Über die Approximation stetiger Funktionen durch lineare Aggregate von Potenzen.

Von

Otto Szász in Frankfurt a. M.

Einleitung.

Der folgende Satz rührt bekanntlich von Weierstraß her:

„Jede in einem abgeschlossenen endlichen Intervalle (a, b)*) stetige Funktion $f(x)$ kann in diesem Intervall durch Polynome mit beliebiger Annäherung gleichmäßig approximiert werden.“ Man drückt dies aus, indem man sagt, daß die Funktionenfolge:

$$1, x, x^2, \cdots, x^\nu, \cdots$$

eine *Basis* aller stetigen Funktionen im Intervalle (a, b) ist.

Beschränken wir uns zunächst auf das Intervall $(0, 1)$; meines Wissens hat sich zuerst Herr S. Bernstein**) mit der Frage beschäftigt, wann eine Folge von *positiven* Potenzen

$$x^{p_0}, x^{p_1}, x^{p_2}, \cdots, x^{p_\nu}, \cdots$$

eine Basis aller stetigen Funktionen im Intervall $(0, 1)$ bildet. Er gab hierfür einerseits hinreichende, andererseits notwendige Bedingungen, die ihn zu der Frage führten, ob nicht die Divergenz der Reihe $\sum \frac{1}{p_\nu}$ eine sowohl notwendige, wie auch hinreichende Bedingung darstellt.***) Erst Herrn

*) Das heißt: $a \leqq x \leqq b$.

**) S. Bernstein, a) Sur les recherches récentes relatives à la meilleure approximation des fonctions continues par des polynômes [Proceedings of the fifth international congress of mathematicians (Cambridge, 22—28 August 1912) Cambridge, 1913, Vol. I, S. 256—266], S. 264. — b) Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynômes de degré donné. [Mémoires publiés par la Classe des sciences de l'Académie Royale de Belgique, 4°, II. série, t. IV, 1912, 104 S.].

***) Die allgemeinste von Herrn Bernstein abgeleitete notwendige Bedingung lautet (a. a. O. b), S. 83—84):

Es darf keine Folge von positiven Zahlen

$$\delta_0, \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_\nu, \cdots.$$

Müntz*) gelang es (unter der Voraussetzung: $p_\nu > p_{\nu-1}$, die sich unmittelbar auf $\varliminf_{\nu=\infty} p_\nu > 0$ erweitern ließ) diese Frage, und zwar in bejahendem Sinne zu beantworten.**)

Ich hatte Gelegenheit, die Arbeit des Herrn Müntz schon im Manuskript zu lesen, und daran einige Bemerkungen zu knüpfen. Aber sein Beweis entbehrt meiner Ansicht nach noch der erreichbaren Einfachheit und Übersichtlichkeit. Es läßt sich nämlich sowohl die Anwendung der

---

existieren, für welche die beiden Reihen

$$\sum_0^\infty{}^\nu \delta_\nu \quad \text{und} \quad \sum_0^\infty{}^\nu e^{-p_\nu \delta_\nu}$$

gleichzeitig konvergieren.

Es läßt sich leicht zeigen, daß diese Bedingung mit der folgenden einfacheren gleichbedeutend ist: Die Reihe $\sum^\nu u_\nu$ muß für

$$u_\nu = \begin{cases} 1 & \text{für } p_\nu \leqq 1, \\ \dfrac{1+\log p_\nu}{p_\nu} & \text{für } p_\nu > 1, \end{cases}$$

divergieren.

Die obige Bedingung läßt sich nämlich so formulieren: die Reihe

$$\sum{}^\nu \left(\delta_\nu + e^{-p_\nu \delta_\nu}\right)$$

muß stets divergieren. Nun ist aber stets

$$\delta_\nu + e^{-p_\nu \delta_\nu} \geqq u_\nu,$$

und es gibt einen Wert von δ_ν, für den hier die Gleichheit gilt, woraus die Richtigkeit unserer Behauptung unmittelbar folgt.

*) Ch. H. Müntz, Über den Approximationssatz von Weierstraß [Mathem. Abhandlungen H. A. Schwarz gewidmet. Berlin 1914, S. 303—312]. Daselbst auch Literaturnachweis, zu dessen Ergänzung noch auf eine Arbeit des Herrn L. Fejér: Über die Laplacesche Reihe [Math. Ann. 67 (1909), S. 76—109], S. 97—99, und auf die daselbst angeführten Stellen verwiesen sei. Man vgl. ferner: G. Faber, Über stets konvergente Interpolationsformeln [Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung XIX (1910), S. 142—146], S. 143—144. — S. Bernstein, Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités [Communications de la Société mathématique de Kharkow, 2e série, XIII (1912), S. 1—2].

