

Anwendung der *Wilkensschen* Methode AN 4906 auf den Planeten 617 Patroclus.

Von *W. Drucker*.

Herr Prof. *Wilkens* hat in Band 205 Nr. 4906 der A. N. eine Methode angegeben, nach welcher man bei der Ortsberechnung der Planeten der Jupitergruppe mit Hilfe eines abgeänderten Elementensystems ohne Störungsrechnung doch einen großen Teil der Jupiterstörungen bereits mit berücksichtigt. Dieses verbesserte Elementensystem beruht darauf, daß ein Trojaner in erster Näherung eine Ellipse um die Sonne als Brennpunkt beschreibt, wenn man sich in der Sonne die Masse $1+m_1$ (m_1 Jupitermasse) vereinigt denkt. Die an das neue Elementensystem anzuschließenden Störungsausdrücke hat *Wilkens* in der angeführten Abhandlung gegeben, und zwar für die Störungen in rechtwinkligen Koordinaten. Da sie indessen etwas umständlich sind, da ferner bei der Berechnung der Störungen der Kleinen Planeten gewöhnlich die Variation der Elemente zur Verwendung kommt, so entwickle ich im folgenden ersten Teil, von dem *Wilkensschen* Grundgedanken ausgehend, die Störungsausdrücke, die sich auf die Methode der Variation der Elemente beziehen. Es wird dann eine numerische Anwendung der Ergebnisse der Theorie auf den Planeten 617 Patroclus gegeben. Dieser gehört zu den am längsten bekannten Planeten der Jupitergruppe; er ist 1906 auf der Sternwarte Königstuhl entdeckt und seitdem bereits in 9 Erscheinungen beobachtet worden. Da sich herausstellte, daß das von Dr. *Heinrich* AN 176.193 gegebene Elementensystem die Beobachtungen schon der beiden ersten Erscheinungen nur sehr ungenau darstellte, so schien es angebracht, mit Hilfe des heute vorhandenen Beobachtungsmaterials für Patroclus neue verbesserte Elemente herzuleiten. Diese Bahnverbesserung ist im zweiten Teil ausgeführt. Der dritte Teil bringt dann unter Zugrundelegung der gewonnenen neuen Elemente die oben erwähnten numerischen Anwendungen. Die Bezeichnungen schließen sich, falls nichts anderes bemerkt ist, an das Lehrbuch der Bahnbestimmung von *Bauschinger* an.

Die Anregung, das *Wilkenssche* Verfahren einer praktischen Anwendung zu unterziehen, verdanke ich einem freundlichen Vorschlag von Herrn Prof. *Witt*, Berlin.

I. Anwendung des *Wilkensschen* Vorschlags auf die Methode der Variation der Elemente.

Man gehe von den allgemeinen Bewegungsgleichungen aus (*Bauschinger* S. 488 und 500)

$$\begin{aligned} d^2r/dt^2 - r(ds/dt)^2 + k^2/r^2 &= S \\ 1/r \cdot d/dt(r^2 ds/dt) &= T \\ r ds/dt \cdot dp/dt &= W \end{aligned}$$

$$S = k^2 m_1 (\xi_1 K_1 - r/q_1^3), \quad T = k^2 m_1 \eta_1 K_1, \quad W = k^2 m_1 \zeta_1 K_1$$

wo $K_1 = 1/q_1^3 - 1/r_1^3$.

S, T, W sind die Komponenten der durch Jupiter hervorgerufenen Störungen. Die Masse des gestörten Körpers (Patroclus) ist $= 0$ gesetzt.

Man forme S folgendermaßen um:

$$S = k^2 m_1 [(\xi_1 - r)(1/q_1^3 - 1/r_1^3) + r(1/r^3 - 1/r_1^3)] - k^2 m_1 / r^2$$

oder wenn man setzt

$$K_2 = 1/r^3 - 1/r_1^3$$

$$S = k^2 m_1 [(\xi_1 - r) K_1 + r K_2] - k^2 m_1 / r^2.$$

Dann lauten die Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} d^2r/dt^2 - r(ds/dt)^2 + k^2(1+m_1)/r^2 &= \\ &= k^2 m_1 [(\xi_1 - r) K_1 + r K_2] = S' \\ 1/r \cdot d/dt(r^2 ds/dt) &= k^2 m_1 \eta_1 K_1 = T \\ r ds/dt \cdot dp/dt &= k^2 m_1 \zeta_1 K_1 = W. \end{aligned}$$

Nimmt man nun, da der Trojaner mit der Sonne und Jupiter nahezu in den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks steht, an, daß die 3 Entfernungen r, r_1, q_1 nahe einander gleich sind, so stellen K_1 und K_2 kleine Größen erster Ordnung dar. Betrachtet man auch m_1 als solche Größe, so sind die rechten Seiten klein von der zweiten Ordnung. Vernachlässigt man also kleine Größen zweiter Ordnung, so wird in erster Näherung die Bewegung dargestellt durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} d^2r/dt^2 - r(ds/dt)^2 + k^2(1+m_1)/r^2 &= 0 \\ 1/r \cdot d/dt(r^2 ds/dt) &= 0 \\ r ds/dt \cdot dp/dt &= 0 \end{aligned}$$

Diese Formeln unterscheiden sich von den gewöhnlichen Formeln der *Keplerschen* Bewegung nur dadurch, daß k durch $k\sqrt{1+m_1}$ ersetzt ist, d. h. man erhält in erster Näherung eine Ellipse um die Sonne als Brennpunkt mit der Masse $1+m_1$. Unter dieser Annahme bekommt man andere oskulierende Elemente als die gewöhnlichen. Die Formeln, welche den Übergang von dem üblichen auf die Brennpunktsmasse 1 bezogenen Elementensystem auf das neue Elementensystem mit der Brennpunktsmasse $1+m_1$ vermitteln, finden sich in § 1 der *Wilkensschen* Abhandlung; es ändern sich alle Elemente mit Ausnahme von Knoten und Neigung. Dies neue Elementensystem soll als *Wilkenssches* Elementensystem bezeichnet werden.

Die Herleitung der Elementenstörungen entspricht jetzt der üblichen (*Bauschinger* S. 488 u. f.), und wir können die bei *Bauschinger* gegebene Formelzusammenstellung (S. 502) mit folgenden Abänderungen übernehmen:

1. Bei der Ableitung der ungestörten Bewegung (Formelsystem I) ist das *Wilkenssche* Elementensystem zugrunde zu legen und k durch $k\sqrt{1+m_1}$ zu ersetzen.

2. *Bauschinger* führt S. 491 und 494 die Größen

$$(S) = \sqrt{p/k} \cdot S \quad (T) = \sqrt{p/k} \cdot T \quad (W) = \sqrt{p/k} \cdot W$$

und S. 501 die Größen

$$S = w(S)/\sin i^* \quad T = w(T)/\sin i^* \quad W = w(W)/\sin i^*$$

ein. Der Faktor $\sqrt{p/k}$ geht aus der ungestörten Bewegung hervor, in ihm ist also bei uns k durch $kV(1+m_1)$ zu ersetzen. Für die Störungskomponente S haben wir die oben gefundene Größe S' zu setzen, die Komponenten T und W bleiben ungeändert. Für unsere Rechnung erhalten also die in *Bauschingers* Formelsystem III auftretenden Größen S, T, W folgende Form:

$$S = k^* w m_1 \sqrt{p/V(1+m_1)} \cdot [(\xi_1 - r) K_1 + r K_2]$$

$$T = k^* w m_1 \sqrt{p/V(1+m_1)} \cdot \eta_1 K_1$$

$$W = k^* w m_1 \sqrt{p/V(1+m_1)} \cdot \zeta_1 K_1$$

$$K_1 = 1/q_1^3 - 1/r_1^3 \quad K_2 = 1/r^3 - 1/r_1^3.$$

Eine Bestätigung für die Richtigkeit des diesen 3 Formeln gemeinsamen Faktors $k^* w m_1 \sqrt{p/V(1+m_1)}$ kann man auf folgende Weise erhalten. Bei dem *Wilkensschen* Elementensystem bleiben Knoten und Neigung, also auch die Größen di/dt und $d\Omega/dt$ ungeändert. Bei Anwendung des gewöhnlichen Elementensystems ist (*Bauschinger* S. 502)

$$w di/dt = r/p \cdot \cos u \cdot W = r/\sqrt{p} \cdot \cos u \cdot k^* w m_1 \zeta_1 K_1.$$

Bei Anwendung des *Wilkensschen* Systems hat man p durch $p_1 = p/(1+m_1)$ zu ersetzen (Abhandlung von *Wilken*, Spalte 147), während Radiusvektor r und Argument der Breite u für beide oskulierenden Ellipsen dieselben sind. Bezeichnet man hier für einen Augenblick die W entsprechende Größe mit W_1 , so ist für das *Wilkenssche* System

$$w di/dt = r/p_1 \cdot \cos u \cdot W_1$$

also folgt $W_1 = k^* w m_1 \sqrt{p_1/V(1+m_1)} \cdot \zeta_1 K_1$

in Übereinstimmung mit der obigen Formel, nur daß dort der Index 1 bei W und p nicht gesetzt ist.

