Arithmetische Eigenschaften der unendlichen Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{\nu}}{a^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}}}$

Von

Ljubomir Tschakaloff in Sofia.

Die Aufgabe der vorliegenden Abhandlung ist es, gewisse arithmetische Eigenschaften der im Titel stehenden unendlichen Thetareihe*) zu beweisen, welche unten in Satz I genauer formuliert sind. Im 76. Bande der Mathematischen Annalen sind vor etwa drei Jahren zwei Arbeiten**) der Herren Felix Bernstein und Otto Szász über einen ähnlichen Gegenstand erschienen. In der ersten dieser Abhandlungen beweisen die beiden Verfasser mittels einer Verallgemeinerung des Sternschen Satzes über Irrationalität von Kettenbrüchen, daß die unendliche Thetareihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} q^{\nu^2} x^{\nu} \tag{1}$$

einen irrationalen Wert hat, wenn x eine beliebige von Null verschiedene rationale Zahl ist und $q = \frac{r}{s}$ eine ebenso hohe rationale Zahl bedeutet, deren Zähler und Nenner den Bedingungen

$$r \neq 0, \quad |s| \geqq 2, \quad |s| \geqq |r|^3$$

genügen. Unter denselben Voraussetzungen beweist Herr O. Szász in der zweiten der obengenannten Abhandlungen auf einfacherem Wege dieselben

*) Diese Reihe geht durch die Substitution $a = \frac{1}{q^2}$, $x = qy$ in die gewöhnliche Thetareihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} q^{\nu^2} y^{\nu}$ über. (Genauer in die rechte Hälfte der gewöhnlichen Thetareihe $\sum_{-\infty}^{+\infty} q^{\nu^2} y^{\nu}$.)

**) F. Bernstein und O. Szász, Über Irrationalität unendlicher Kettenbrüche mit einer Anwendung auf die Reihe $\sum_{0}^{\infty} q^{\nu^2} x^{\nu}$. Math. Annalen, Bd. 76 (1915), S. 295—300. O. Szász, Über Irrationalität gewisser unendlicher Reihen. Math. Annalen, Bd. 76 (1915), S. 485—489.

arithmetischen Eigenschaften der Reihe (1), ohne hierbei explizit die Kettenbruchentwicklung dieser Reihe zu benutzen und erweitert die Ergebnisse auch für komplexe rationale Werte von q und x.

Im folgenden wird eine neue Methode zur Untersuchung der analogen arithmetischen Eigenschaften der Reihe

$$(2) \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{\nu}}{a^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}}}$$

angewandt, die nichts mit der Kettenbruchentwicklung von (2) gemein hat; diese Methode erinnert vielmehr ihrem Wesen nach an den klassischen Beweis der Transzendenz von e und führt zu besseren Ergebnissen, als die anderen Methoden.

Das Hauptergebnis dieser Abhandlung läßt sich folgendermaßen formulieren:

Satz I: *Es sei* $a = \frac{s}{r}$ *eine rationale Zahl, deren Zähler und Nenner den Bedingungen*

$$r \neq 0, \quad |s| > |r|^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$$

genügen; dann hat die ganze transzendente Funktion

$$(2) \qquad \Phi(x, a) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{\nu}}{a^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}}}$$

für jedes von Null verschiedene rationale x *einen irrationalen Wert.*

Der Beweis dieses Satzes wird in den folgenden Paragraphen erbracht. Er enthält als speziellen Fall den

Satz II: *Es sei* $q = \frac{r'}{s'}$ *eine rationale Zahl, deren Zähler und Nenner den Bedingungen*

$$r' \neq 0, \quad |s'| > |r'|^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$$

genügen; dann hat die ganze transzendente Funktion

$$(1') \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} q^{\nu^2} y^{\nu}$$

für jedes von Null verschiedene rationale y *einen irrationalen Wert.*

Satz II ergibt sich als unmittelbare Folgerung aus Satz I, wenn man berücksichtigt, daß die Reihe (2) durch die Substitution $a = \frac{1}{q^2}$, $x = qy$ in die Reihe (1′) übergeht, wobei offenbar rationalen Werten von q und y auch rationale Werte von a und x entsprechen, und zwar so, daß einem rationalen Wert von q, der den Voraussetzungen des Satzes II genügt, ein rationaler Wert von a entspricht, der die Voraussetzungen des Satzes I erfüllt. Der Satz II enthält seinerseits als speziellen Fall die Ergebnisse von F. Bernstein und O. Szász über die Reihe (1). Denn die Menge der rationalen Werte q, für welche die genannten Autoren die Irrationalität von (1) bewiesen haben, ist $\left(\text{wegen } \frac{3+\sqrt{5}}{2} < 3\right)$ nur ein Teil der Menge der rationalen Zahlen q, für welche die Voraussetzungen des Satzes II erfüllt sind.

