Gruppendeterminante und Körperdiskriminante.

Von

A. Speiser in Straßburg.

Einleitung.

In jedem zyklischen Körper vom Grade n lassen sich bekanntlich mit Hilfe von n^{ten} Einheitswurzeln Zahlen bilden, die *Lagrangeschen Resolventen*, die beim Übergang zu den konjugierten bloß eine n^{te} Einheitswurzel als Faktor annehmen. Für beliebige Galoissche Körper läßt sich das entsprechende Problem folgendermaßen formulieren*): Gegeben ist eine Darstellung der Gruppe des Körpers durch homogene Substitutionen von m Variabeln. Es soll aus den Zahlen des Körpers und gewissen weiteren Irrationalitäten ein System von m Zahlen gebildet werden, das beim Übergang zu den konjugierten Systemen jeweils die entsprechenden Substitutionen der gegebenen Darstellung der Gruppe erfährt.

Die Gesamtheit dieser Systeme läßt sich in einfacher Weise bestimmen. Es gibt genau m linear unabhängige darunter. Beschränkt man sich auf die ganzzahligen, so enthalten sie gemeinsame Idealteiler, die in der Körperdiskriminante aufgehen. Durch Determinantenbildung erhält man Zahlen, aus denen sich die Diskriminanten des Körpers und sämtlicher Unterkörper in einer durch die Gruppe allein bestimmten Weise zusammensetzen lassen. Die hier vorliegenden Verhältnisse werden unter gewissen vereinfachenden Bedingungen dargelegt.

§ 1.

Das Kleinsche Formenproblem.

Wir legen einen Galoisschen Körper K zugrunde. Seine Gruppe $\mathfrak{G}$ sei von der Ordnung g und ihre Elemente bezeichnen wir mit

$$E, A, B, \cdots, S, \cdots.$$

---

*) Vgl. das „Kleinsche Formenproblem", Weber, Algebra, 2. Aufl., Bd. 2, S. 228 u. ff.

Entsprechend bezeichnen wir eine Zahl ω und ihre konjugierten mit

$$\omega = \omega_E, \omega_A, \omega_B, \cdots, \omega_S, \cdots,$$

dann sind die Permutationen der Galoisschen Gruppe in folgender Gestalt darstellbar:

$$\begin{pmatrix} \omega_E, & \omega_A, & \omega_B, & \cdots \\ \omega_S, & \omega_{AS}, & \omega_{BS}, & \cdots \end{pmatrix} \quad S = E, A, B, \cdots.$$

Nun sei eine irreduzible Darstellung Γ der Gruppe durch Matrizen mit Koeffizienten im Körper k gegeben. Wir benutzen dieselbe Bezeichnung, wie für die abstrakte Gruppe, und setzen:

$$E = (e_{ik}), \ A = (a_{ik}), \cdots, S = (s_{ik}) \cdots.$$

Bezeichnen wir mit A^{-1} die inverse, mit A' die transponierte Substitution, so bilden die Elemente $E, A'^{-1}, \cdots, S'^{-1}, \cdots$ wieder eine Darstellung der Gruppe die wir mit $\bar{\Gamma}$ bezeichnen.

Wir bilden jetzt die folgende Matrix

$$M(\omega) = E \cdot \omega_E + A \cdot \omega_A + \cdots = \Big(\sum_{\mathfrak{G}} s_{ik}\, \omega_S\Big);$$

setzen wir:

$$\sum_{\mathfrak{G}} s_{ik}\, \omega_S = \xi_{ik}(\omega),$$

dann wird:

$$M(\omega) = (\xi_{ik}(\omega)).$$

Wenn wir diese Matrix mit einer beliebigen Matrix S^{-1} der Gruppe rechts zusammensetzen, so erhalten wir:

$$M \cdot S^{-1} = S^{-1}\omega_E + AS^{-1}\omega_A + \cdots = E\omega_S + A\omega_{AS} + \cdots = \big(\xi^S_{ik}(\omega)\big)$$

wobei wir mit ξ^S diejenige konjugierte algebraische Zahl bezeichnen, die aus ξ durch die Substitution (ω, ω_S) der Galoisschen Gruppe entsteht.

Indem wir die erste Zeile von M und von MS^{-1} vergleichen, erhalten wir das Resultat

$$\xi^S_{i1}(\omega) = \sum \bar{s}_{1k}\, \xi_{ik}(\omega),$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\xi^S_{im}(\omega) = \sum \bar{s}_{mk}\, \xi_{ik}(\omega)$$

wobei

$$(\bar{s}_{ik}) = \bar{S}$$

gesetzt ist. Die Zahlen ξ_{ik} liegen in dem durch Zusammensetzung von k und K entstehenden Körper, den wir mit $K(k)$ bezeichnen. Wenn wir noch voraussetzen, daß K und k außer den rationalen Zahlen keine weiteren Zahlen miteinander gemein haben, so können wir das Resultat folgendermaßen aussprechen:

Satz 1: *Jedes der m Zahlensysteme $\xi_{i1}(\omega)\cdots\xi_{im}(\omega)$ $i=1,2,\cdots,m$ erfährt beim Übergang zu den konjugierten Zahlensystemen die entsprechenden Substitutionen der Gruppe $\bar{\Gamma}$.*

Dieselbe Eigenschaft besitzen offenbar auch die sämtlichen Systeme, die sich in der folgenden Gestalt schreiben lassen:

$$\alpha_1\xi_{11}+\alpha_2\xi_{21}+\cdots+\alpha_m\xi_{m1},\ \cdots,\ \alpha_1\xi_{1m}+\alpha_2\xi_{2m}+\cdots+\alpha_m\xi_{mm},$$

wobei man aber im allgemeinen die Koeffizienten $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ auf den Körper k beschränken wird.