3. In der Formel für $w^2 d\mu/dt$ ist in den Faktoren von S und T k durch $kV(1+m_1)$ zu ersetzen.

Hiernach können unter Zugrundelegung eines *Wilkensschen* Elementensystems die Störungen eines Trojaners mittels der Methode der Variation der Elemente bestimmt werden, und zwar ohne einen Mehraufwand an Rechenarbeit. Der einzige Unterschied in den störenden Kräften besteht in der Verschiedenheit der Größe S und im Auftreten des Faktors $1/V(1+m_1)$ bei S, T, W .

Der Zusammenhang unserer Störungsausdrücke mit den von *Wilken* aufgestellten ist folgender. *Wilken* setzt

$$q_1^2 = r_1^2 + \zeta$$

also wird $1/q_1^3 = 1/r_1^3 \cdot (1 + \zeta/r_1^2)^{-3/2}$

und $K_1 = -1/r_1^3 \cdot [1 - (1 + \zeta/r_1^2)^{-3/2}]$.

Ferner setzt er $r = r_1(1 + \varrho)$

sodaß $K_2 = -1/r^3 \cdot (r^3/r_1^3 - 1) = -3\varrho/r^3 \cdot (1 + \varrho + 1/8\varrho^2)$.

Dann lauten unsere störenden Komponenten:

$$S = k^* w m_1 \sqrt{p/V(1+m_1)} \cdot$$

$$\{[1 - (1 + \zeta/r_1^2)^{-3/2}](r - \xi_1)/r_1^3 - 3\varrho/r^2 \cdot (1 + \varrho + 1/8\varrho^2)\}$$

$$T = k^* w m_1 \sqrt{p/V(1+m_1)} \cdot [1 - (1 + \zeta/r_1^2)^{-3/2}](-\eta_1/r_1^3)$$

$$W = k^* w m_1 \sqrt{p/V(1+m_1)} \cdot [1 - (1 + \zeta/r_1^2)^{-3/2}](-\zeta_1/r_1^3).$$

Die mit $k^* w m_1 \sqrt{p/V(1+m_1)}$ multiplizierten Ausdrücke sind gerade die wesentlichsten Bestandteile der *Wilkensschen* Störungsausdrücke X, Y, Z , falls man in diesen das feste Koordinatensystem x, y, z durch das von uns gebrauchte bewegliche ξ, η, ζ ersetzt.

Hierzu sei noch Folgendes bemerkt: Die von *Wilken* erreichte Vereinfachung beruht darauf, daß in der Störungsfunktion Ω das Glied $k^2 m_1/r$ abgezogen wird. Dadurch wird unter der Voraussetzung, daß die 3 Körper nahezu in den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks stehen, zwar nicht die Störungsfunktion, wohl aber werden ihre ersten Ableitungen, die gerade in den Differentialgleichungen der Bewegung auftreten, klein von der zweiten Ordnung, während in der oskulierenden Ellipse k^2 durch $k^2(1+m_1)$ ersetzt wird. Diese Umformung der Störungsfunktion findet sich nun bereits in der Abhandlung von *Linders*: Über die Bewegung eines Kleinen Planeten in der Nähe der Lagrangeschen Dreieckspunkte (Arkiv för Mat., Astr., Fys. 4, Nr. 20, 1908). *Linders* geht davon aus, daß zur Aufrechterhaltung der Konfiguration des gleichseitigen Dreiecks die mittleren Bewegungen von Jupiter und dem Planeten in der oskulierenden Bahn dieselben sein müssen. Dies bedeutet aber, daß $k^2(1+m_1)$ an die Stelle von k^2 tritt und daß dafür in der Störungsfunktion $k^2 m_1/r$ abgezogen wird (S. 5 der Abhandlung). Ebenso wie bei *Wilken* findet sich bei *Linders* (in veränderter Bezeichnung) die Substitution

$$\Delta^2 = r_1^2 + \zeta \quad (\Delta = q_1)$$

und die Formel (8) der *Wilkensschen* Abhandlung

$$\Omega = k^2 m_1 (1/r_1 + 3/8\zeta^2/r_1^5 - 1/2r^2/r_1^3)$$

ist im wesentlichen gleichbedeutend mit der *Lindersschen* Formel (S. 6) $F_1 = 1 - (1/2r^2 + 1/r) + 3/8\varrho^2$

falls man in dieser von dem zugefügten Glied $-1/r$ absieht. Allerdings hat *Linders* den Gedanken, der eben den Kern der *Wilkensschen* Arbeit bildet, daß nämlich durch dieses Verfahren die Störungen klein von der zweiten Ordnung werden, nicht zum Ausdruck gebracht.

II. Bahnverbesserung des Planeten 617 Patroclus.

Das von *Heinrich* a. a. O. gegebene Elementensystem lautet:

Epoche und Oskulation 1907 Dez. 14.0 M. Z. Berl.

$$M_0 = 73^\circ 1' 24.7''$$

$$\omega = 302^\circ 25' 48.2''$$

$$\Omega = 43^\circ 28' 35.9'' \quad 1910.0$$

$$i = 22^\circ 3' 15.1''$$

$$\varphi = 8^\circ 14' 37.9''$$

$$\mu = 300.532$$

$$\log a = 0.714744$$

(1)

Die folgende Tabelle 1 enthält die benutzten beobachteten Orte. Die Zeit ist bereits um die Lichtzeit vermindert, die Parallaxe berücksichtigt, das Äquinoktium das wahre der Beobachtungszeit, sodaß die Orte für die gegebenen Zeiten wahre geozentrische Orte bedeuten. Die Ergebnisse der Vergleichung mit der aus dem Elementensystem (1) hervorgehenden Ephemeride sind unter (B-R)_I zusammengestellt. Die (B-R)_{II} werden später erklärt.

Tabelle 1. Beobachtungen (einschließlich Parallaxe).

Beob. Ort	Jahr	M. Z. B.—Aberr.	α		δ		Parallaxe		(B—R) _I		(B—R) _{II}			
			$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$						
Königstuhl	1906	Okt. 17.48954	2 ^h 31 ^m 53 ^s .25	+10° 51' 27.7	— 0.02	+1.5	+	0.03	—	20.2	+	0.01	—	19.9
Rom		21.45420	2 29 27.52	+10 50 59.7	— 0.04	+1.2	+	0.04	—	14.1	+	0.04	—	14.0
Wien		28.63187	2 24 54.21	+10 49 54.1	+0.09	+1.6	—	0.22	—	11.5	—	0.22	—	11.2
Königstuhl	Nov.	9.34372	2 17 26.47	+10 48 58.3	— 0.07	+1.5	—	0.25	—	14.6	—	0.31	—	14.7
Wien		15.50558	2 13 42.45	+10 49 42.9	+0.06	+1.5	—	0.17	—	14.0	—	0.13	—	13.5
»	Dez.	7.38638	2 3 9.27	+11 4 47.9	+0.03	+1.4	—	0.37	—	11.0	—	0.37	—	11.0
Rom	1907	Nov. 28.42370	4 40 24.06	+35 53 40.1	— 0.05	+0.3	—	36.16	—	1' 5.1	—	38.45	—	1' 14.1
Greenwich		29.43023	4 39 40.67	+35 54 56.5	— 0.06	+0.7	—	36.19	—	1 4.9	—	38.49	—	1 13.8
»		29.45609	4 39 39.56	+35 54 58.1	— 0.04	+0.6	—	36.18	—	1 5.2	—	38.48	—	1 14.1
Nizza	Dez.	2.41806	4 37 31.20	+35 58 11.2	— 0.06	+0.4	—	36.19	—	1 8.1	—	38.52	—	1 17.0
Greenwich		3.41163	4 36 48.16	+35 59 7.8	— 0.06	+0.7	—	36.04	—	1 7.9	—	38.36	—	1 17.1
Nizza		4.43636	4 36 3.50	+35 59 57.9	— 0.04	+0.3	—	36.15	—	1 11.2	—	38.46	—	1 20.5
Greenwich		10.54616	4 31 39.89	+36 3 33.2	+0.04	+0.6	—	35.92	—	1 13.6	—	38.23	—	1 23.7
Nizza	1908	Jan. 6.40069	4 15 32.96	+35 52 4.6	+0.02	+0.3	—	33.93	—	1 29.5	—	36.17	—	1 40.8
Königstuhl	1909	Jan. 9.26274	7 12 37.86	+46 18 23.2	— 0.12	+0.9	—	1 ^m 5.69	+	2 55.7	—	1 ^m 20.16	+	3 3.2
Greenwich	1910	März 1.42044	9 27 18.89	+42 22 56.1	— 0.03	+0.3	—	53.72	+	7 15.9	—	1 20.48	+	9 27.0
»		1.43977	9 27 18.28	+42 22 56.6	— 0.01	+0.3	—	53.65	+	7 16.8	—	1 20.46	+	9 27.8
»		16.44506	9 19 54.07	+42 5 42.3	+0.02	+0.3	—	52.74	+	6 53.7	—	1 18.80	+	8 57.8
»		16.46292	9 19 53.64	+42 5 40.7	+0.03	+0.3	—	52.69	+	6 54.3	—	1 18.78	+	8 58.3
Königstuhl	1911	Febr. 27.44635	11 30 29.46	+29 10 35.1	— 0.04	+0.7	—	25.83	+	8 4.0	—	1 0.28	+	14 9.8
»	1912	April 7.46614	12 42 42.01	+13 12 14.7	0.00	+1.0	—	4.79	+	3 32.8	—	48.70	+	13 45.4
»	1913	April 30.41294	13 58 48.34	— 5 54 32.3	— 0.03	+1.5	+	21.12	—	4 45.0	—	40.00	+	9 46.1
Bergedorf	1918	Okt. 30.52927	2 56 5.24	+17 18 27.8	+0.02	+1.4	+	4.82	+	3 33.4	+	21.64	+	16 14.3
»		Nov. 2.47322	2 54 10.43	+17 19 2.2	— 0.01	+1.4	+	4.63	+	3 43.7	+	21.42	+	16 19.5