§ 1.

Es sei a eine rationale Zahl, die absolut größer als 1 ist. Ich setze für ganze positive ν $u_\nu = a^{\nu-1}$ und betrachte die beständig konvergente Potenzreihe

$$(2)\qquad \Phi(x, a) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{a^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}}} = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^\nu}{u_1 u_2 \cdots u_\nu}.$$

Wenn k eine ganze positive Zahl bedeutet, so folgt aus (2)

$$(3)\quad u_1 u_2 \cdots u_k \Phi(x, a) = x^k + u_k x^{k-1} + \cdots + u_1 u_2 \cdots u_k + x^k \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^\nu}{u_{k+1} \cdots u_{k+\nu}}.$$

Wegen

$$\left|\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^\nu}{u_{k+1} \cdots u_{k+\nu}}\right| \leqq \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|x^\nu|}{|u_{k+1}| \cdots |u_{k+\nu}|} \leqq \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|x^\nu|}{|u_1| \cdots |u_\nu|} < \Phi(|x|, |a|)$$

kann man
$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^\nu}{u_{k+1} \cdots u_{k+\nu}} = \theta_k \cdot \Phi(|x|, |a|)$$

setzen, wobei $\theta_k = \theta_k(x, a)$ eine komplexe Zahl bedeutet, die dem Betrage nach kleiner als 1 ist. Formel (3) kann also folgendermaßen geschrieben werden:

$$(4)\quad u_1 u_2 \cdots u_k \Phi(x, a) = x^k + u_k x^{k-1} + \cdots + u_1 u_2 \cdots u_k + x^k \theta_k \Phi(|x|, |a|).$$

Dieselbe Formel gilt offenbar auch für $k = 0$ und hat für diesen Wert von k die Gestalt

$$(4')\qquad \Phi(x, a) = 1 + \theta_0 \Phi(|x|, |a|) \qquad (|\theta_0| < 1).$$

Wie aus der Definition der Zahlen θ_k unmittelbar hervorgeht, verschwinden alle diese Zahlen für $x = 0$.

Ich setze nun in (4) sukzessiv $k = n, n-1, \cdots, 1, 0$ und addiere die so erhaltenen Formeln, nachdem ich sie der Reihe nach mit den von x unabhängigen Konstanten $c_0, c_1, \cdots, c_n$ multipliziere. Auf diese Weise entsteht die Gleichung

$$(5)\qquad P\Phi(x, a) = f(x) + f_1(x) + \cdots + f_n(x) + (c_0\theta_n x^n + c_1\theta_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_n\theta_0)\Phi(|x|, |a|)$$

in der $P = c_n + \sum_{k=1}^{n} c_{n-k}u_1u_2\cdots u_k$ von x unabhängig ist und $f(x), f_1(x), \cdots, f_n(x)$ die Polynome

$$f(x) = f_0(x) = c_0x^n + c_1x^{n-1} + \cdots + c_n,$$

. . . .

$$f_k(x) = c_0u_nu_{n-1}\cdots u_{n-k+1}x^{n-k} + c_1u_{n-1}u_{n-2}\cdots u_{n-k}x^{n-k-1} + u_ku_{k-1}\cdots u_1c_{n-k},$$

. . . .

$$f_n(x) = c_0u_1u_2\cdots u_n$$

bedeuten. Der Grad und die Koeffizienten des ersten dieser Polynome $f(x)$ sind von $\Phi(x, a)$ unabhängig und können beliebig gewählt werden. Das Polynom $f_1(x)$ kann formell aus $f(x)$ abgeleitet werden, indem das allgemeine Glied von $f(x)$, d. h. $c_{n-\lambda}x^\lambda$, für $\lambda > 0$ durch $c_{n-\lambda}u_\lambda x^{\lambda-1}$ und das konstante Glied c_n durch 0 ersetzt wird. Dieselbe Regel gilt auch für die Ableitung von $f_k(x)$ aus $f_{k-1}(x)$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$.

Das Polynom $f_k(x)$ kann auch explizit durch x und a ausgedrückt werden. Man bestätigt leicht, z. B. durch vollständige Induktion, die Richtigkeit der Formel

$$(6)\qquad f_k(x) = a^{\frac{k(k-1)}{2}}\{c_0(a^kx)^{n-k} + c_1(a^kx)^{n-k-1} + \cdots + c_{n-k}\}$$

für $k = 0, 1, 2, \cdots, n$.

