \tag{6}$$

Dabei ist bekanntlich

$$\varepsilon(x)=x-[x]-\frac{1}{2}.$$

Die Funktion $\iota(x)$ kann verallgemeinert werden. Ich bezeichne mit $\iota_m(x)$ den Exponenten der höchsten, in x restlos aufgehenden Potenz der natürlichen Zahl m. Es ist offenbar

$$I_m(x)=\sum_{k=1}^{x}\iota_m(k)=$$

$$=0.\left[\frac{x+m-1}{m}\right]+0.\left[\frac{x+m-2}{m}\right]+\cdots+0.\left[\frac{x+1}{m}\right]+$$

$$+1.\left[\frac{x+m(m-1)}{m^2}\right]+1.\left[\frac{x+m(m-2)}{m^2}\right]+\cdots+1.\left[\frac{x+m}{m^2}\right]+$$

$$+2.\left[\frac{x+m^2(m-1)}{m^3}\right]+2.\left[\frac{x+m^2(m-2)}{m^3}\right]+\cdots+2.\left[\frac{x+m^2}{m^3}\right]+$$

$$+\cdots$$

oder kürzer

$$I_m(x)=\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{x+m^{n-1}.k}{m^n}\right].(n-1). \tag{7}$$

Es ist übrigens auch [2])

$$I_m(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{x}{m^k}\right]. \tag{8}$$

---

[2]) J. J. Sylvester, On arithmetical series. The Messenger of Mathematics, 21 (1892), S. 1—19 und 87—119. Unsere Gleichung (8), die Sylvester so schreibt:

$$r=\left[\frac{n}{q}\right]+\left[\frac{n}{q^2}\right]+\left[\frac{n}{q^3}\right]+\cdots,$$

befindet sich im ersten Paragraphen seiner Arbeit.

Falls die beliebige Zahl m durch eine Primzahl p ersetzt wird, so hat dann — aber auch nur dann — die summatorische Funktion $I_p(m)$ eine besondere Bedeutung; es ist jetzt $I_p(x)$ der Exponent r der höchsten, in $x!$ aufgehenden Potenz der Zahl p.[3]) Um einen — für ein ganz beliebiges m gültigen — asymptotischen Ausdruck für die Funktion $I_m(x)$ zu erhalten, kann man ebenso vorgehen wie beim Beweise der — nur für eine Primzahl p gültigen — Legendreschen Formel [4]) für ν, also folgendermaßen:

Um die Potenz von m zu bestimmen, die insgesamt in den Zahlen $1, 2, \ldots, x$ enthalten ist, schreibe man x im m-adischen Zahlensystem

$$x = a_0 + a_1 m + \cdots + a_k m^k. \tag{9}$$

Es ist dann

$$I_m(x) = \frac{x - (a_0 + a_1 + \cdots + a_k)}{m-1}; \tag{10}$$

da die Anzahl der a_i von der Ordnung $\log x$ ist und jedes $a_i < m$, folgt die Formel

$$I_m(x) = \frac{x}{m-1} + O(\log x), \text{ [4a])} \tag{11}$$

d. h.

$$I_m(x) \sim \frac{x}{m-1} \tag{12}$$

und der Mittelwert

$$\mathfrak{M}\,\iota_m(x) = \lim_{x=\infty} \frac{I_m(x)}{x} = \frac{1}{m-1}. \tag{13}$$

Für $m = 2$ folgt sofort

$$I(x) \sim x \tag{12a}$$

und der mittlere Wert

$$\mathfrak{M}\,\iota(x) = 1. \tag{13a}$$

Aus der Gleichung

$$\iota(2x) = \iota(x) + 1$$

folgt sofort der Satz

$$\mathfrak{M}\,\iota(2x) = 2, \tag{14}$$

d. h.: Die Zahl 2 befindet sich in jeder geraden Zahl im Mittel zweimal als Faktor. Später sollen daraus weitere Folgerungen gezogen werden.

---

[3]) Vgl. Sylvesters Formel (8) (s. oben) mit der identischen Formel (36) auf Seite 52 bei P. Bachmann, Niedere Zahlentheorie, I, Leipzig 1902.

[4]) Vgl. A. M. Legendre, Zahlentheorie, übers. von H. Maser, 2. Ausg., Leipzig 1893, I. Band, S. 19, oder etwa Bachmann (l. c.), S. 55, Formel 39.

[4a]) Die Bezeichnungen sind — wenn nichts Gegenteiliges bemerkt wird — diejenigen, die Herr Landau in seinem Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen (Leipzig und Berlin 1909) benützt.

Gleichungen (11) und (12) können auch durch Abschätzung der (endlichen, weil von selbst abbrechenden) Reihen (8) und (7) erhalten werden; im letzteren Falle ist das Fehlerglied von der Ordnung $\log^2 x$.

§ 2. Arithmetische Bemerkungen zur Lambertschen Reihe.

Den mittleren Wert der zahlentheoretischen Funktion $t(x)$ hat zuerst G. L. Dirichlet[5]) mit Benützung der Lambertschen Reihe[6]) bestimmt. Dieselbe lautet bekanntlich

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{1-x^k}, \tag{15}$$

oder in eine Potenzreihe entwickelt

$$\begin{aligned} f(x) &= b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots + b_n x^n + \cdots \\ &= x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 2x^5 + 4x^6 + \cdots \end{aligned} \tag{16}$$

Dabei besteht die wohlbekannte Beziehung

$$b_n = t(n), \tag{17}$$

worin ja die Quelle der zahlentheoretischen Anwendungen der Lambertschen Reihe zu suchen ist.

Vom Standpunkte der Zahlentheorie hat sich die Lambertsche Reihe nie besonders fruchtbar erwiesen und es dürfte sich auch kaum viel Neues darüber sagen lassen. Hier soll nur gezeigt werden, daß man unter Anwendung dieser Reihe mittels ganz einfacher Transformationen eine Menge elementarer zahlentheoretischer Sätze erhalten kann, deren Beweise auf diesem Wege beinahe trivial sind, während man sonst zu ihrer Begründung immerhin einige Rechnungen brauchen würde. Den hier entwickelten Gesetzen über Teileranzahlen und -summen ließen sich noch weitere ähnliche Sätze anreihen; es soll jedoch nur an einigen Beispielen, die wir im nächsten Paragraphen brauchen werden, gezeigt werden, daß die zahlentheoretische Verwendbarkeit der Lambertschen Reihe, wenn auch nicht vielseitig, doch praktisch nicht ganz wertlos ist.

---

[5]) Über die Bestimmung asymptotischer Gesetze in der Zahlentheorie. Bericht über die Verhandlungen der königl. Preuß. Akademie der Wissenschaften, Berlin 1838, S. 13—15. Desgl. Werke, I. Band, Berlin 1889, S. 351—359.

[6]) Beinahe vollständige Literaturangaben über die Lambertsche Reihe findet man in einer unlängst erschienenen Arbeit des Herrn K. Knopp [Über Lambertsche Reihen, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 142 (1913), S. 283—315], wo gewisse analytischen Eigenschaften sehr verallgemeinerter Lambertscher Reihen untersucht werden. Herr E. Landau hat die Knoppschen Resultate verallgemeinert, indem er nachgewiesen hat, daß einige Voraussetzungen entbehrlich waren. Vgl. seine Arbeit: Sur les séries de Lambert, Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris, 156 (1913), S. 1451—1454.

Setzen wir in (15) $x = y^2$ ein, so erhalten wir die Reihe[7])

$$f_2(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^{2k}}{1 - y^{2k}} \tag{18}$$

und daraus die Potenzreihe

$$\begin{aligned} f_2(y) &= a_2 y^2 + a_4 y^4 + \cdots + a_{2n} y^{2n} + \cdots \\ &= y^2 + 2y^4 + 2y^6 + 3y^8 + 2y^{10} + 4y^{12} + \cdots \end{aligned} \tag{19}$$

Der allgemeine Koeffizient a_n dieser Reihe (19) bedeutet, wie wir uns leicht überzeugen können, die Anzahl der geraden Teiler der Zahl n. Die Reihe (19) kann auch unmittelbar aus (16) eben durch dieselbe Substitution $x = y^2$ entstehen; daraus folgt sofort das ganz elementare Gesetz

$$a_{2n} = b_n, \tag{20}$$

d. h. die Anzahl der geraden Teiler einer Zahl ist der Anzahl aller Teiler der Hälfte dieser Zahl gleich.

Dabei wird hier und später $t\left(\frac{n}{m}\right) = 0$ vorausgesetzt, sobald $\frac{n}{m}$ keine ganze Zahl ist.