Setzt man aber die Matrix $M(\omega)$ links mit S^{-1} zusammen, so erhält man:

$$S^{-1}M(\omega)=S^{-1}E\omega_E+S^{-1}A\omega_A+\cdots=E\omega_S+A\omega_{SA}+\cdots=M(\omega_S).$$

Wir erhalten so den Satz:

Satz 2: *Ersetzt man in den m Zahlensystemen $\xi_{1i}(\omega),\cdots,\xi_{mi}(\omega)$ $(i=1,2,\cdots,m)$ die Zahl ω durch die konjugierte Zahl ω_S, so erfahren die Systeme jeweils die Substitution S^{-1}.*

Wir behaupten nun weiter, daß sich jedes zu $\bar{\Gamma}$ gehörige System von Zahlen herleiten läßt, indem man im System $\xi_{11}(\omega),\cdots,\xi_{1m}(\omega)$ die Zahl ω geeignet wählt. Für die Koeffizienten der irreduziblen Darstellungen gelten nämlich die folgenden Formeln:*)

$$\sum_{s=e,a,b,\cdots} s_{ik}\bar{s}_{lm}=0$$

außer für $i=l,\ k=m$

$$\sum_{s=e,a,b,\cdots} s_{ik}\bar{s}_{ik}=\frac{g}{m}.$$

Hierbei bedeuten (s_{ik}) und $(\bar{s}_{ik})$ entsprechende Matrizen von Γ und $\bar{\Gamma}$. Sei nun $\zeta_1,\cdots,\zeta_m$ ein beliebiges zu $\bar{\Gamma}$ gehöriges System, so setze man:

$$\omega=\zeta_1+\zeta_2+\cdots+\zeta_m,$$

dann wird:

$$\xi_{11}(\omega)=\sum_{\mathfrak{G}} s_{11}\,\omega_S=\frac{g}{m}\zeta_1$$

und ebenso:

$$\xi_{1i}(\omega)=\sum_{\mathfrak{G}} s_{1i}\,\omega_S=\frac{g}{m}\zeta_i.$$

Also haben wir den

Satz 3: *Ist $\zeta_1,\cdots,\zeta_m$ ein beliebiges System von Zahlen aus $K(k)$, das beim Übergang zu den konjugierten Systemen die Substitutionen der Gruppe Γ erfährt, so wird:*

$$\xi_{1i}(\omega)=\frac{g}{m}\zeta_i,\quad \textit{wobei}\quad \omega=\zeta_1+\zeta_2+\cdots+\zeta_m.$$

*) I. Schur: Neue Begründung der Theorie der Gruppencharaktere, Berliner Sitzungsberichte 1905, S. 406.

Hiernach erhält man alle solchen Systeme, indem man in $\xi_{11}(\omega), \cdots, \xi_{1m}(\omega)$ *die Zahl* ω *alle Zahlen des Körpers durchlaufen läßt.*

Ein analoger Satz besteht für die in Satz 2 betrachtete Substitution.

Wählt man für ω eine Zahl, für die keine Beziehung besteht von der Gestalt

$$a_1 \omega_E + a_2 \omega_A + \cdots = 0,$$

wobei $a_1, a_2, \cdots$ Zahlen aus k sind, so läßt sich jede Zahl α von $K(k)$ in der Gestalt:

$$\alpha = a_1 \omega_E + a_2 \omega_A + \cdots$$

darstellen.

Daher läßt sich jedes Zahlensystem, daß zu $\bar{\Gamma}$ gehört, in der folgenden Gestalt darstellen:

$$\xi_{1i}(a_1 \omega_E + a_2 \omega_A + \cdots) = a_1 \xi_{1i}(\omega_E) + a_2 \xi_{1i}(\omega_A) + \cdots$$

und wenn man nun den Satz 2 anwendet, so erkennt man den folgenden

Satz 4: *Jedes zu* $\bar{\Gamma}$ *gehörige Zahlensystem läßt sich linear zusammensetzen aus den* m *Zahlensystemen*

$$\xi_{i1}(\omega), \cdots, \xi_{im}(\omega) \qquad i = 1, 2, \cdots, m$$

wenn zwischen den Größen $\omega = \omega_E, \omega_A, \cdots$ *keine lineare Relation mit Koeffizienten aus* k *besteht.*

Wenn man in $\xi_{11}(\omega), \cdots, \xi_{1m}(\omega)$ ω alle ganzen Zahlen von K durchlaufen läßt, so erhält man einen Modul von Zahlensystemen, da sich die Summe zweier Systeme, die aus ω_1 resp. ω_2 entstehen, ergibt, wenn man $\omega_1 + \omega_2$ einsetzt. Ebenso erhält man einen Modul, wenn man alle *ganzzahligen* unter den Systemen betrachtet.

Nun sei für $\bar{\Gamma}$ ein vollständiges System von Invarianten gegeben, die wir als Formen von m Variabeln mit Koeffizienten in k voraussetzen. Ersetzt man die Variabeln durch ein beliebiges zu $\bar{\Gamma}$ gehöriges System, so nehmen die Invarianten Zahlenwerte aus dem Körper k an. *Die Systeme sind daher die Lösungen des Kleinschen Formenproblems für die Gruppe* $\bar{\Gamma}$.

§ 2.

Fortsetzung, Benutzung von Unterkörpern.

Wenn man in der Matrix $M(\omega)$ für ω eine Zahl eines Unterkörpers einsetzt, so tritt oft der Fall ein, daß die Matrix zur Nullmatrix wird.

Sei ω eine Zahl, die gegenüber der Untergruppe $\mathfrak{H}$ ungeändert bleibt, und sei ferner die Zerlegung von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{H}$ und ihren Nebengruppen in folgender Gestalt gegeben:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H} + \mathfrak{H} T_2 + \cdots + \mathfrak{H} T_r$$

dann wird:

$$M(\omega) = \Bigl(\sum_{\mathfrak{H}} S\Bigr)\omega + \Bigl(\sum_{\mathfrak{H}} S\Bigr) T_2 \omega_{T_2} + \cdots.$$

Die Summe der zu $\mathfrak{H}$ gehörigen Matrizen aus Γ ist aber stets und nur dann $\neq 0$, wenn diese Darstellung von $\mathfrak{H}$ vollständig reduziert die identische Darstellung enthält. Andernfalls verschwindet die Matrix M identisch. Hieraus folgt der

Satz 5: *Zur Bildung eines zur Gruppe Γ gehörigen Systems kann man auch Zahlen aus solchen Unterkörpern benutzen, bei denen die zugehörige Untergruppe in der Darstellung Γ nach vollständiger Reduktion die identische Darstellung enthält.*

Man erhält dann jeweils genau so viele unabhängige Systeme, wie die Untergruppe in der Darstellung Γ die identische Darstellung enthält.