Formel (5) ist grundlegend für die weiteren Untersuchungen. Sie kann noch kürzer unter der Form

$$(5')\qquad P\cdot\Phi(x, a) = F(x) + (c_0\theta_n x^n + c_1\theta_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_n\theta_0)\Phi(|x|, |a|)$$

dargestellt werden, wobei

$$F(x) = f(x) + f_1(x) + \cdots + f_n(x) \qquad \text{gesetzt ist.}$$

§ 2.

Angenommen es gäbe eine von Null verschiedene rationale Zahl $\alpha = \frac{\sigma}{\varrho}$, so daß $\Phi(\alpha, a)$ ebenso rational sei. Das Ziel der folgenden Betrachtungen ist es, die Unzulässigkeit dieser Annahme zu beweisen, wenn die rationale Zahl a den Voraussetzungen des Satzes I genügt.

In der Tat existieren, falls diese Annahme richtig ist, zwei ganze Zahlen A und $B \neq 0$ derart, daß

$$(7)\qquad \begin{gathered} A + B\Phi(\alpha, a) = 0 \qquad\qquad \text{oder} \\ A\Phi(0, a) + B\Phi(\alpha, a) = 0. \end{gathered}$$

Ich wende nun Formel (5′) für $x = 0$ und $x = \alpha$ an und addiere die so entstandenen Gleichungen

$$(8)\qquad \begin{aligned} &P\cdot\Phi(0, a) = F(0) \\ &P\cdot\Phi(\alpha, a) = F(\alpha) + (c_0\theta_n\alpha^n + c_1\theta_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + c_n\theta_0)\,\Phi(|\alpha|, |a|)^{*)} \end{aligned}$$

nachdem ich sie der Reihe nach mit A und B multipliziert habe. Auf diese Weise entsteht aus (8) mit Rücksicht auf (7) die Gleichung

$$(9)\qquad 0 = AF(0) + BF(\alpha) + B(c_0\theta_n\alpha^n + \cdots + c_n\theta_0)\,\Phi(|\alpha|, |a|).^{*)}$$

Bisher war das Polynom $f(x)$ völlig unbestimmt. Ich setze von nun an

$$f(x) = x^\lambda \prod_{k=1}^{\mu} (x - a^{k-1}\alpha) \qquad\qquad (\lambda + \mu = n);$$

λ und μ sind ganze positive Zahlen, die den Ungleichungen $\lambda - 1 > \mu > 1$ genügen. Für das folgende ist von Wichtigkeit, einige Eigenschaften der Polynome $f_k(0)$, $f_k(\alpha)$, $F(0)$, $F(\alpha)$ (als Polynome der unbestimmten Größen α und a betrachtet) abzuleiten, welche Eigenschaften im nächsten Paragraphen zusammengestellt sind.

§ 3.

1. Es ist offenbar $c_0 = 1$ und $c_{\mu+1} = c_{\mu+2} = \cdots = c_n = 0$.

2. Für $0 \leqq k \leqq \mu$ ist $\qquad c_k = \alpha^k\varphi_k(a)$;

$\varphi_k(a)$ bedeutet hierbei ein Polynom von a mit ganzen Koeffizienten und vom Grade $\mu k - \frac{k(k+1)}{2}$. Der kleinste Exponent von a in $\varphi_k(a)$ ist gleich $\frac{k(k-1)}{2}$. Alle diese Eigenschaften können leicht bestätigt werden, wenn man die Koeffizienten von $x^{\mu-k}$ beiderseits der Identität

$$c_0x^\mu + c_1x^{\mu-1} + \cdots + c_\mu = (x-\alpha)(x - a\alpha)\cdots(x - a^{\mu-1}\alpha) \quad \text{vergleicht.}$$

3. Nach (6) ist $f_k(0) = a^{\frac{k(k-1)}{2}} c_{n-k}$, also

a) $f(0) = f_1(0) = \cdots = f_{\lambda-1}(0) = 0$,

b) $f_k(0) = \alpha^{n-k} a^{\frac{k(k-1)}{2}} \varphi_{n-k}(a)$ für $\lambda \leqq k \leqq n$.

Im letzten Falle ist der kleinste Exponent von a in $f_k(0)$ gleich (nach 2.)

$$\frac{k(k-1)}{2} + \frac{(n-k)(n-k-1)}{2}.$$

---

*) In dieser Formel ist unter θ_k sein Wert für $x = \alpha$, d. h. $\theta_k(\alpha, a)$, zu verstehen.

