3. *Über die Abzählung der Eigenschwingungen fester Körper;*

von Rudolf Ortvay.

1. Einleitung und Allgemeines.

In der Quantentheorie der spezifischen Wärme der festen Körper, wie sie von P. Debye[1]) entwickelt wurde, ist die Bestimmung des akustischen Spektrums der festen Körper erforderlich. Debye hat das akustische Spektrum der isotropen Körper bestimmt, indem er von den Eigenschwingungen einer Kugel bei kräftefreier Oberfläche ausgeht. Da für die spezifische Wärme nur sehr hohe Frequenzen maßgebend sind, deren Verteilung von der Form des Körpers unabhängig[2]) ist, kann er seine Resultate auf alle isotropen Körper ausdehnen.

Weil aber die Durchführung der Rechnung bei der Kugel weitgehende mathematische Hilfsmittel, wie Entwickelungen nach Kugelfunktionen erfordert, erscheint es wünschenswert, einen einfacheren Weg anzugeben, der zu der Verteilung der Eigenfunktionen führt.

Hr. Prof. Sommerfeld hat in einer Vorlesung über Quantentheorie im Wintersemester 1912/13 einen solchen Weg angegeben, indem er das elastische Problem eines isotropen Würfels löst bei „gemischten Grenzbedingungen“[3]), nach

---

1) P. Debye, Ann. d. Pys. **39**. p. 789—839. 1912.

2) P. Debye, l. c.; H. Weyl, Math. Ann. **71**. p. 441—479. 1911.

3) „Gemischte Grenzbedingungen“ wurden benutzt von C. Somigliana, Roma Acc. Linc. Red. (5) **11**. I. 1912; (5) **13**. I. 1904; (5) **13**. II. 1904. Ferner löst L. Orlando (Sopra alcuni problemi di fisica matematica, Messina 1905) das Problem des elastischen Gleichgewichtes des Parallelepipedes, indem er die Greensche Funktion angibt. Siehe weiter A. Molinari, Sopra alcuni diversi casi d'integratione della $\Delta^2 = 0$ nell parallelepipedo rectangolo, Giornali di matematichi Battaglini, Roma 1913. Vgl. auch Enzykl. der math. Wiss., **4**. 2. II. Heft 2. p. 133.

welchen die normalen Verrückungen und tangentiellen Spannungen verschwinden. Eine solche bequeme Abänderung der Grenzbedingungen ist erlaubt; denn wir sind ebensowenig an bestimmte Grenzbedingungen[1]) wie an bestimmte Körperform gebunden, nur müssen die Grenzbedingungen derart sein, daß kein Energiestrom durch die Oberfläche fließt, d. h. wir setzen einen Körper im Wärmegleichgewicht mit der Umgebung voraus.

Diese Grenzbedingungen gestatten nicht nur eine Lösung des elastischen Problems des isotropen Würfels in trigonometrischen Funktionen, sondern auch die eines rhombisch kristallinischen. Dadurch wird es ermöglicht, die Debyesche Theorie der spezifischen Wärme auf rhombische Kristalle auszudehnen.

Das elastische Problem des Würfels bei „ungemischten Grenzbedingungen“, d. h. bei festgehaltener oder freier Oberfläche ist bis jetzt nicht gelöst und auch nicht in elementaren Funktionen lösbar, wie von den Untersuchungen über das einfachere Problem der Platten her bekannt ist. Man könnte die von Sommerfeld benutzten Grenzbedingungen dadurch realisiert denken, daß man den elastischen Würfel durch eine fest anschließende, starre Würfelform begrenzt denkt, so aber, daß zwischen den beiden Flächen keine Reibung stattfindet. Wir wollen diesen Fall im folgenden kurz als Fall I bezeichnen.

In Anlehnung hieran habe ich gefunden, daß das elastische Problem auch lösbar wird, wenn man umgekehrt an der Oberfläche die normalen Spannungen und die tangentiellen Verrückungen verschwinden läßt (Fall II).

Physikalisch sind diese Grenzbedingungen noch schwieriger realisiert zu denken als im Falle I, sie würden eine Führung in der Flächennormale jedes Flächenelementes erfordern, durch welche die benachbarten Flächenelemente nicht beeinflußt werden. Da aber eine solche Grenzbedingung an sich widerspruchsfrei ist, werden die Folgerungen daraus ebenso gültig sein, wie jene, die aus ebenfalls unausführbaren thermodynamischen Gedankenexperimenten abgeleitet werden.

Bedeutet $\mathfrak{V}$ die Verrückung mit den Komponenten ξ, η, ζ, t die Zeit, ϱ die Dichte, λ, μ die elastischen Konstanten und

---

1) P. Debye, l. c.

ist $\Theta = \operatorname{div} \mathfrak{V}$, so lauten die Grundgleichungen der Elastizitätstheorie:

$$(1) \qquad \begin{cases} \varrho \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \mu \varDelta \xi + (\lambda + \mu) \dfrac{\partial \Theta}{\partial x} \\ \varrho \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \mu \varDelta \eta + (\lambda + \mu) \dfrac{\partial \Theta}{\partial y} \\ \varrho \dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \mu \varDelta \zeta + (\lambda + \mu) \dfrac{\partial \Theta}{\partial z} \end{cases} .$$

Für die Oberfläche fordern wir, um einen Körper im Wärmegleichgewicht mit der Umgebung zu haben, daß bei der Bewegung keine Arbeit geleistet wird.