Beispiel: Die Ikosaedergruppe gestattet eine Darstellung Γ resp. $\overline{\Gamma}$ in dreireihigen Matrizen,*) die erzeugt wird durch:

$$\Gamma: \qquad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & E^4 & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{E^2+E^3}{\sqrt{5}} & \frac{E+E^4}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{E+E^4}{\sqrt{5}} & \frac{E^2+E^3}{\sqrt{5}} \end{pmatrix},$$

$$U = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

($E = 5$. Einheitswurzel).

$$\overline{\Gamma}: \qquad \overline{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E^4 \end{pmatrix}, \quad \overline{T} = T', \quad \overline{U} = U.$$

S erzeugt eine Gruppe von der Ordnung 5, die offenbar brauchbar ist, weil sie die identische Darstellung einmal enthält.

Sei ω eine Zahl aus dem zu der Gruppe gehörigen Unterkörper. Es wird

$$\sum_{i=1}^{5} \overline{S}^i = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \overline{H}.$$

*) Vgl. Klein: Vorlesungen über das Ikosaeder, S. 213.

Als erzeugende Elemente für die Nebengruppen können wir wählen

$$E,\ U,\ T,\ UT,\ TS,\ UTS,\ \cdots,\ TS^4,\ UTS^4$$

und erhalten:

$$\overline{H}\overline{U}^i = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{H}\overline{T} = \begin{pmatrix} \sqrt{5}, & 2\sqrt{5}, & 2\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\overline{H}\overline{T}\overline{S}^i = \begin{pmatrix} \sqrt{5}, & 2E^i\sqrt{5}, & 2E^{4i}\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bezeichnet man die konjugierten Zahlen mit $\omega, \omega', \cdots, \omega^{(11)}$, so erhält man

$$\xi_{11} = 5(\omega - \omega') + \sqrt{5}(\omega'' - \omega''') + \cdots,$$

und wenn man noch die Bezeichnung einführt:

$$\omega - \omega' = u_\infty,\ \omega'' - \omega''' = u_0,\ \cdots,\ \omega^{(10)} - \omega^{(11)} = u_4,$$

so folgen nach Division mit $\sqrt{5}$ die in der Theorie der Gleichung fünften Grades fundamentalen Größen:*)

$$\begin{aligned} A_0 &= u_\infty\sqrt{5} + u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4, \\ A_1 &= 2(u_0 + Eu_1 + E^2u_2 + E^3u_3 + E^4u_4), \\ A_2 &= 2(u_0 + E^{-1}u_1 + E^{-2}u_2 + E^{-3}u_3 + E^{-4}u_4). \end{aligned}$$

Dies ist also das einzige durch Zahlen des Unterkörpers erzeugte System, welches beim Übergang zu den konjugierten die Gruppe Γ erfährt.

In gleicher Weise berechnet man das zu $\overline{\Gamma}$ gehörige System und erhält ohne Mühe die Zahlen:

$$\begin{aligned} \overline{A}_0 &= u_\infty\sqrt{5} + u_0 + \cdots + u_4, \\ \overline{A}_1 &= \qquad\quad u_0 + E^{-1}u_1 + \cdots + E^{-4}u_4, \\ \overline{A}_2 &= \qquad\quad u_0 + \quad Eu_1 + \cdots + E^4u_4. \end{aligned}$$

Diese Größen sind von den vorigen nicht wesentlich verschieden; es wird

$$A_0 = \overline{A}_0,\quad A_1 = 2\overline{A}_2,\quad A_2 = 2\overline{A}_1.$$

Dem entspricht die Tatsache, daß Γ und $\overline{\Gamma}$ äquivalente Darstellungen sind.

---

*) Vgl. Klein l. c. S. 155, wo eine wenig abweichende Numerierung der u benutzt ist.

§ 3.

Die verallgemeinerten Lagrangeschen Resolventen.

Jetzt möge ein vollständiges System nicht äquivalenter Darstellungen der Gruppe durch Matrizen gegeben sein. Wir bilden die sämtlichen zugehörigen Größen ξ und bezeichnen sie mit $\xi_{ik}^{(l)}$, wobei der obere Index die Darstellung angeben soll, aus der das betreffende ξ stammt. Ferner wollen wir sie so lexikographisch anordnen, daß l, i, k dem l', i', k' vorangeht, wenn entweder $l < l'$ oder $l = l'$, $i < i'$ oder $l = l'$, $i = i'$, $k < k'$ ist. Sei χ_l der Grad der durch l bezeichneten Darstellung, dann gilt die Beziehung*)

$$\chi_1^2 + \chi_2^2 + \cdots + \chi_r^2 = g.$$

Es gibt also genau so viele verschiedene Größen ξ, als die Ordnung der Gruppe beträgt. In dieser bestimmten Reihenfolge bezeichnen wir sie mit

$$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_g.$$

Wir können nun die Koeffizienten dieser Größen in ein quadratisches Schema ordnen und bezeichnen die so entstehende Matrix mit

$$U = (u_{ik}) \qquad (i, k = 1, 2, \cdots, g),$$

so daß jetzt die ξ in folgender Gestalt auftreten:

$$\xi_i = u_{i1}\,\omega_E + u_{i2}\,\omega_A + \cdots.$$

Zwischen den Koeffizienten verschiedener irreduzibler Darstellungen gelten außer den Formeln in § 1 noch die folgenden Beziehungen:**)

$$\sum_{\mathfrak{G}} s_{ij}\, s'_{kl} = 0,$$

sobald die Darstellung Γ', aus der die s' entnommen sind, nicht äquivalent mit $\overline{\Gamma}$ ist. Hieraus kann die inverse Determinante zu (u_{ik}) bestimmt werden. Wir bilden nämlich die Größen ξ, indem wir jede Darstellung Γ durch die Darstellung $\overline{\Gamma}$ ersetzen. Die Matrix dieser neuen Größen $(\overline{u}_{ik})$ entsteht aus (u_{ik}) durch Vertauschung gewisser Zeilen untereinander und ebenso gewisser Kolonnen. Setzt man jetzt (u_{ik}) und $(\overline{u}_{ik})$ Zeile mit Zeile zusammen, so erhält man eine Matrix, bei der alle Koeffizienten außerhalb der Hauptdiagonale verschwinden, während diese letzteren aus den Zahlen $\frac{g}{\chi_l}$ bestehen, wobei jeder dieser Quotienten χ_l^2 mal auftritt.