Da für $\lambda \leqq k \leqq n$

$$\frac{d}{dk}\left\{\frac{k(k-1)}{2}+\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}\right\}=2k-n\geqq 2\lambda-n>0$$

ist, so erreicht dieser Exponent seinen kleinsten Wert für $k=\lambda$. Dieser kleinste Wert ist

$$\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}+\frac{\mu(\mu-1)}{2}.$$

Der größte Exponent von a in $f_k(0)$ ist

$$\frac{k(k-1)}{2}+\mu(n-k)-\frac{(n-k)(n-k+1)}{2}=\frac{n(n-1)}{2}-\lambda(n-k)$$

und sein größter Wert für $\lambda \leqq k \leqq n$ ist offenbar $\frac{n(n-1)}{2}$.

Aus 1., 2. und 3. folgt, daß

$$F(0)=\sum_{k=0}^{n}{}' f_k(0)=\sum_{k=\lambda}^{n}{}' f_k(0)$$

ein Polynom von a und α mit ganzen Koeffizienten ist. Sein Grad in bezug auf α und a ist μ bzw. $\frac{n(n-1)}{2}$; der kleinste Exponent von a in den verschiedenen Gliedern von $F(0)$ ist $\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}+\frac{\mu(\mu-1)}{2}$.

4. Es sei $k=0, 1, 2, \cdots, \lambda$. Das Polynom $f_k(x)$ hat nach (6) die Gestalt

$$\begin{aligned} f_k(x) &= a^{\frac{k(k-1)}{2}}\{c_0(a^kx)^{n-k}+c_1(a^kx)^{n-k-1}+\cdots+c_\mu(a^kx)^{n-k-\mu}\} \\ &= a^{\frac{k(k-1)}{2}+k(n-k-\mu)}x^{n-k-\mu}\{c_0(a^kx)^\mu+c_1(a^kx)^{\mu-1}+\cdots+c_\mu\} \\ &= a^{\frac{k(k-1)}{2}+k(\lambda-k)}x^{\lambda-k}(a^kx-\alpha)(a^kx-a\alpha)\cdots(a^kx-a^{\mu-1}\alpha); \end{aligned}$$

es ist also

a) $f(\alpha)=f_1(\alpha)=\cdots=f_{\mu-1}(\alpha)=0$ und

b) für $\mu \leqq k \leqq \lambda$

$$f_k(\alpha)=(a^k-1)(a^{k-1}-1)\cdots(a^{k-\mu+1}-1)\alpha^{n-k}a^{\frac{k(k-1)}{2}+k(\lambda-k)+\frac{\mu(\mu-1)}{2}}.$$

Wenn man allgemein den kleinsten Exponenten von a in $f_k(\alpha)$ mit e_k bezeichnet (er hängt noch von μ ab), so ist für $\mu \leqq k \leqq \lambda$

$$e_k=\frac{k(k-1)}{2}+k(\lambda-k)+\frac{\mu(\mu-1)}{2};$$

der kleinste Wert von e_k für dieselben Werte von k ist offenbar e_μ, d. h.

$$\min e_k=e_\mu=\mu(\lambda-1).$$

Ferner ist der Grad von $f_k(\alpha)$ in bezug auf a gleich $\frac{k(k-1)}{2}+k(n-k)$, also sicher kleiner als $\frac{n(n-1)}{2}$; denn die Ungleichung

$$\frac{k(k-1)}{2}+k(n-k)<\frac{n(n-1)}{2}$$

ist äquivalent mit
$$\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}>0,$$

welche offenbar für $k\leqq\lambda$ besteht.

5. Es sei $\lambda<k\leqq n$. Die Identität (6) liefert für $x=\alpha$ (mit Rücksicht auf $c_\nu=\alpha^\nu\varphi_\nu(a)$ für $0\leqq\nu\leqq\mu$)

$$\begin{aligned} f_k(\alpha) &= a^{\frac{k(k-1)}{2}}\{c_0(a^k\alpha)^{n-k}+c_1(a^k\alpha)^{n-k-1}+\cdots+c_{n-k}\}\\ &= \alpha^{n-k}a^{\frac{k(k-1)}{2}}\{\varphi_0 a^{k(n-k)}+\varphi_1(a)a^{k(n-k-1)}+\cdots+\varphi_{n-k}(a)\}\\ &= \alpha^{n-k}a^{\frac{k(k-1)}{2}}\psi_k(a), \end{aligned}$$

wobei $\psi_k(a)$ ein Polynom von a allein mit ganzen Koeffizienten bedeutet. Um den kleinsten und den größten Exponenten von a in $\psi_k(a)$ zu bestimmen, betrachte ich das allgemeine Glied

$$\varphi_h(a)\,a^{k(n-k-h)}\qquad(h=0,1,2,\cdots,n-k).$$

Der Exponent der niedrigsten Potenz von a in diesem Gliede ist (nach 2.) gleich $k(n-k-h)+\frac{h(h-1)}{2}$; da für $0\leqq h\leqq n-k$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dh}\left\{k(n-k-h)+\frac{h(h-1)}{2}\right\} &= -k+h-\frac{1}{2}\leqq-2k+n-\frac{1}{2}\\ &= -(k-\lambda)-(k-\mu)-\frac{1}{2}<0\end{aligned}$$