Die an der Oberfläche geleistete Arbeit ist:

$$\iint (X_n \xi + Y_n \eta + Z_n \zeta)\, dS,$$

wo

$$(2) \qquad \begin{cases} X_n = X_x \cos(nx) + X_y \cos(ny) + X_z \cos(nz) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

die Komponenten der Kräfte auf die Flächeneinheit mit der Normale n bedeuten und wo die Komponenten der inneren Spannung gegeben sind durch:

$$(3) \qquad \begin{cases} X_x = \lambda \left(\dfrac{\partial \xi}{\partial x} + \dfrac{\partial \eta}{\partial y} + \dfrac{\partial \zeta}{\partial z} \right) + 2\mu \dfrac{\partial \xi}{\partial x} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y_z = \mu \left(\dfrac{\partial \eta}{\partial z} + \dfrac{\partial \zeta}{\partial y} \right) . \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

In unserem Falle I oder II verschwindet die Arbeit, da entweder die Kräfte in der Richtung der Verrückung oder die Verrückung in der Richtung der Kräfte verschwindet.

2. Lösung des elastischen Problems bei gemischten Grenzbedingungen.

Fall I.

Wir gehen nun zur Behandlung unseres speziellen Problems über. Es sei ein Würfel von der Kantenlänge l gegeben. Den Anfangspunkt unseres Koordinatensystems legen wir in den einen Eckpunkt, die Koordinatenachsen in die angrenzenden Kanten des Würfels.

Die Grenzbedingungen fordern, daß die normalen Verrückungen und tangentiellen Spannungen verschwinden.

Für die Flächen $x = \begin{cases} 0 \\ l \end{cases}$ ergibt diese Bedingung:

$$\xi = 0, \; Y_x = Z_x = 0. \tag{4}$$

Da aber

$$Y_x = \mu \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)$$

$$Z_x = \mu \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \right)$$

und $\xi = 0$ an der ganzen Fläche ist, so erhalten wir

$$\xi = \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0. \tag{5'}$$

Analog lauten die Grenzbedingungen an den übrigen Flächen:

$$y = \begin{cases} 0 \\ l \end{cases} \quad \eta = \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0, \tag{5''}$$

$$z = \begin{cases} 0 \\ l \end{cases} \quad \zeta = \frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial z} = 0. \tag{5'''}$$

Um diese Grenzbedingungen zu erfüllen, setzen wir für die Verrückungen, indem wir uns auf zeitlich periodische Vorgänge beschränken:

$$\begin{cases} \xi = A \sin \frac{\mathfrak{a} \pi x}{l} \cos \frac{\mathfrak{b} \pi y}{l} \cos \frac{\mathfrak{c} \pi z}{l} e^{i \omega t}, \\ \eta = B \cos \frac{\mathfrak{a} \pi x}{l} \sin \frac{\mathfrak{b} \pi y}{l} \cos \frac{\mathfrak{c} \pi z}{l} e^{i \omega t}, \\ \zeta = C \cos \frac{\mathfrak{a} \pi x}{l} \cos \frac{\mathfrak{b} \pi y}{l} \sin \frac{\mathfrak{c} \pi z}{l} e^{i \omega t}, \end{cases} \tag{6}$$

wo A, B, C komplexe Konstante sind. Die Grenzbedingungen sind erfüllt, wie man sich durch Einsetzen von ξ, η, ζ aus (6) in die Gleichungen (5'), (5''), 5''') überzeugen kann. Wesentlich dabei ist für die Form der angesetzten Lösung, daß sie aus dem Produkte zweier Cosinus mit einem Sinus bestehen und im Argumente des Sinus der Reihe nach x, y, z vorkommt.

Um die Frequenzen ω zu bestimmen, setzen wir ξ, η, ζ aus (6) in die Grundgleichungen (1) ein und erhalten, wenn wir nach A, B, C ordnen:

$$\begin{cases} A(F_1 - \varrho \omega^2) + B H_1 + C H_2 = 0, \\ A H_1 + B(F_2 - \varrho \omega^2) + C H_3 = 0, \\ A H_2 + B H_3 + C(F_3 - \varrho \omega^2) = 0, \end{cases} \tag{7}$$

wo die F_1 bis H_3 bedeuten:

$$F_1 = [(\lambda + \mu)\mathfrak{a}^2 + \mu(\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2)]\frac{\pi^2}{l^2},$$

$$F_2 = [(\lambda + \mu)\mathfrak{b}^2 + \mu(\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2)]\frac{\pi^2}{l^2},$$

$$F_3 = [(\lambda + \mu)\mathfrak{c}^2 + \mu(\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2)]\frac{\pi^2}{l^2},$$

$$H_1 = (\lambda + \mu)\frac{\pi^2}{l^2}\mathfrak{a}\,\mathfrak{b},$$

$$H_2 = (\lambda + \mu)\frac{\pi^2}{l^2}\mathfrak{a}\,\mathfrak{c},$$

$$H_3 = (\lambda + \mu)\frac{\pi^2}{l^2}\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}.$$

Die drei linearen homogenen Gleichungen (7) haben nur dann ein von Null verschiedenes Lösungssystem, wenn die Determinante verschwindet:

$$\begin{vmatrix} F_1 - \varrho\,\omega^2 & H_1 & H_2 \\ H_1 & F_2 - \varrho\,\omega^2 & H_3 \\ H_2 & H_3 & F_3 - \varrho\,\omega^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{8}$$

Das ergibt ausgerechnet:

$$\left(\mu\frac{\pi^2}{l^2}(\mathfrak{a}^2+\mathfrak{b}^2+\mathfrak{c}^2) - \varrho\,\omega^2\right)^2\left((\lambda + 2\,\mu)\frac{\pi^2}{l^2}(\mathfrak{a}^2+\mathfrak{b}^2+\mathfrak{c}^2) - \varrho\,\omega^2\right) = 0. \tag{9}$$

