

**7. Elastizitätsmodul
und Wärmeausdehnung der Metalle;
von Dr.-Ing. H. Sieglerschmidt.**

Zwischen dem Elastizitätsmodul und der thermischen Ausdehnung der Metalle besteht nach meinen früheren Ermittlungen¹⁾ ein gesetzmäßiger Zusammenhang, der sich näherungsweise durch die empirische Regel

$$(1) \quad \frac{E}{1000 \cdot s} \cdot \frac{\beta^3}{w} \sqrt[3]{A} = 100$$

ausdrücken läßt.

In (1) bedeutet β die Ausdehnungszahl, E den Elastizitätsmodul in g/cm^2 , w die spezifische Wärme in g-cal. , s das spezifische Gewicht in g/cm^3 , A das Atomgewicht.

Da die Werte

$$\frac{E}{1000 \cdot s} \cdot \frac{\beta^3}{w} \sqrt[3]{A}$$

bei einzelnen Metallen von dem Werte 100 verhältnismäßig große Abweichungen zeigten (bis zu ± 20 Proz.), habe ich versucht, den Zusammenhang zwischen den bezüglichen Größen in einer dem wirklichen Verhalten der Materialien besser entsprechenden Form darzustellen.

Tab. 1 enthält für die in der Spalte 1 angeführten Elemente in Spalte 3 und 5 die von Grüneisen angegebenen Werte der Ausdehnungszahl β und des von der Temperatur unabhängigen Verhältnisses w/β^2 , in Spalte 2 und 4 die Werte des Atomgewichtes nach „Landolt-Börnstein, Physikalisch-Chemische Tabellen“ und des Verhältnisses $1/A\beta$, in Spalte 6 und 7 die im „Landolt-Börnstein“ angegebenen Grenzwerte

1) „Eine Beziehung zwischen den physikalischen Eigenschaften der Metalle und ihrem Atomgewicht.“ Dinglers Polyt. Journ. 1910. p. 137.

2) „Über die thermische Ausdehnung der Metalle“, von E. Grüneisen, Ann. d. Phys. 33. p. 33. 1910 und von demselben Verfasser: „Über den Einfluß von Temperatur und Druck auf Ausdehnungskoeffizienten und spezifische Wärme der Metalle“, Ann. d. Phys. 33. p. 65. 1910.

des spezifischen Gewichtes s und des Elastizitätsmoduls E unter Hinzuziehung der von Grüneisen gefundenen Werte von E .¹⁾

Durch Auftragung der hiernach berechneten Werte von E/s (Spalte 8) als Ordinaten und der Werte von $1/A\beta$ als Abszissen ergeben sich für die einzelnen Metalle die durch kleine Kreise hervorgehobenen Punkte der Fig. 1, die sich der eingezeichneten, der Gleichung

$$(2) \quad \frac{E}{s} = 30 \left(\frac{1}{A\beta} \right)^2 + 10100 \frac{1}{A\beta}$$

entsprechenden Ausgleichlinie gut anschließen.

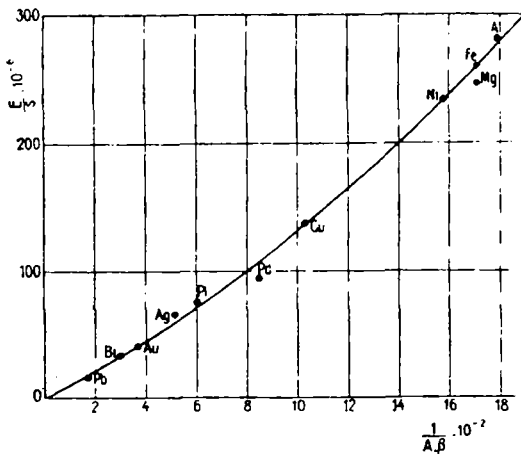


Fig. 1.

Außer durch eine quadratische Gleichung von der allgemeinen Form:

$$(3) \quad \frac{E}{s} = m \left(\frac{1}{A\beta} \right)^2 + n \cdot \frac{1}{A\beta}$$

kann die Ausgleichlinie mit gleicher Genauigkeit auch durch eine Exponentialgleichung

$$(4) \quad \frac{E}{s} = C \cdot \left(\frac{1}{A\beta} \right)^n$$

wiedergegeben werden (C und n Konstanten).

1) „Die elastischen Konstanten der Metalle bei kleinen Deformationen“, Ann. d. Phys. 25. p. 825. 1908.

Trägt man zur Bestimmung der Konstanten C und n die in Spalte 11 der Tab. 1 berechneten Werte von $\log E/s \cdot 10^{-6}$ als Ordinaten und die in Spalte 9 berechneten Werte von

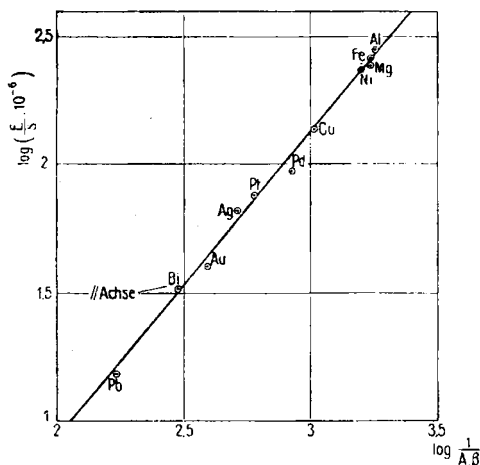


Fig. 2.