Die Lambertsche Reihe weiter verallgemeinernd, erhalten wir die Reihe

$$f_m(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^{km}}{1 - y^{km}} \tag{21}$$

und die Potenzreihe

$$f_m(y) = c_m y^m + c_{2m} y^{2m} + c_{3m} y^{3m} + \cdots + c_{nm} y^{nm} + \cdots, \tag{22}$$

welche aus (15) und (16) durch Einsetzen von $x = y^m$ entstehen. Der allgemeine Koeffizient c_k bedeutet die Anzahl der durch m teilbaren Teiler der Zahl k. Es ergibt sich offenbar sofort die Beziehung

$$c_{nm} = b_n. \tag{23}$$

Derartige Probleme kommen in der Zahlentheorie vereinzelt vor,[8]) die Behandlung mittels der Lambertschen Reihe ist jedoch neu.

---

[7]) Die Reihen (18) und (24) kommen schon auf Seite 288 der Arbeit von M. Curtze [Notes diverses sur la série de Lambert et la loi des nombres premiers, Annali di matematica pura ed applicata, (2) 1 (1868), S. 285—292] vor, jedoch im Zusammenhange mit ganz anderen Fragen.

[8]) Vgl. z. B. E. Lucas, Théorie des nombres, I, Paris 1891, S. 384.

Wenn wir nach den ungeraden Teilern einer Zahl fragen, so nehmen wir die Reihe [9])

$$\bar{f}_2(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+1}}{1 - x^{2m+1}} \tag{24}$$

zum Ausgangspunkt der Untersuchung.[10]) In der daraus entwickelten Potenzreihe

$$\bar{f}_2(x) = d_1 x + d_2 x^2 + d_3 x^3 + \cdots + d_n x^n + \cdots \tag{25}$$

bedeutet der allgemeine Koeffizient d_n die Anzahl der ungeraden Teiler der Zahl n, was schon Hermite a. a. O. bemerkt hat.

Es ist offenbar

$$\bar{f}_2(x) = f(x) - f_2(x),$$

also auch

$$d_n = t(n) - t\left(\frac{n}{2}\right). \tag{26}$$

Zwischen den Koeffizienten d_n und a_n besteht die leicht zu beweisende Beziehung

$$d_n \,.\, \iota(n) = a_n; \tag{27}$$

mit Berücksichtigung des Satzes (14) schließen wir daraus:

Eine gerade Zahl hat im Mittel zweimal so viel gerade Teiler wie ungerade,

oder was dasselbe ist:

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein beliebiger Teiler einer geraden Zahl eine ungerade Zahl sei, beträgt $\frac{1}{3}$.

Das frühere Verfahren fortsetzend, erhalten wir die allgemeine Reihe

$$\begin{aligned} \bar{f}_m(x) = \frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x^2} + \cdots + \frac{x^{m-1}}{1-x^{m-1}} + \frac{x^{m+1}}{1-x^{m+1}} + \cdots \\ \cdots + \frac{x^{2m-1}}{1-x^{2m-1}} + \frac{x^{2m+1}}{1-x^{2m+1}} + \cdots \end{aligned} \tag{28}$$

---

[9]) Diese Reihe ist der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^{2n}}$ gleich. Vgl. Ch. Hermite, Sur les valeurs asymptotiques de quelques fonctions numériques. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 99 (1886), S. 324—328.

[10]) Man könnte etwa auch von der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^n}$ ausgehen, weil die Koeffizienten der aus derselben entwickelten Potenzreihe den Differenzen zwischen der Anzahl der ungeraden und der Anzahl der geraden Teiler der betreffenden Zahlen gleich sind. Vgl. E. Cesàro, La serie di Lambert in aritmetica assintotica. Rendiconto dell' Accademia delle scienze fisiche e matematiche di Napoli, (2) 6 (1893), S. 197—204.

und die entsprechende Potenzreihe

$$\bar{f}_m(x) = e_1 x + e_2 x^2 + \cdots + e_n x^n + \cdots, \tag{29}$$

wo der allgemeine Koeffizient e_n die Anzahl der durch m nicht teilbaren Teiler der Zahl n bedeutet. Es ist offenbar

$$\bar{f}_m(x) = f(x) - f_m(x)$$

und

$$e_n = t(n) - t\left(\frac{n}{m}\right). \tag{30}$$

Auf diese Weise haben wir Teileranzahlen, die verschiedenen Teilbarkeitsbedingungen unterworfen sind, mittels der Lambertschen Reihe zu der gewöhnlichen Teileranzahl $t(n)$ in höchst einfache Beziehungen gebracht. [Vgl. die Gleichungen (20), (23), (26) und (30).]

Die aus den Koeffizienten a_n, c_n, d_n und e_n gebildeten Dirichletschen Reihen stehen in ganz einfach herzuleitenden Beziehungen zur Riemannschen Funktion $\zeta(s)$. Es ist bekanntlich für[11] $\Re(s) > 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t(n)}{n^s} = \zeta^2(s); \tag{31}$$

ebenso erhalten wir auch

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = \frac{\zeta^2(s)}{2^s}, \tag{32}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s} = \frac{\zeta^2(s)}{m^s}, \tag{33}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{n^s} = \zeta^2(s) \cdot \frac{2^s - 1}{2^s} \tag{34}$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n}{n^s} = \zeta^2(s) \cdot \frac{m^s - 1}{m^s}. \tag{35}$$

Diese Dirichletschen Reihen können mittels der Gammafunktion auch mit der Lambertschen Reihe in Zusammenhang gebracht werden. Aus der Definitionsgleichung der Gammafunktion

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$$

---

[11]) R. Lipschitz, Sur des séries relatives à la théorie des nombres. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, Paris, 89 (1879), S. 985.

folgen folgende Gleichungen (die einfachen Rechnungen seien dem Leser überlassen):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \cdot \int_0^1 f_2(x) \cdot \left(\log \frac{1}{x}\right)^{s-1} \cdot \frac{dx}{x}, \tag{36}$$

$$\zeta^2(s) = \frac{2^s}{\Gamma(s)} \cdot \int_0^1 f_2(x) \cdot \left(\log \frac{1}{x}\right)^{s-1} \cdot \frac{dx}{x}, \tag{37}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \cdot \int_0^1 f_m(x) \cdot \left(\log \frac{1}{x}\right)^{s-1} \cdot \frac{dx}{x}, \tag{38}$$

$$\zeta^2(s) = \frac{m^s}{\Gamma(s)} \cdot \int_0^1 f_m(x) \cdot \left(\log \frac{1}{x}\right)^{s-1} \cdot \frac{dx}{x}, \tag{39}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \cdot \int_0^1 \bar{f}_2(x) \cdot \left(\log \frac{1}{x}\right)^{s-1} \cdot \frac{dx}{x}, \tag{40}$$

$$\zeta^2(s) = \frac{2^s}{\Gamma(s) \cdot (2^s - 1)} \cdot \int_0^1 \bar{f}_2(x) \cdot \left(\log \frac{1}{x}\right)^{s-1} \cdot \frac{dx}{x}, \tag{41}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \cdot \int_0^1 \bar{f}_m(x) \cdot \left(\log \frac{1}{x}\right)^{s-1} \cdot \frac{dx}{x}, \tag{42}$$

$$\zeta^2(s) = \frac{m^s}{\Gamma(s) \cdot (m^s - 1)} \cdot \int_0^1 \bar{f}_m(x) \cdot \left(\log \frac{1}{x}\right)^{s-1} \cdot \frac{dx}{x}. \tag{43}$$

Die mittleren Werte der zahlentheoretischen Funktionen a_n, c_n, d_n und e_n sind leicht zu bestimmen und sind auch schon zum Teil bestimmt worden. Mit Rücksicht auf die späteren Anwendungen sollen hier nur die Resultate erwähnt werden; es ist[12])

$$\mathfrak{M}\, a_n = \frac{1}{2} \log \frac{n}{2} + O(1), \tag{44}$$

[12]) Mit Rücksicht auf die hier zu ziehenden Schlüsse kommt es auf eine schärfere Abschätzung gar nicht an. Es wäre nicht schwer, die bedeutend schärfere Relation

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n}{2} \log \frac{n}{2} + \frac{2C-1}{2} n + O(\sqrt{n})$$

herzuleiten, wenn man einem bekannten Dirichletschen Beispiele folgen würde. (Vgl. seine Arbeit: Über die Bestimmung der mittleren Werte in der Zahlentheorie.

d. h.

$$\mathfrak{M}\, a_n \sim \frac{1}{2} \log n. \text{[13]} \tag{44 a}$$

Ebenso erhalten wir

$$\mathfrak{M}\, c_n = \frac{1}{m} \log \frac{n}{m} + O(1), \tag{45}$$

d. h.

$$\mathfrak{M}\, c_n \sim \frac{1}{m} \log n. \tag{45 a}$$

Dasselbe Resultat erhalten wir auch durch direkte Anwendung eines allgemeinen Satzes von E. Cesàro, welcher so lautet: [14]) „Le nombre des diviseurs de n, donés d'une certaine propriété, est asymptotique au logarithme de n, multiplié par la probabilité qu'un nombre entier quelconque jouisse de la même propriété.“

Es ist ferner[15])

$$\mathfrak{M}\, d_n \sim \log \sqrt{2n} \tag{46}$$

und auch

$$\mathfrak{M}\, e_n \sim \log \sqrt[m]{m\, n^{m-1}}. \tag{47}$$

Aus (44) und (46) folgt das bekannte Resultat

$$\mathfrak{M}\,(d_n - a_n) \sim \log 2 \tag{48}$$

und aus (45) und (47) das allgemeinere neue

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}\,(e_n - c_n) &\sim \frac{m-2}{m} \log n + \frac{2}{m} \log m \\ &\sim \frac{m-2}{m} \log n. \end{aligned} \tag{49}$$

Abhandlungen der königl. Preußischen Akademie der Wissenschaften, Berlin 1849, S. 69—83. Desgl. Werke II. Bd., Berlin 1897, S. 49—66.) Man könnte sogar das Restglied auf die Ordnung $O(\sqrt[3]{x}\,.\log x)$ herabdrücken, wie es bei $\mathfrak{M}\, t(n)$ schon geschehen ist. Vgl. G. Voronoï, Sur un problème du calcul des fonctions asymptotiques. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 126 (1903), S. 241—282.