Tabelle 2.

ch M. Z. B.	ΔL	$\Delta \pi$	$\Delta \Omega$	Δi	$\Delta \varphi$	$\Delta \mu$
1906 Aug. 1	— 1' 13.9	— 4' 48.9	— 1.5	— 3.4	— 12.2	+0.037
Okt. 20	— 24.5	— 1 37.2	— 0.4	— 1.4	4.8	+0.013
1907 Jan. 8	— 24.3	— 1 37.1	— 0.1	— 1.6	5.6	— 0.013
März 29	— 1 12.3	— 4 47.4	— 0.6	— 5.1	19.4	— 0.041
Juni 17	— 1 59.0	— 7 46.6	— 2.8	— 9.1	36.6	— 0.067
Sept. 5	— 2 44.3	— 10 29.0	— 6.6	— 13.2	57.0	— 0.092
Nov. 24	— 3 28.2	— 12 49.4	— 11.8	— 17.1	1' 20.2	— 0.116
1908 Febr. 12	— 4 10.6	— 14 45.3	— 18.2	— 20.7	— 1 45.6	— 0.137
Mai 2	— 4 51.6	— 16 14.0	— 25.4	— 23.9	— 2 12.6	— 0.156
Juli 21	— 5 31.3	— 17 15.6	— 32.9	— 26.5	— 2 40.5	— 0.173
Okt. 9	— 6 9.8	— 17 50.1	— 40.4	— 28.6	— 3 8.7	— 0.188
Dez. 28	— 6 47.0	— 17 58.5	— 47.6	— 30.3	— 3 36.8	— 0.202
1909 März 18	— 7 23.3	— 17 42.1	— 54.3	— 31.4	— 4 4.3	— 0.215
Juni 6	— 7 58.4	— 17 2.4	— 1' 0.3	— 32.2	— 4 30.7	— 0.227
Aug. 25	— 8 32.7	— 16 1.5	— 1 5.5	— 32.7	— 4 55.8	— 0.238
Nov. 13	— 9 5.9	— 14 40.6	— 1 9.8	— 32.9	— 5 19.2	— 0.248
1910 Febr. 1	— 9 38.3	— 13 2.4	— 1 13.3	— 32.9	— 5 40.6	— 0.258
April 22	— 10 9.7	— 11 8.2	— 1 15.9	— 32.9	— 5 59.9	— 0.267
Juli 11	— 10 40.2	— 9 0.5	— 1 17.7	— 32.8	— 6 16.6	— 0.276
Sept. 29	— 11 9.7	— 6 41.3	— 1 18.9	— 32.7	— 6 30.7	— 0.284
Dez. 18	— 11 38.2	— 4 13.4	— 1 19.5	— 32.6	— 6 41.9	— 0.291
1911 März 8	— 12 5.7	— 1 39.1	— 1 19.7	— 32.6	— 6 50.0	— 0.298
Mai 27	— 12 32.2	— 1 58.5	— 1 19.7	— 32.6	— 6 54.9	— 0.303
Aug. 15	— 12 57.5	— 3 36.3	— 1 19.6	— 32.6	— 6 56.5	— 0.308
Nov. 3	— 13 21.8	— 6 11.1	— 1 19.6	— 32.6	— 6 54.7	— 0.311
1912 Jan. 22	— 13 45.0	— 8 39.5	— 1 19.8	— 32.5	— 6 49.6	— 0.312
April 11	— 14 7.1	— 10 57.9	— 1 20.3	— 32.3	— 6 41.3	— 0.312
Juni 30	— 14 28.3	— 13 3.3	— 1 21.1	— 31.9	— 6 30.0	— 0.309
Sept. 18	— 14 48.5	— 14 52.2	— 1 22.2	— 31.2	— 6 15.9	— 0.305
Dez. 7	— 15 7.9	— 16 22.1	— 1 23.6	— 30.1	— 5 59.5	— 0.298
1913 Febr. 25	— 15 26.6	— 17 30.5	— 1 25.0	— 28.6	— 5 41.0	— 0.289
Mai 16	— 15 44.8	— 18 15.3	— 1 26.3	— 26.7	— 5 21.1	— 0.277
Aug. 4	— 16 2.8	— 18 35.5	— 1 27.2	— 24.4	— 5 0.2	— 0.262
Okt. 23	— 16 20.6	— 18 30.2	— 1 27.6	— 21.7	— 4 38.8	— 0.245
1914 Jan. 11	— 16 38.6	— 17 59.4	— 1 27.2	— 18.7	— 4 17.5	— 0.225
April 1	— 16 57.1	— 17 3.9	— 1 25.9	— 15.6	— 3 56.9	— 0.203
Juni 20	— 17 16.4	— 15 44.7	— 1 23.5	— 12.3	— 3 37.5	— 0.178

* 1914

Es wurden nun mit dem Elementensystem (1) die Störungen durch Jupiter und Saturn nach der Methode der Variation der Elemente berechnet. Hier ist, ebenso wie bei allen folgenden Störungsrechnungen, das strenge Verfahren angewendet worden, bei dem die Elemente von Intervall zu Intervall gewechselt werden. Von jetzt ab wurde als neue Oskulationssepeche 1906 Nov. 29.0 M. Z. B. gewählt. Die Ergebnisse waren:

Tabelle 2 (Fortsetzung).

o ^b M. Z. B.	ΔL	$\Delta \pi$	$\Delta \Omega$	Δi	$\Delta \varphi$	$\Delta \mu$
1914 Sept. 8	+17' 36.9	-14' 4.1	-1' 20.2	-9.2	-3' 19.7	-0.150
Nov. 27	+17 58.9	-12 4.5	-1 16.1	-6.3	-3 4.0	-0.120
1915 Febr. 15	+18 22.7	-9 49.1	-1 11.3	-3.7	-2 50.6	-0.088
Mai 6	+18 48.8	-7 21.6	-1 6.2	-1.6	-2 39.7	-0.055
Juli 25	+19 17.4	-4 45.5	-1 1.2	0.0	-2 31.4	-0.020
Okt. 13	+19 48.9	-2 4.7	-56.6	+1.2	-2 25.6	+0.014
1916 Jan. 1	+20 23.4	+37.2	-52.8	+1.8	-2 22.0	+0.047
März 21	+21 1.1	+3 17.2	-50.1	+2.2	-2 20.2	+0.078
Juni 9	+21 42.0	+5 53.6	-48.5	+2.3	-2 19.5	+0.106
Aug. 28	+22 26.0	+8 25.7	-48.2	+2.3	-2 19.5	+0.129
Nov. 16	+23 12.9	+10 54.4	-48.6	+2.3	-2 19.4	+0.145
1917 Febr. 4	+24 2.2	+13 22.4	-49.6	+2.4	-2 18.7	+0.154
April 25	+24 53.6	+15 53.8	-50.6	+2.6	-2 17.1	+0.155
Juli 14	+25 46.4	+18 33.0	-51.1	+2.7	-2 14.5	+0.146
Okt. 2	+26 40.0	+21 24.7	-50.9	+2.6	-2 11.3	+0.128
Dez. 21	+27 33.6	+24 32.4	-49.7	+2.0	-2 8.1	+0.103
1918 März 11	+28 26.6	+27 56.6	-47.8	+0.7	-2 6.0	+0.070
Mai 30	+29 18.4	+31 35.8	-45.8	+1.6	-2 6.0	+0.032
Aug. 18	+30 8.6	+35 24.6	-44.2	-4.9	-2 9.2	-0.008
Nov. 6	+30 57.0	+39 16.9	-43.7	-9.0	-2 16.4	-0.049
1919 Jan. 25	+31 43.1	+43 3.4	-44.9	-13.7	-2 28.1	-0.091
April 15	+32 27.2	+46 37.0	-48.0	-18.9	-2 44.2	-0.128
Juli 4	+33 9.1	+49 50.7	-53.2	-24.1	-3 4.3	-0.163
Sept. 22	+33 49.0	+52 39.0	-1 0.1	-29.1	-3 27.9	-0.195
Dez. 11	+34 27.1	+54 59.4	-1 8.5	-33.7	-3 54.4	-0.224
1920 Febr. 29	+35 3.5	+56 49.8	-1 18.0	-37.7	-4 22.9	-0.250

Mit diesen Störungen wurden für die obigen Zeiten die Orte berechnet und die Unterschiede $(B-R)_{II}$ (Tabelle 1) festgestellt. Hieraus wurden 12 Normalörter gebildet, die jetzt ebenso wie die gerechneten Orte auf das Äquinoktium 1910.0 bezogen wurden.