$\log 1/\alpha\beta$ als Abszissen auf, so ergeben sich die in Fig. 2 eingetragenen Punkte und als Ausgleichsline eine Gerade:

$$\log \left(\frac{E}{s} \cdot 10^{-6} \right) = 0,53 - 2 + 1,2 \log \frac{1}{\alpha \beta}.$$

Hiernach ist

$$\log C = 6,53 - 2, \quad C = 34000, \quad n = 1,2$$

und

$$(5) \quad \frac{E}{s} = 34000 \cdot \left(\frac{1}{\alpha \beta} \right)^{1,2}.$$

Spalte 6 der Tab. 2 läßt erkennen, daß die Abweichungen der Werte:

$$\frac{\frac{E}{s}}{34000 \left(\frac{1}{\alpha \beta} \right)^{1,2}} \cdot 100$$

von dem Werte 100 verhältnismäßig sehr gering sind.

Die Abweichung beträgt für Pd, Ag und Pb -16 , $+8$ und -6 Proz.; für die übrigen Metalle ist sie kleiner ± 4 Proz.

Tabelle 1.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Metall	Atomgewicht A	Ausdehnungszahl $\beta \cdot 10^7$	$\frac{1}{A \cdot \beta}$	$\frac{w}{\beta}$ g-cal	Elastizitätsmodul $E \cdot 10^{-6}$ g/cm ²	Spezifisches Gewicht s g/cm ³	$\frac{E}{s} \cdot 10^{-6}$	$\log \frac{1}{A \cdot \beta}$	$\log \frac{w}{\beta}$	$\log \frac{E}{s} \cdot 10^{-6}$
Mg	24,4	239	1710	9610	426	1,73	246	3,2380	3,9827	2,3909
Al	27,1	206	1790	9340	719—750 735	2,56—2,67 2,82	281	3,2529	3,9704	2,4487
Fe	55,9	104,8	1710	9380	1902—2168 2035	7,85—7,88 7,87	242—275 259	3,2330	3,9722	2,4133
Ni	58,7	107,8	1580	8230	2030—2054 2042	8,57—8,93 8,75	237—230 234	3,1987	3,9154	2,3692
Cu	63,6	152,7	1080	5050	1052—1301 1178	8,3—8,92 8,61	127—146 137	3,0128	3,7033	2,1367
Pd	106,5	110,8	847	5050	971—1148 1060	10,9—12,1 11,5	89—98 94	2,9279	3,7033	1,9731
Ag	107,9	180,1	514	2980	590—805 698	10,4—10,6 10,5	56—76 66	2,7110	3,4742	1,8195
Pt	194,8	85,1	603	3560	1552—1700 1626	21,5	72—79 75,5	2,7813	3,5515	1,8780
Au	197,2	137,4	369	2170	558—980 769	19,3	29—51 40	2,5970	3,3365	1,6021
Pb	206,9	282	171	1070	166—181 174	11,21—11,45 11,33	14,8—15,8 15,3	2,2330	3,0294	1,1847
Bi	208,5	127; 160 ¹⁾	377; 300 ¹⁾	2220; 1770 ¹⁾	319—325 322	9,76—9,93 9,85	32,7	2,5763; 2,4771 ¹⁾	3,3464; 3,2480 ¹⁾	1,5146

1) β Achse nach Landolt-Börnstein, Phys.-Chem. Tabellen.

Tabelle 2.

1	2	3	4	5	6	7
Metall	$\frac{E}{s} \frac{w}{100000} \frac{3}{\beta} \sqrt[3]{A \cdot 100}$	Abweichung von 100	$\frac{E}{s} \frac{w}{1390 \cdot \left(\frac{w}{\beta}\right)^{1/2}} \cdot 100$	Abweichung von 100	$\frac{E}{s} \frac{w}{34000} \left(\frac{1}{A\beta}\right)^{1,2} \cdot 100$	Abweichung von 100
Mg	74,3	-26	86,6	-13	95,5	-4
Al	89,8	-10	103	+3	103	+3
Fe	98-112 105	+5	88-100 94	-6	98,9-107 101	+1
Ni	111-109 110	+10	103-99,6 101	+1	101-98,1 100	0
Cu	100-115 108	+8	105-121 113	+13	90,6-104 97	-3
Pd	84-92 88	-12	73,9-81,4 78	-22	80,2-88,4 84	-16
Ag	92-125 109	+9	94,0-127 111	+11	91,9-125 108	+8
Pt	117-128 123	+23	95,3-105 100	0	97,6-107 102	+2
Au	78-137 107	+7	74,3-181 103	+3	70,9-125 98	-2
Pb	82-87 85	-15	97,3-104 101	+1	91,0-97,2 94	-6
Bi	87; 109 ¹⁾	-18; +9	81,3; 110 ¹⁾	-19; +10	77,9; 102 ¹⁾	-22; +2

1) Vgl. Anm. 1 zu Tab. 1.