[13]) Vgl. E. Cesàro, Sur diverses questions d'arithmétique, Mémoires de la Société Royale des sciences de Liège, (2) 10 (1883), Nr. 6, S. 135, und L. Gegenbauer, Asymptotische Gesetze der Zahlentheorie, Denkschriften der k. Akad. der Wiss., math.-naturw. Klasse, Wien, 49, I (1885), S. 37—80, Formel 170.

[14]) Sur une proposition de la théorie asymptotique des nombres, Annali di matematica pura ed applicata, (2) 16 (1889), S. 178—180.

[15]) Vgl. L. Gegenbauer, l. c., Formel 166, welche lautet

$$\mathfrak{M}\, d_n = \frac{1}{2}\left\{\log n + 2\,C + \log 2\right\},$$

und Ch. Hermite, l. c., wo die Formel

$$\sum_{k=1}^{n} d_k = \frac{n}{2} \log n + \left(C - \frac{1}{4}\right) n + O(\sqrt{n})$$

zu finden ist.

Die allgemeinere Lambertsche Reihe[16])

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(1-x^k)^2} \tag{50}$$

hat bekanntlich die besondere Eigenschaft, daß in der aus ihr entwickelten Potenzreihe

$$\begin{aligned} g(x) &= h_1 x + h_2 x^2 + h_3 x^3 + \cdots + h_n x^n + \cdots \\ &= x + 3x^2 + 4x^3 + 7x^4 + 6x^5 + 12x^6 + \\ &\quad + 8x^7 + 15x^8 + 13x^9 + 18x^{10} + \cdots \end{aligned} \tag{51}$$

der allgemeine Koeffizient h_n die Summe aller Teiler der Zahl n bedeutet, daß also

$$h_n = \int (n) \tag{52}$$

ist.

Setzen wir in (50) $x = y^2$ ein und entwickeln wir daraus eine Potenzreihe

$$g_2(y) = i_2 y^2 + i_4 y^4 + \cdots + i_{2n} y^{2n} + \cdots, \tag{53}$$

so zeigt uns eine einfache Überlegung, daß der allgemeine Koeffizient i_n der halben Summe aller geraden Teiler von n gleich ist, d. h.

$$i_n = \frac{1}{2} \int^{2} (n), \tag{54}$$

wenn wir mit $\int^{2}(n)$ die Summe aller geraden Teiler und im allgemeinen mit $\int^{m}(n)$ die Summe aller durch m teilbaren Teiler von n bezeichnen. Wir können aber auch (53) als unmittelbar aus (51) durch eben dieselbe Substitution entstanden denken, woraus sofort

$$i_{2n} = h_n \tag{55}$$

folgt. Aus (52), (54) und (55) erhalten wir den Satz

$$\int^{2} (n) = 2 \int \left(\frac{n}{2}\right). \tag{56}$$

Dabei ist natürlich $\int \left(\frac{n}{m}\right) = 0$, sobald $\frac{n}{m}$ keiner ganzen Zahl gleich ist.

---

[16]) Diese Reihe ist, wie schon Lambert selbst bemerkt hat, der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^n}{1 - x^n}$ gleich.

$S(n)$ sei die summatorische Funktion der Teilersumme $\int(n)$, also

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n} \int(k);$$

es gilt dann

$$S(n) \sim C n^2, \tag{57}$$

wo C eine Konstante ist, auf deren Wert es hier nicht ankommt.[16a])
Es ist weiter

$$\sum_{k=1}^{n} \overset{2}{\int}(k) = 2 S\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{C}{2} n^2 = \frac{1}{2} S(n), \tag{58}$$

also auch

$$\mathfrak{M} \overset{2}{\int}(n) \sim \frac{C \,.\, n}{2} \tag{59}$$

und

$$\mathfrak{M} \overset{2}{\int}(n) \sim \frac{1}{2} \mathfrak{M} \int(n), \tag{60}$$

d. h.: Die Summe der geraden Teiler einer Zahl ist im Mittel der halben Summe aller Teiler derselben Zahl gleich.

Ebenso folgt auch der weitere Satz

$$\mathfrak{M} \int(n) = 4\, \mathfrak{M} \int\left(\frac{n}{2}\right), \tag{61}$$

d. h.: Die Summe aller Teiler einer Zahl ist im Mittel viermal so groß wie die Summe aller Teiler der Hälfte dieser Zahl.

Bezeichnen wir mit $\overset{2}{\underset{g}{\int}}(n)$ die Summe der geraden Teiler der geraden Zahl n; es ist offenbar

$$\sum_{k=2}^{2n} \overset{2}{\underset{g}{\int}}(k) = 2 S(n) \tag{62}$$

und im Mittel

$$\frac{2 S(n)}{n};$$

die Summe aller Teiler der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, 2n$ ist $S(2n)$, also im Mittel auch

$$\frac{S(2n)}{2n} \sim \frac{4 S(n)}{2n} = \frac{2 S(n)}{n},$$

16a) C ist bekanntlich $= \frac{\pi^2}{12}$.

d. h.

$$\mathfrak{M} \overset{2}{\underset{g}{\int}} (n) \sim \mathfrak{M} \int (n), \tag{63}$$

oder mit Worten: Die Summe der geraden Teiler einer geraden Zahl ist im Mittel der Summe aller Teiler einer beliebigen Zahl gleich.

Eine ähnliche Bemerkung hätten wir auch bei der Gleichung (44) einschalten können; auf diese Weise hätten wir den Satz

$$\mathfrak{M}\, t_g^1 (n) \sim \mathfrak{M}\, t (n) \tag{64}$$

erhalten; dabei soll $t_g^1(n)$ die Anzahl der geraden Teiler der geraden Zahl n bedeuten. Gleichung (64) besagt:

Eine gerade Zahl hat im Mittel ebensoviele geraden Teiler wie eine beliebige Zahl Teiler überhaupt.

Die aus den Koeffizienten i_n gebildete Dirichletsche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i_n}{n^s} = \frac{i_2}{2^s} + \frac{i_4}{4^s} + \frac{i_6}{6^s} + \cdots \tag{65}$$

ist wegen (55) und wegen der bekannten Gleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int (n)}{n^s} = \zeta(s) \cdot \zeta(s-1), \quad \Re(s) > 2, \tag{66}$$

mit der Riemannschen ζ-Funktion durch die Gleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overset{2}{\int} (n)}{n^s} = \frac{1}{2^{s-1}} \cdot \zeta(s) \cdot \zeta(s-1) \tag{67}$$

verbunden.

Hier sollen noch die leicht zu beweisenden Gleichungen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int (n)}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \cdot \int_0^1 g(x) \cdot \left(\log \frac{1}{x}\right)^{s-1} \cdot \frac{dx}{x}, \tag{68}$$

$$\int_0^1 g(x) \cdot \left(\log \frac{1}{x}\right)^{s-1} \cdot \frac{dx}{x} = \zeta(s) \cdot \zeta(s-1) \cdot \Gamma(s), \tag{69}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overset{2}{\int} (n)}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \cdot \int_0^1 g_2(x) \cdot \left(\log \frac{1}{x}\right)^{s-1} \cdot \frac{dx}{x} \tag{70}$$

und

$$\int_0^1 g_2(x)\cdot\left(\log\frac{1}{x}\right)^{s-1}\cdot\frac{dx}{x}=\zeta(s)\cdot\zeta(s-1)\cdot\frac{\Gamma(s)}{2^s} \tag{71}$$

erwähnt werden.

Betrachten wir nun die allgemeinere Reihe

$$g_m(y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{y^{mk}}{(1-y^{mk})^2}, \tag{72}$$

die aus (50) durch Einsetzen von $x=y^m$ entsteht. Die Entwicklung von (72) in eine Potenzreihe ergibt

$$g_m(y)=j_m y^m+j_{2m}y^{2m}+\cdots+j_{nm}y^{nm}+\cdots; \tag{73}$$

hier bedeutet der allgemeine Koeffizient j_k den m^{ten} *Teil der Summe aller derjenigen Teiler der Zahl* k, *die Vielfache der Zahl* m sind, also

$$j_k=\frac{1}{m}\overset{m}{\int}(k). \tag{74}$$

Man kann aber auch (73) direkt aus (51) herleiten, woraus wir sofort

$$j_{nm}=h_n \tag{75}$$

und

$$\overset{m}{\int}(n)=m\int\left(\frac{n}{m}\right) \tag{76}$$

schließen.