ist, so erreicht dieser Exponent seinen kleinsten Wert für $h=n-k$. Der kleinste Exponent von a in $\psi_k(a)$ ist also $\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$. Daraus folgt, daß der kleinste Exponent von a in $f_k(\alpha)$ gleich

$$e_k=\frac{k(k-1)}{2}+\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$$

ist. Ferner schließt man genau so wie oben (s. Punkt 3b), daß für $\lambda<k\leqq n$

$$e_k>e_\lambda=\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}+\frac{\mu(\mu-1)}{2}>e_\mu.$$

Ähnlich läßt sich auch der größte Exponent von a in $f_k(\alpha)$ für $\lambda<k\leqq n$ bestimmen. In der Tat ist (nach 2.) der größte Exponent von a in

$$\varphi_h(a)\,a^{k(n-k-h)}\qquad(h=0,1,2,\cdots,n-k)$$

gleich $k(n-k-h)+\mu h-\frac{h(h+1)}{2}$ und da dieser Ausdruck eine abnehmende Funktion der positiven Veränderlichen h ist, so erreicht er seinen größten Wert für $h=0$. Folglich ist der größte Exponent von a in $f_k(\alpha)$ gleich $\frac{k(k-1)}{2}+k(n-k)$. Der letzte Exponent kann seinerseits (für $\lambda < k \leqq n$) höchstens gleich $\frac{n(n-1)}{2}$ sein.

Zusammengenommen folgt aus 4. und 5., daß

$$F(\alpha)=\sum_{k=0}^{n} f_k(\alpha)=\sum_{k=\mu}^{n} f_k(\alpha)$$

ein Polynom von a und α mit ganzen Koeffizienten darstellt. Der größte und der kleinste Exponent von a in $F(\alpha)$ ist $\frac{n(n-1)}{2}$ bzw. $\mu(\lambda-1)$. Da ferner $f_k(\alpha)$ $(k=\mu, \mu+1, \cdots, n)$ ein Polynom von α vom Grade $n-k$ ist, so ist offenbar der größte Exponent von α in $F(\alpha)$ gleich $n-\mu=\lambda$.

Wenn man diese Ergebnisse über das Polynom $F(\alpha)$ mit den entsprechenden Ergebnissen über $F(0)$ (s. oben, Punkt 3) zusammenstellt, so erhält man als Schlußfolgerung dieses Paragraphen:

Der Ausdruck $$AF(0)+BF(\alpha)$$

ist ein Polynom von a und α mit ganzen Koeffizienten, dessen Grad in bezug auf a einerseits und α andererseits gleich $\frac{n(n-1)}{2}$ bzw. λ ist. Die Exponenten von a in den verschiedenen Gliedern dieses Polynoms sind positive ganze Zahlen, $\geqq e_\mu=\mu(\lambda-1)$.

§ 4.

Ich kehre nun zu Formel (9) zurück, die auch folgendermaßen umgeformt werden kann:

$$(9') \quad \frac{1}{a^{\mu(\lambda-1)}}\{AF(0)+BF(\alpha)\}=-\frac{B}{a^{\mu(\lambda-1)}}(c_0\theta_n\alpha^n+\cdots+c_n\theta_0)\Phi(|\alpha|,|a|).$$

Die linke Seite von (9′) ist nach der Schlußfolgerung des vorigen Paragraphen ein Polynom von a und α mit ganzen Koeffizienten und sein Grad in bezug auf a ist $\nu=\frac{n(n-1)}{2}-\mu(\lambda-1)$. Ich setze ferner $a=\frac{s}{r}$, $\alpha=\frac{\sigma}{\varrho}$, wo s, r, σ, ϱ ganze (von Null verschiedene) Zahlen bedeuten und r und s als teilerfremd vorausgesetzt werden können. Dann folgt aus (9′), wenn man beiderseits mit $r^\nu\varrho^\lambda$ multipliziert, die Gleichung

$$(10) \quad \frac{r^\nu\varrho^\lambda}{a^{\mu(\lambda-1)}}(AF(0)+BF(\alpha))=-\frac{Br^\nu\varrho^\lambda}{a^{\mu(\lambda-1)}}(c_0\theta_n\alpha^n+\cdots+c_n\theta_0)\,\Phi(|\alpha|,|a|)$$

in der die linke Seite eine ganze Zahl ist. Das Ziel der folgenden Betrachtungen ist es, zu zeigen, daß diese Gleichung zu einem Widerspruch führt. Der Beweis dafür besteht aus zwei Teilen: 1. es wird bewiesen, daß der Betrag der rechten Seite von (10) für passend gewählte Werte von λ und μ beliebig klein (also auch kleiner als 1) gemacht werden kann, wenn $a = \frac{s}{r}$ den Voraussetzungen des Satzes I. genügt; 2. es wird gezeigt, daß unter denselben Bedingungen die linke Seite von (10) eine *von Null verschiedene* ganze Zahl ist, also dem Betrage nach nicht kleiner als 1 sein kann.