**) Die Herren E. Schmidt und F. Riesz haben das allgemeinere Problem behandelt: gegeben sei eine unendliche Folge im Intervall (a, b) definierter reeller stetiger Funktionen $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., was sind die Bedingungen dafür, daß jede im Intervall (a, b) definierte stetige Funktion durch lineare Aggregate der φ_ν gleichmäßig approximiert werden kann? Man vgl. E. Schmidt, Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener [Math. Ann. 63 (1907), S. 433—476; Dissert. Göttingen (1905), 34 S.]. — F. Riesz, a) Sur une espèce de Géométrie analytique des systèmes de fonctions sommables [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Acad. des Sciences, Paris, 144 (1907), S. 1409—1411]. b) Sur certaines systèmes singuliers d'équations intégrales [Annales scientifiques de l'École Normale supérieure, 3e Série, T. 28 (1911), S. 33—62], S. 51—54.

auf unendliche lineare Gleichungssysteme bezüglichen Schmidtschen Resultate, wie auch der Fourierschen Entwicklungen vermeiden. Ferner bemerke ich, daß sich der Beweis ohne erhebliche Abänderung auch auf komplexe p_ν mit positiv reellem Teil erweitern läßt und auch für den Fall $\underline{\lim}_{\nu=\infty} \Re(p_\nu) = 0$ gewisse Schlüsse zuläßt. Der zu beweisende Satz lautet nun:

Satz I. *Damit die Folge*

$$(1) \qquad x^{p_0} = x^0 = 1,\ x^{p_1},\ x^{p_2}, \cdots; \quad \Re(p_\nu) > 0, \quad p_\nu \neq p_\mu$$

eine Basis aller stetigen Funktionen im Intervall (0, 1) *sei,**) *ist notwendig, daß* $\sum_1^\infty{}_\nu \frac{1+\Re(p_\nu)}{1+|p_\nu|^2}$ *divergiert, und hinreichend, daß* $\sum_1^\infty{}_\nu \frac{\Re(p_\nu)}{1+|p_\nu|^2}$ *divergiert.***)

Hierbei dürfen die stetigen Funktionen auch komplexe Werte annehmen, sind also allgemein von der Form

$$f(x) = \varphi(x) + i\psi(x),$$

wo $\varphi(x)$, $\psi(x)$ reelle stetige Funktionen sind.

Offenbar gilt der Weierstraßsche Satz auch für komplexe Funktionen reeller Veränderlichen, denn man braucht ja nur $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ gesondert zu approximieren; natürlich werden jetzt die Näherungspolynome von $f(x)$ komplexe Koeffizienten haben.

In § 1 erinnere ich an einen längst bekannten Determinantensatz; in § 2 beweise ich einen Satz über Approximation im Mittel; in § 3 beweise ich den Satz I. In § 4 beschäftige ich mich mit Approximationen durch trigonometrische Funktionen; schon der Satz I gestattet hierauf bezügliche Schlüsse. Weitere Resultate leite ich auf anderem Wege ab. Insbesondere wird bewiesen, daß die Funktionenfolge

$$1,\ x,\ \cos \varrho_\nu x,\ \sin \varrho_\nu x,\ \varrho_\nu \neq \varrho_\mu > 0 \qquad (\nu = 1, 2, 3, \cdots)$$

sicher dann eine Basis in jedem endlichen Intervall darstellt, wenn für ein positives δ die Reihe $\sum_1^\infty{}_\nu \frac{1}{\varrho_\nu^{1+\delta}}$ divergiert.

---

*) Ich werde hierfür gelegentlich kurz Basis sagen.

**) In der Exponentenfolge muß die Null vorkommen, denn sonst wäre schon $f(x) \equiv 1$ im Nullpunkte nicht mit beliebiger Genauigkeit approximierbar.

Die Voraussetzung $p_\nu \neq p_\mu$ bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit, denn für unser Problem ist es gleichgültig, ob ein Exponent nur einmal oder öfter vorkommt.

$\Re(x)$ bedeutet — wie üblich — den reellen Teil von x. — Unter x^{p_ν} will ich den Hauptwert dieses vieldeutigen Ausdrucks verstehen.

Der von Herrn Müntz bewiesene Satz ist in Satz I enthalten; man vgl. § 3.

§ 1.

Ein Determinantensatz.

In der Determinante n^{ten} Grades $[a_{ik}]_1^n$ sei

$$a_{ik} = \frac{1}{q_i + r_k},$$

dann ist ihr Wert*)

$$D_n = \frac{\prod\limits_{i>k}(q_i - q_k)(r_i - r_k)}{\prod (q_i + r_k)} \qquad (i, k = 1, 2, \cdots, n).$$

Ist insbesondere

$$q_i = s_i + \frac{1}{2}, \quad r_i = \bar{s}_i + \frac{1}{2} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)^{**}),$$

so ist

$$(2) \qquad \left[\frac{1}{s_i + \bar{s}_k + 1}\right]_1^n = \frac{\prod\limits_{i>k}^{1,n} |s_i - s_k|^2}{\prod\limits_{i,k=1}^{n} (s_i + \bar{s}_k + 1)}.$$

§ 2.

Über die Approximation im Mittel.

Sei

$$(3) \qquad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots$$

eine Folge reeller oder komplexer Zahlen, die nur der Bedingung unterworfen sind:

$$(3') \qquad \lambda_\nu \neq \lambda_\mu, \quad \Re(\lambda_\nu) > -\frac{1}{2} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \cdots);$$

$f(x)$ sei eine (reelle oder komplexe) stetige Funktion der reellen Veränderlichen x im Intervall $(0, 1)$. Wenn es zu einer beliebig kleinen positiven Zahl ε einen Ausdruck

$$\alpha_1 x^{\lambda_1} + \alpha_2 x^{\lambda_2} + \cdots + \alpha_n x^{\lambda_n}$$