Diese Gleichung dritten Grades für ω^2 hat drei Wurzeln, von denen zwei gleich sind; für ω selbst hat man:

$$\omega_1 = \omega_2 = \pi\sqrt{\frac{\mu}{\varrho}}\,\frac{\sqrt{\mathfrak{a}^2+\mathfrak{b}^2+\mathfrak{c}^2}}{l}. \tag{10}$$

$$\omega_3 = \pi\sqrt{\frac{\lambda + 2\,\mu}{\varrho}}\,\sqrt{\frac{\mathfrak{a}^2+\mathfrak{b}^2+\mathfrak{c}^2}{l}}. \tag{11}$$

Mit den aus der Elastizitätstheorie bekannten Werten der Fortpflanzungsgeschwindigkeit für longitudinale bzw. transversale Wellen:

$$c_{\text{long}} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\varrho}} \tag{12}$$

$$c_{\text{trans}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}} \tag{13}$$

erhalten wir aus den Formeln (10) und (11):

$$\omega_1 = \omega_2 = c_{\text{trans}}\,\frac{\pi}{l}\,\sqrt{\mathfrak{a}^2+\mathfrak{b}^2+\mathfrak{c}^2}. \tag{14}$$

$$\omega_3 = c_{\text{long}}\,\frac{\pi}{l}\,\sqrt{\mathfrak{a}^2+\mathfrak{b}^2+\mathfrak{c}^2}. \tag{15}$$

Führen wir anstatt der Frequenzen ω_1 die Schwingungszahlen $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ oder die Wellenlängen λ ein, so erhalten wir:

$$\nu_1 = \nu_2 = c_{\text{trans}} \frac{\sqrt{\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2}}{2\, l}, \tag{16}$$

$$\nu_3 = c_{\text{long}} \frac{\sqrt{\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2}}{2\, l}, \tag{17}$$

oder

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{c_{\text{trans}}}{\nu_1} = \frac{2\, l}{\sqrt{\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2}}, \tag{18}$$

$$\lambda_3 = \frac{c_{\text{long}}}{\nu_3} = \frac{2\, l}{\sqrt{\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2}}. \tag{19}$$

Die Anzahl der Eigenschwingungen mit Wellenlängen oberhalb λ bzw. mit Schwingungszahlen unterhalb ν können wir sofort angeben, wenn wir nach der von Lord Rayleigh und J. H. Jeans zuerst angewandten Methode[1]) die Anzahl der Gitterpunkte in einem gewissen Kugeloktanten abzählen.

Wir erhalten so die Anzahl der freien Eigenschwingungen, für welche $\nu_1 < \nu$ bzw. $\nu_2 < \nu$ ist:

$$\mathfrak{N}_\nu^{(1)} = \mathfrak{N}_\nu^{(2)} = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{2\, l}{c_{\text{trans}}} \cdot \nu\right)^3 = \frac{4\pi}{3} \cdot V \left(\frac{\nu}{c_{\text{trans}}}\right)^3, \tag{20}$$

wo $V = l^3$ für das Volum des Kastens gesetzt ist.

Ebenso ist die Anzahl der Eigenschwingungen, für welche

$$\nu_3 < \nu,$$

$$\mathfrak{N}_\nu^{(3)} = \frac{4\pi}{3} V \left(\frac{\nu}{c_{\text{long}}}\right)^3. \tag{21}$$

Für die Gesamtzahl der freien Eigenschwingungen ergibt sich nunmehr:

$$\mathfrak{N}_\nu = \mathfrak{N}_\nu^{(1)} + \mathfrak{N}_\nu^{(2)} + \mathfrak{N}_\nu^{(3)} = \frac{4\pi}{3} V \nu^3 \left(\frac{1}{c^3_{\text{long}}} + \frac{2}{c^3_{\text{trans}}}\right) \tag{22}$$

oder wenn wir c_{long} und c_{trans} wieder mit Hilfe von $\varrho\, \lambda\, \mu$ ausdrücken:

$$\mathfrak{N}_\nu = \frac{4\pi}{3} V \nu^3 \left[\left(\frac{\varrho}{\lambda + 2\mu}\right)\right]^{3/2} + 2\left(\frac{\varrho}{\mu}\right)^{3/2}\Bigg]. \tag{23}$$

Wenn wir an Stelle der Frequenz die Wellenlänge einführen, erhalten wir für die Formel (22) den Ausdruck:

---

1) Lord Rayleigh, Nature 72. p. 54 u. 243. 1905. J. H. Jeans, Phil. Mag. 10. p. 91. 1905.

(24) $$\mathfrak{N}_\nu = \frac{4\pi}{3} V \left(\frac{1}{\lambda^3_{\text{long}}} + \frac{2}{\lambda^3_{\text{trans}}}\right).$$

Die Gleichung (22) oder (23) können wir dazu benutzen, um die obere Grenze der Schwingungszahlen $\nu_{\max}$ zu bestimmen. Da die Anzahl der Freiheitsgrade im Volum V gleich $3N$ ist, wenn N die Anzahl der Atome daselbst bedeutet, erhalten wir die Gleichung:

(25) $$3N = \frac{4\pi}{3} V \cdot \nu^3_{\max}\left(\frac{1}{c^3_{\text{long}}} + \frac{2}{c^3_{\text{trans}}}\right)$$

zur Bestimmung von $\nu_{\max}$.