Um den mittleren Wert der Funktion $\overset{m}{\int}(n)$ zu bestimmen, werden wir wie oben vorgehen und erhalten

$$\mathfrak{M}\overset{m}{\int}(k)\sim\frac{S(k)}{mk}; \tag{77}$$

es besteht also der Satz

$$\mathfrak{M}\overset{m}{\int}(k)\sim\frac{1}{m}\,\mathfrak{M}\int(k). \tag{78}$$

Aus (78) und (76) ergibt sich der weitere Satz

$$\mathfrak{M}\int(n)\sim m^2\cdot\mathfrak{M}\int\left(\frac{n}{m}\right)\cdot \tag{79}$$

Für die aus den Koeffizienten j_n gebildete Dirichletsche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{j_n}{n^s}$$

besteht die Beziehung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overset{m}{\int}(n)}{n^s} = \frac{1}{m^s} \cdot \zeta(s) \cdot \zeta(s-1), \tag{80}$$

ebenso auch

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overset{m}{\int}(n)}{n^s} = \frac{m}{\Gamma(s)} \cdot \int_0^1 g_m(x) \cdot \left(\log \frac{1}{x}\right)^{s-1} \cdot \frac{dx}{x} \tag{81}$$

und

$$\int_0^1 g_m(x) \cdot \left(\log \frac{1}{x}\right)^{s-1} \cdot \frac{dx}{x} = \zeta(s) \cdot \zeta(s-1) \cdot \frac{\Gamma(s)}{m^s}. \tag{81a}$$

Wenn wir nach der Summe der ungeraden Teiler einer Zahl fragen, so sehen wir, daß die Beziehungen nicht mehr so einfach sind. Zum Ausgangspunkte nehme ich die Reihe

$$\bar{g}_2(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{2m-1}}{(1-x^{2m-1})^2}, \tag{82}$$

woraus sich die Potenzreihe

$$\begin{aligned} \bar{g}_2(x) &= k_1 x + k_2 x^2 + k_3 x^3 + \cdots + k_n x^n + \cdots \\ &= x + 2x^2 + 4x^3 + 4x^4 + 6x^5 + 8x^6 + \\ &\quad + 8x^7 + 8x^8 + 13x^9 + 12x^{10} + \cdots \end{aligned} \tag{83}$$

entwickeln läßt.

Für diese Koeffizienten k besteht die interessante Beziehung

$$k_n = 2^{\iota(n)} \cdot \overset{(2)}{\int}(n); \tag{84}$$

$\overset{(2)}{\int}(n)$ bedeutet dabei die Summe aller ungeraden Teiler der Zahl n; im allgemeinen soll $\overset{(m)}{\int}(n)$ die Summe aller durch m nicht teilbaren Teiler der Zahl n bezeichnen. Da ja für alle ungeraden Zahlen $\iota(n) = 0$ ist, so ist

$$k_{2l+1} = \overset{(2)}{\int}(2l+1) = \int(2l+1). \tag{85}$$

Betrachten wir die Reihe

$$\begin{aligned} g(x) - 2g_2(x) &= x\int(1) + x^2\int^{(2)}(2) + x^3\int(3) + x^4\int^{(2)}(4) + \cdots \\ &= k'_1 x + k'_2 x^2 + k'_3 x^3 + \cdots + k'_n x^n + \cdots, \end{aligned} \tag{86}$$

wo

$$k'_n = \int^{(2)}(n) \tag{87}$$

ist, so bemerken wir, daß zwischen ihren Koeffizienten und denjenigen der Reihe (83) die Beziehung

$$k_n = 2^{\iota(n)} \cdot k'_n \tag{88}$$

besteht.

Die Summe aller ungeraden und aller geraden Teiler der Zahlen $1, 2, 3, \ldots 2n$ sei resp. $S_u(2n)$ und $S_g(2n)$. Es ist dann $S_u(2n) + S_g(2n) = S(2n) \sim 4S(n)$. Ferner ist

$$S_g(2n) \sim 2S(n),$$

also auch

$$S_u(2n) \sim 2S(n), \tag{89}$$

d. h.: Die Summe aller ungeraden Teiler ist der Summe aller geraden Teiler asymptotisch gleich.

Die aus den Koeffizienten k' gebildete Dirichletsche Reihe lautet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int^{(2)}(n)}{n^s} = \zeta(s) \cdot \zeta(s-1) \cdot (1 - 2^{1-s}).$$

Mit Berücksichtigung der Gleichung

$$\eta(s) = \zeta(s) \cdot (1 - 2^{1-s}) \tag{90}$$

erhalten wir daraus

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int^{(2)}(n)}{n^s} = \zeta(s-1) \cdot \eta(s). \tag{91}$$

Die Dirichletsche Reihe in (91) ist mit der Gammafunktion durch die Gleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int^{(2)}(n)}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \cdot \int_0^1 \{g(x) - 2g_2(x)\} \cdot \left(\log\frac{1}{x}\right)^{s-1} \cdot \frac{dx}{x} \tag{92}$$

verbunden. Daraus folgt

$$\int_0^1 \{g(x) - 2g_2(x)\} \cdot \left(\log \frac{1}{x}\right)^{s-1} \cdot \frac{dx}{x} = \zeta(s-1) \cdot \eta(s) \cdot \Gamma(s). \quad (93)$$

Für die Reihe $\bar{g}_2(x)$ besteht die Beziehung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\iota(n)} \cdot \overset{(2)}{\int}(n)}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \cdot \int_0^1 \bar{g}_2(x) \cdot \left(\log \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{dx}{x}. \quad (94)$$

Die Reihe in (94) links kann auch mit der Riemannschen Zetafunktion in Verbindung gebracht werden. Mit Rücksicht auf (88) haben wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\iota(n)} \cdot \overset{(2)}{\int}(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int(n)}{n^s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int(2n) - 2^{\iota(2n)} \cdot \overset{(2)}{\int}(2n)}{(2n)^s}.$$

Wir können uns leicht überzeugen, daß

$$h_{2n} - k_{2n} = h_n, \quad (95)$$

d. h.

$$\int(2n) - 2^{\iota(2n)} \cdot \overset{(2)}{\int}(2n) = \int(n) \quad (95a)$$

ist. Daraus schließen wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\iota(n)} \cdot \overset{(2)}{\int}(n)}{n^s} = \frac{2^s - 1}{2^s} \cdot \zeta(s) \cdot \zeta(s-1), \quad (96)$$

woraus auch

$$\int_0^1 \bar{g}_2(x) \cdot \left(\log \frac{1}{x}\right)^{s-1} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{2^s - 1}{2^s} \cdot \Gamma(s) \cdot \zeta(s) \cdot \zeta(s-1) \quad (97)$$

folgt.

Hier soll noch eine Bemerkung eingeschaltet werden. Es ist

$$\overset{(2)}{\int}(2n) = \overset{(2)}{\int}(n);$$

wegen

$$\iota\left(\frac{n}{2}\right) = \iota(n) - 1 \quad (98)$$

besteht also die Gleichung

$$k_{2n} = 2k_n. \quad (99)$$

Wir verallgemeinern jetzt noch die Reihe (82) und setzen

$$\begin{aligned}\bar{g}_m(x) = \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{x^2}{(1-x^2)^2} + \cdots + \frac{x^{m-1}}{(1-x^{m-1})^2} + \\ + \frac{x^{m+1}}{(1-x^{m+1})^2} + \cdots,\end{aligned} \tag{100}$$

wo also

$$\bar{g}_m(x) = g(x) - g_m(x) \tag{101}$$

ist. Für die Koeffizienten l der daraus entwickelten Potenzreihe

$$\bar{g}_m(x) = l_1 x + l_2 x^2 + l_3 x^3 + \cdots + l_n x^n + \cdots \tag{102}$$

bestehen die Relationen

$$l_n = h_n - j_n \tag{103}$$

und

$$l_n = m^{\iota_m(n)} \cdot \overset{(m)}{\int}(n). \tag{104}$$

Für die Reihe

$$g(x) - m\, g_m(x) = l'_1 x + l'_2 x^2 + l'_3 x^3 + \cdots + l'_n x^n + \cdots \tag{105}$$

gilt dagegen der Satz

$$l'_n = \overset{(m)}{\int}(n). \tag{106}$$

Den mittleren Wert der Funktion $\overset{(m)}{\int}(n)$ können wir leicht bestimmen; es ist

$$\mathfrak{M} \overset{(m)}{\int}(n) \sim \frac{m-1}{m} \mathfrak{M} \int(n). \tag{107}$$