*) A. Cauchy, Mémoire sur les fonctions alternées et sur les sommes alternées [Exercices d'analyse et de phys. math. II (1841), S. 151—159 (Œuvres complètes 2^e sér. XII, im Erscheinen)]. — Auszug mehrerer Schreiben des Dr. Rosenhain an Herrn Professor Jacobi über die hyperelliptischen Transzendenten [Journal für die reine und angewandte Mathematik 40 (1850), S. 319—360], S. 350—351. — F. Joachimsthal, Bemerkungen über den Sturmschen Satz [ebenda 48 (1854), S. 386—416], S. 414. — R. Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten, vierte Aufl., Leipzig 1875, S. 92—94. — S. Günther, Lehrbuch der Determinantentheorie, zweite Aufl., Erlangen 1877, S. 111—112. — Th. Muir, The Theory of Determinants in the historical Order of Development, London, Vol. I second edition 1906, S. 342—345; Vol. II 1911, S. 171—172.

**) $\bar{s}_i$ bedeutet die zu s_i konjugierte komplexe Zahl.

gibt für den

$$\int_0^1 |f(x) - (\alpha_1 x^{\lambda_1} + \cdots + \alpha_n x^{\lambda_n})|^2 \, dx < \varepsilon$$

wird, so sagt man, $f(x)$ *sei durch die Funktionenfolge*

(4) $$x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}, x^{\lambda_3}, \cdots$$

im Mittel approximierbar im Intervall $(0, 1)$. Ist die Funktion gleichmäßig approximierbar, so ist sie offenbar auch im Mittel approximierbar im betrachteten Intervall. Daher ist die Approximierbarkeit im Mittel eine *notwendige* Bedingung für die gleichmäßige Approximierbarkeit. Ich beweise nun den

Satz A. *Dafür, daß jede stetige Funktion im Intervall* $(0, 1)$ *durch die Folge* (4) *im Mittel approximierbar sei, ist notwendig und hinreichend, daß* $\sum_1^\infty {}_\nu \frac{1 + 2\Re(\lambda_\nu)}{1 + |\lambda_\nu|^2}$ *divergiert. Dabei sind die* λ_ν *der Bedingung* (3′) *unterworfen.**)

Beweis. Sei λ_0 eine positive ganze Zahl oder Null und

$$\lambda_0 \neq \lambda_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3, \cdots).$$

(Wenn ein solches λ_0 nicht existiert, so genügt es, sich auf den Weierstraßschen Satz zu berufen.)

Ich bestimme zunächst das Minimum des Ausdrucks

$$\int_0^1 | x^{\lambda_0} + u_1 x^{\lambda_1} + \cdots + u_n x^{\lambda_n} |^2 \, dx$$

bei beliebiger Veränderlichkeit der komplexen Variabeln $u_1, u_2, \cdots, u_n$. Es handelt sich darum, das Minimum m_n der positiv definiten Hermiteschen Form

$$\sum_{\nu, \mu = 0}^{n} c_{\nu\mu} u_\nu \bar{u}_\mu, \quad c_{\nu\mu} = \int_0^1 x^{\lambda_\nu + \bar{\lambda}_\mu} \, dx = \frac{1}{\lambda_\nu + \bar{\lambda}_\mu + 1},$$

unter der Nebenbedingung $u_0 = 1$ zu bestimmen.**) Man überzeugt sich leicht***), daß die gesuchte Größe den Wert hat:

*) Wie aus dem Beweis ersichtlich ist, bleibt die Bedingung unverändert, wenn man sich auf *reelle* stetige Funktionen beschränkt.

**) Bei der Auswertung von $c_{\nu\mu}$ kommt die Voraussetzung $\Re(\lambda_\nu) > -\frac{1}{2}$ zur Anwendung.

***) Offenbar existiert das Minimum; setzt man nun $u_\nu = v_\nu + i w_\nu$, so erhält man

$$m_n = \frac{[c_{\nu\mu}]_0^n}{[c_{\nu\mu}]_1^n},$$

also, mit Rücksicht auf (2):

$$m_n = \frac{\prod\limits_{\nu>\mu}^{0,n} |\lambda_\nu - \lambda_\mu|^2}{\prod\limits_{\nu,\mu=0}^{n} (\lambda_\nu + \bar{\lambda}_\mu + 1)} : \frac{\prod\limits_{\nu>\mu}^{1,n} |\lambda_\nu - \lambda_\mu|^2}{\prod\limits_{\nu,\mu=1}^{n} (\lambda_\nu + \bar{\lambda}_\mu + 1)},$$

und hieraus

$$m_n = \frac{1}{2\lambda_0 + 1} \prod_1^n{}^{\nu} \left| \frac{\lambda_\nu - \lambda_0}{\lambda_\nu + \lambda_0 + 1} \right|^2.$$