Wenn wir erwägen, daß unser elastischer Körper in Wirklichkeit aus einem molekularen Raumgitter besteht, liegt es vielleicht näher, nicht eine obere Grenze für die Schwingungszahl, sondern eine untere für die Wellenlänge anzunehmen, da wohl die möglichen kürzesten Wellenlängen durch den Molekularabstand bedingt werden. Begrenzen wir die Wellenlängen durch eine feste Wellenlänge $\lambda_{\min}$, so erhalten wir beim regulären Gitter zu ihrer Bestimmung aus (24) die Gleichung:

(26) $$3N = \frac{4\pi}{3} V \cdot \frac{3}{\lambda^3_{\min}},$$

(27) $$\lambda_{\min} = \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} \left(\frac{V}{N}\right)^{1/3}.$$

Bedeutet a den kleinsten Molekularabstand im kubischen Raumgitter, so können wir Formel (27) mit Benutzung der Bedingung $N a^3 = V$ auch so schreiben:

(28) $$\lambda_{\min} = \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} a.$$

Bei dieser Begrenzung des akustischen Spektrums durch eine feste Wellenlänge wird dasselbe in Schwingungszahlen ausgedrückt, aus zwei Banden bestehen, deren Enden durch die Gleichungen bestimmt werden:

(29) $$\nu_{1\max} = \frac{c_{\text{trans}}}{\lambda_{\min}}, \quad \nu_{2\max} = \frac{c_{\text{long}}}{\lambda_{\min}}.$$

Ob sich auf diese Weise ebenso brauchbare Formeln für die spezifische Wärme ergeben wie auf dem von Debye beschriebenen Wege, bleibe hier dahingestellt.

Fall II.

Für diesen Fall, wo normale Spannungen und tangentielle Verrückungen verschwinden, sind die Grenzbedingungen:

$$x = \begin{cases} 0 \\ l \end{cases} : X_x = \eta = \zeta = 0\,. \tag{30}$$

Da aber

$$X_x = \lambda \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) + 2 \mu \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0$$

ist, und an der ganzen Fläche $\eta = \zeta = 0$ folgt:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0\,,$$

so daß wir folgende Grenzbedingungen erhalten:

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \begin{cases} 0 \\ l \end{cases} : \frac{\partial \xi}{\partial x} = \eta = \zeta = 0\,, \\ y &= \begin{cases} 0 \\ l \end{cases} : \xi = \frac{\partial \eta}{\partial y} = \zeta = 0\,, \\ z &= \begin{cases} 0 \\ l \end{cases} : \xi = \eta = \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0\,. \end{aligned} \right. \tag{31}$$

Für die Verrückungen setzen wir:

$$\left\{ \begin{aligned} \xi &= A \cos \frac{\mathfrak{a} \pi x}{l} \sin \frac{\mathfrak{b} \pi y}{l} \sin \frac{\mathfrak{c} \pi z}{l} e^{i \omega t}, \\ \eta &= B \sin \frac{\mathfrak{a} \pi x}{l} \cos \frac{\mathfrak{b} \pi y}{l} \sin \frac{\mathfrak{c} \pi z}{l} e^{i \omega t}, \\ \zeta &= C \sin \frac{\mathfrak{a} \pi x}{l} \sin \frac{\mathfrak{b} \pi y}{l} \cos \frac{\mathfrak{c} \pi z}{l} e^{i \omega t}. \end{aligned} \right. \tag{32}$$

Wie ersichtlich unterscheidet sich dieser Fall von dem vorhergehenden nur dadurch, daß die Sinus und Cosinus vertauscht sind. Wir überzeugen uns wieder leicht, daß die Grenzbedingungen (31) erfüllt sind, und wenn wir die Werte der Verrückung aus (32) in die Grundgleichungen (1) einsetzen, erhalten wir ebenso wie früher die Frequenzgleichung (8) und schließlich denselben Ausdruck für die Anzahl der Eigenschwingungen.

3. Darstellung des allgemeinen Bewegungszustandes bei willkürlichem Anfangszustand.

Wir wollen noch zeigen, daß wir mit Hilfe unserer Partikularlösungen jeden Bewegungszustand unseres Würfels, der mit den Grenzbedingungen verträglich ist, darstellen können. Dadurch zeigen wir auch gleichzeitig, daß die Reihe unserer Partikularlösungen sämtliche Eigenschwingungen enthält. Wir beschränken uns bei dieser Betrachung auf den Fall I, da sie bei dem Falle II ganz ähnlich verläuft.

Wir schreiben für $t = 0$ die Verrückungen und deren zeitliche Differentialquotienten willkürlich vor, nur mit der Beschränkung, daß die Grenzbedingungen (5′) (5″) (5‴) erfüllt sein sollen und wollen die betreffenden willkürlichen Funktionen nach Fourier entwickelt denken:

$$(33)\quad\begin{cases}
\xi = \varphi_1(x,y,z) = \sum_0^\infty {}^{(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c})} L_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}} \sin\frac{\mathfrak{a}\pi x}{l}\cos\frac{\mathfrak{b}\pi y}{l}\cos\frac{\mathfrak{c}\pi z}{l} \\
\eta = \varphi_2(x,y,z) = \sum_0^\infty {}^{(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c})} M_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}} \cos\frac{\mathfrak{a}\pi x}{l}\sin\frac{\mathfrak{b}\pi y}{l}\cos\frac{\mathfrak{c}\pi z}{l} \\
\zeta = \varphi_3(x,y,z) = \sum_0^\infty {}^{(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c})} N_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}} \cos\frac{\mathfrak{a}\pi x}{l}\cos\frac{\mathfrak{b}\pi y}{l}\sin\frac{\mathfrak{c}\pi z}{l} \\
\dot\xi = \psi_1(x,y,z) = \sum_0^\infty {}^{(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c})} P_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}} \sin\frac{\mathfrak{a}\pi x}{l}\cos\frac{\mathfrak{b}\pi y}{l}\cos\frac{\mathfrak{c}\pi z}{l} \\
\dot\eta = \psi_2(x,y,z) = \sum_0^\infty {}^{(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c})} Q_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}} \cos\frac{\mathfrak{a}\pi x}{l}\sin\frac{\mathfrak{b}\pi y}{l}\cos\frac{\mathfrak{c}\pi z}{l} \\
\dot\zeta = \psi_3(x,y,z) = \sum_0^\infty {}^{(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c})} R_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}} \cos\frac{\mathfrak{a}\pi x}{l}\cos\frac{\mathfrak{b}\pi y}{l}\sin\frac{\mathfrak{c}\pi z}{l}
\end{cases}$$