*) Frobenius: Über die Primfaktoren der Gruppendeterminante, Berliner Sitzungsberichte 1896, S. 1368.

**) I. Schur, l. c.

Es wird also:

$$|u_{ik}|\cdot|\bar{u}_{ik}| = \frac{g^g}{\chi_1^{\chi_1^2}\chi_2^{\chi_2^2}\cdots}$$

und, da sich die beiden Determinanten links höchstens um das Vorzeichen unterscheiden, so wird

$$|u_{ik}| = \pm\sqrt{\pm\frac{g^g}{\chi_1^{\chi_1^2}\chi_2^{\chi_2^2}\cdots}}.$$

Man hat nun bloß noch in $|\bar{u}_{ik}|$ jede Zeile mit dem zugehörigen Quotienten $\frac{\chi_l}{g}$ zu multiplizieren und die so entstehende Matrix zu transponieren, um die zu (u_{ik}) inverse Matrix (v_{ik}) zu erhalten und es wird:

$$(u_{ik})\,(v_{ik}) = (v_{ik})\,(u_{ik}) = (e_{ik}),$$

$$e_{ik} = \begin{cases} 1 & i = k, \\ 0 & i \neq k. \end{cases}$$

Diese Gleichung gestattet, aus den Größen ξ die Größen ω_S zu berechnen. Setzt man wieder

$$\sum_{\mathfrak{G}} s_{ik}^{(l)}\,\omega_S = \xi_{ik}^{(l)},$$

so wird jetzt:

(1) $$\omega_S = \sum_{i,k,l} \frac{\chi_l}{g}\,\bar{s}_{ik}^{(l)}\,\xi_{ik}^{(l)}.$$

Satz 5: *Hat man durch Lösung der sämtlichen Formenprobleme die Größen ξ berechnet, so findet man daraus die Zahl ω mit ihren Konjugierten durch die Formeln* (1).

Wenn die Gruppe eine zyklische ist vom Primzahlgrad p, so führen unsere Ausdrücke auf die sogenannten Lagrangeschen Resolventen.

In der Tat: Sei A ein erzeugendes Element der Gruppe, so erhält man alle Darstellungen, indem man für A eine p^{te} Einheitswurzel setzt. Es wird also:

$$\xi^{(l)} = \omega_E + E^l\omega_A + E^{2l}\omega_{A^2} + \cdots.$$

Die Darstellung $\bar{\Gamma}$ entsteht aus Γ, indem man E durch E^{-1} ersetzt. Die Invariante aller Darstellungen ist die Funktion x^p, so daß sich hier das Problem vollständig erledigen läßt mit Hilfe von p^{ten} Wurzeln aus Zahlen des Körpers der p^{ten} Einheitswurzeln.

§ 4.
Reduktion des Gleichungsproblems auf ein irreduzibles Formenproblem.

Sei Γ eine irreduzible Darstellung, die homomorph ist mit der Gruppe des Körpers. Wenn wir eine Reihe $\xi_{11}, \cdots, \xi_{1m}$ berechnet haben durch Auflösung des Formenproblems, so enthält der Körper $K(\xi_{11}, \cdots, \xi_{1m})$ den zugrunde gelegten Körper K. Es ist daher, z. B. mit dem Lagrangeschen Verfahren möglich, jede einzelne Zahl des Körpers, insbesondere ω selbst, zu berechnen. Mit Hilfe von Ausdrücken, die allein von der Gruppe abhängen, ist es aber möglich, dieses Problem in wesentlich einfacherer Weise zu lösen.

Wir betrachten dazu die Darstellung, die durch Komposition*) von Γ mit sich selbst entsteht. Sei

$$\Gamma^2 = g_{21}\Gamma^{(1)} + \cdots + g_{2r}\Gamma^{(r)}$$

und sei S_2 die Substitution, welche diese vollständige Reduktion leistet. Ferner sei allgemein

$$\Gamma^i = g_{i1}\Gamma^{(1)} + \cdots + g_{ir}\Gamma^{(r)}$$

und S_i die entsprechende Substitution, welche die vollständige Reduktion von Γ^i leistet.

Zunächst bemerken wir, daß sich jede der Größen ξ, die zu irgend einer Darstellung gehört, aus den Größen $\xi_{11}, \cdots, \xi_{1m}$ als ganze Funktion mit Koeffizienten aus dem Körper k zusammensetzen läßt. Sei d der höchste Grad, der für diese Funktionen notwendig ist. Wir bilden jetzt die Produkte

$$\xi_{1i} \cdot \xi_{1k} \qquad (i, k = 1, \cdots, m),$$

also

$$\xi_{11}\xi_{11},\ \xi_{11}\xi_{12}, \cdots, \xi_{11}\xi_{1m},\ \xi_{12}\xi_{11} \cdots.$$

Geht man zu den konjugierten Systemen dieser Produkte über, so erhält man diese, indem man auf das ursprüngliche System die Substitutionen der Gruppe Γ^2 ausübt. Wenn man jetzt noch auf das System der Produkte die Substitution S_2 anwendet, so zerfällt es in $g_{21} + g_{22} + \cdots + g_{2r}$ Teilsysteme, von denen jedes der g_{21} ersten beim Übergang zu den Konjugierten jeweils die Substitutionen $\Gamma^{(1)}$, die g_{22} nächsten die Substitutionen $\Gamma^{(2)}$ usf. erleiden.