Da nach dem Dulong'schen Gesetz das Produkt und Wärmekapazität w und Atomgewicht A für alle einfachen Körper annähernd gleich ist:

$$Aw = \sim 6,4,$$

so muß nach (4) annähernd auch:

$$(6) \quad \frac{E}{s} = C_1 \left(\frac{w}{\beta} \right)^{n_1}$$

(C_1 und n_1 Konstanten) sein.

Die in Fig. 3 für E/s als Ordinaten und w/β als Abszissen eingetragenen Punkte schließen sich der Ausgleichlinie weniger

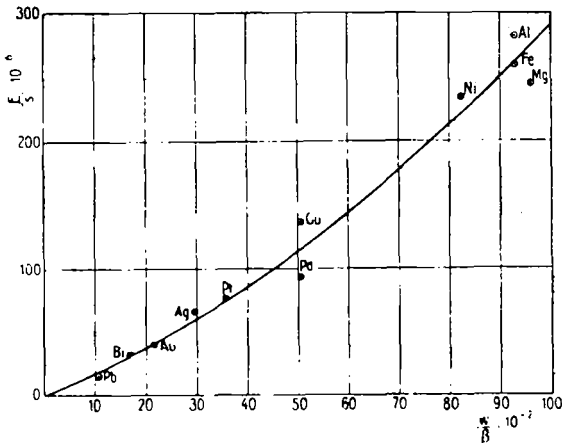


Fig. 3.

gut an, als die Punkte der Fig. 1. Dasselbe gilt bezüglich der Punkte der Fig. 4 für $\log(E/s)$ als Ordinaten (Spalte 11 der Tab. 1) und $\log(w/\beta)$ als Abszissen (vgl. Fig. 2).

Die eingezeichnete Ausgleichlinie entspricht der Gleichung:

$$\log \left(\frac{E}{s} \cdot 10^{-6} \right) = 0,143 - 3 + \frac{1}{3} \log \frac{w}{\beta}.$$

Somit ist

$$\log C_1 = 6,143 - 3, \quad C_1 = 1390, \quad n_1 = \frac{1}{3}.$$

$$(7) \quad \frac{E}{s} = 1390 \left(\frac{w}{\beta} \right)^{1/3}.$$

Die in Spalte 4 der Tab. 2 berechneten Werte

$$\frac{\frac{E}{s}}{1390 \left(\frac{w}{\beta} \right)^{1/3}} \cdot 100,$$

zeigen teilweise größere Abweichungen von 100, als die nach Gleichung (5) berechneten Werte der Spalte 6.

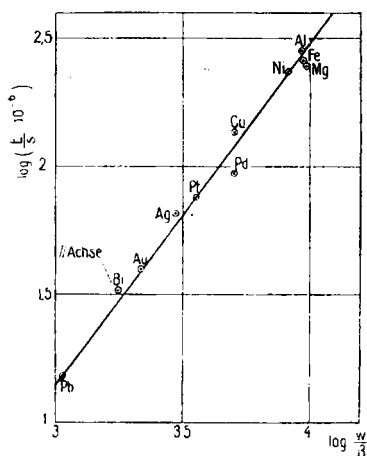


Fig. 4.

In Gleichung (6) stellen sowohl E/s als auch w/β *Arbeitsgrößen* dar, und zwar ist $E/2s$ die bei der elastischen Dehnung eines Würfels von der Kantenlänge 1 um seine eigene Länge aufzuwendende mechanische Arbeit für 1 g der in dem Würfel enthaltenen Masse, w/β die demselben Würfel bei der thermischen Dehnung um 1 für 1 g Masse zuzuführende Wärmemenge.

Des Vergleiches wegen sind in Spalte 2 der Tab. 2 noch die nach Regel (1) berechneten Werte

$$\frac{\frac{E}{s}}{100000 \frac{w}{\beta}} \sqrt[3]{A} \cdot 100$$

zusammengestellt. Letztere weichen zum großen Teil erheblich mehr von 100 ab, als die Werte der Spalte 6.

Auf Grund obiger Ermittlungen kann ausgesagt werden:

Dem elastischen und thermischen Verhalten einfacher Metalle entspricht bisher am besten eine Gleichung von der allgemeinen Form:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{E}{s} = \text{Funktion } \frac{1}{A \beta} , \\ \hline = C \left(\frac{1}{A \beta} \right)^n . \end{array} \right.$$

Die gefundenen Gleichungen haben zurzeit nur empirischen Wert und bedürfen hinsichtlich der Größe der Konstanten C und n einer Korrektur auf Grund einer unter gleichen Vorbedingungen (gleiches Material und gleicher Materialzustand) angestellten genaueren Bestimmung von E , β , w und s .

Auf Grund eines umfangreicheren Versuchsmaterials wird es auch möglich sein, die Veränderlichkeit von C und n mit der Temperatur festzustellen.

(Eingegangen 22. Mai 1911.)