wo die Koeffizienten gegeben sind durch

$$(34)\quad\begin{cases} L_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}} = \frac{8}{l^3}\int_0^l\int_0^l\int_0^l \varphi_1(x,y,z)\sin\frac{\mathfrak{a}\pi x}{l}\cos\frac{\mathfrak{b}\pi y}{l}\cos\frac{\mathfrak{c}\pi z}{l}\,dx\,dy\,dz \end{cases}$$

Die Wahl der Funktionen, die das Produkt zweier Cosinus mit einem Sinus enthalten, beruht auf der Möglichkeit, dadurch die Grenzbedingungen zu erfüllen.

Vergleichen wir damit die allgemeinste Funktion, die wir für die Verrückungskomponenten durch Summation unserer Partikularlösungen erhalten können. Es ergeben sich ähnlich gebaute Reihen für beliebiges t

$$(35)\quad\begin{cases} \xi = \sum_0^\infty {}^{(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c})} A_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}} \sin\frac{\mathfrak{a}\pi x}{l}\cos\frac{\mathfrak{b}\pi y}{l}\cos\frac{\mathfrak{c}\pi z}{l}\, e^{i\omega t} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

und durch Differentiation nach t:

$$(36)\quad \begin{cases} \dot{\xi} = \sum\limits_{0}^{\infty}{}^{(\mathfrak{abc})}\, i\omega\, A_{\mathfrak{abc}} \sin\frac{\mathfrak{a}\pi x}{l}\cos\frac{\mathfrak{b}\pi y}{l}\cos\frac{\mathfrak{c}\pi z}{l}\, e^{i\omega t} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

wo allein der reelle Teil der komplexen Ausdrücke in Betracht kommt. Gehen wir zur reellen Schreibweise über, indem wir die komplexen Konstanten und die Zeitfunktion in reellen und imaginären Teil zerlegen:

$$(37)\quad \begin{cases} A_{\mathfrak{abc}} = A'_{\mathfrak{abc}} + i\,A''_{\mathfrak{abc}} \\ B_{\mathfrak{abc}} = B'_{\mathfrak{abc}} + i\,B''_{\mathfrak{abc}} \\ C_{\mathfrak{abc}} = C'_{\mathfrak{abc}} + i\,C''_{\mathfrak{abc}} \\ e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t \end{cases},$$

so erhalten wir die reellen Teile für $t = 0$ zu:

$$(38)\quad \begin{cases} \xi = \sum\limits_{0}^{\infty}{}^{(\mathfrak{abc})}\, A'_{\mathfrak{abc}} \sin\frac{\mathfrak{a}\pi x}{l}\cos\frac{\mathfrak{b}\pi y}{l}\cos\frac{\mathfrak{c}\pi z}{l} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{\xi} = \sum\limits_{0}^{\infty}{}^{(\mathfrak{abc})}\, (-\,\omega\, A''_{\mathfrak{abc}}) \sin\frac{\mathfrak{a}\pi x}{l}\cos\frac{\mathfrak{b}\pi y}{l}\cos\frac{\mathfrak{c}\pi z}{l} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Wollen wir durch diesen Ausdruck einen beliebigen Anfangszustand darstellen, so müssen die entsprechenden Koeffizienten der Gleichungen (38) und (33) gleich sein:

$$(39)\quad \begin{cases} L_{\mathfrak{abc}} = A'_{\mathfrak{abc}} & P_{\mathfrak{abc}} = -\,\omega\, A''_{\mathfrak{abc}} \\ M_{\mathfrak{abc}} = B'_{\mathfrak{abc}} & Q_{\mathfrak{abc}} = -\,\omega\, B''_{\mathfrak{abc}}\,. \\ N_{\mathfrak{abc}} = C'_{\mathfrak{abc}} & R_{\mathfrak{abc}} = -\,\omega\, C''_{\mathfrak{abc}} \end{cases}$$

Wenn $A'_{\mathfrak{abc}} \dots C''_{\mathfrak{abc}}$ unabhängige Konstanten sind, können wir sie immer so wählen, daß die Gleichungen (39) bei beliebigen L, M, N erfüllt sind.

Um die Unabhängigkeit der Konstanten einzusehen, bedarf es einer gesonderten Betrachtung. Die Konstanten $A\,B\,C$ müssen ja der Gleichung (7) genügen, wodurch ihre Unabhängigkeit beschränkt sein könnte.

Da $F_1 \dots H_3$ alle reell sind, gelten die Gleichungen (7) gesondert für die reellen und imaginären Teile der Konstanten, die sich gesondert auf ganz gleiche Weise behandeln lassen. Die Determinante (8), welche verschwinden mußte, damit das Gleichungssystem (7) eine Lösung hatte, ist für den reellen und imaginären Teil identisch.