Für die entsprechende Dirichletsche Reihe haben wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overset{(m)}{\int}(n)}{n^s} = \zeta(s) \cdot \zeta(s-1) \cdot (1 - m^{1-s}). \tag{108}$$

Es bestehen weiter die Gleichungen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overset{(m)}{\int}(n)}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \cdot \int_0^1 \{g(x) - m\, g_m(x)\} \cdot \left(\log \frac{1}{x}\right)^{s-1} \cdot \frac{dx}{x}, \tag{109}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \{g(x) - m\, g_m(x)\} \cdot \left(\log \frac{1}{x}\right)^{s-1} \cdot \frac{dx}{x} = \\ = \zeta(s) \cdot \zeta(s-1) \cdot \Gamma(s) \cdot (1 - m^{1-s}),\end{aligned} \tag{110}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^{t_m(n)} \cdot \overset{(m)}{f}(n)}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \cdot \int_0^1 \bar{g}_m(x) \cdot \left(\log \frac{1}{x}\right)^{s-1} \cdot \frac{dx}{x}, \tag{111}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^{t_m(n)} \cdot \overset{(m)}{f}(n)}{n^s} = \frac{m^s - 1}{m^s} \cdot \zeta(s) \cdot \zeta(s-1) \tag{112}$$

und

$$\int_0^1 \bar{g}_m(x) \cdot \left(\log \frac{1}{x}\right)^{s-1} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{m^s - 1}{m^s} \cdot \Gamma(s) \cdot \zeta(s) \cdot (s-1). \tag{113}$$

§ 3. Die Verteilung der Teiler.

Im vorigen Paragraphen haben wir u. a. die Anzahl der ungeraden Teiler einer beliebigen Zahl betrachtet; hier wollen wir die Anzahl der Teiler einer ungeraden Zahl untersuchen. Wir bezeichnen diese Anzahl mit $t_u(m)$. Für die entsprechende summatorische Funktion

$$F(m) = \sum_{n=1}^{2n-1=m} t(2n-1) = \sum_{k=1}^{m}{}' t_u(k), \tag{114}$$

wobei m als ungerade Zahl vorausgesetzt wird und wobei k alle ungeraden Zahlen durchlaufen soll, findet man bei R. Lipschitz[17]) und später bei J. Hacks[18]) die Formel

$$F(m) = \left[\frac{m+1}{2}\right] + \left[\frac{m+3}{6}\right] + \left[\frac{m+5}{10}\right] + \cdots + \left[\frac{m+m}{2m}\right], \tag{115}$$

die man auch so[19])

$$F(m) = \sum_{k=1}^{\nu} \left[\frac{m-1+2k}{4k-2}\right] \tag{116}$$

schreiben kann. Hier ist

$$\nu = \left[\frac{m+1}{2}\right] = \frac{m+1}{2}.$$

[17]) Sur les sommes des diviseurs des nombres. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, Paris, 100 (1885), S. 845—847.

[18]) Einige Sätze über Summen von Divisoren, Acta Mathematica, 9 (1887), S. 301—320.

[19]) Vgl. J. Hacks, Über Summen von größten Ganzen, ibid., 10 (1887), S. 1—52.

Um einen asymptotischen Ausdruck für die Funktion $F(m)$ zu finden, schreiben wir

$$F(m) = \frac{m-1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{2k-1} + \sum_{k=1}^{\nu} \frac{k}{2k-1} + O(m). \quad (117)$$

Nun ist

$$\sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{2k-1} = \frac{1}{2}(C + \log 2 + \log m) + O\left(\frac{1}{m}\right);$$

also auch

$$\begin{aligned} \frac{m-1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{2k-1} &= \frac{m-1}{4}(C + \log 2 + \log m) + O(1) \\ &= \frac{m \log m}{4} + O(m). \end{aligned} \quad (118)$$

Es ist ferner

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\nu} \frac{k}{2k-1} &= 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{4}{7} + \cdots \\ &= 1 + \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(1 - \frac{2}{5}\right) + \left(1 - \frac{3}{7}\right) + \cdots \\ &= \frac{m+1}{2} - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \cdots\right) > 0, \end{aligned}$$

also jedenfalls

$$\sum_{k=1}^{\nu} \frac{k}{2k-1} = O(m). \quad (119)$$

Somit haben wir

$$F(m) = \frac{m \log m}{4} + O(m), \quad (120)$$

d. h.

$$F(m) \sim \frac{m \log m}{4}. \quad (121)$$

Nun ist bekanntlich

$$T(m) = \sum_{k=1}^{m} t(k) \sim m \log m, \quad (122)$$

also können wir sagen:

Die Anzahl der Teiler der ungeraden Zahlen beträgt asymptotisch ein Viertel der Anzahl der Teiler aller Zahlen überhaupt, oder mit anderen Worten:

Eine gerade Zahl hat im Mittel *drei*mal so viel Teiler wie eine ungerade.

Mit Rücksicht auf das Gesetz (14) erhalten wir weiter folgende zwei Sätze:

Die Anzahl der ungeraden Teiler aller geraden Zahlen ist der Anzahl aller Teiler der ungeraden Zahlen asymptotisch gleich,

und:

Eine gerade Zahl hat im Mittel ebensoviele ungerade Teiler wie eine ungerade Zahl.

Wenn wir zu den mittleren Werten übergehen, so erhalten wir

$$\mathfrak{M}\, t_u(m) = \lim_{m=\infty} \frac{F(m)}{\frac{m}{2}} = \frac{\log m}{2}, \tag{123}$$

d. h.:

Eine ungerade Zahl hat im Mittel nur *halb* so viel Teiler wie eine beliebige Zahl.

Bezeichnen wir mit $t_g(m)$ die Anzahl aller Teiler der geraden Zahl m; es ist jedenfalls

$$\frac{\mathfrak{M}\, t_u(m) + \mathfrak{M}\, t_g(m)}{2} = \mathfrak{M}\, t(m);$$

daraus folgern wir, daß

$$\mathfrak{M}\, t_g(m) = \frac{3}{2} \log m \tag{124}$$

ist, d. h.:

Eine gerade Zahl hat im Mittel *anderthalb*mal so viel Teiler wie eine beliebige Zahl.

Diese Betrachtungen fortsetzend, wollen wir hier die Funktion $\sigma(m)$ untersuchen; dieselbe bedeutet die Summe aller Teiler einer ungeraden Zahl m. Für die entsprechende summatorische Funktion

$$\mathfrak{S}(m) = \sum_{k=1}^{2k-1=m} \int (2k-1) = \sum_{k=1}^{m}{}' \sigma(m), \tag{125}$$

wobei sich die zweite Summe nur über alle ungeraden Zahlen $\leqq m$ erstreckt, findet man bei Hacks a. a. O. die Formel

$$\mathfrak{S}(m) = \sum_{k=1}^{\nu} \left[\frac{m-1+2k}{4k-2}\right] \cdot (2k-1). \tag{126}$$

Meinen Zwecken entspricht besser folgende Gleichung:

$$\mathfrak{S}(m) = \sum_{k=1}^{m} k \cdot \left[\frac{m+k}{2k}\right] - \sum_{k=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]} 2k \cdot \left[\frac{m+2k}{4k}\right], \tag{127}$$

die ich leicht aus (126) ableiten kann.

Um aus (127) einen asymptotischen Ausdruck für $\mathfrak{S}(m)$ zu erhalten, muß ich eine Umformung durchführen, die mittels einer Erweiterung eines Dirichletschen Satzes[20]) gelingt.

Es sei

$$F(x) = f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(x); \tag{128}$$

dann ist auch

$$F\left[\frac{x}{2k-1}\right] = f(1) + f(2) + \cdots + f\left[\frac{x}{2k-1}\right] \tag{129}$$

und ebenso

$$\sum_{k=1}^{x} F\left[\frac{x}{2k-1}\right] = \sum_{k=1}^{x} \left(f(1) + f(2) + \cdots + f\left[\frac{x}{2k-1}\right]\right). \tag{130}$$

Dabei sind natürlich die Glieder der Summe für

$$k > \left[\frac{x+1}{2}\right]$$

alle gleich $f(0)$.

Die Funktion $f(i)$ für ein beliebiges Argument i kommt auf der rechten Seite von (130) so oft vor, als

$$i \leqq \left[\frac{x}{2k-1}\right]$$

ist, d. h. auch so oft, als

$$k \leqq \left[\frac{x+i}{2i}\right]$$

ist, also genau

$$\left[\frac{x+i}{2i}\right]$$

Mal. Wir können also schreiben

$$\sum_{k=1}^{x} F\left[\frac{x}{2k-1}\right] = \sum_{k=1}^{x} f(x) \cdot \left[\frac{x+k}{2k}\right]. \tag{131}$$

[20]) Vgl. etwa P. Bachmann, Die analytische Zahlentheorie. Leipzig 1894, S. 358.