Um eine obere Grenze der rechten Seite von (10) zu bestimmen, betrachte ich zunächst die Summe

$$c_0 \theta_n \alpha^n \pm c_1 \theta_{n-1} \alpha^{n-1} + \cdots + c_n \theta_0,$$

deren Betrag offenbar kleiner als

$$|c_0|\,|\alpha|^n + |c_1|\,|\alpha|^{n-1} + \cdots + |c_n|$$

ist. Da die Koeffizienten $|c_0|, |c_1|, \cdots, |c_n|$ nicht größer als die entsprechenden Koeffizienten des majoranten Polynoms

$$x^\lambda \prod_{k=1}^{\mu} (x + |\alpha| \cdot |a|^{k-1}) \qquad \text{sind, so ist}$$

$$\sum_{k=0}^{n} |c_k|\,|\alpha|^{n-k} \leqq |\alpha|^n \prod_{k=1}^{\mu} (1 + |a|^{k-1}) < |\alpha|^n \cdot 2^\mu \cdot |a|^{\frac{\mu(\mu-1)}{2}}$$

Folglich muß der Betrag der rechten Seite von (10) kleiner als

$$R = M|B| \frac{|r|^\nu\,|\varrho|^\lambda}{|a|^{\mu(\lambda-1)}} \cdot 2^\mu |\alpha|^{\lambda+\mu} |a|^{\frac{\mu(\mu-1)}{2}} \tag{11}$$

sein, wobei zur Abkürzung $\Phi(|\alpha|, |a|) = M$ gesetzt ist. Es bedeute ferner β eine feste Zahl, größer als 1 und es sei $\lambda = [\beta\mu]$ gesetzt. Für genügend große (ganze positive) Werte von μ sind die Ungleichungen $\lambda - 1 > \mu > 1$ erfüllt, da

$$\lim_{\mu \to \infty} \frac{\lambda}{\mu} = \beta > 1.$$

Die obere Grenze R für den Betrag der rechten Seite von (10) kann beliebig klein gemacht werden, falls $\lim\limits_{\mu \to \infty} R = 0$, oder, was dasselbe bedeutet, falls

$$\log R = \log|B| + \log M + \mu \log 2 + (\lambda + \mu) \log|\alpha| + \lambda \log|\varrho|$$
$$+ \left(\frac{(\lambda+\mu)(\lambda+\mu-1)}{2} - \frac{\mu(\mu-1)}{2}\right) \log|r| + \left(\frac{\mu(\mu-1)}{2} - \mu(\lambda-1)\right) \log|s|$$

nach $-\infty$ strebt bei $\mu \to \infty$. Das ist sicher der Fall für $|r| = 1$ (d. h. also, wenn a ganz ist) da in diesem Falle $\lim\limits_{\mu \to \infty} \frac{1}{\mu^2} \log R = \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \log |s|$ negativ ist wegen $\beta > 1$ und $|s| > 1$. Ist dagegen $|r| > 1$, so kann man

$$|s| = |r|^\tau \quad \text{oder} \quad \tau = \frac{\log |s|}{\log |r|}$$

setzen. In diesem Falle ist

$$\lim \frac{1}{\mu^2} \log R = \left\{\left(\frac{1}{2}\beta^2 + \beta\right) + \tau\left(\frac{1}{2} - \beta\right)\right\} \log |r|$$

negativ, falls $\quad \frac{1}{2}\beta^2 + \beta + \tau\left(\frac{1}{2} - \beta\right) < 0 \quad$ ist, d. h., wenn

$$(12) \qquad \tau > \frac{\beta^2 + 2\beta}{2\beta - 1}.$$

Genügt also $\tau = \frac{\log |s|}{\log |r|}$ der Ungleichung (12) für irgend ein $\beta > 1$, so strebt der Ausdruck R (in dem $\lambda = [\beta\mu]$ gesetzt ist) nach Null für $\mu \to \infty$. Der günstigste Wert von $\beta > 1$ ist offenbar derjenige, für den die rechte Seite von (12) möglichst klein ausfällt. Dieser Wert ist $\beta = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, wobei die Ungleichung (12) in

$$(13) \qquad \tau > \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = 2{,}6180 \cdots$$