Da (8) eine Gleichung dritten Grades für ω^2 ist, hat sie drei Wurzeln:

$$\omega_1^2, \quad \omega_2^2, \quad \omega_3^2. \tag{40}$$

Sind die Wurzeln alle voneinander verschieden, so erhalten wir je drei linear unabhängige Lösungssysteme für den reellen und imaginären Teil der Konstanten, die bis auf einen willkürlichen Faktor k_1' k_2' k_3' resp. k_1'' k_2'' k_3'' bestimmt sind. Für den reellen Teil erhalten wir:

$$\omega_1^2: \begin{cases} k_1' \ A_1' \\ k_1' \ B_1', \\ k_1' \ C_1' \end{cases} \qquad \omega_2^2: \begin{cases} k_2' \ A_2' \\ k_2' \ B_2' \\ k_2' \ C_2' \end{cases} \qquad \omega_3^2: \begin{cases} k_3' \ A_3' \\ k_3' \ B_3' \\ k_3' \ C_3' \end{cases} \tag{41}$$

und entsprechend für den imaginären Teil:

$$\omega_1^2: \begin{cases} k_1'' \ A_1'' \\ k_1'' \ B_1'' \\ k_1'' \ C_1'' \end{cases} \qquad \omega_2^2: \begin{cases} k_2'' \ A_2'' \\ k_2'' \ B_2'' \\ k_2'' \ C_2'' \end{cases} \qquad \omega_3^2: \begin{cases} k_3'' \ A_3'' \\ k_3'' \ B_3''. \\ k_3'' \ C_3'' \end{cases} \tag{42}$$

Setzen wir:

$$\begin{cases} L = k_1' \ A_1' + k_2' \ A_2' + k_3' \ A_3' \\ M = k_1' \ B_1' + k_2' \ B_2' + k_3' \ B_3' \\ N = k_1' \ C_1' + k_2' \ C_2' + k_3' \ C_3' \end{cases} \tag{43}$$

und entsprechend:

$$\begin{cases} -\frac{1}{\omega} P = k_1'' A_1'' + k_2'' A_2'' + k_3'' A_3'' \\ -\frac{1}{\omega} Q = k_1'' B_1'' + k_2'' B_2'' + k_3'' B_3''. \\ -\frac{1}{\omega} R = k_1'' C_1'' + k_2'' C_2'' + k_3'' C_3'' \end{cases} \tag{44}$$

Sind die einzelnen Lösungen (41) und (42) linear unabhängig, so können wir $k_1' k_2' k_3'$ resp. $k_1'' k_2'' k_3''$ immer so wählen, daß wir die Gleichungen (43) resp. (44) befriedigen können. In diesem Falle ist die Bedingung der Lösbarkeit von (43) und (44), das Nichtverschwinden der Determinante

$$\begin{vmatrix} A_1' & A_2' & A_3' \\ B_1' & B_2' & B_3' \\ C_1' & C_2' & C_3' \end{vmatrix} \neq 0 \text{ resp. } \begin{vmatrix} A_1'' & A_2'' & A_3'' \\ B_1'' & B_2'' & B_3'' \\ C_1'' & C_2'' & C_3'' \end{vmatrix} \neq 0, \tag{45}$$

erfüllt.

Jedoch besitzt in unserem Falle (bei isotropen Körper) die Gleichung (8) zwei gleiche Wurzeln (Gleichung 10)

$$\omega_1^{\ 2} = \omega_2^{\ 2} = \pi^2 \frac{\mu}{\varrho} \frac{\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2}{l^2}.$$

In diesem Falle sind nach einem Satze der Algebra die drei unabhängigen Lösungssysteme nur vorhanden, wenn im Falle der Doppelwurzel auch die Unterdeterminanten zweiter Ordnung verschwinden. Das ist in der Tat der Fall. Setzen wir den obigen Wert von $\omega_1^{\ 2}$ in die Determinante ein, so erhalten wir nach der Einsetzung von $F_1 \ldots H_3$

$$(46) \qquad \left\{ \left(\frac{\pi}{l}\right)^6 (\lambda + \mu)^3 \begin{vmatrix} \mathfrak{a}^2 & \mathfrak{a}\mathfrak{b} & \mathfrak{a}\mathfrak{c} \\ \mathfrak{b}\mathfrak{a} & \mathfrak{b}^2 & \mathfrak{b}\mathfrak{c} \\ \mathfrak{c}\mathfrak{a} & \mathfrak{c}\mathfrak{b} & \mathfrak{c}^2 \end{vmatrix} = 0. \right.$$

Die Subdeterminanten

$$(47) \qquad \begin{vmatrix} \mathfrak{a}^2 & \mathfrak{a}\mathfrak{b} \\ \mathfrak{b}\mathfrak{a} & \mathfrak{b}^2 \end{vmatrix} = 0 \ldots \begin{vmatrix} \mathfrak{b}^2 & \mathfrak{b}\mathfrak{c} \\ \mathfrak{c}\mathfrak{b} & \mathfrak{c}^2 \end{vmatrix} = 0$$

verschwinden alle, und so erhalten wir auch in diesem Falle drei linear unabhängige Lösungssysteme.

4. Abzählung der Eigenschwingungen eines rhombisch-kristallinischen Würfels.

Der Ansatz (6) für die Verrückungen bei den Grenzbedingungen (4) läßt sich ohne Änderung auf rhombische Kristalle anwenden, und damit eine Theorie der spezifischen Wärme rhomischer Kristalle auf Grundlage der Debyeschen Theorie aufbauen.

Born und v. Kármán[1]) haben, indem sie auf die Schwingungen des molekularen Raumgitters zurückgehen, eine Abzählung der Eigenschwingungen auch für den allgemeinsten Fall trikliner Kristalle gegeben.

Obwohl die Methode von Born und v. Kármán die tiefergehende ist, wird die mehr phänomenologische Methode von Debye ihren Wert solange unzweifelhaft behalten, als unsere Kenntnisse der molekularen Raumgitter so ungewiß sind.