Tabelle 3 (Normalörter).

Norm.-ort	Jahr	M. Z. B. - Aberr.	α	δ	$\Delta \alpha \cos \delta$	$\Delta \delta$
I	3 1906	Okt. 22.52520	2 ^h 28 ^m 58.48	+10° 51' 47.5	-	-15.0
II	2	Nov. 12.42465	2 15 43.84	+10 50 12.8	-	-14.1
III	1	Dez. 7.38638	2 3 20.00	+11 5 48.8	-	-11.0
IV	7 1907	Dez. 2.58889	4 37 33.50	+35 58 40.9	-	-77.1
V	1 1908	Jan. 6.40069	4 15 41.99	+35 52 27.3	-	-100.7
VI	1 1909	Jan. 9.26275	7 12 43.57	+46 18 14.6	-	+183.4
VII	2 1910	März 1.43013	9 27 18.59	+42 22 56.4	-	+567.4
VIII	2	16.45402	9 19 53.85	+42 5 41.5	-	+538.1
IX	1 1911	Febr. 27.44639	11 30 26.20	+29 10 53.0	-	+849.8
X	1 1912	April 7.46619	12 42 35.45	+13 12 58.3	-	+825.4
XI	1 1913	April 30.41299	13 58 38.03	-5 53 30.7	-	+586.1
XII	2 1918	Nov. 1.00124	2 54 37.26	+17 16 35.7	-	+977.6

Ihre Ausgleichung ergab:

$$\begin{aligned}
 dM_0 &= +42' 11.7'' \\
 d\mu &= +0.24852 \\
 d\varphi &= +54.835 \\
 ds &= -53 16.9 & d\omega &= -52' 33.8'' \\
 dp &= +2 15.24 & d\Omega &= -46.5 \\
 dq &= +3 0.32 & di &= +3 44.7
 \end{aligned}$$

Die verbesserten Elemente lauten:

Epoche und Oskulation 1906 Nov. 29.0 M. Z. B.

$$\left. \begin{aligned}
 M_0 &= 42^\circ 0' 13.6'' \\
 \omega &= -58 26 45.6 \\
 \Omega &= 43 27 49.4 \\
 i &= 22 6 59.8 \\
 \varphi &= 8^\circ 15' 32.7'' \\
 \mu &= 300.78052 \\
 \log a &= 0.714505
 \end{aligned} \right\} 1910.0 \quad (2)$$

Die folgende Tabelle 4 enthält die Unterschiede $B-R$, wie sie einmal durch Einsetzen der gefundenen Verbesserungen in die Bedingungsgleichungen, das andere Mal durch die direkte Nachrechnung der Orte I—XII mit dem Elementensystem (2) und den obigen Störungswerten erhalten wurden.

Tabelle 4.

Normal-ort	$\Delta \alpha \cos \delta$		$\Delta \delta$	
	Bed.-Gl.	Direkt	Bed.-Gl.	Direkt
I	+0.5	+3.2	-0.2	+3.0
II	+1.1	+3.8	0.0	+2.7
III	+2.9	+5.9	+2.2	+4.7
IV	-1.5	+5.6	-1.2	+0.9
V	-2.5	+3.5	-2.6	-1.3
VI	+3.1	+8.7	-0.8	-2.1
VII	-0.9	+1.6	-0.6	-4.1
VIII	-0.7	+0.8	+3.0	-0.2
IX	+3.2	+2.2	-2.6	-4.8
X	+1.2	-0.9	-1.3	-1.8
XI	-2.7	-7.9	+2.9	+4.9
XII	-1.8	+10.3	+4.1	+3.9

Die unbefriedigende Übereinstimmung der auf beide Arten erhaltenen Differenzen erklärt sich dadurch, daß die für dM_0 , $d\mu$, ... gefundenen Werte recht groß sind und also nicht, wie es die Theorie erfordert, als Differentiale betrachtet werden können.

Es wurde daher unter Zugrundelegung des Elementensystems (2) eine zweite Bahnverbesserung vorgenommen. Zunächst wurden mit diesem System die Jupiter- und Saturnstörungen neu berechnet, und zwar — mit Rücksicht auf einen späteren Zweck — für beide Planeten getrennt. Die folgende Tabelle 5 enthält die vereinigten Störungen beider Planeten.

Tabelle 5.

o ^b M. Z. B.	ΔL	$\Delta \pi$	$\Delta \delta$	Δi	$\Delta \varphi$	$\Delta \mu$
1906 Aug. 1	-1' 14.0	-4' 46.9	-1.5	+3.4	+12.9	+0.036
Okt. 20	-24.6	-1 36.4	-0.3	+1.4	+5.0	+0.013
1907 Jan. 8	+24.4	+1 36.0	+0.1	-1.5	-5.8	-0.013
März 29	+1 12.4	+4 43.6	-0.6	-5.1	-20.1	-0.040
Juni 17	+1 59.3	+7 39.3	-2.8	-9.0	-37.7	-0.065
Sept. 5	+2 44.6	+10 17.5	-6.5	-13.0	-58.5	-0.090
Nov. 24	+3 28.8	+12 33.3	-11.6	-16.9	-1' 22.1	-0.112
1908 Febr. 12	+4 11.5	+14 23.7	-17.9	-20.5	-1 47.6	-0.133
Mai 21	+4 52.8	+15 47.0	-24.8	-23.6	-2 14.7	-0.152
Juli 2	+5 32.9	+16 43.1	-32.1	-26.2	-2 42.6	-0.167
Okt. 9	+6 11.8	+17 11.9	-39.3	-28.3	-3 10.7	-0.182
Dez. 28	+6 49.5	+17 15.0	-46.2	-29.8	-3 38.6	-0.194
1909 März 18	+7 26.2	+16 53.4	-52.6	-31.0	-4 5.6	-0.207
Juni 6	+8 2.0	+16 9.2	-58.3	-31.7	-4 31.7	-0.217
Aug. 25	+8 36.8	+15 3.8	-1' 3.2	-32.2	-4 56.2	-0.227
Nov. 13	+9 10.7	+13 39.4	-1 7.3	-32.4	-5 19.0	-0.237
1910 Febr. 1	+9 43.8	+11 57.8	-1 10.6	-32.4	-5 39.8	-0.246
April 22	+10 16.0	+10 1.1	-1 12.9	-32.4	-5 58.2	-0.254
Juli 11	+10 47.2	+7 51.8	-1 14.6	-32.3	-6 14.3	-0.262
Sept. 29	+11 17.6	+5 31.4	-1 15.7	-32.2	-6 27.6	-0.269
Dez. 18	+11 47.0	+3 3.1	-1 16.3	-32.2	-6 38.1	-0.276
1911 März 8	+12 15.5	+29.1	-1 16.4	-32.2	-6 45.4	-0.281
Mai 27	+12 43.0	-2 7.5	-1 16.3	-32.1	-6 49.5	-0.286
Aug. 15	+13 9.4	-4 43.7	-1 16.3	-32.1	-6 50.5	-0.290
Nov. 3	+13 34.9	-7 16.5	-1 16.4	-32.1	-6 48.0	-0.292
1912 Jan. 22	+13 59.3	-9 42.2	-1 16.5	-32.0	-6 42.3	-0.293
April 11	+14 22.7	-11 57.8	-1 17.1	-31.8	-6 33.6	-0.292
Juni 30	+14 45.1	-13 59.8	-1 18.0	-31.4	-6 21.8	-0.289
Sept. 18	+15 6.6	-15 45.6	-1 19.1	-30.6	-6 7.5	-0.284
Dez. 7	+15 27.4	-17 11.9	-1 20.5	-29.5	-5 50.8	-0.278
1913 Febr. 25	+15 47.5	-18 17.0	-1 21.9	-28.0	-5 32.1	-0.268
Mai 16	+16 7.2	-18 58.6	-1 23.2	-26.1	-5 12.2	-0.256
Aug. 4	+16 26.6	-19 15.8	-1 24.3	-23.7	-4 51.2	-0.241
Okt. 23	+16 45.9	-19 7.8	-1 24.6	-21.1	-4 29.9	-0.224
1914 Jan. 11	+17 5.4	-18 34.8	-1 24.3	-18.1	-4 8.7	-0.204
April 1	+17 25.4	-17 37.2	-1 22.9	-14.9	-3 48.4	-0.181
Juni 20	+17 46.3	-16 16.9	-1 20.6	-11.7	-3 29.1	-0.157
Sept. 8	+18 8.3	-14 35.3	-1 17.3	-8.5	-3 11.7	-0.129
Nov. 27	+18 31.9	-12 35.5	-1 13.2	-5.6	-2 56.2	-0.099
1915 Febr. 15	+18 57.3	-10 20.3	-1 8.5	-3.1	-2 43.1	-0.068
Mai 6	+19 25.0	-7 53.4	-1 3.4	-1.0	-2 32.5	-0.035
Juli 25	+19 55.2	-5 18.6	-58.5	+0.7	-2 24.5	-0.001
Okt. 13	+20 28.2	-2 39.5	-53.9	+1.7	-2 18.9	+0.033
1916 Jan. 1	+21 4.3	+0.4	-50.3	+2.4	-2 15.3	+0.066
März 21	+21 43.5	+2 38.2	-47.7	+2.7	-2 13.5	+0.096