Offenbar ist

$$0 < m_{n+1} < m_n,$$

so daß also $\lim\limits_{n=\infty} m_n = m$ immer existiert; x^{λ_0} ist durch die Folge (4) im Mittel approximierbar oder nicht, je nachdem $m = 0$ oder $m > 0$ ist. Setzt man nun

$$\lambda_\nu = \sigma_\nu + i\tau_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3, \cdots),$$

so wird

$$\left| \frac{\lambda_\nu - \lambda_0}{\lambda_\nu + \lambda_0 + 1} \right|^2 = \frac{(\sigma_\nu - \lambda_0)^2 + \tau_\nu^2}{(\sigma_\nu + \lambda_0 + 1)^2 + \tau_\nu^2} = 1 - \gamma_\nu,$$

wobei

$$\gamma_\nu = \frac{(2\sigma_\nu + 1)(2\lambda_0 + 1)}{(\sigma_\nu + \lambda_0 + 1)^2 + \tau_\nu^2} > 0$$

ist. Also ist $m = 0$, wenn $\sum\limits_1^\infty{}^{\nu} \gamma_\nu$ divergiert, und $m > 0$, wenn $\sum\limits_1^\infty{}^{\nu} \gamma_\nu$ konvergiert. Nun folgt aus der Beziehung

$$\frac{1 + 2\sigma_\nu}{1 + \sigma_\nu^2 + \tau_\nu^2} = \frac{1 + 2\sigma_\nu}{(\sigma_\nu + \lambda_0 + 1)^2 + \tau_\nu^2} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{(\lambda_0 + 1)(2\sigma_\nu - \lambda_0)}{(\sigma_\nu + \lambda_0 + 1)^2 + \tau_\nu^2}}$$

unmittelbar, daß die Reihen

$$\sum_1^\infty{}^{\nu} \gamma_\nu \quad \text{und} \quad \sum_1^\infty{}^{\nu} \frac{1 + 2\sigma_\nu}{1 + \sigma_\nu^2 + \tau_\nu^2}$$

---

eine reelle quadratische Funktion in den v_ν, w_ν und findet durch Differenzieren für das Minimum die Bedingungen

$$\sum_0^n{}^{\nu} c_{\nu\mu} u_\nu = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, n),$$

und hierzu tritt demnach die Gleichung (wegen $\bar{u}_0 = 1$)

$$\sum_0^n{}^{\nu} c_{\nu 0} u_\nu = m_n;$$

berechnet man aus dem so entstehenden Gleichungssystem u_0 und beachtet, daß $u_0 = 1$ sein muß, so erhält man unmittelbar für m_n den oben angegebenen Wert.

gleichzeitig konvergieren oder divergieren. Wenn also $\sum_1^\infty{}_\nu \frac{1+2\sigma_\nu}{1+\sigma_\nu^2+\tau_\nu^2}$ divergiert, so ist jede Potenz x^{λ_0} $(\lambda_0 = 0, 1, 2, \cdots)$ und demnach, mit Anwendung des Weierstraßschen Satzes, auch jede stetige Funktion durch die Folge (4) im Mittel approximierbar; ist dagegen $\sum_1^\infty{}_\nu \frac{1+2\sigma_\nu}{1+\sigma_\nu^2+\tau_\nu^2}$ konvergent, so ist *keine* Potenz $\lambda_0 \neq \lambda_\nu$ $(\nu = 1, 2, \cdots)$ durch die Folge (4) im Mittel approximierbar, und das konvergente unendliche Produkt $\frac{1}{2\lambda_0+1} \prod_1^\infty{}_\nu \left|\frac{\lambda_\nu - \lambda_0}{\lambda_\nu + \lambda_0 + 1}\right|^2$ stellt die untere Schranke der im Mittel erreichbaren Annäherung von x^{λ_0} im Intervall (0, 1) dar.

Damit ist Satz A bewiesen; insbesondere folgt hieraus als notwendige Bedingung, daß die Folge (1) unendlich viele Glieder enthalten muß.

Übrigens ist unter denselben Bedingungen auch jede samt dem Quadrate ihres absoluten Betrages im Lebesgueschen Sinne integrierbare Funktion durch die Folge (4) im Mittel approximierbar, denn jede solche Funktion ist durch stetige Funktionen im Mittel approximierbar. Ist nämlich $f(x) = \varphi(x) + i\psi(x)$ die betrachtete Funktion, so liefern die Partialsummen der zu $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ gehörigen Fourierschen Entwicklungen das Gewünschte.

Hieraus folgt nach einer bekannten Schlußweise der

Satz B. *Sei* $\chi(x) = f_1(x) + if_2(x)$, *wo* $f_1(x), f_2(x)$ *samt ihrem Quadrate im Lebesgueschen Sinne integrierbare Funktionen bedeuten; ferner sei für das Funktionensystem* (4):

$$\int_0^1 \bar{\chi}(x)\, x^{\lambda_\nu} dx = 0 \qquad (\nu = 1, 2, 3, \cdots)^{*)} \tag{5}$$

und $\sum_1^\infty{}_\nu \frac{1+2\Re(\lambda_\nu)}{1+|\lambda_\nu|^2}$ *divergent; dann ist höchstens mit Ausnahme einer Punktmenge vom Maße Null* $\chi(x) = 0$. Man drückt dies auch so aus: das Funktionensystem (4) ist *vollständig* im Intervall (0, 1).

Man kann nämlich zu einer beliebig kleinen positiven Zahl ε die Zahlen $c_1, \cdots, c_n$ so bestimmen, daß

$$\int_0^1 |\chi(x) + c_1 x^{\lambda_1} + \cdots + c_n x^{\lambda_n}|^2 dx < \varepsilon$$

wird, und hieraus folgt nach (5):

*) Hier ist $\bar{\chi}(x) = f_1(x) - if_2(x)$.

$$\int_0^1 \{|\chi(x)|^2 + |c_1 x^{\lambda_1} + \cdots + c_n x^{\lambda_n}|^2\}\, dx < \varepsilon,$$

also um so mehr

$$\int_0^1 |\chi(x)|^2\, dx < \varepsilon,$$

woraus unsere Behauptung unmittelbar folgt.