Um die Grundgleichungen der Elastizitätstheorie zu erhalten, führen wir das elastische Potential W ein, dessen Ausdruck durch die Deformationsgrößen gegeben wird, als

1) M. Born u. v. Kármán, Phys. Zeitschr. **13.** p. 297. 1912; **14.** p. 15 u. 65. 1913.

$$
(48)\quad\left\{\begin{array}{l}
2W = \\
c_{11}x_x^{\,2}+2c_{12}x_xy_y+2c_{13}x_xz_z+2c_{14}x_xy_z+2c_{15}x_xz_x+2c_{16}x_xx_y \\
\qquad + \; c_{22}y_y^{\,2} + 2c_{23}y_yz_z+2c_{24}y_yy_z+2c_{25}y_yz_x+2c_{26}y_yx_y \\
\qquad\qquad + c_{33}z_z^{\,2} \; + 2c_{34}z_zy_z+2c_{35}\,z_z\,z_x+2c_{36}\,z_2\,x_y \\
\qquad\qquad\qquad + c_{44}y_z^{\,2} \; + 2c_{45}\,y_zz_x+2c_{46}y_zx_y \\
\qquad\qquad\qquad\qquad + c_{55}\,z_x^{\,2} \; + 2c_{56}\,z_xx_y \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + c_{66}\,x_y^{\,2}
\end{array}\right.
$$

wo

$$x_x = \frac{\partial \xi}{\partial x}, \ldots y_z = \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \ldots$$

die Deformationsgrößen,

$$c_{11},\ c_{12} \ldots$$

die Elastizitätskonstanten bedeuten, zwischen denen die Beziehung

$$c_{ik} = c_{ki} \ (i, k = 1, 1, \ldots 6)$$

besteht.

Die Komponenten der inneren Spannung erhalten wir, wie bekannt, zu:

$$
(49)\quad\left\{\begin{array}{l}
X_x = \dfrac{\partial W}{\partial x_x} = c_{11}x_x + c_{12}y_y + c_{13}z_z + c_{14}y_z + c_{15}z_x + c_{16}x_y \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
Y_z = \dfrac{\partial W}{\partial y_z} = c_{41}x_x + c_{42}y_y + c_{43}z_z + c_{44}y_z + c_{45}z_x + c_{46}x_y \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot
\end{array}\right.
$$

und die elastischen Grundgleichungen werden:

$$
(50)\qquad\left\{\begin{array}{l}
\varrho\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \dfrac{\partial X_x}{\partial x} + \dfrac{\partial X_y}{\partial y} + \dfrac{\partial X_z}{\partial z} \\
\varrho\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \dfrac{\partial Y_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Y_y}{\partial y} + \dfrac{\partial Y_z}{\partial z} \; . \\
\varrho\dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \dfrac{\partial Z_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Z_y}{\partial y} + \dfrac{\partial Z_z}{\partial z}
\end{array}\right.
$$

Wir legen wieder einen Würfel unseren Betrachtungen zugrunde und fordern wieder das Verschwinden der normalen Verrückungen und tangentiellen Spannungen, d. h. die Grenzbedingungen (4). Um die Grenzbedingungen in der einfachen Form (5') (5'') (5''') zu erhalten, beschränken wir uns auf Kristallsysteme, bei denen sich die Tangentialspannungen ähnlich wie im isotropen Fall berechnen lassen zu:

$$(51)\qquad Y_z = c_{44}\, y_z, \qquad Z_x = c_{55}\, z_x, \qquad X_y = c_{66}\, x_y.$$

Wir fordern hiernach das Verschwinden von:

$$(52)\qquad \left\{\begin{array}{lll} c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{34} & c_{35} & c_{36}\,. \\ & c_{45} & c_{46} \\ & & c_{56} \end{array}\right.$$

Diese Bedingung ist erfüllt beim rhombischen, tetragonalen, hexagonalen und kubischen System, wenn wir als Koordinatenachsen Symmetrieachsen wählen.

Die Spannungskomponenten erhalten wir zu:

$$(53)\qquad \left\{\begin{aligned} X_x &= c_{11}\frac{\partial \xi}{\partial x} + c_{12}\frac{\partial \eta}{\partial y} + c_{13}\frac{\partial \zeta}{\partial z} \\ Y_y &= c_{21}\frac{\partial \xi}{\partial x} + c_{22}\frac{\partial \eta}{\partial y} + c_{23}\frac{\partial \zeta}{\partial z}, \\ Z_z &= c_{31}\frac{\partial \xi}{\partial x} + c_{32}\frac{\partial \eta}{\partial y} + c_{33}\frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{aligned}\right.$$

$$(54)\qquad \left\{\begin{aligned} Y_z &= c_{44}\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) \\ Z_x &= c_{55}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z}\right). \\ X_y &= c_{66}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) \end{aligned}\right.$$

Den Würfel orientieren wir so, daß die Kanten in die Koordinatenachsen fallen, die der Kristallstruktur entsprechend gewählt sind. Indessen bedeutet diese spezielle Orientierung für die in Frage kommenden hohen Frequenzen keine wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit.

Für die Verrückungskomponenten setzen wir wieder die Ausdrücke (6), welche den Grenzbedingungen (5') (5'') (5''') auch jetzt genügen.