Diese Systeme zusammen mit $\xi_{11}, \cdots, \xi_{1m}$ brauchen nicht linear unabhängig zu sein, aber wir wählen für jede Gruppe $\Gamma^{(i)}$ eine möglichst große Zahl linear unabhängiger aus. Gehören so zu $\Gamma^{(i)}$ die Systeme

$$\mathfrak{S}_1^{(i)}, \cdots, \mathfrak{S}_l^{(i)},$$

*) Frobenius: Über die Komposition der Charaktere einer Gruppe, Berliner Sitzungsberichte 1899, S. 330.

so ist das allgemeinste System, das beim Übergang zu den Konjugierten die Gruppe $\Gamma^{(i)}$ erfährt, und dessen Zahlen Ausdrücke von höchstens zweitem Grad in $\xi_{11}, \cdots, \xi_{1m}$ sind, gegeben durch den Ausdruck:

$$a_1 \mathfrak{S}_1^{(i)} + \cdots + a_l \mathfrak{S}_l^{(i)}.$$

Wenn wir dieses Verfahren fortsetzen für $\Gamma^3, \cdots, \Gamma^d$ und jeweils die neuen von den früheren unabhängigen Systeme herausgreifen, so müssen wir für jede Gruppe $\Gamma^{(i)}$ genau so viele unabhängige Systeme erhalten, als der Grad der Darstellung beträgt, und die Determinante dieser Systeme ist daher von 0 verschieden. Wir wollen diese so gefundenen Systeme mit $\eta_{ik}^{(i)}$ bezeichnen. Sie lassen sich also sofort hinschreiben, wenn das gruppentheoretische Problem der vollständigen Reduktion von Γ^i gelöst ist.

Nun sei $\zeta_1, \cdots, \zeta_m$ ein beliebiges System, welches zu Γ gehört. Um zunächst dieses System durch die Größen $\xi_{11}, \cdots, \xi_{1m}$ auszudrücken, haben wir bloß die zu Γ konjugierte Gruppe heranzuziehen und die dazu gehörige Matrix (η_{ik}). Die Ausdrücke

$$\eta_{i1}\zeta_1 + \eta_{i2}\zeta_2 + \cdots + \eta_{im}\zeta_m = \varrho_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

verändern sich nicht beim Übergang zu den Konjugierten, weil die ζ und die η kontragrediente Variable sind und der obige bilineare Ausdruck eine Invariante zweier solcher Variabelnreihen darstellt. Die Größen ϱ_i können daher berechnet werden und gehören dem Grundkörper an. Durch Auflösung der Gleichungen erhält man $\zeta_1, \cdots, \zeta_m$ ausgedrückt als Funktionen der Größen η_{ik} und ϱ.

Ein Teil des gruppentheoretischen Satzes, der diesem Verfahren zugrunde liegt, ist bereits von Burnside*) auf anderem Wege bewiesen. Wir bemerken zum Schluß noch, daß bei dieser Reduktion auch die Invarianten der Substitutionsgruppe Γ auftreten, als diejenigen Funktionen, die beim Übergang zu den Konjugierten die Gruppe $\Gamma^{(1)}$ erfahren.

§ 5.

Gruppendeterminante und Körperdiskriminante.

Für den algebraischen und funktionentheoretischen Teil wird es im allgemeinen genügen, aus einem einzigen Formenproblem die zugehörigen Größen ξ zu berechnen und man wird dazu dasjenige vom geringsten Grade benutzen, d. h. man wird das Gleichungsproblem auf ein solches mit möglichst wenig Parametern reduzieren. Ja man erweitert sogar noch den Körper, da es sich herausstellt, daß sich für umfassendere Gruppen oft Darstellungen von niedrigerem Grad finden lassen.**)

---

*) Burnside, Theory of groups of finite order, 2 ed. S. 299.

**) Anmerkung. Beim Ikosaeder geht man so zu einer Gruppe von der Ordnung 120 über und hätte, wie man leicht erkennt, die Quadratwurzel aus einer Zahl

Das Quadrat der Determinante:

$$\left| \omega_{P^{-1}Q} \right| \qquad (P, Q = E, A, B, \cdots)$$

oder kurz

$$\left| \omega_{P^{-1}Q} \right|_{\mathfrak{G}}^{2}$$

ist die Diskriminante der g Zahlen

$$\omega_E, \omega_A, \omega_B, \cdots$$

denn die erste Spalte enthält diese g Zahlen, während die übrigen Spalten die Permutationen nach der Galoisschen Gruppe, d. h. die konjugierten Spalten, sind.

Setzen wir die Determinante der Matrix $M(\omega)$ in § 1 $= \Phi(\omega)$, und bezeichnen wir mit $\Phi_1(\omega), \Phi_2(\omega), \cdots, \Phi_r(\omega)$ die verschiedenen Determinanten, welche in dieser Weise zu den irreduzibeln Darstellungen der Gruppe gehören, dann wird:*)

$$\left| \omega_{P^{-1}Q} \right|_{\mathfrak{G}} = \prod_{l=1}^{r} \Phi_l^{\chi_l}(\omega)$$

wobei wieder χ_l den Grad der Darstellung bedeutet, zu der $\Phi_l(\omega)$ gehört. Wenn ω eine ganze Zahl des Körpers K ist, so ist das Quadrat dieser Determinante stets durch die Körperdiskriminante teilbar, doch werden im allgemeinen noch weitere, allen diesen Zahlen gemeinsame „außerwesentliche" Teiler auftreten.

Zunächst betrachten wir die Gruppendeterminante

$$\Phi(\omega) = | \xi_{ik} |$$

und bestimmen die gemeinsamen Teiler aller Zahlen ξ_{ik}, wobei ω alle ganzen Zahlen des Galoisschen Körpers K durchläuft. Nach den Resultaten von Herrn I. Schur**) lassen sich alle endlichen Substitutionsgruppen in solche mit ganzen algebraischen Koeffizienten transformieren. *Im folgenden setzen wir stets die Gruppe als ganzzahlig voraus*, dann sind die Größen ξ_{ik} stets ganze algebraische Zahlen. Zunächst gilt der

Satz 6: *Der gemeinsame Teiler der Zahlen $\xi_{11}(\omega)$, wobei ω alle ganzen Zahlen von K durchläuft, ist in der Wurzel aus der Körperdiskriminante enthalten.*

---

eines Unterkörpers sechsten Grades zu adjungieren, die so ausgewählt sein müßte, daß der neue Körper ebenfalls Galoissch ist. Doch geschieht das nicht, da beim Übergang zur gebrochenen Substitutionsgruppe diese Quadratwurzel wegen der besonderen Art der Gruppe (Darstellungsgruppe) von selbst wegfällt. Dagegen wird die Quadratwurzel aus einer Zahl des Grundkörpers, nämlich aus der Invariante $A_0^2 + A_1 A_2$ benutzt.