Ist insbesondere $\chi(x)$ eine stetige den Gleichungen (5) *genügende Funktion, so muß sie identisch verschwinden**); man drückt dies so aus: das Funktionensystem (4) ist *abgeschlossen* im Intervall (0, 1). Eine im Intervall (0, 1) stetige Funktion $\varphi(x)$ ist also durch ihre Konstanten

$$\int_0^1 \overline{\varphi}(x)\, x^{\lambda_\nu}\, dx \qquad (\nu = 1, 2, 3, \cdots)$$

völlig bestimmt. Hierbei ist vorausgesetzt, daß $\Re(\lambda_\nu) > -\frac{1}{2}$, $\lambda_\nu \neq \lambda_\mu$ und $\sum_1^\infty \frac{1 + 2\Re(\lambda_\nu)}{1 + |\lambda_\nu|^2}$ divergiert.

Diese Sätze übertragen sich unmittelbar auf ein Intervall $(0, b)$, wo b eine beliebige reelle Zahl ist.

§ 3.

Beweis des Satzes I.

Wir betrachten nun die Folge (1); nach unserem Satz A ist die Divergenz der Reihe $\sum_1^\infty \frac{1 + 2\Re(p_\nu)}{1 + |p_\nu|^2}$ eine notwendige Bedingung dafür, daß die Folge (1) eine Basis sei. Da aber $\Re(p_\nu) > 0$ vorausgesetzt wurde, so darf die obige Reihe durch $\sum_1^\infty \frac{1 + \Re(p_\nu)}{1 + |p_\nu|^2}$ ersetzt werden. Hiermit ist der erste Teil des Satzes I bewiesen; um auch den zweiten Teil zu beweisen, approximiere

---

*) Für $\lambda_\nu = \nu - 1$ gaben hierfür schon Herr Lerch, Stieltjes, ferner die Herren Phragmén, Landau und Fejér Beweise. Man vgl. E. Landau, Über die Approximation einer stetigen Funktion durch ganze rationale Funktionen [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 25 (1908), S. 337—346], und die daselbst angeführte Literatur. — Fejér, a. a. O., S. 99. — Vgl. ferner: C. N. Moore, On Certain Constants Analogous to Fourier's Constants [Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 14 (1908), S. 368—378; vol. 15 (1909), S. 116]. — Müntz, a. a. O., S. 304—305.

ich zunächst die Potenz x^λ ($\lambda \geqq 1$). Zu diesem Zwecke wende ich den Satz A auf die Funktion $x^{\lambda - \frac{1}{2}}$ und die Potenzenfolge

$$\lambda_\nu = p_\nu - \frac{1}{2} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \cdots)$$

an. Dies ist gestattet, denn die Divergenz der Reihe $\sum_1^\infty {}_\nu \frac{\Re(p_\nu)}{1 + \left|p_\nu - \frac{1}{2}\right|^2}$ folgt aus der vorausgesetzten Divergenz der Reihe $\sum_1^\infty {}_\nu \frac{\Re(p_\nu)}{1 + |p_\nu|^2}$.*) Zu einer beliebig klein vorgegebenen positiven Zahl ε gibt es also einen Ausdruck

$$a_1 x^{p_1 - \frac{1}{2}} + a_2 x^{p_2 - \frac{1}{2}} + \cdots + a_n x^{p_n - \frac{1}{2}}$$

derart, daß

$$\int_0^1 \left| x^{\lambda - \frac{1}{2}} + a_1 x^{p_1 - \frac{1}{2}} + \cdots + a_n x^{p_n - \frac{1}{2}} \right|^2 dx < \frac{\varepsilon^2}{(\lambda + 1)^2} \tag{6}$$

wird. Nun ist offenbar

$$\frac{x^{\lambda + \frac{1}{2}}}{\lambda + \frac{1}{2}} + \frac{a_1 x^{p_1 + \frac{1}{2}}}{p_1 + \frac{1}{2}} + \cdots + \frac{a_n x^{p_n + \frac{1}{2}}}{p_n + \frac{1}{2}} = \int_0^x \left(z^{\lambda - \frac{1}{2}} + a_1 z^{p_1 - \frac{1}{2}} + \cdots + a_n z^{p_n - \frac{1}{2}} \right) dz,$$

also

$$\left| \frac{x^{\lambda + \frac{1}{2}}}{\lambda + \frac{1}{2}} + a_1 \frac{x^{p_1 + \frac{1}{2}}}{p_1 + \frac{1}{2}} + \cdots + a_n \frac{x^{p_n + \frac{1}{2}}}{p_n + \frac{1}{2}} \right| \leqq \int_0^x \left| z^{\lambda - \frac{1}{2}} + a_1 z^{p_1 - \frac{1}{2}} + \cdots + a_n z^{p_n - \frac{1}{2}} \right| dz. \tag{7}$$