Tabelle 5 (Fortsetzung).

o ^b M. Z. B.	ΔL	$\Delta \pi$	$\Delta \delta$	Δi	$\Delta \varphi$	$\Delta \mu$
1916 Juni 9	+22' 25.9	+5' 12.5	-46.2	+2.8	-2' 12.9	+0.122
Aug. 28	+23 11.3	+7 42.6	-46.0	+2.8	-2 12.7	+0.144
Nov. 16	+23 59.5	+10 9.9	-46.5	+2.8	-2 12.2	+0.158
1917 Febr. 4	+24 50.1	+12 37.4	-47.5	+2.9	-2 11.1	+0.165
April 25	+25 42.6	+15 9.0	-48.5	+3.1	-2 9.0	+0.163
Juli 14	+26 36.2	+17 49.9	-49.0	+3.2	-2 5.7	+0.152
Okt. 2	+27 30.6	+20 44.5	-48.5	+3.0	-2 2.0	+0.131
Dez. 21	+28 24.6	+23 56.1	-47.2	+2.3	-1 58.3	+0.102
1918 März 11	+29 18.0	+27 25.3	-45.2	+0.8	-1 55.8	+0.067
Mai 30	+30 9.9	+31 9.6	-43.0	-1.7	-1 55.7	+0.026
Aug. 18	+31 0.1	+35 3.8	-41.4	-5.2	-1 58.9	-0.016
Nov. 6	+31 48.2	+39 0.1	-41.0	-9.5	-2 6.5	-0.060
1919 Jan. 25	+32 33.9	+42 50.2	-42.4	-14.6	-2 18.5	-0.102
April 15	+33 17.4	+46 26.0	-45.8	-19.9	-2 35.0	-0.142
Juli 4	+33 58.7	+49 40.1	-51.3	-25.4	-2 55.8	-0.178
Sept. 22	+34 37.9	+52 28.1	-58.6	-30.6	-3 20.0	-0.211
Dez. 11	+35 15.2	+54 47.1	-1' 7.2	-35.3	-3 47.0	-0.240
1920 Febr. 29	+35 50.6	+56 34.6	-1 17.0	-39.4	-4 16.0	-0.266

Die Abweichungen der ersten Störungsrechnung gegen die zweite sind zum Teil nicht unbeträchtlich; sie betragen im höchsten Falle bei ΔL 0.9, bei $\Delta \pi$ 1.2. Auch sie lassen es also ratsam erscheinen, bei einer strengen Elementenbestimmung eine neue Störungsrechnung für die Bahnverbesserung vorzunehmen, wenn wie in unserem Falle die durch die Ausgleichung gefundenen Änderungen der Elemente zu beträchtlich sind.

Für die mit Hilfe dieser Störungswerte aus dem Elementensystem (2) gerechneten Orte ergaben sich folgende Unterschiede gegen die Normalörter. Inzwischen war noch eine neue Beobachtung aus Bergedorf vom Jahre 1919 hinzugekommen, die als Normalort XIII mit dem Gewicht 1 Verwendung fand: 1919 Nov. 29.48728 M. Z. B. — Aberr. $\alpha = 5^h 17^m 54.41$, $\delta = +39^\circ 17' 6.3$. Alle Orte beziehen sich wieder auf das Äquinoktium 1910.0.

Tabelle 6.

Normalort	B-R		Normalort	B-R	
	$\Delta \alpha \cos \delta$	$\Delta \delta$		$\Delta \alpha \cos \delta$	$\Delta \delta$
I	+3.8	+2.9	VIII	+9.7	-4.0
II	+4.4	+3.0	IX	+9.4	-12.1
III	+5.7	+4.7	X	+4.1	-8.5
IV	+7.0	+2.5	XI	-7.8	+2.2
V	+6.4	+1.2	XII	-70.7	-59.8
VI	+15.8	-2.3	XIII	-65.1	-24.6
VII	+9.8	-7.5			

Die hiernach vorgenommene Ausgleichung lieferte:

$$\begin{aligned}
dM_0 &= -50''.16 \\
d\mu &= -0.01515 \\
d\varphi &= -0.83 \\
dS &= +66.19 & d\omega &= +66''.10 \\
dp &= -1.28 & d\Omega &= -0.08 \\
dq &= -2.15 & di &= -2.50
\end{aligned}$$

Demnach lauten die neuen Elemente:

Epoche und Oskulation 1906 Nov. 29.0 M.Z.B.

$$\begin{aligned}
M_0 &= 41^\circ 59' 23''.5 & \varphi &= 8^\circ 15' 31''.9 \\
\omega &= -58 \ 25 \ 39.5 & \mu &= 300''.76537 \\
\Omega &= 43 \ 27 \ 49.3 & \log a &= 0.714519 \\
i &= 22 \ 6 \ 57.3
\end{aligned} \quad (3)$$

Diesmal lieferte das Einsetzen in die Bedingungen, bezw. die Vergleichung der aus dem Elementensystem (3) und den letzten Störungswerten berechneten Orte mit den Normalörtern folgendes Ergebnis:

Tabelle 7.

Normal-ort	$\Delta\alpha \cos \delta$		$\Delta\delta$	
I	+0''.4	+0''.9	-0''.7	+0''.3
II	+0.8	+0.9	-0.6	-0.3
III	+2.2	+2.6	+1.2	+1.5
IV	-1.0	0.0	0.0	-0.5
V	-1.3	-1.3	-1.7	-2.2
VI	+3.6	+3.5	-0.4	-0.6
VII	-1.9	-1.7	-0.3	-0.3
VIII	-1.8	-1.7	+2.8	+2.9
IX	+1.6	+1.7	-2.7	-2.8
X	+0.7	+0.7	-2.6	-2.6
XI	-3.7	-3.4	-0.3	-0.6
XII	+1.1	+0.4	-1.8	-1.6
XIII	-0.2	0.0	+2.4	+2.1

Die Übereinstimmung ist ausreichend. Das letzte Elementensystem (3) kann demnach als definitives betrachtet werden.¹⁾

III. Prüfung des Wilkessschen Vorschlags an dem Planeten 617 Patroclus.

Wie weit der mit Hilfe des Wilkessschen Elementensystems ohne Störungen berechnete Ort eines Trojaners von dem genauen mit Hilfe der Jupiterstörungen berechneten Ort abweicht, hat Herr Klose (AN 207 Nr. 4960) für den Trojaner Priamus untersucht; seine Berechnung erstreckt sich auf einen Zeitraum von $1\frac{1}{4}$ Jahren. Indessen fehlt bei seiner Rech-

nung einmal der numerische Nachweis, daß die Berechnung des Ortes mit dem Wilkessschen Elementensystem vorteilhafter ist als die Berechnung mit dem gewöhnlichen Elementensystem ohne Störungen. Ferner aber scheint mir zum Nachweis der praktischen Brauchbarkeit des Verfahrens der gewählte Zeitraum zu kurz, da für eine Zeit von $1\frac{1}{4}$ Jahren in den meisten Fällen auch ein gut bestimmtes Elementensystem der gewöhnlichen Art ohne Störungsrechnung ausreichen wird. Im folgenden soll daher zunächst diese Betrachtung für Patroclus während eines größeren Zeitraums durchgeführt werden.

Gebraucht werden die Wilkessschen Elementensysteme, die unseren Elementensystemen (2) und (3) entsprechen. Die Zahlenwerte sind

Epoche und Oskulation 1906 Nov. 29.0 M.Z.B.

$$\begin{aligned}
M_1 &= 42^\circ 19' 5''.0 & 42^\circ 18' 14''.6 \\
\omega_1 &= -58 \ 45 \ 27.4 & -58 \ 44 \ 21.2 \\
\Omega &= 43 \ 27 \ 49.4 & 43 \ 27 \ 49.3 \\
i &= 22 \ 6 \ 59.8 \ (2a) & 22 \ 6 \ 57.3 \ (3a) \\
\varphi_1 &= 8 \ 13 \ 9.4 & 8 \ 13 \ 8.6 \\
\mu_1 &= 301''.44597 & 301''.43097 \\
\log a_1 &= 0.714003 & 0.714017
\end{aligned}$$

Nur das System (2a) braucht nach den in AN 205.147 gegebenen Umwandlungsformeln berechnet zu werden. Das System (3a) berechnet sich aus ihm durch Anbringung differentieller Änderungen in folgender Weise: Es ist $da_1 = da$, wo da den Unterschied der Halbachse des Systems (3) gegen das System (2), da_1 den entsprechenden Unterschied der Systeme (3a) und (2a) bedeutet, $d\mu_1 = d\mu$, $de_1 = de$, $dtg^{1/2}v_1 = dtg^{1/2}v$ (v wahre Anomalie).

Es wurden nun für die Zeiten der obigen 13 Normalörter, die hier als mittlere Zeiten Berlin betrachtet werden, berechnet:

1. die aus dem Elementensystem (3) mit Hinzufügung der Jupiterstörungen berechneten Orte (Tabelle 8, Spalte 1);
2. dieselben Orte berechnet aus dem System (3) ohne Störungen;
3. diese Orte berechnet aus dem System (3a) ohne Störungen.