*) Frobenius: l. c.

**) I. Schur: Über Gruppen linearer Substitutionen mit Koeffizienten aus einem algebraischen Zahlkörper, Math. Ann. 71, S. 355.

Beweis: Sei $\omega_1, \cdots, \omega_n$ eine Basis der ganzen Zahlen, so daß

$$\xi_{11}(\omega_1) = \omega_1 + a_1, \omega_1' + \cdots,$$
$$\vdots$$
$$\xi_{11}(\omega_n) = \omega_n + a_1, \omega_n' + \cdots,$$

dann folgt, indem man die Gleichungen der Reihe nach mit den Unterdeterminanten der ersten Spalte aus der Matrix:

$$\sqrt{D} = \begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_1' \cdots \\ \cdots & \cdots \\ \omega_n & \omega_n' \cdots \end{vmatrix}$$

multipliziert und addiert

$$\sqrt{D} = \xi_{11}(\omega_1)\Omega_1 + \cdots + \xi_{11}(\omega_n)\Omega_n,$$

woraus der Satz folgt. Bezeichnet man den gemeinsamen Idealteiler der Größen $\Omega_1, \cdots, \Omega_n$ mit $\mathfrak{d}$, so erkennt man sofort, daß der gemeinsame Idealteiler der Zahlen $\xi_{11}(\omega)$ sogar in $\frac{\sqrt{D}}{\mathfrak{d}}$ enthalten sein muß.

Wir müssen nun die Hilbertschen Begriffe des Trägheitskörpers und des Verzweigungskörpers*) heranziehen. Die Trägheitsgruppe eines Diskriminantenteilers $\mathfrak{P}$ besteht aus allen denjenigen Substitutionen, für welche die Kongruenz besteht:

$$\omega \equiv \omega_S \quad (\mathfrak{P}),$$

für alle ganze Zahlen des Körpers. Sei $\mathfrak{T}$ diese Gruppe und

$$\sum_{\mathfrak{T}} S = H_{\mathfrak{T}},$$

setzen wir ferner

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{T} + A_2\mathfrak{T} + \cdots$$

dann wird:

$$M(\omega) \equiv H_{\mathfrak{T}}\omega_E + A_2 H_{\mathfrak{T}}\omega_{A_2} + \cdots \quad (\mathfrak{P}).$$

Wenn $\mathfrak{T}$ in unserer Darstellung die identische Darstellung nicht enthält, so wird $H_{\mathfrak{T}} = (0)$ und es gilt die Kongruenz:

$$\xi_{ik} \equiv 0 \quad (\mathfrak{P}).$$

Die Verzweigungsgruppe $\mathfrak{V}$ besteht aus denjenigen Substitutionen, für die $\omega \equiv \omega_S$ $(\mathfrak{P}^2)$ ist, wenn ω alle ganzen Zahlen durchläuft. Sei $\mathfrak{L}$ die höchste Potenz von $\mathfrak{P}$, für welche die nämlichen Kongruenzen gelten. Wenn dann die Verzweigungsgruppe in der betrachteten Darstellung die identische Darstellung nicht enthält, so folgt wie oben, daß die Zahlen ξ_{ik} sämtlich durch $\mathfrak{P}^{\mathfrak{L}}$ teilbar sind. Indem man in dieser Weise fortfährt und für den $i$mal überstrichenen Verzweigungskörper die entsprechende Zahl mit $\mathfrak{L}^{(i)}$ bezeichnet, folgt der

*) Hilbert: Jahresbericht der D. Math.-Ver. Bd. 4, S. 251.

Satz 7: *Wenn die $i$mal überstrichene Verzweigungsgruppe in der Darstellung* Γ *die identische Darstellung nicht enthält, so sind die Zahlen* ξ_{ik} *durch* $\mathfrak{P}^{\mathfrak{L}^{(i)}}$ *teilbar, sowie ferner durch die sämtlichen dazu konjugierten Ideale.*

Der letzte Teil dieses Satzes folgt daraus, daß die Verzweigungsgruppen der zu $\mathfrak{P}$ konjugierten Ideale konjugierte Gruppen sind, deren vollständige Zerlegung stets dieselbe ist.

§ 6.

Die Diskriminanten der Unterkörper.

Das Quadrat der Determinante

$$\left|\omega_{P^{-1}Q}\right|_{\mathfrak{G}}$$

ist gleich der Körperdiskriminante, wenn $\omega_E, \omega_A, \cdots$ eine Basis der ganzen Zahlen des Körpers ist. Eine solche Basis bezeichnen wir als eine Normalbasis und wir wollen unter der Voraussetzung, daß der Körper eine solche besitzt, die Zahlen $\Phi(\omega)$ untersuchen.

Aus der Existenz einer Normalbasis folgt sofort, daß der Verzweigungskörper jedes Primteilers $\mathfrak{P}$ der Diskriminante der Körper K selbst ist. Denn zunächst ist offenbar

$$\sum_{\mathfrak{G}} \omega_S = \pm 1$$

ferner ist die Verzweigungsgruppe $\mathfrak{V}$ von der Ordnung p^r, wobei p die durch $\mathfrak{P}$ teilbare Primzahl ist, und es gelten die Kongruenzen für jede Zahl α von K:

$$\alpha \equiv \alpha_V \quad (\mathfrak{P}) \quad (V \text{ in } \mathfrak{V}).$$

Setzt man noch

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{V} + S_2\mathfrak{V} + \cdots \quad \text{und} \quad S_1 = E,$$

so folgt:

$$\sum_{\mathfrak{V}} \omega_{S_i V} \equiv p^r \omega_{S_i} \equiv 0 \quad (\mathfrak{P}) \qquad (i = 1, 2, \cdots)$$

daher

$$\sum_{\mathfrak{G}} \omega_S \equiv 0 \quad (\mathfrak{P}),$$

was einen Widerspruch ergibt.