Nach Einsetzung derselben in die Grundgleichungen (50) erhalten wir:

$$(55)\qquad \left\{\begin{aligned} & A(c_{11}\mathfrak{a}^2 + c_{66}\mathfrak{b}^2 + c_{55}\mathfrak{c}^2 - \varrho\,\omega^2) + B(c_{12} + c_{66})\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} \\ &\qquad + C(c_{13} + c_{55})\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{c} = 0, \\ & A(c_{21} + c_{66})\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{a} + B(c_{66}\mathfrak{a}^2 + c_{22}\mathfrak{b}^2 + c_{44}\mathfrak{c}^2 - \varrho\,\omega^2) \\ &\qquad + C(c_{23} + c_{44})\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c} = 0, \\ & A(c_{31} + c_{55})\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{a} + B(c_{32} + c_{44})\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{b} \\ &\qquad + C(c_{55}\mathfrak{a}^2 + c_{44}\mathfrak{b}^2 + c_{33}\mathfrak{c}^2 - \varrho\,\omega^2) = 0, \end{aligned}\right.$$

nachdem wir den gemeinsamen Zeitfaktor und die trigonometrischen Ortsfunktionen weggelassen haben.

Die Bedingung, daß das Gleichungssystem (55) nach A, B, C auflösbar ist, besteht in dem Verschwinden der Determinante:

$$(56)\quad \begin{vmatrix} c_{11}\mathfrak{a}^2+c_{66}\mathfrak{b}^2+c_{55}\mathfrak{c}^2-\varrho\omega^2, & (c_{12}+c_{66})\mathfrak{a}\mathfrak{b}, & (c_{13}+c_{55})\mathfrak{a}\mathfrak{c} \\ (c_{21}+c_{66})\mathfrak{b}\mathfrak{a}, & c_{66}\mathfrak{a}^2+c_{22}\mathfrak{b}^2+c_{44}\mathfrak{c}^2-\varrho\omega^2, & (c_{23}+c_{44})\mathfrak{b}\mathfrak{c} \\ (c_{31}+c_{55})\mathfrak{c}\mathfrak{a}, & (c_{32}+c_{44})\mathfrak{c}\mathfrak{b}, & c_{55}\mathfrak{a}^2+c_{44}\mathfrak{b}^2+c_{33}\mathfrak{c}^2-\varrho\omega^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Deuten wir $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ als rechtwinkelige Koordinaten, so repräsentiert unsere Gleichung eine Fläche sechsten Grades. Die Anzahl der Eigenschwingungen, deren Frequenz kleiner als ω ist, ergibt eine Abzählung der den ganzzahligen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ entsprechenden Gitterpunkte in dem durch die positiven Koordinatenebenen einerseits und die Fläche andererseits eingeschlossenen Raum. Da diese Aufgabe außer dem schon früher behandelten Spezialfalle der Isotropie, wo die Fläche aus drei Kugelschalen besteht, auf große Schwierigkeiten stößt, möge sie hier nicht weiter behandelt werden.

Wir können aber aus der Form der Gleichung (56) den Satz von Debye für die obengenannten Kristalle beweisen, nämlich daß die Anzahl der Eigenschwingungen proportional der dritten Potenz der Frequenz ω oder der Schwingungszahl ν ist:

$$(57)\qquad \mathfrak{N}_\nu = K\nu^3.$$

Die Gleichung (56) wird nämlich wegen ihrer Homogenität auch durch die Werte $n\mathfrak{a}$, $n\mathfrak{b}$, $n\mathfrak{c}$, $n\omega$ befriedigt, wenn sie durch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ω befriedigt wird; d. h. die Flächen für verschiedene Werte von ω bleiben geometrisch ähnlich.

Ist das Volum, d. h. die Anzahl der Eigenschwingungen, für $\omega = 2\pi$, d. h. $\nu = 1$, bekannt

$$\mathfrak{N}_{\nu=1} = K,$$

so wird sie für ein beliebiges ν durch (57) gegeben.

Es scheint mir nicht zweifelhaft, daß man dieselbe Beziehung (57) auf ähnliche Weise auch für trikline Kristalle beweisen können müßte. Es ist mir indessen nur gelungen, die von Born und v. Kármán gegebene Formel: $d\mathfrak{N}$ proportional zu $1/\lambda^2 \cdot d(1/\lambda)$ auf dem dort angedeuteten Wege über das reguläre System[1]) hinaus zu verallgemeinern und daraus für den langwelligen Teil des Spektrums die Gleichung (57) abzuleiten. Ich führe dies hier nicht aus, weil es nach den vorliegenden Beobachtungen scheint, daß außerhalb des regulären Systems die Nernst-Lindemannsche Formel (und daher auch die neueren von Debye und von Born-v. Kármán) nicht mehr brauchbar sind. Auf Grund der Formel (57) würden wir aber auch im triklinen Fall genau zu der Formel von Debye kommen, nur daß die Berechnung der Grenzschwingungszahl ν_{max} aus den elastischen Konstanten entsprechend verwickelt wird. Alles unter der Voraussetzung einatomiger Kristalle. Ob die Abweichungen bei Verbindungen durch die Annahme von Gittern, wo nicht alle Gitterpunkte mit gleichen Massen belegt sind, erklärt werden können, soll hier nicht untersucht werden.

Zusammenfassung der Resultate.

1. Es wird eine einfache Methode zur Bestimmung des akustischen Spektrums isotroper Körper gegeben bei Zugrundelegung sog. gemischter Grenzbedingungen.

2. Durch Anwendung derselben Methode wird die Formel von Debye, nach welcher die Anzahl der Eigenschwingungen mit der dritten Potenz der Frequenz zunimmt, auf Kristalle bis zum rhombischen System einschl. ausgedehnt.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, Hrn. Prof. A. Sommerfeld für die Anregung zur Mitteilung seiner Ergebnisse bei isotropen Körpern und für sein förderndes Interesse bei deren Verallgemeinerung auf anisotrope Körper meinen verbindlichsten Dank auszusprechen.

München, Institut für theoretische Physik, August 1913.

1) M. Born u. v. Kármán, Phys. Zeitschr. **14**. p. 15—19. 1913.

(Eingegangen 2. August 1913.)