Wenn wir hier $f(k) = k$ setzen, so ist

$$F(k) = \frac{k(k+1)}{2}$$

und wir erhalten die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{x} k \cdot \left[\frac{x+k}{2k}\right] = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{x} \left(\left[\frac{x}{2k-1}\right]^2 + \left[\frac{x}{2k-1}\right]\right);$$

mit Rücksicht jedoch auf die Eigenschaften der Funktion

$$\left[\frac{x}{2k-1}\right]$$

können wir die Summationsgrenze rechts herabsetzen und schreiben

$$\sum_{k=1}^{x} k \cdot \left[\frac{x+k}{2k}\right] = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\nu} \left(\left[\frac{x}{2k-1}\right]^2 + \left[\frac{x}{2k-1}\right]\right). \tag{132}$$

Durch ganz ähnliche Betrachtungen würden wir auch die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{\left[\frac{x}{2}\right]} 2k \cdot \left[\frac{x+2k}{4k}\right] = \sum_{k=1}^{\left[\frac{x+2}{4}\right]} \left(\left[\frac{x}{4k-2}\right]^2 + \left[\frac{x}{4k-2}\right]\right) \tag{133}$$

erhalten.

Es ist somit

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}(m) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\frac{m+1}{2}} \left(\left[\frac{m}{2k-1}\right]^2 + \left[\frac{m}{2k-1}\right]\right) - \\ - \sum_{k=1}^{\left[\frac{m+2}{4}\right]} \left(\left[\frac{m}{4k-2}\right]^2 + \left[\frac{m}{4k-2}\right]\right).\end{aligned} \tag{134}$$

Nun setzen wir

$$\left[\frac{m}{2k-1}\right] = \frac{m}{2k-1} + O(1)$$

und bestimmen

$$\sum_{k=1}^{\frac{m+1}{2}} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} + O\left(\frac{1}{m}\right) \tag{135}$$

und

$$\sum_{k=1}^{\left[\frac{m+2}{4}\right]} \frac{1}{(4k-2)^2} = \frac{\pi^2}{32} + O\left(\frac{1}{m}\right). \tag{136}$$

Nach einfacher Rechnung folgt

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}(m) &= \frac{\pi^2 m^2}{16} - \frac{\pi^2 m^2}{32} + O(m \log m) \\ &= \frac{\pi^2 m^2}{32} + O(m \log m),\end{aligned} \tag{137}$$

d. h.

$$\mathfrak{S}(m) \sim \frac{\pi^2 m^2}{32} \tag{138}$$

und

$$\mathfrak{M}\,\sigma(m) \sim \frac{\pi^2 m}{16}. \tag{139}$$

Mit Rücksicht auf das bekannte Resultat

$$\mathfrak{M} \int(n) \sim \frac{\pi^2 m}{12}$$

folgt daraus der Satz: Die Summe aller Teiler einer ungeraden Zahl verhält sich im Mittel zur Summe aller Teiler einer beliebigen Zahl wie *3 : 4.*

Bezeichnen wir mit $\sigma_1(n)$ die Summe aller Teiler der geraden Zahl n und mit $\mathfrak{S}_1(n)$ die entsprechende summatorische Funktion, dann ist

$$\mathfrak{S}_1(n) \sim \frac{\pi^2 n^2}{12} - \frac{\pi^2 n^2}{32} = \frac{5}{96}\pi^2 n^2 \tag{140}$$

und

$$\mathfrak{M}\,\sigma_1(n) \sim \frac{5}{48}\pi^2 n, \tag{141}$$

d. h.: Die Summe aller Teiler einer geraden Zahl verhält sich im Mittel zur Summe aller Teiler einer beliebigen Zahl wie *5 : 4.*

Während sich die Anzahl aller Teiler der ungeraden Zahlen zur Anzahl aller Teiler der geraden Zahlen asymptotisch verhält wie 1 : 3, stehen die entsprechenden Summen asymptotisch im Verhältnis *3 : 5.* Daraus folgt, daß die Teiler der ungeraden Zahlen durchschnittlich größer sind als die Teiler der geraden Zahlen. Der mittlere Wert des Verhältnisses eines Teilers einer ungeraden Zahl zu einem Teiler einer geraden Zahl ist *9 : 5.*

Greifen wir zur Gleichung (56) zurück und setzen dort $n = 2m$ ein; es ist dann

$$\overset{2}{\int}(2m) = 2\int(m)$$

und

$$\sum_{k=1}^{m} \overset{2}{\int}(2k) = 2\sum_{k=1}^{m} \int(k) \sim \frac{\pi^2 m^2}{6}.$$

Also ist

$$\mathfrak{M} \overset{2}{\int}(2m) \sim \frac{\pi^2 m}{6};$$

hier setzen wir wieder $2m = n$ ein und erhalten auf diese Weise

$$\mathfrak{M} \overset{2}{\underset{g}{\int}}(n) \sim \frac{\pi^2 n}{12},$$

wo $\overset{2}{\underset{g}{\int}}(n)$ die Summe der geraden Teiler der geraden Zahl n bedeutet.

Bezeichnen wir mit $\overset{(2)}{\underset{g}{\int}}(n)$ die Summe der ungeraden Teiler der geraden Zahl n, so ist

$$\mathfrak{M} \overset{(2)}{\underset{g}{\int}}(n) \sim \frac{5}{48}\pi^2 n - \frac{1}{12}\pi^2 n = \frac{1}{48}\pi^2 n, \tag{142}$$

d. h.: Die Summe der ungeraden Teiler einer geraden Zahl verhält sich im Mittel zur Summe der geraden Teiler derselben geraden Zahl wie *1 : 4*.

Mit Rücksicht auf (138) haben wir ferner: Die Summe der ungeraden Teiler aller geraden Zahlen ist asymptotisch $= \frac{1}{3}$ der Summe der Teiler aller ungeraden Zahlen.

Aus dem Obigen sehen wir, daß bei einer geraden Zahl die geraden Teiler durchschnittlich größer als die ungeraden sind, was ja trivial ist; der mittlere Wert des Verhältnisses eines geraden Teilers einer geraden Zahl zu einem ungeraden Teiler derselben Zahl ist *2 : 1*.

Es ergeben sich schließlich noch folgende zwei Sätze:

Die Teiler der ungeraden Zahlen sind im Mittel *dreimal* so groß wie die ungeraden Teiler der geraden Zahlen, und:

Der mittlere Wert des Verhältnisses eines Teilers einer ungeraden Zahl zu einem geraden Teiler einer geraden Zahl ist *3 : 2*.

§ 4. Zwei zahlentheoretische Funktionen.

Hier untersuche ich eine neue zahlentheoretische Funktion, die ich mit $v(n)$ bezeichne und welche die Summe aller derjenigen Teiler der Zahl n, welche Potenzen der Zahl 2 sind, bedeutet. Es sei

$$n = 2^{\alpha} \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \ldots p_l^{\alpha_l};$$

dann ist

$$v(n) = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{\alpha} = \frac{2^{\alpha+1}-1}{2-1} - 1 = 2^{\alpha+1} - 2,$$

also

$$v(n) = 2(2^{\alpha} - 1). \tag{143}$$

Für die summatorische Funktion

$$Y(x) = \sum_{k=1}^{x} v(k)$$

besteht offenbar die Beziehung

$$Y(x) = 0 \cdot \left[\frac{x+1}{2}\right] + 2 \cdot \left[\frac{x+2}{4}\right] + 6 \cdot \left[\frac{x+4}{8}\right] + 14 \cdot \left[\frac{x+8}{16}\right] + \cdots$$

oder kürzer

$$Y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (2^{n+1} - 2) \cdot \left[\frac{x+2^n}{2^{n+1}}\right]. \tag{144}$$

Die Summe bricht von selbst ab, sobald

$$\frac{x}{2^{n+1}} < \frac{1}{2}$$

wird; man hat also nur bis

$$n_1 = \left[\frac{\log x}{\log 2}\right] = O(\log x) \tag{145}$$

zu summieren.

Wir setzen jetzt

$$\left[\frac{x+2^n}{2^{n+1}}\right] = \frac{x}{2^{n+1}} + \frac{1}{2} - \delta, \tag{146}$$

wo δ einen positiven echten Bruch (oder die Null) bedeutet, und erhalten

$$Y(x) = \sum_{n=1}^{n_1} \left(x - \frac{x}{2^n} + 2^n - 1 - \delta \cdot 2^{n+1} + 2\delta\right). \tag{147}$$

Nun müssen wir die einzelnen Glieder in (147) abschätzen; das erste ist

$$\sum_{n=1}^{n_1} x = n_1 x = \left[\frac{\log x}{\log 2}\right] \cdot x = \frac{x \log x}{\log 2} + O(x) = O(x \log x), \quad (148)$$

das zweite

$$\sum_{n=1}^{n_1} \frac{x}{2^n} = x \cdot \sum_{n=1}^{n_1} \frac{1}{2^n} = x\left(1 - \frac{1}{2^{n_1}}\right) = O(x), \quad (149)$$

das dritte

$$\sum_{n=1}^{n_1} 2^n = 2^{n_1+1} - 2 = O(x), \quad (150)$$

das vierte

$$\sum_{n=1}^{n_1} 1 = n_1 = O(\log x), \quad (151)$$

das fünfte

$$\sum_{n=1}^{n_1} \delta \cdot 2^{n+1} = 2\delta \cdot \sum_{n=1}^{n_1} 2^n = 2\delta \cdot (2^{n_1+1} - 2) = O(x), \quad (152)$$

endlich das sechste

$$\sum_{n=1}^{n_1} 2\delta = 2\delta n_1 = O(\log x). \quad (153)$$

Durch Einsetzen von (148)—(153) in (147) erhalten wir

$$Y(x) = \frac{x \log x}{\log 2} + O(x), \quad (154)$$

d. h.

$$Y(x) \sim \frac{x \log x}{\log 2}, \quad (155)$$

woraus

$$\mathfrak{M}\, v(x) \sim \frac{\log x}{\log 2} \quad (156)$$

folgt.