Ist ein Unterkörper gegeben, der zur Untergruppe $\mathfrak{H}$ gehört, und setzt man

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H} + T_2\mathfrak{H} + \cdots$$

so bilden die Zahlen

$$\sum_{\mathfrak{H}} \omega_{T_i H} \qquad (i = 1, 2, \cdots)$$

eine Basis der ganzen Zahlen des Unterkörpers, und die Diskriminante dieses Körpers ist daher das Quadrat der Determinante:

(1) $$\left|\sum_{\mathfrak{H}} \omega_{T_i H T_k^{-1}}\right|_{ik}.$$

Diese Determinante läßt sich aber darstellen als Produkt aus irreduzibeln Gruppendeterminanten $\Phi(\omega)$:

$$\left|\sum_{\mathfrak{H}} \omega_{T_i H T_k^{-1}}\right| = \prod_l \Phi_l^{h_l}(\omega),$$

wobei h_l angibt, wie oft die Untergruppe $\mathfrak{H}$ in der durch den Index l bezeichneten irreduzibeln Darstellung von $\mathfrak{G}$ die identische Darstellung enthält.*) Daraus folgt der

Satz 8: *Die Diskriminante eines Unterkörpers setzt sich bei Körpern mit Normalbasis in einer allein durch die Gruppe bestimmten Weise aus den Zahlen $\Phi(\omega)$ zusammen.*

Man kann aber noch einen Schritt weiter gehen. Die Gruppendeterminante Φ besitzt Koeffizienten aus dem durch den Charakter bestimmten Kreiskörper und die sämtlichen konjugierten Funktionen $\Phi', \cdots$ sind wiederum irreduzible Gruppendeterminanten. Die Determinante (1) muß nun jede dieser konjugierten Determinanten in derselben Potenz enthalten und wir wollen daher die Potenz von p berechnen, die in dem Produkt von $\Phi(\omega)$ mit den konjugierten Zahlen $\Phi'(\omega), \cdots$ aufgeht.

Sei

$$\Phi(\omega)\,\Phi'(\omega)\cdots = \Psi(\omega),$$

dann sind die Determinanten der Matrizen der Ψ entsprechenden Darstellung von $\mathfrak{G}$:

$$\Gamma + \Gamma' + \cdots$$

sämtlich ± 1. Daher wird $\Psi^2(\omega)$ eine ganze rationale Zahl.

Sei $\mathfrak{P}$ ein Primteiler der Diskriminante und $\mathfrak{T}$ die zugehörige Trägheitsgruppe mit der Ordnung h. Man beweist nun leicht, daß die Relativdiskriminante von K in bezug auf den Trägheitskörper das gemeinsame Ideal aller Diskriminanten von der Gestalt

$$\left|\omega_{P^{-1}Q}\right|_{\mathfrak{T}}^2$$

ist. Sei ω speziell so gewählt, daß das Primideal in der niedrigsten Potenz vorkommt, die möglich ist, nämlich in der $h(h-1)^{\text{ten}}$.**) Nun ist die Trägheitsgruppe zyklisch. Ihr erzeugendes Element sei T. Dann kann man $\left|\omega_{P^{-1}Q}\right|_{\mathfrak{T}}$ zerlegen in das Produkt der Lagrangeschen Resolventen:

$$\prod_{i=1}^{h}\left(\omega_E + \varepsilon^i\omega_T + \varepsilon^{2i}\omega_{T^2} + \cdots + \varepsilon^{(h-1)i}\omega_{T^{h-1}}\right).$$

*) Burnside: Theory of groups, S. 275.

**) Weber, Algebra, 2. Aufl. Bd. 2, S. 670.

p wird im Körper der h^{ten} Einheitswurzeln in eine gewisse Anzahl e verschiedener Primideale zerfallen, wobei e ein Teiler von $\varphi(h)$ ist.*) Das Primideal $\mathfrak{P}$ zerfällt dann in dieselbe Anzahl verschiedener Ideale. Bezeichnet man den Ausdruck

$$\omega_E + \varepsilon\omega_T + \cdots + \varepsilon^{h-1}\omega_{T^{h-1}} \quad \text{mit } \zeta_1$$

und ersetzt man der Reihe nach ε durch $\varepsilon^r, \varepsilon^{r^2}, \cdots$, wobei r eine Primitivzahl nach h bedeutet, so erhält man $\varphi(h)$ Zahlen:

$$\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_{\varphi(h)}.$$

Sei

$$\zeta_1 = \mathfrak{P}_0^{a_0}\mathfrak{P}_1^{a_1}\cdots\mathfrak{P}_{e-1}^{a_{e-1}}\mathfrak{Q},$$

wobei $\mathfrak{Q}$ prim ist zu $\mathfrak{P}$, so erhält man die weiteren Größen $\zeta_2 \cdots$ durch zyklische Permutation der $\mathfrak{P}$ und entsprechender Veränderung von $\mathfrak{Q}$:

$$\zeta_2 = \mathfrak{P}_1^{a_0}\mathfrak{P}_2^{a_1}\cdots\mathfrak{P}_0^{a_{e-1}}\mathfrak{Q}'$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$\frac{\zeta_1^r}{\zeta_2}$ ist eine Zahl des Trägkeitskörpers, dem ε adjungiert ist. Daher muß sein

$$r a_{i+1} \equiv a_i \ (h)$$

also wird

$$a_i \equiv r'^i a_0 \ (h). \qquad (r\cdot r' \equiv 1\,(h)) \tag{2}$$

In $\prod_{i=1}^{\varphi(h)}\zeta_i$ geht dann $\mathfrak{P}_0$ zur $\frac{\varphi(h)}{e}(a_0 + a_1 + \cdots + a_{e-1})^{\text{ten}}$ Potenz auf.**) Die kleinste mögliche Zahl für diese Potenz ist aber, wie man sofort aus der Gleichung (2) folgert, gleich $h\,\frac{\varphi(h)}{2}$.

Nun möge ε eine primitive h_1^{te} Einheitswurzel sein, während $h = h_1\cdot\bar h$ ist. Dann beweist man genau so, wie oben, daß $\mathfrak{P}^{\bar h}$ mindestens in der Potenz $h_1\frac{\varphi(h_1)}{2}$ im Produkt der zu einer Faktorgruppe gehörenden Lagrangeschen Resolvente

$$\omega_E + \varepsilon\omega_T + \cdots$$

aufgeht. Das Produkt aller so entstehenden Resolventen gibt die Wurzel aus der Relativdiskriminante der Zahlen $\omega_E, \omega_T, \cdots, \omega_{T^{h-1}}$ in bezug auf den Trägkeitskörper. Die Relativdiskriminante selbst ist daher mindestens durch die $h\cdot\sum_i{}' \varphi(h_i)^{\text{te}}$ Potenz von $\mathfrak{P}$ teilbar, wobei h_i alle Teiler von h durchläuft, außer der Zahl 1. Nun ist

$$\sum{}' \varphi(h_i) = h - 1.$$

*) Vgl. darüber Fueter: Theorie der Zahlstrahlen, Crelles Journ. 130, S. 197.