Spalte 2 und 3 von Tabelle 8 enthalten die Unterschiede der ersten Rechnung gegen die zweite bzw. gegen die dritte. Schließlich sind in Spalte 4 die Differenzen der mittels des Systems (3) unter Berücksichtigung der Jupiter- und Saturnstörungen bzw. der Jupiterstörungen allein berechneten Orte aufgestellt.

Tabelle 8.

Normal-ort	Jahr	α				δ			
		1	2	3	4	1	2	3	4
I	1906	2 ^h 28 ^m 58 ^s .45	+0''.01	+0''.04	-0''.02	+10° 51' 47''.9	0''.0	+0''.5	-0''.3
II		2 15 43.80	+0.02	+0.02	0.00	+10 50 13.3	0.0	+0.1	-0.2
III		2 3 19.79	-0.02	-0.02	+0.03	+11 5 47.2	+0.1	+0.1	+0.1
IV	1907	4 37 33.49	+2.30	+1.10	-0.04	+35 58 41.1	+8.9	-0.3	+0.3
V	1908	4 15 42.17	+2.31	+1.36	-0.07	+35 52 28.4	+11.1	+0.2	+1.1

¹⁾ Nachschrift: Mittels des Elementensystems (3) und der Störungen (Tabelle 5), deren Berechnung bis zum Jahre 1921 weitergeführt wurde, ist für die diesjährige Opposition von Patroclus eine Ephemeride gerechnet worden. Auf Grund dieser wurde der Planet auf der Sternwarte Königstuhl 1920 Dez. 16 gefunden. Die Vergleichung Beob.—Rechn. lieferte folgendes befriedigende Ergebnis:

$$\Delta\alpha \cos \delta = +4''.4 \quad \Delta\delta = +1''.4.$$

Normal- ort	Jahr	α				δ			
		1	2	3	4	1	2	3	4
VI	1909	7 ^h 12 ^m 42 ^s 85	+	13 ^s 47	+	2 ^s 8.1	+	0 ^s 38	+ 46° 18' 13.7
VII	1910	9 27 17.44	+	25.42	+	0.76	+	1.29	+ 42 23 0.5
VIII		9 19 52.77	+	24.80	+	1.08	+	1.23	+ 42 5 42.6
IX	1911	11 30 24.03	+	32.56	—	4.67	+	2.04	+ 29 11 13.8
X	1912	12 42 32.84	+	41.54	—	10.03	+	2.56	+ 13 13 34.5
XI	1913	13 58 35.23	+	58.54	—	20.46	+	3.03	— 5 52 48.3
XII	1918	2 55 7.71	+ 2 ^m 19.42	— 1 ^m 32.82	— 30.50	+ 17 22 17.2	+ 27 5.6	— 17 37.3	— 5' 40.0
XIII	1919	5 18 36.71	+ 3 24.53	— 1 15.86	— 42.30	+ 39 20 10.0	+ 15 37.2	— 5 30.5	— 3 5.8

Aus Spalte 4 erkennt man, daß der Einfluß der Saturnstörungen auf den Ort in den ersten 7 Jahren verhältnismäßig gering ist; er beträgt für den 11. Ort noch nicht eine Bogenminute. 12 und 13 Jahre nach der Oskulation ist er aber bereits auf 42^s und 5' 7" angewachsen und beträgt etwa den 5. Teil der Jupiterstörungen, darf also bei genauer Störungsrechnung keineswegs vernachlässigt werden. Der Vergleich der übrigen Spalten zeigt zunächst, wie zu erwarten war, daß für die Oskulation alle verwendeten Elementensysteme, ob mit oder ohne Störungen, von gleicher Genauigkeit sind. Von da ab zeigen Spalte 2 und 3, daß mehrere Jahre hindurch die mit dem *Wilkensschen* System berechneten Orte den strengen mit Jupiterstörungen berechneten bedeutend näher kommen als die mit dem gewöhnlichen System berechneten Orte; besonders günstig ist es bei den Rektaszensionen. Damit ist für Patroclus rechnerisch nachgewiesen, daß das *Wilkenssche* Elementensystem für kürzere Zeiträume vorteilhafter ist als das gewöhnliche.

Um eine Anschauung über die Größe der Jupiterstörungen zu erhalten, die sich bei Anwendung des *Wilkensschen* Elementensystems ergeben, habe ich nach der in Teil I. entwickelten Methode unter Zugrundelegung des Systems (2a) die durch Jupiter hervorgerufenen Elementenstörungen für einen Zeitraum von fast 7 Jahren berechnet. Ferner waren in Teil II. aus dem entsprechenden gewöhnlichen Elementensystem (2) die Jupiterstörungen berechnet worden, sodaß eine direkte Vergleichung der Ergebnisse für beide Methoden ermöglicht wurde. Gleichzeitig lieferte die eine Rechnung eine Kontrolle der anderen, da für beide die Größen r und u in jedem Intervall übereinstimmen müssen. Dies zeigte sich auch — bei fünfstelliger Rechnung — mit genügender Genauigkeit. In der folgenden Tabelle 9 sind angegeben die Logarithmen der Größen K_1 und K_2 , ferner die Logarithmen der Ausdrücke $\xi_1 K_1 - r/\rho_1^3$ und $(\xi_1 - r)K_1 + rK_2$, die den wesentlichen Unterschied in der Störungskomponente S bei beiden Methoden bedingen.

Tabelle 9.

o ^b M. Z. B.	K_1	K_2	$\xi_1 K_1 - r/\rho_1^3$	$(\xi_1 - r)K_1 + rK_2$
1906 Aug. 1	7.52759	7.45705	8.60222 _n	7.87591
Okt. 20	7.57932	7.40967	8.60768 _n	7.75757
1907 Jan. 8	7.60724	7.35135	8.61148 _n	7.59928
März 29	7.61710	7.28154	8.61391 _n	7.36234
Juni 17	7.61237	7.19870	8.61507 _n	6.86867
Sept. 5	7.59566	7.09965	8.61510 _n	6.84149 _n
Nov. 24	7.56947	6.97873	8.61411 _n	7.29758 _n
1908 Febr. 12	7.53579	6.82266	8.61237 _n	7.49701 _n

o ^b M. Z. B.	K_1	K_2	$\xi_1 K_1 - r/\rho_1^3$	$(\xi_1 - r)K_1 + rK_2$
1908 Mai 2	7.49666	6.60228	8.61003 _n	7.61924 _n
Juli 21	7.45326	6.19892	8.60732 _n	7.70414 _n
Okt. 9	7.40689	5.78958 _n	8.60441 _n	7.76711 _n
Dez. 28	7.35767	6.41647 _n	8.60144 _n	7.81578 _n
1909 März 18	7.30621	6.64345 _n	8.59849 _n	7.85402 _n
Juni 6	7.25249	6.77895 _n	8.59569 _n	7.88473 _n
Aug. 25	7.19571	6.87227 _n	8.59298 _n	7.90905 _n
Nov. 13	7.13500	6.94181 _n	8.59043 _n	7.92845 _n
1910 Febr. 1	7.06740	6.99629 _n	8.58796 _n	7.94332 _n
April 22	6.99012	7.03961 _n	8.58547 _n	7.95368 _n
Juli 11	6.89635	7.07504 _n	8.58291 _n	7.95965 _n
Sept. 29	6.77567	7.10419 _n	8.58017 _n	7.96112 _n
Dez. 18	6.60026	7.12856 _n	8.57711 _n	7.95771 _n
1911 März 8	6.28556	7.14870 _n	8.57368 _n	7.94901 _n
Mai 27	5.35793 _n	7.16540 _n	8.56969 _n	7.93434 _n
Aug. 15	6.39863 _n	7.17899 _n	8.56512 _n	7.91264 _n
Nov. 3	6.68762 _n	7.18944 _n	8.55988 _n	7.88268 _n
1912 Jan. 22	6.86631 _n	7.19709 _n	8.55387 _n	7.84230 _n
April 11	6.99673 _n	7.20165 _n	8.54700 _n	7.78800 _n
Juni 30	7.09848 _n	7.20283 _n	8.53934 _n	7.71488 _n
Sept. 18	7.18167 _n	7.20042 _n	8.53086 _n	7.61310 _n
Dez. 7	7.25127 _n	7.19376 _n	8.52160 _n	7.46086 _n
1913 Febr. 25	7.31032 _n	7.18195 _n	8.51161 _n	7.19062 _n
Mai 16	7.36071 _n	7.16424 _n	8.50106 _n	6.01870 _n

K_1 und K_2 sollten der Theorie gemäß kleine Größen erster Ordnung sein. Als Maß für eine solche Größe ist hier die Jupitermasse $= 0.00095479$, $\log m_1 = 6.97991$ zu nehmen. Die Tabelle zeigt, daß in dem betrachteten Zeitraum K_1 und K_2 im allgemeinen größer sind, daß ferner ihre kleinsten Werte nicht gleichzeitig eintreten. Es liegt dies daran, daß der Trojaner nicht genau im dritten Eckpunkt des gleichseitigen Dreiecks steht, dessen eine Seite die Entfernung Sonne-Jupiter bildet, sondern um diesen Eckpunkt, den Librationspunkt, in erster Näherung eine kleine Ellipse beschreibt. Doch sind K_1 und K_2 immer noch klein genug, um zu bewirken, daß in dem ganzen Zeitraum die bei dem *Wilkensschen* Elementensystem verwendete Größe $(\xi_1 - r)K_1 + rK_2$ erheblich kleiner ist als die bei dem gewöhnlichen Elementensystem benutzte Größe $\xi_1 K_1 - r/\rho_1^3$. Daher wird auch die Störungskomponente S bei *Wilken*s kleiner als bei gewöhnlicher Rechnung.