Für die aus den Funktionen $\iota(n)$ und $v(n)$ gebildeten Dirichletschen Reihen bestehen die Beziehungen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\iota(n)}{n^s} = \frac{1}{2^s - 1} \cdot \zeta(s) \quad (157)$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v(n)}{n^s} = \frac{1}{2^{s-1}-1} \cdot \zeta(s). \tag{158}$$

Dabei muß natürlich

$$\Re(s) > 1$$

sein.

Die Funktion $v(n)$ kann verallgemeinert werden. Ich bezeichne mit $v_m(n)$ die Summe aller derjenigen Teier der Zahl n, die Potenzen der Zahl m sind. Es ist also

$$v_m(n) = m + m^2 + m^3 + \cdots + m^\beta = \frac{m^{\beta+1}-1}{m-1} - 1, \tag{159}$$

wenn

$$t_m(n) = \beta$$

ist. Dies kann auch so geschrieben werden:

$$v_m(n) = \frac{m(m^\beta - 1)}{m-1}. \tag{160}$$

Betrachten wir die summatorische Funktion

$$Y_m(x) = \sum_{n=1}^{x} v_m(n).$$

Es ist offenbar

$$\begin{aligned} Y_m(n) = {} & 0 \cdot \left[\frac{x+1}{m}\right] + 0 \cdot \left[\frac{x+2}{m}\right] + \cdots + 0 \cdot \left[\frac{x+m-1}{m}\right] + \\ & + m \cdot \left[\frac{x+m}{m^2}\right] + m \cdot \left[\frac{x+2m}{m^2}\right] + \cdots + m \cdot \left[\frac{x+m(m-1)}{m^2}\right] + \\ & + m(m+1) \cdot \left[\frac{x+m^2}{m^3}\right] + m(m+1) \cdot \left[\frac{x+2m^2}{m^3}\right] + \cdots \\ & \qquad + m(m+1) \cdot \left[\frac{x+m^2 \cdot (m-1)}{2}\right] + \\ & + \cdots \end{aligned}$$

oder kürzer

$$Y_m(n) = \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m^n-1)}{m-1} \cdot \left[\frac{x+m^n \cdot k}{m^{n+1}}\right]. \tag{161}$$

Wir wollen zuerst die Summe

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m^n-1)}{m-1} \cdot \left[\frac{x+m^n \cdot k}{m^{n+1}}\right] \tag{162}$$

untersuchen; dieselbe bricht ab, sobald

$$\frac{x}{m^{n+1}} < \frac{m-k}{m}$$

wird; es genügt also, wenn man nur bis

$$n_1 = \left[\frac{\log x - \log(m-k)}{\log m}\right] = O(\log x) \tag{163}$$

summiert. Ähnlich wie oben erhalten wir hier

$$S = \sum_{n=1}^{n_1}\left(\frac{x}{m-1} + \frac{k\,m^n}{m-1} - \frac{\delta\,m^{n+1}}{m-1} - \frac{x}{m^n(m-1)} - \frac{k}{m-1} + \frac{\delta\,m}{m-1}\right). \tag{164}$$

Nun ist die erste Summe

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{n_1}\frac{x}{m-1} &= \frac{x\,n_1}{m-1} = \frac{x}{m-1}\cdot\left[\frac{\log x - \log(m-k)}{\log m}\right] = \\ &= \frac{x\log x}{(m-1)\cdot\log m} + O(x) = O(x\log x),\end{aligned} \tag{165}$$

die zweite

$$\sum_{n=1}^{n_1}\frac{k\,m^n}{m-1} = \frac{k}{m-1}\cdot\sum_{n=1}^{n_1} m^n = \frac{k\,m\,(m^{n_1}-1)}{(m-1)^2} = O(x), \tag{166}$$

die dritte

$$\sum_{n=1}^{n_1}\frac{\delta\,m^{n+1}}{m-1} = \frac{\delta\,m}{m-1}\cdot\sum_{n=1}^{n_1} m^n = \frac{\delta\,m^2\cdot(m^{n_1}-1)}{(m-1)^2} = O(x), \tag{167}$$

die vierte

$$\sum_{n=1}^{n_1}\frac{x}{m^n\cdot(m-1)} = \frac{x}{m-1}\cdot\sum_{n=1}^{n_1}\frac{1}{m^n} = \frac{x\,(m^{n_1}-1)}{m^{n_1}\cdot(m-1)^2} = O(x), \tag{168}$$

die fünfte

$$\sum_{n=1}^{n_1}\frac{k}{m-1} = \frac{n_1\,k}{m-1} = O(\log x) \tag{169}$$

und die sechste

$$\sum_{n=1}^{n_1}\frac{\delta\,m}{m-1} = \frac{n_1\,\delta\,m}{m-1} = O(\log x). \tag{170}$$

Durch Einsetzen von (165)—(170) in (164) erhalten wir

$$S = \frac{x \log x}{(m-1) \cdot \log m} + O(x). \tag{171}$$

Daraus folgt

$$Y_m(x) = \sum_{k=1}^{m-1} S = \frac{x \log x}{\log m} + O(x), \tag{172}$$

d. h.

$$Y_m(x) \sim \frac{x \log x}{\log m} \tag{173}$$

und

$$\mathfrak{M}\, v_m(n) \sim \frac{\log n}{\log m}. \tag{174}$$

Im Zusammenhange mit den hier behandelten Fragen soll noch eine neue zahlentheoretische Funktion untersucht werden, die ich mit $\rho(n)$ bezeichne und welche die Summe der Exponenten aller in n aufgehenden Potenzen der Zahl 2 bedeuten soll. Es ist also $\rho(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + \alpha$, wenn $\alpha = \iota(n)$ ist, somit auch

$$\rho(n) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}. \tag{175}$$

Die Funktionen $\rho(n)$ und $\iota(n)$ sind offenbar durch die Relation

$$\rho(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \iota\left(\frac{n}{2^k}\right) \tag{176}$$

miteinander verbunden.

Bezeichnen wir mit

$$P(x) = \sum_{n=1}^{x} \rho(n)$$

die summatorische Funktion; dann ist jedenfalls

$$P(x) = 0 \cdot \left[\frac{x+1}{2}\right] + 1 \cdot \left[\frac{x+2}{4}\right] + 3 \cdot \left[\frac{x+4}{8}\right] + 6 \cdot \left[\frac{x+8}{16}\right] +$$

oder kürzer

$$P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x+2^n}{2^{n+1}}\right] \cdot \frac{n(n+1)}{2}. \tag{177}$$

Auch hier bricht die Summe bei

$$n_1 = \left[\frac{\log x}{\log 2}\right] = O(\log x)$$

ab und es ist

$$P(x) = \sum_{n=1}^{n_1} \left(\frac{x\,n\,(n+1)}{2^{n+2}} + \frac{n\,(n+1)}{4} - \frac{\delta\,n\,(n+1)}{2}\right). \quad (178)$$

Um nun

$$\sum_{n=1}^{n_1} \frac{x\,n\,(n+1)}{2^{n+2}} = \frac{x}{4} \cdot \sum_{n=1}^{n_1} \frac{n\,(n+1)}{2^n} = \frac{x}{4} \cdot S_1$$

zu bestimmen, setzen wir

$$\frac{n\,(n+1)}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}\,(1 + 2 + 3 + \cdots + n)$$

ein; daraus folgt

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n_1} k \cdot \sum_{n=k}^{n_1} \frac{1}{2^{n-1}}. \quad (179)$$

Schließlich erhalten wir

$$S_1 = 2^2\left(2 - \frac{n_1 + 2}{2^{n_1}}\right) - \frac{n_1\,(n_1 + 1)}{2^{n_1}} \quad (180)$$

und

$$\sum_{n=1}^{n_1} \frac{x\,n\,(n+1)}{2^{n+2}} = x\left(2 - \frac{n_1 + 2}{2^{n_1}}\right) - \frac{x\,n_1(n_1+1)}{2^{n_1+2}},$$

d. h.

$$\sum_{n=1}^{n_1} \frac{x\,n\,(n+1)}{2^{n+2}} = 2\,x + O(\log^2 x). \quad (181)$$