---

*) Diese beiden Reihen konvergieren oder divergieren sogar gleichzeitig, denn es ist

$$\sum_1^\infty {}_\nu \frac{\Re(p_\nu)}{1 + \left|p_\nu - \frac{1}{2}\right|^2} = \sum_1^\infty {}_\nu \frac{\Re(p_\nu)}{1 + |p_\nu|^2} \cdot \frac{1 + |p_\nu|^2}{1 + \left|p_\nu - \frac{1}{2}\right|^2},$$

und

$$1 + \left|p_\nu - \frac{1}{2}\right|^2 \leqq 1 + 2\left(|p_\nu|^2 + \frac{1}{4}\right) < 2(|p_\nu|^2 + 1),$$

$$1 + \left|p_\nu - \frac{1}{2}\right|^2 \geqq 1 + \left(|p_\nu| - \frac{1}{2}\right)^2 \geqq 1 + \frac{1}{2}\left(|p_\nu|^2 - \frac{1}{4}\right) > \frac{1}{2}(|p_\nu|^2 + 1)$$

oder

$$\frac{1}{2} < \frac{1 + |p_\nu|^2}{1 + \left|p_\nu - \frac{1}{2}\right|^2} < 2.$$

Wendet man ferner die bekannte Ungleichung:

$$\left(\int_a^b g(z)\,dz\right)^2 \leqq (b-a)\int_a^b g^2(z)\,dz$$

an, so folgt aus (7) und (6)

$$\left|\frac{x^{\lambda+\frac{1}{2}}}{\lambda+\frac{1}{2}} + a_1\frac{x^{p_1+\frac{1}{2}}}{p_1+\frac{1}{2}} + \cdots + a_n\frac{x^{p_n+\frac{1}{2}}}{p_n+\frac{1}{2}}\right| \leqq x^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\varepsilon}{\lambda+1} \quad \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq 1,$$

und hieraus

$$\left|x^\lambda + \frac{a_1\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{p_1+\frac{1}{2}}x^{p_1} + \cdots + \frac{a_n\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{p_n+\frac{1}{2}}x^{p_n}\right| \leqq \varepsilon \qquad (0 \leqq x \leqq 1).$$

Also ist jede positive ganze Potenz durch die Folge (1) gleichmäßig approximierbar; daraus folgt aber durch Anwendung des Weierstraßschen Satzes, daß auch jede stetige Funktion gleichmäßig approximierbar ist.

Hiermit ist der Satz I vollständig bewiesen. Man kann diesen Satz noch ein wenig verschärfen; aus dem Beweise ist nämlich ersichtlich, daß man bei der Approximation der positiven Potenz x^λ ($\lambda \geqq 1$) das Glied 1 in der Potenzenfolge (1) fortlassen darf. Nun ist aber jede für $x = 0$ verschwindende, im Intervall (0, 1) stetige Funktion daselbst durch die Potenzenfolge

$$x,\ x^2,\ x^3,\ \cdots$$

gleichmäßig approximierbar; denn ist $f(x)$ stetig und $f(0) = 0$, so gibt es zu jeder beliebig kleinen positiven Zahl ε nach dem Weierstraßschen Satze ein solches Polynom $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ daß

$$|f(x) - (a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n)| < \varepsilon \qquad (0 \leqq x \leqq 1)$$

ist. Setzt man hierin $x = 0$, so ergibt sich

$$|a_0| < \varepsilon,$$

und hieraus folgt leicht, daß auch

$$|f(x) - (a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n)| < 2\varepsilon$$

ist. Es ergibt sich so der schärfere

Satz I′. *Dafür, daß die Potenzenfolge*

$$(1') \qquad x^{p_1},\ x^{p_2},\ \cdots,\ p_\nu \neq p_\mu,\quad \Re(p_\nu) > 0 \qquad (\nu = 1, 2, \cdots),$$

eine Basis aller für $x = 0$ *verschwindenden, im Intervall* (0, 1) *stetigen Funktionen sei, ist notwendig, daß* $\sum_{1}^{\infty}{}_{\nu}\,\frac{1+\Re(p_\nu)}{1+|p_\nu|^2}$ *divergiert, und hinreichend, daß* $\sum_{1}^{\infty}{}_{\nu}\,\frac{\Re(p_\nu)}{1+|p_\nu|^2}$ *divergiert.*

Gibt es eine Zahl $\alpha > 0$ derart, daß

$$\Re(p_\nu) \geqq \alpha \qquad (\nu = 1, 2, 3, \cdots)$$

ist, so läßt sich offenbar die notwendige Bedingung durch die folgende ersetzen: $\sum_1^\infty {}_\nu \frac{\Re(p_\nu)}{1+|p_\nu|^2}$ muß divergieren; und diese Bedingung ist jetzt gleichbedeutend mit der Divergenz der Reihe $\sum_1^\infty {}_\nu \frac{\Re(p_\nu)}{|p_\nu|^2}$, wie aus der Beziehung

$$\sum_1^\infty {}_\nu \frac{\Re(p_\nu)}{1+|p_\nu|^2} = \sum_1^\infty {}_\nu \frac{\Re(p_\nu)}{|p_\nu|^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{|p_\nu|^2}}$$

unmittelbar hervorgeht.

Also fällt die notwendige Bedingung hier mit der hinreichenden zusammen, und man kann den Satz aussprechen:

Satz I″. *Durch die Potenzenfolge*

$$x^{p_1},\ x^{p_2},\ x^{p_3},\ \cdots,$$

in der

$$p_\nu \neq p_\mu, \quad \Re(p_\nu) \geqq \alpha > 0 \qquad (\nu = 1, 2, 3, \cdots)$$

ist, läßt sich dann und nur dann jede für $x = 0$ verschwindende, im Intervall $(0, 1)$ stetige Funktion gleichmäßig approximieren, wenn $\sum_1^\infty {}_\nu \frac{\Re(p_\nu)}{|p_\nu|^2}$ divergiert.