übergeht. Die letzte Ungleichung ist gleichbedeutend mit

$$(14) \qquad |s| > |r|^{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}}$$

Umgekehrt, wenn s und r zwei von Null verschiedene ganze Zahlen bedeuten, die der Bedingung (14) genügen, so ergibt sich aus den obigen Betrachtungen, daß bei $\lambda = \left[\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\mu\right]$ der Ausdruck R sowohl für $|r| = 1$, wie auch für $|r| > 1$ den Limes 0 hat, wenn die ganze positive Zahl μ über alle Grenzen wächst. Dasselbe gilt a fortiori von der rechten Seite der Formel (10).

Um zu einem Widerspruch zu gelangen, bleibt es noch übrig zu zeigen, daß unter denselben Voraussetzungen über die Zahl $a = \frac{s}{r}$ und bei $\lambda = \left[\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\mu\right]$ die linke Seite von (10), d. h. die ganze Zahl

$$(15) \qquad \frac{r^\nu \varrho^\lambda}{a^{\mu(\lambda - 1)}} \left(AF(0) + BF(\alpha)\right)$$

für genügend große ganze Werte von μ von Null verschieden ist. Es wird offenbar das Nichtverschwinden von (15) bewiesen, wenn dasselbe von der Summe

$$(16)\qquad \begin{aligned} r^{\frac{n(n-1)}{2}}\varrho^{\lambda}(AF(0)+BF(\alpha)) &= B(f_{\mu}(\alpha) \quad + \cdots + f_{\lambda}(\alpha))\, r^{\frac{n(n-1)}{2}}\varrho^{\lambda} \\ &+ B(f_{\lambda+1}(\alpha) + \cdots + f_n(\alpha))\, r^{\frac{n(n-1)}{2}}\varrho^{\lambda} \\ &+ A(f_{\lambda}(0) \quad + \cdots + f_n(0))\, r^{\frac{n(n-1)}{2}}\varrho^{\lambda} \end{aligned}$$

festgestellt werden kann; denn diese Summe geht durch Multiplikation mit der ganzen Zahl $s^{\mu(\lambda-1)}$ aus (15) hervor. Ich betrachte zunächst den ersten Bestandteil der Summe (16):

$$(17)\qquad B(f_{\mu}(\alpha) + \cdots + f_{\lambda}(\alpha))\, r^{\frac{n(n-1)}{2}}\varrho^{\lambda}.$$

Es bedeute p eine in s aufgehende Primzahl (eine solche existiert, da $|s| > 1$ ist). Es sei ferner

t der	Exponent	von	p in s,		$(t \geqq 1)$
u „	„	„	p in σ,		$(u \geqq 0)$
v „	„	„	p in ϱ,		$(v \geqq 0)$
w „	„	„	p in B.		$(w \geqq 0)$

Das allgemeine Glied von (17) ist die ganze Zahl

$$(18)\qquad \begin{aligned} & B r^{\frac{n(n-1)}{2}}\varrho^{\lambda} f_k(\alpha) \\ &= B r^{\frac{n(n-1)}{2}}\varrho^{\lambda}\alpha^{n-k}(a^k-1)\cdots(a^{k-\mu+1}-1)\, a^{\frac{k(k-1)}{2}+k(\lambda-k)+\frac{\mu(\mu-1)}{2}} \\ &= B r^{\omega}\varrho^{k-\mu}\sigma^{n-k}(s^k-r^k)\cdots(s^{k-\mu+1}-r^{k-\mu+1})\, s^{\frac{k(k-1)}{2}+k(\lambda-k)+\frac{\mu(\mu-1)}{2}}. ^{*)} \end{aligned}$$

Da s und r teilerfremd sind, so geht die Primzahl p in die Zahl (18) genau

$$(19)\qquad \left(\frac{k(k-1)}{2} + k(\lambda-k) + \frac{\mu(\mu-1)}{2}\right)t + (n-k)u + (k-\mu)v + w$$

mal auf. k bedeutet hierbei eine Zahl der Reihe $\mu, \mu+1, \cdots, \lambda$. Wenn μ groß genug vorausgesetzt wird, so ist der kleinste Wert des Exponenten (19) derjenige, der dem Werte $k = \mu$ entspricht. Dieser kleinste Exponent ist also $\mu(\lambda-1)t + \lambda u + w$. In der Tat ist für $\mu < k \leqq \lambda$ die Ungleichung

$$\left(\frac{k(k-1)}{2} + k(\lambda-k) + \frac{\mu(\mu-1)}{2}\right)t + (n-k)u + (k-\mu)v + w > \mu(\lambda-1)t + \lambda u + w$$

---

*) Der Exponent von r ist $\omega = \frac{n(n-1)}{2} - \frac{k(k-1)}{2} - k(n-k)$, also eine positive ganze Zahl für $\mu \leqq k \leqq \lambda$.