Das zweite Glied in (178) ist

$$\sum_{n=1}^{n_1} \frac{n\,(n+1)}{4} = \frac{n_1^3}{12} + \frac{n_1^2}{4} + \frac{n_1}{6} = O(\log^3 x); \quad (182)$$

das dritte Glied ist

$$\sum_{n=1}^{n_1} \frac{\delta n\,(n+1)}{2} = \frac{\delta n_1^3}{6} + \frac{\delta n_1^2}{2} + \frac{\delta n_1}{3} = O(\log^3 x), \quad (183)$$

also ist

$$P(x) = 2x + O(\log^3 x), \tag{184}$$

d. h.

$$P(x) \sim 2x \tag{185}$$

und

$$\mathfrak{M}\,\rho(n) = 2. \tag{186}$$

Auch diese Funktion soll verallgemeinert werden; ich bezeichne mit $\rho_m(n)$ die Summe der Exponenten aller in n aufgehenden Potenzen der Zahl m. Es ist

$\rho_m(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + \beta$, wobei $\beta = \iota_m(n)$ ist, also auch

$$\rho_m(n) = \frac{\beta(\beta+1)}{2}. \tag{187}$$

Die Funktionen $\rho_m(n)$ und $\iota_m(n)$ sind durch die Relation

$$\rho_m(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \iota\left(\frac{n}{m^k}\right) \tag{188}$$

miteinander verbunden.

Für die summatorische Funktion

$$P_m(n) = \sum_{n=1}^{x} \rho_m(n)$$

besteht offenbar die Gleichung

$$\begin{aligned} P_m(x) = {} & 0\cdot\left[\frac{x+1}{m}\right] + 0\cdot\left[\frac{x+2}{m}\right] + \cdots + 0\cdot\left[\frac{x+m-1}{m}\right] \\ & + 1\cdot\left[\frac{x+m}{m^2}\right] + 1\cdot\left[\frac{x+2m}{m^2}\right] + \cdots + 1\cdot\left[\frac{x+m(m-1)}{m^2}\right] \\ & + 3\cdot\left[\frac{x+m^2}{m^3}\right] + 3\cdot\left[\frac{x+2m^2}{m^3}\right] + \cdots + 3\cdot\left[\frac{x+m^2(m-1)}{m^3}\right] \\ & + \cdots \end{aligned}$$

oder kürzer

$$P_m(x) = \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x+m^n k}{m^{n+1}}\right] \cdot \frac{n(n+1)}{2}. \tag{189}$$

Betrachten wir zuerst die Summe

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x + m^n k}{m^{n+1}}\right] \cdot \frac{n(n+1)}{2};$$

dieselbe bricht bei

$$n_1 = \left[\frac{\log x - \log(m-k)}{\log m}\right] = O(\log x)$$

ab; es ist also

$$S_2 = \sum_{n=1}^{n_1} \left(\frac{x\, n(n+1)}{2\, m^{n+1}} + \frac{k\, n(n+1)}{2m} - \frac{\delta\, n(n+1)}{2}\right). \tag{190}$$

Es sei

$$\sum_{n=1}^{n_1} \frac{x\, n(n+1)}{2\, m^{n+1}} = \frac{x}{2m} \cdot \sum_{n=1}^{n_1} \frac{n(n+1)}{m^n} = \frac{x}{2m} \cdot S_3;$$

um die Summe S_3 zu ermitteln, setze ich

$$\frac{n(n+1)}{m^n} = \frac{2}{m^n}(1 + 2 + 3 + \cdots + n).$$

Dann ist

$$S_3 = \frac{2}{m} + \frac{2}{m^2}(1+2) + \frac{2}{m^3}(1+2+3) + \cdots$$
$$\cdots + \frac{2}{m^{n_1}}(1 + 2 + 3 + \cdots + n_1),$$

also

$$\begin{aligned} S_3 = \frac{2}{m} + \frac{2}{m^2} + \frac{2}{m^3} + \cdots\cdots\cdots\cdots + \frac{2}{m^{n_1}} \\ + \frac{4}{m^2} + \frac{4}{m^3} + \frac{4}{m^4} + \cdots\cdots\cdots + \frac{4}{m^{n_1}} \\ + \frac{6}{m^3} + \frac{6}{m^4} + \frac{6}{m^5} + \cdots + \frac{6}{m^{n_1}} \\ + \cdots\cdots \end{aligned}$$

$$= 2\sum_{n=1}^{n_1} \frac{1}{m^n} + 4\sum_{n=2}^{n_1} \frac{1}{m^n} + 6\sum_{n=3}^{n_1} \frac{1}{m^n} + \cdots,$$

oder kürzer

$$S_3 = \sum_{k=1}^{n_1} 2k \sum_{n=k}^{n_1} \frac{1}{m^n}. \tag{191}$$

Jetzt wollen wir

$$\sum_{n=k}^{n_1} \frac{1}{m^n} = S_4$$

berechnen; es ist

$$S_4 = \frac{1}{m^{k-1}(m-1)} - \frac{1}{m^{n_1}(m-1)} = \frac{m^{n_1-k+1}-1}{m^{n_1}\cdot(m-1)}. \quad (192)$$

Daraus folgt

$$S_3 = \frac{2}{m^{n_1}\cdot(m-1)} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n_1} k\, m^{n-k+1} - \sum_{k=1}^{n_1} k\right). \quad (193)$$

Wir setzen

$$\sum_{k=1}^{n_1} k\, m^{n-k+1} = S_5$$

und erhalten

$$S_5 = m^{n_1+1} \cdot \sum_{k=1}^{n_1} \frac{k}{m^k} = m^{n_1+1} \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{m^k} - \sum_{k=n_1+1}^{\infty} \frac{k}{m^k}\right).$$

Es ist bekanntlich

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{m^k} = \frac{k}{(m-1)^2} \quad (194)$$

und

$$\sum_{k=n_1+1}^{\infty} \frac{k}{m^k} = \frac{n_1(m-1)+m}{m^{n_1}\cdot(m-1)^2}, \quad (195)$$

also auch

$$\begin{aligned} S_5 &= m^{n_1+1} \cdot \left\{\frac{m}{(m-1)^2} - \frac{n_1(m-1)+m}{m^{n_1}\cdot(m-1)^2}\right\} = \\ &= \frac{m^{n_1+2}}{(m-1)^2} - \frac{n_1 m(m-1)+m^2}{(m-1)^2}. \end{aligned} \quad (196)$$

Daraus folgt weiter

$$S_3 = \frac{2}{m^{n_1}\cdot(m-1)} \cdot \left\{\frac{m^{n_1+2}}{(m-1)^2} - \frac{n_1 m(m-1)+m^2}{(m-1)^2} - \frac{n_1(n_1+1)}{2}\right\}; \quad (197)$$

somit ist das erste Glied in (190)

$$\sum_{n-1}^{n_1} \frac{x\, n(n+1)}{2\, m^{n+1}} =$$

$$= \frac{x}{m^{n_1+1}(m-1)} \cdot \left\{\frac{m^{n_1+2}}{(m-1)^2} - \frac{n_1 m(m-1)+m^2}{(m-1)^2} - \frac{n_1(n_1+1)}{2}\right\},$$

also

$$\sum_{n=1}^{n_1} \frac{x n (n+1)}{2 m^{n+1}} = \frac{m x}{(m-1)^3} - \frac{x n_1 (m-1) + x m}{m^{n_1} \cdot (m-1)^3} - \frac{x n_1 (n_1+1)}{2 (m-1) \cdot m^{n_1+1}}, \quad (198)$$

d. h.

$$\sum_{n=1}^{n_1} \frac{x n (n+1)}{2 m^{n+1}} = \frac{m x}{(m-1)^3} + O(\log^2 x). \quad (199)$$

Das zweite Glied in (190) ist

$$\sum_{n=1}^{n_1} \frac{k n (n+1)}{2 m} = \frac{k n_1^3}{6 m} + \frac{k n_1^2}{2 m} + \frac{k n_1}{3 m} = O(\log^3 x) \quad (200)$$

und das dritte

$$\sum_{n=1}^{n_1} \frac{\delta n (n+1)}{2} = \frac{\delta n_1^3}{6} + \frac{\delta n_1^2}{2} + \frac{\delta n_1}{3} = O(\log^3 x), \quad (201)$$

also auch

$$P_m(x) = \sum_{k=1}^{m-1} \left\{ \frac{m x}{(m-1)^3} + O(\log^3 x) \right\} = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{m x}{(m-1)^3} + O(\log^3 x)$$

oder

$$P_m(x) = \frac{m x}{(m-1)^2} + O(\log^3 x), \quad (202)$$

d. h.

$$P_m(x) \sim \frac{m x}{(m-1)^2}; \quad (203)$$

daraus folgt schließlich

$$\mathfrak{M}\, \mathfrak{p}_m(n) = \frac{m}{(m-1)^2}. \quad (204)$$