Sind die p_ν reell und positiv und ist $\lim_{\nu=\infty} p_\nu = 0$, so besagt die notwendige Bedingung, daß die Folge (1′) unendlich viele Glieder enthält, und die hinreichende Bedingung besteht in der Divergenz der Reihe $\sum_1^\infty {}_\nu p_\nu$. Es gilt also der

Satz I‴. *Ist $\lim_{\nu=\infty} p_\nu = 0$, $p_\nu > 0$, und $\sum_1^\infty {}_\nu p_\nu$ divergent, so ist durch die Potenzenfolge*

$$x^{p_1},\ x^{p_2},\ x^{p_3},\ \cdots$$

*jede für $x = 0$ verschwindende, im Intervall $(0, 1)$ stetige Funktion gleichmäßig approximierbar.**)

---

*) Herr Müntz teilte mir gelegentlich vor längerer Zeit mit, daß er für diesen Fall folgendes beweisen kann:

1) Die Divergenz der Reihe $\sum_1^\infty {}_\nu p_\nu$ ist eine *notwendige* Bedingung dafür, daß die Folge (1) eine Basis sei.

Die Transformation $x = zb$ zeigt unmittelbar, daß diese Sätze auch für das Intervall $(0, b)$ gelten.

§ 4.

Über die Approximation durch trigonometrische Funktionen.

Setzt man in den Satz I'

$$p_\nu = 1 + i\tau_\nu \quad (\nu = 1, 2, 3, \cdots), \quad \tau_\nu \neq \tau_\mu,$$

ein und beschränkt man sich auf reelle Funktionen, so folgt, daß jede im Intervall $(0, b)$ stetige, für $x = 0$ verschwindende Funktion durch die Folge

(8) $$x \cos(\tau_\nu \log x), \quad x \sin(\tau_\nu \log x) \qquad (\nu = 1, 2, 3, \cdots)$$

gleichmäßig approximiert werden kann, wenn nur $\sum_1^\infty{}_\nu \frac{1}{1+\tau_\nu^2}$ divergiert.*)

Hieraus folgt, daß unter derselben Bedingung durch die Funktionenfolge

(9) $$e^{-z} \cos \tau_\nu z, \quad e^{-z} \sin \tau_\nu z \qquad (\nu = 1, 2, 3, \cdots)$$

jede im Intervall $a \leqq z \leqq +\infty$ stetige, für $z \longrightarrow +\infty$ verschwindende Funktion gleichmäßig approximierbar ist.

Sei nämlich

$$e^{-z} = x, \quad b = e^{-a} \quad (a \text{ reell});$$

um nun eine im Intervall $a \leqq z \leqq +\infty$ stetige, für $z \longrightarrow +\infty$ verschwindende Funktion $f(z)$ durch die Folge (9) gleichmäßig zu approximieren, genügt es, die Funktion $f(-\log x)$ im Intervall $0 \leqq x \leqq b$ durch die Folge (8) zu approximieren. Wobei offenbar $f(-\log x)$ für $x \longrightarrow +0$ verschwindet.

In einem endlichen Intervall (a, d) läßt sich also um so mehr die Funktion $e^{-z}f(z)$ in eine gleichmäßig konvergente Reihe von der Form entwickeln:

$$e^{-z}f(z) = e^{-z}\sum_1^\infty{}_\nu P_\nu(z),$$

wo $P_\nu(z)$ ein linearer Ausdruck der Funktionen

$$\cos \tau_n z, \quad \sin \tau_n z \qquad (n = 1, 2, \cdots, \nu)$$

---

2) Im Falle $p_\nu = \frac{1}{\nu}$ ist die Folge (1) sicher eine Basis.

Anmerkung bei der Korrektur (24. März 1916):

Der Beweis von (2) findet sich in seiner vor Kurzem erschienenen Arbeit: Approximation willkürlicher Funktionen durch Wurzeln [Archiv der Math. und Phys. III. R., 24. Bd. (1916), S. 310—316], während der Beweis von 1) bisher meines Wissens nicht veröffentlicht ist.

*) Es ist durchweg der Hauptwert des Logarithmus gemeint.

ist. Hieraus erhält man die Gleichung

$$f(z) = \sum_1^\infty{}' P_\nu(z) \qquad (a \leqq z \leqq d),$$

und es *ist also die Funktionenfolge*

$$\cos \tau_\nu z, \quad \sin \tau_\nu z \qquad (\nu = 1, 2, 3, \cdots)$$

eine Basis aller stetigen Funktionen in jedem endlichen Intervall, wenn nur die Reihe $\sum_1^\infty{}' \frac{1}{1+\tau_\nu^2}$ *divergiert.*

Ähnliche Sätze allgemeinerer Art leite ich auf anderem Wege ab.

Wir beweisen den

Satz II. *Die Funktionenfolge*

$$1,\ x,\ s \cos \varrho_\nu x + t \sin \varrho_\nu x, \quad \varrho_\nu \neq \varrho_\mu > 0 \quad (\nu = 1, 2, 3, \cdots)$$

stellt sicherlich eine Basis aller stetigen Funktionen im Intervall (a, d) $(a \geqq 0$ *falls* $s \cdot t = 0)$ *dar, wenn es eine positive Zahl* δ *gibt, für die* $\sum_1^\infty{}' \frac{1}{\varrho_\nu^{1+\delta}}$ *divergiert.* Hierbei sollen s und t beliebige reelle Zahlen bedeuten, die nicht beide verschwinden.