äquivalent mit der Ungleichung

$$(k-\mu)\left(\frac{1}{2}(\lambda-\mu)t+\frac{1}{2}(\lambda-k-1)t-u+v\right)>0,$$

welche sicher erfüllt ist für alle genügend großen Werte von μ, da $k>\mu$ und $\lim(\lambda-\mu)=\infty$. Alle Glieder der Summe (17) sind also ganze durch p teilbare Zahlen und das erste Glied enthält p in der niedrigsten Potenz, deren Exponent gleich $\mu(\lambda-1)t+\lambda u+w$ ist.

Ferner sind nach Punkt 3. und 5. des § 3 die Polynome

$$f_{\lambda+1}(\alpha)+\cdots+f_n(\alpha) \quad \text{und} \quad f_\lambda(0)+\cdots+f_n(0)$$

algebraisch durch $a^{\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}+\frac{\mu(\mu-1)}{2}}$ teilbar. Folglich stellen die letzten zwei Teilsummen von (16), d. h.

$$B(f_{\lambda+1}(\alpha)+\cdots+f_n(\alpha))\,r^{\frac{n(n-1)}{2}}\,\varrho^\lambda$$

und

$$A(f_\lambda(0)\quad+\cdots+f_n(0))\,r^{\frac{n(n-1)}{2}}\,\varrho^\lambda,$$

ganze Zahlen dar, die durch $s^{\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}+\frac{\mu(\mu-1)}{2}}$, also auch durch $p^{t\left(\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}+\frac{\mu(\mu-1)}{2}\right)}$ teilbar sind. Für genügend große Werte von μ ist der Exponent $\left(\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}+\frac{\mu(\mu-1)}{2}\right)t$ größer als $\mu(\lambda-1)t+\lambda u+w$; denn die Ungleichung

$$\left(\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}+\frac{\mu(\mu-1)}{2}\right)t>\mu(\lambda-1)t+\lambda u+w$$

ist äquivalent mit $\quad \frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\mu-1)}{2}t>\lambda u+w,$

deren Richtigkeit (natürlich für genügend große μ) leicht bestätigt werden kann.

Aus den letzten Betrachtungen geht hervor, daß für genügend große Werte von μ (16) eine endliche Summe ganzer Zahlen darstellt, die alle durch die Primzahlpotenz $p^{\mu(\lambda-1)t+\lambda u+w}$ teilbar sind; das erste Glied dieser Summe kann nicht eine höhere Potenz von p enthalten, während alle übrigen Glieder durch höhere Potenzen von p teilbar sind. Infolgedessen muß die Summe (16) einen von Null verschiedenen (ganzen) Wert haben. Dasselbe gilt natürlich auch von der Summe (15), d. h., von der linken Seite von (10). Damit ist bewiesen, daß die Gleichung (10) unmöglich ist, da die rechte Seite dieser Gleichung, wie am Anfang dieses Paragraphen festgestellt war, für $\mu\to\infty$ beliebig klein gemacht werden kann. Daraus folgt die Unzulässigkeit der Annahme, daß $\Phi(\alpha, a)$ rational ist, d. h., die Richtigkeit von Satz I.

Alle Ergebnisse dieser Arbeit und die Beweisführung selbst bleiben mutatis mutandis in Kraft, wenn man den Betrachtungen einen bestimmten imaginären quadratischen Zahlkörper zugrunde legt und unter „ganze" oder „rationale" Zahlen ganze bzw. rationale Zahlen des Körpers versteht, *vorausgesetzt, daß in diesem Körper der Satz von der eindeutigen Zerlegbarkeit in Primzahlfaktoren gilt.* Hierbei ist es notwendig anzunehmen, daß der Körper imaginär ist, da nur in diesem Falle eine von Null verschiedene ganze Zahl des Körpers absolut stets $\geqq 1$ ist, worauf sich der Beweis von der Unmöglichkeit der Formel (10) wesentlich stützt.

Der Satz I. und seine Folgerungen bleiben also bestehen, wenn man unter $a = \frac{s}{r}$, $\alpha = \frac{\sigma}{\varrho}$ z. B. rationale *komplexe* Zahlen oder rationale Zahlen des Körpers der dritten Einheitswurzeln versteht. Natürlich ist dabei im Wortlaute des Satzes unter „irrationale" Zahl eine Zahl zu verstehen, die dem Körper *nicht* angehört.

Sofia, den 2. Mai 1918.