In der folgenden Tabelle 10 finden sich für denselben Zeitraum die durch Jupiter verursachten Elementenstörungen und zwar jedesmal links bei gewöhnlicher Rechnung, rechts bei Gebrauch der *Wilkensschen* Elemente.

Tabelle 10.

o ^h M. Z. B.	ΔL		$\Delta \pi$		ΔM		$\Delta \varphi$		$\Delta \mu$	
1906 Aug. 1	— 1' 13.0	+ 4.8	— 5' 2.9	— 1' 47.6	+ 3' 49.9	+ 1' 52.4	+ 9.2	— 22.9	+ 0.047	+ 0.068
Okt. 20	— 24.0	+ 2.0	— 1 41.3	— 42.4	+ 1 17.3	+ 44.4	+ 3.9	— 7.3	+ 0.016	+ 0.023
1907 Jan. 8	+ 23.6	— 2.4	+ 1 40.4	+ 48.0	— 1 16.8	— 50.4	— 4.8	+ 6.8	— 0.016	— 0.023
März 29	+ 1 9.5	— 8.7	+ 4 55.0	+ 2 36.7	— 3 45.5	— 2 45.4	— 17.3	+ 18.3	— 0.047	— 0.070
Juni 17	+ 1 53.7	— 16.7	+ 7 55.4	+ 4 36.1	— 6 1.7	— 4 52.8	— 33.5	+ 26.7	— 0.076	— 0.115
Sept. 5	+ 2 36.2	— 26.7	+ 10 35.8	+ 6 39.1	— 7 59.6	— 7 5.8	— 53.1	+ 31.8	— 0.103	— 0.157
Nov. 24	+ 3 17.1	— 38.3	+ 12 51.6	+ 8 39.4	— 9 34.5	— 9 17.7	— 1' 15.6	+ 33.7	— 0.126	— 0.196
1908 Febr. 12	+ 3 56.7	— 51.6	+ 14 39.9	+ 10 32.3	— 10 43.2	— 11 23.9	— 1 40.1	+ 32.8	— 0.146	— 0.231
Mai 2	+ 4 35.0	— 1' 6.3	+ 15 59.3	+ 12 14.3	— 11 24.3	— 13 20.6	— 2 6.2	+ 29.3	— 0.164	— 0.263
Juli 21	+ 5 12.3	— 1 22.2	+ 16 49.8	+ 13 43.6	— 11 37.5	— 15 5.8	— 2 33.0	+ 23.9	— 0.178	— 0.291
Okt. 9	+ 5 48.7	— 1 39.3	+ 17 11.8	+ 14 59.0	— 11 23.1	— 16 38.3	— 3 0.0	+ 16.9	— 0.190	— 0.315
Dez. 28	+ 6 24.4	— 1 57.2	+ 17 7.2	+ 16 0.0	— 10 42.8	— 17 57.2	— 3 26.6	+ 8.9	— 0.200	— 0.337
1909 März 18	+ 6 59.5	— 2 16.0	+ 16 37.2	+ 16 46.7	— 9 37.7	— 19 2.7	— 3 52.3	+ 0.1	— 0.209	— 0.356
Juni 6	+ 7 34.1	— 2 35.4	+ 15 44.2	+ 17 19.7	— 8 10.1	— 19 55.1	— 4 16.8	— 9.0	— 0.216	— 0.373
Aug. 25	+ 8 8.3	— 2 55.3	+ 14 29.9	+ 17 39.6	— 6 21.6	— 20 34.9	— 4 39.7	— 18.1	— 0.222	— 0.388
Nov. 13	+ 8 42.1	— 3 15.8	+ 12 56.8	+ 17 47.5	— 4 14.7	— 21 3.3	— 5 0.7	— 26.9	— 0.227	— 0.401
1910 Febr. 1	+ 9 15.6	— 3 36.8	+ 11 6.8	+ 17 44.6	— 1 51.2	— 21 21.4	— 5 19.5	— 35.2	— 0.232	— 0.412
April 22	+ 9 48.8	— 3 58.1	+ 9 2.2	+ 17 31.4	+ 46.6	— 21 29.5	— 5 35.9	— 42.7	— 0.235	— 0.421
Juli 11	+ 10 21.7	— 4 19.9	+ 6 45.6	+ 17 10.1	+ 3 36.1	— 21 30.0	— 5 49.8	— 49.2	— 0.239	— 0.429
Sept. 29	+ 10 54.3	— 4 42.0	+ 4 18.9	+ 16 41.9	+ 6 35.4	— 21 23.9	— 6 0.8	— 54.6	— 0.241	— 0.435
Dez. 18	+ 11 26.5	— 5 4.6	+ 1 45.1	+ 16 8.8	+ 9 41.4	— 21 13.4	— 6 8.9	— 58.5	— 0.243	— 0.440
1911 März 8	+ 11 58.4	— 5 27.6	— 53.4	+ 15 32.5	+ 12 51.8	— 21 0.1	— 6 13.8	— 1' 0.9	— 0.244	— 0.442
Mai 27	+ 12 29.8	— 5 51.1	— 3 33.5	+ 14 55.4	+ 16 3.3	— 20 46.5	— 6 15.5	— 1 1.7	— 0.244	— 0.443
Aug. 15	+ 13 0.7	— 6 15.0	— 6 12.1	+ 14 19.7	+ 19 12.8	— 20 34.7	— 6 14.0	— 1 0.7	— 0.243	— 0.442
Nov. 3	+ 13 31.2	— 6 39.4	— 8 46.2	+ 13 48.2	+ 22 17.4	— 20 27.6	— 6 9.1	— 58.1	— 0.241	— 0.438
1912 Jan. 22	+ 14 1.1	— 7 4.3	— 11 12.2	+ 13 23.1	+ 25 13.3	— 20 27.4	— 6 1.0	— 53.8	— 0.237	— 0.432
April 11	+ 14 30.6	— 7 29.6	— 13 27.0	+ 13 7.2	+ 27 57.6	— 20 36.8	— 5 49.9	— 48.0	— 0.232	— 0.424
Juni 30	+ 14 59.6	— 7 55.2	— 15 27.4	+ 13 2.8	+ 30 27.0	— 20 58.0	— 5 35.8	— 40.9	— 0.225	— 0.412
Sept. 18	+ 15 28.2	— 8 21.3	— 17 10.6	+ 13 11.9	+ 32 38.8	— 21 33.2	— 5 19.2	— 32.9	— 0.216	— 0.398
Dez. 7	+ 15 56.4	— 8 47.5	— 18 33.6	+ 13 36.6	+ 34 30.0	— 22 24.1	— 5 0.4	— 24.2	— 0.206	— 0.381
1913 Febr. 25	+ 16 24.4	— 9 13.8	— 19 34.7	+ 14 17.7	+ 35 59.1	— 23 31.5	— 4 39.7	— 15.3	— 0.193	— 0.360
Mai 16	+ 16 52.3	— 9 40.1	— 20 11.8	+ 15 16.2	+ 37 4.1	— 24 56.3	— 4 17.8	— 6.8	— 0.178	— 0.337

Die Störungen in π und M sind von gleicher Größenordnung; kleiner sind sie für das *Wilken*sche System in L und besonders in φ , größer dagegen — im Maximum 0.2 — in μ . Daraus folgt, daß man auch bei Anwendung des *Wilken*schen Elementensystems die Störungen mit derselben Genauigkeit zu berechnen hat wie bei Anwendung des gewöhnlichen Systems, daß man sich also nicht wie bei den Saturnstörungen mit einer geringeren Stellenzahl begnügen darf.