**) Vgl. hierzu Hilbert, l. c., S. 351—359.

$h(h-1)$ ist aber die genaue Zahl, die angibt, wie oft $\mathfrak{P}$ in der Relativdiskriminante aufgeht. Wir transformieren jetzt die Gruppe $\Gamma + \Gamma' + \cdots$ dergestalt, daß die Trägheitsgruppe vollständig reduziert erscheint. Den hierbei im allgemeinen auftretenden Nenner nehmen wir als zu p prim an. Dann wird die Matrix

$$\sum_{i=1}^{h} T^i \omega_{T^i} = M_{\mathfrak{T}}(\omega)$$

eine Diagonalmatrix, deren Koeffizienten in der Hauptdiagonalen Lagrangesche Resolventen sind. Die Matrix

$$S \cdot M_{\mathfrak{T}}(\omega_S),$$

wobei S eine beliebige Substitution der Gruppe $\mathfrak{G}$ bedeutet, ist nun eine Matrix, die in der i^{ten} Spalte lauter Koeffizienten besitzt, welche die Ideale $\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1, \cdots$ in mindestens derselben Potenz enthalten, wie die i^{te} Spalte in $M_{\mathfrak{T}}(\omega)$. Daraus folgt sofort

Satz 9: *Wenn die Darstellung $\Gamma + \Gamma' + \cdots$ das System der mit der Faktorgruppe von der Ordnung h_i homomorphen Darstellungen der Trägheitsgruppe genau g_i mal enthält, so ist $\Psi(\omega)$ genau durch die $\frac{1}{2} h \sum' g_i \varphi(h_i)^{\text{te}}$ Potenz von $\mathfrak{P}$ und von allen zu $\mathfrak{P}$ konjugierten Primidealen, also genau durch die $\frac{1}{2} \sum' g_i \varphi(h_i)^{\text{te}}$ Potenz von p teilbar. Dabei ist also der Teiler* 1 *von h wegzulassen.*

Diese Potenz wollen wir für die verschiedenen Darstellungen mit b_k bezeichnen. Wenn dann ein irreduzibler Bestandteil von Ψ_k die identische Darstellung der Untergruppe genau c_k mal enthält, so ist Ψ_k in der Diskriminante des Unterkörpers genau zur $2 c_k^{\text{ten}}$ Potenz enthalten. Daher geht p in der Diskriminante zur $2 \sum b_k c_k^{\text{ten}}$ Potenz auf.

Indem man diese Berechnung des Exponenten mit anderen vergleicht, so ergeben sich interessante, aus der Gruppentheorie bekannte Beziehungen, von denen wir die einfachste, für den Fall daß h eine ungerade Primzahl ist, ableiten wollen.

Sei $\mathfrak{N}$ der Normalisator der Trägheitsgruppe, r der Index der Zerlegungsgruppe unter diesem Normalisator, f derjenige der Trägheitsgruppe unter der Zerlegungsgruppe, dann ist die Trägheitsgruppe noch für $r-1$ zu $\mathfrak{P}$ konjugierte Ideale Trägheitsgruppe. Die Relativdiskriminante von K in bezug auf den Trägheitskörper ist daher genau durch die $(h-1)^{\text{te}}$ Potenz von $\mathfrak{P}^h = \mathfrak{p}$ und von $(r-1)$ dazu konjugierten Primidealen teilbar, während die weiteren Faktoren zu p prim sind. Die Norm der Relativdiskriminante, genommen im Trägheitskörper, ist hiernach genau durch

$p^{fr(h-1)}$ teilbar. fr ist aber der Index der Trägheitsgruppe unter dem Normalisator. Ferner ist die Körperdiskriminante genau durch die $\frac{N}{h}(h-1)^{\text{te}}$ Potenz von p teilbar. Daher wird die Diskriminante des Trägheitskörpers genau durch die

$$\frac{1}{h}\left\{\frac{N}{h}(h-1) - fr(h-1)\right\}^{\text{te}}$$

Potenz von p teilbar. Dagegen folgt aus unserer Berechnung für diese Potenz die Zahl:

$$\frac{1}{h-1}\left(\frac{N}{h} - \sum c_k^2\right)(h-1)$$

und durch Gleichsetzung erhält man

$$h \cdot \sum c_k^2 = \frac{N}{h} + fr(h-1).$$

Setzen wir $\frac{N}{h} = fr + s$, so lautet die Gleichung jetzt:

$$\sum c_k^2 = fr + \frac{s}{h}\ .$$

und rechts steht offenbar die Anzahl der unter der Trägheitsgruppe invarianten Komplexe von Nebengruppen der Trägheitsgruppe. Die im Normalisator enthaltenen Nebengruppen sind nämlich invariant unter $\mathfrak{T}$, von den anderen ergeben je h zusammengenommen einen invarianten Komplex. Die Vergleichung der beiden Resultate führt also auf den bekannten Satz, daß $\sum c_k^2$ gleich der Anzahl der unter $\mathfrak{T}$ invarianten Systeme von Nebengruppen von $\mathfrak{T}$ ist.

Schließlich bleibt noch übrig, die Zahl $\Psi(\omega)$ in ihre Faktoren $\Phi(\omega)$, $\Phi'(\omega), \cdots$ zu zerlegen. Dieses Problem läuft darauf hinaus, die gemeinsamen Teiler für die einzelnen Lagrangeschen Resolventen zu bestimmen. Zu jeder in Γ enthaltenen irreduziblen Darstellung der Trägheitsgruppe gehört in dieser Weise ein bestimmtes Ideal und $\Phi(\omega)$ ist durch das Produkt dieser Ideale teilbar. Jeder Faktor der Diskriminante läßt sich in dieser Weise bestimmen.

Karlsruhe, Juli 1915.