Zu diesem Zwecke zeige ich zunächst, daß die Funktionenfolge

(10) $$s \cos \varrho_\nu x + t \sin \varrho_\nu x \qquad (\nu = 1, 2, 3, \cdots)$$

unter der Bedingung, daß

(11) $$\varrho_\nu \neq \varrho_\mu > 0, \quad \sum_1^\infty{}' \frac{1}{\varrho_\nu^{1+\delta}}$$

divergiert, im Intervall (a, d) abgeschlossen ist. Wäre dies nämlich nicht der Fall, so würde es eine *nicht identisch verschwindende* stetige Funktion $f(x)$ geben, für die

(12) $$\int_a^d f(x)\,(s \cos \varrho_\nu x + t \sin \varrho_\nu x)\,dx = 0 \qquad (\nu = 1, 2, 3, \cdots)$$

ist, so daß also die Funktion

$$F(\lambda) = \int_a^d f(x)\,(s \cos \lambda x + t \sin \lambda x)\,dx$$

an den Stellen $\lambda = \varrho_\nu$ $(\nu = 1, 2, 3, \cdots)$ verschwinden würde. Nun ist aber $F(\lambda)$ offenbar eine ganze transzendente Funktion, und es ist

$$|F(\lambda)| \leqq \int_a^d |f(x)|\,(|s| + |t|)\,e^{|\lambda|(|d|+|a|)}\,dx,$$

das heißt

$$F(\lambda) \leqq \alpha e^{\beta|\lambda|}, \tag{13}$$

wo α, β geeignet gewählte Konstanten bedeuten. Ferner läßt sich leicht zeigen, daß $F(\lambda)$ nicht identisch verschwindet; dies würde nämlich besagen, daß

$$s\int_a^d f(x)\,x^{2\nu}\,dx = 0, \qquad t\int_a^d f(x)\,x^{2\nu+1}\,dx = 0 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

ist. Dies ist aber nach den vorausgegangenen Resultaten nicht möglich, wenn wir noch voraussetzen, daß die Zahlen s und t beide von Null verschieden sind, oder daß der Nullpunkt nicht im Innern des Intervalls (a, d) liegt. Denn die Potenzenfolge

$$1, x, x^2, \cdots, x^\nu, \cdots$$

ist in jedem endlichen Intervall abgeschlossen, und jede der Potenzenfolgen

$$1, x^2, x^4, \cdots, x^{2\nu}, \cdots,$$
$$x, x^3, x^5, \cdots, x^{2\nu+1}, \cdots$$

ist abgeschlossen in einem Intervall, das den Nullpunkt nicht im Innern enthält.

Wenn nun $F(\lambda)$ unendlich viele von Null verschiedene Nullstellen besitzt:

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots, \quad 0 < |\lambda_\nu| \leqq |\lambda_{\nu+1}|,$$

so folgt aus (13) nach einem wohlbekannten Satze, daß

$$|\lambda_\nu| > c \cdot \nu \qquad (\nu = 1, 2, 3, \cdots)$$

ist, wo c eine geeignet gewählte positive Konstante bedeutet. Also

$$\sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} \frac{1}{|\lambda_\nu|^{1+\delta}} \text{ konvergiert für jedes } \delta > 0.$$

Mit Rücksicht auf die Bedingung (11) kann also (12) nicht bestehen, das heißt die Funktionenfolge (10) ist abgeschlossen im Intervall (a, d).

Nun lautet aber ein Satz des Herrn E. Schmidt:*)

Es sei $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_\nu(x), \cdots$ eine unendliche Reihe für das abgeschlossene Intervall $a \leqq x \leqq b$ definierter, reeller, zweimal stetig differenzierbarer Funktionen, deren zweite Ableitungen ein abgeschlossenes System bilden; dann läßt sich jede für $a \leqq x \leqq b$ definierte stetige Funktion in eine Reihe endlicher linearer homogener Aggregate der Funktionen

$$1, x, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_\nu(x), \cdots$$

gleichmäßig konvergent entwickeln.

---

*) A. a. O., S. 476.

Durch Anwendung dieses Satzes ergibt sich nun unmittelbar der Satz II. Insbesondere ist also

$$1,\ x,\ \cos \varrho_\nu x \qquad (\nu = 1, 2, 3, \cdots)$$

bzw.

$$1,\ x,\ \sin \varrho_\nu x \qquad (\nu = 1, 2, 3, \cdots)$$

eine Basis im Intervall (a, d) $(a \geqq 0)$; und

$$1,\ x,\ \cos \varrho_\nu x + \sin \varrho_\nu x$$

eine Basis in jedem endlichen Intervall.

Der Satz läßt sich leicht auf komplexe ϱ_ν erweitern und das Glied x in der Funktionenfolge darf fortgelassen werden, wie ich an anderer Stelle*) ausführe.

*) Folytonos függvényck megközelítése adott függvénysorozatból képezett lineáris kifejezésekkel. Erscheint demnächst in den „Mathematikai és Physikai Lapok“.