*Wilken*s wendet in seiner Abhandlung zur Berechnung des den 3 Störungskomponenten gemeinsamen Ausdrucks

$$F = 1 - (1 + \zeta/r_1^2)^{-3/2}$$

der im wesentlichen $= K_1$ ist, folgendes Verfahren an. Bezeichnet $V = 60^\circ + \psi$ den von r und r_1 gebildeten Winkel, so ist

$$\eta = \zeta/r_1^2 = (1 + \varrho)(\varrho + V/3 \sin \psi + 2 \sin^2 \frac{1}{2} \psi).$$

Setzt man für positive Werte von η

$$\eta = \tan^2 \alpha$$

so wird

$$F_+ = \sin^2 \alpha + 2 \sin^2 \frac{1}{2} \alpha \cos^2 \alpha.$$

Für negative Werte von η hat man zu setzen

$$\eta = -\sin^2 \alpha$$

und es wird

$$F_- = -1/\cos^3 \alpha \cdot (\sin^2 \alpha + 2 \sin^2 \frac{1}{2} \alpha \cos^2 \alpha) = -F_+/\cos^3 \alpha.$$

*Wilken*s gibt für $\alpha = 0^\circ$ bis $\alpha = 60^\circ$ eine Tafel der Werte von F_+ und F_- . Um zu erkennen, wie weit die Ergebnisse sich ändern, wenn man statt der von mir angewendeten direkten Berechnung von K_1 und K_2 diese *Wilken*schen Formeln benutzt, habe ich nach dieser Methode die Störungsrechnung für folgende Zeitpunkte durchgeführt: 1908 Juli 21, Okt. 9, Dez. 28 und 1911 März 8, Mai 27, Aug. 15. Es sind dies die Stellen innerhalb der ersten 7 Jahre, an denen K_2 bzw. K_1 ihre kleinsten Werte erreichen. Ich habe also $K_1 = -F/r_1^3$ mittels der *Wilken*schen Tafel und K_2 nach $-3\varrho/r^3 \cdot (1 + \varrho + \frac{1}{3}\varrho^2)$ berechnet. Die Ergebnisse waren so, daß die Abweichungen gegen die gewöhnliche Rechnung bei $w d\pi/dt$ im Maximum 0.008, bei den übrigen Differentialquotienten 0.003 betrugen. Diese äußerst geringen Unterschiede üben aber auf den Verlauf der Störungsrechnung gar keinen Einfluß aus, zumal wenn man bedenkt, daß hier gerade die kleinsten Werte von K_1 und K_2 berechnet worden sind. Je größer K_1 und K_2 sind, desto weniger werden die Ergebnisse der direkten Rechnung von denen der indirekten abweichen. Daraus folgt also, daß bei Anwendung

der Variation der Elemente die direkte Berechnung von K_1 und K_2 genügt und daß von einer Benutzung der *Wilken*-schen Tafel im allgemeinen abgesehen werden kann.

Im übrigen möge noch auf den Zusammenhang der *Wilken*-schen Tafel mit der *Enckes*-schen Tafel für q und f hingewiesen werden. Man setze

$$\varrho_1^2/r_1^2 = 1 + 2q$$

$$\text{sodaß } q = \frac{1}{2}\zeta/r_1^2 = \frac{1}{2}\eta$$

wo ζ und η die *Wilken*-schen Größen bedeuten. Dann wird

$$r_1^3/\varrho_1^3 = (1 + 2q)^{-3/2} = 1 - qf$$

wo f zu dem Argument q aus der *Enckes*-schen Tafel zu entnehmen ist. Mithin wird

$$K_1 = -qf/r_1^3.$$

Nach der *Wilken*-schen Bezeichnung ist

$$K_1 = -1/r_1^3 \cdot [1 - (1 + \zeta/r_1^2)^{-3/2}] = -F/r_1^3$$

$$\text{sodaß } F = qf.$$

Man kann also die *Wilken*-sche Tafel für F aus der *Enckes*-schen für f durch folgenden Übergang ableiten:

$$q = \frac{1}{2}\eta = \frac{1}{2}\text{tg}^2\alpha \quad \text{bzw.} = -\frac{1}{2}\sin^2\alpha$$

$$F = qf.$$

Die Grenzen der *Enckes*-schen Tafel (siehe *Oppolzers* Lehrbuch der Bahnbestimmung) sind $q = \pm 0.03$. Die entsprechenden Grenzwinkel in der *Wilken*-schen Tafel gehen also hervor aus

$$\text{tg } \alpha_1 = \sqrt{0.06} \quad \text{für positives } q \text{ oder } \eta$$

$$\sin \alpha_2 = \sqrt{0.06} \quad \text{für negatives } q \text{ oder } \eta.$$

Die entsprechenden Winkel sind $\alpha_1 = 13^\circ 45'8''$ und $\alpha_2 = 14^\circ 10'7''$.

Charlottenburg-Berlin, 1920 Dezember.

Beispiele.

$$1. \alpha = 4^\circ \quad \eta = \text{tg}^2 4^\circ \quad q = \frac{1}{2}\text{tg}^2 4^\circ$$

$$\log \text{tg}^2 4^\circ = 7.68928$$

$$\log q = 7.38825 \quad q = 0.0024448$$

$$\log f = 0.47447$$

$$\log F_+ = 7.86272$$

$$F_+ = 0.00729.$$

$$2. \alpha = 11^\circ \quad \eta = -\sin^2 11^\circ \quad q = -\frac{1}{2}\sin^2 11^\circ$$

$$\log \sin^2 11^\circ = 8.56120$$

$$\log q = 8.26017n \quad q = -0.018204$$

$$\log f = 0.49729$$

$$\log F_- = 8.75746n$$

$$F_- = -0.05721.$$

Für Winkel $\alpha > \alpha_1$, α_2 ist aber q bzw. η keine kleine Größe mehr, sodaß man dann K_1 einfacher direkt, ohne Anwendung der Tafel, berechnet.

Will man K_1 sofort aus der *Enckes*-schen Tafel berechnen, so hat man folgende Formeln zu benutzen:

$$q = \frac{1}{2}(\varrho_1^2 - r_1^2)/r_1^2 = \frac{1}{2}[(r/r_1)^2 - 2r/r_1 \cdot \xi_1/r_1] \text{ oder } q = \frac{1}{2}\eta$$

wo η die obige von *Wilken* angegebene Form hat;

$$\log f \text{ aus der } \textit{Enckes}\text{-schen Tafel, } K_1 = -qf/r_1^3.$$

Ganz entsprechend würde sich K_2 berechnen lassen.

Als Gesamtergebnis kann somit — wenn man die hier gewonnenen Ergebnisse auch auf die anderen Planeten dieser Gruppe verallgemeinert — ausgesprochen werden: Bei geringeren Ansprüchen an die Genauigkeit bietet die Anwendung des *Wilken*-schen Elementensystems einige Vorteile. Wird größere Genauigkeit erstrebt, so ist auch dabei eine Störungsrechnung für Jupiter notwendig, die zweckmäßig nach der hier benutzten und in Teil I geschilderten Methode der Variation der Elemente durchgeführt wird. Eine merkliche Arbeitsersparnis dürfte dadurch nicht mehr erzielt werden.

W. Drucker.

Über astronomische Methoden zur Prüfung der Lichtätherhypothese. Von L. Courvoisier.

Der soeben in dieser Zeitschrift erschienene Artikel von P. Lenard: »Fragen der Lichtgeschwindigkeit« (AN 213.303) giftelt in der Aufforderung an die Astronomen, ihre besondere Aufmerksamkeit dem Problem der absoluten Erdbewegung zuzuwenden. Ich sehe mich dadurch veranlaßt — ganz gegen meine ursprüngliche Absicht — hier schon jetzt zwei astronomische Beobachtungsmethoden kurz zu skizzieren, welche der Bestimmung der Erdbewegung relativ zum Äther, und zwar unter Zugrundelegung der ursprünglichen *Lorentz*-schen Hypothese, dienen können und zu deren Durchführung teils besondere Beobachtungsreihen am hiesigen Vertikalkreise von mir vor einiger Zeit in Angriff genommen wurden, teils bereits vorhandenes Beobachtungsmaterial verwendbar ist.

In erster Linie möchte ich einen Umstand hervorheben, auf den meines Wissens bisher noch nicht von anderer Seite hingewiesen wurde, daß nämlich die »Lorentz-Kontraktion« terrestrischer molekularer Systeme, wenn sie als ein reeller Vorgang aufgefaßt wird, zwar schwerlich durch terrestrische Versuche¹⁾, wohl aber durch astronomische Beobachtungen — wenigstens der Theorie nach — feststellbar ist.

Zum Verständnis mag einstweilen das Folgende genügen. Man stelle sich beispielsweise vor, daß an einem Meridiankreise Zenitdistanzmessungen an einem sehr polnahen Stern ausgeführt werden. Durch die *Lorentz*-Kontraktion wird, zunächst allgemein gesprochen, jeder Körper in der Richtung der absoluten Bewegung verkürzt, daher der Kreis deformiert und zugleich das Fernrohr aus der normalen Lage gebracht, wahrscheinlich auch das Lot abgelenkt werden. In unserem Beispiel wirkt jedoch nur die Meridiankomponente der *Lorentz*-Kontraktion von Instrument und Niveaufläche der Erde bzw. Lot störend auf die jeweilige Messung ein. Diese Kontraktion im Meridian ist aber eine Funktion der momentanen Meridiankomponenten der absoluten Erdbewegung. Da die letzteren nun — abgesehen von dem Falle der Identität von absolutem Apex und Rotationspol der Erde — infolge der Erdrotation periodisch veränderlich sind, so muß es auch die in Betracht kommende *Lorentz*-Kontraktion sein, während dagegen die Richtung nach dem Stern dieser Veränderlichkeit nicht unterliegt. Die aus Beobachtungen des Sterns in verschiedenen Stundenwinkeln abgeleiteten Polhöhen werden also periodische

¹⁾ Meine Rechnung ergibt allerdings auch Veränderungen des Nadirpunktes an einem Meridiankreise.