

Über die periodischen Bahnen vom Hildatypus.

Von *W. Dziwulski.*

Im Bd. 160 pag. 385 der Astr. Nachr. sind von Prof. Schwarzschild die Bewegungen der kleinen Planeten in der Nähe einer Kommensurabilitätsstelle und zwar insbesondere die Bewegungen vom Hekubatypus studiert worden. Hierbei sind zwei Wege eingeschlagen, die sich gegenseitig kontrollieren; der eine Weg besteht in der direkten Integration der Bewegungsgleichungen, der zweite beruht auf mechanischer Quadratur. Es war wünschenswert, dieselben Methoden auch zur Untersuchung der Bewegungen der Planeten vom Hildatypus zu verwenden. Dies ist im folgenden ausgeführt. Für die Methode der mechanischen Quadratur konnten dabei

Rechnungen benutzt werden, die früher von dem Rechner der Göttinger Sternwarte Herrn *E. Jastram* ausgeführt waren und nur noch geringer Vervollständigung bedurften.

Wenn man die Jupiterbahn kreisförmig annimmt und den kleinen Planeten in derselben Ebene laufen läßt, so bekommt man die Bewegungsgleichungen in der Form:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \lambda} & \frac{d\lambda}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial L} \\ \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \gamma} & \frac{d\gamma}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial G} \end{aligned}$$

wo

$$F = \frac{k^4}{2L^2} + n'L - n'G + F'$$

$$F' = k^2 m' \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + a'^2 - 2a'r \cos(\nu - A')}} - \frac{r}{a'^2} \cos(\nu - A') \right) = k^2 m' \sum_{ii'} C_{ii'} \cos(i\lambda + i'\gamma)$$

ist, und die Zeichen dieselbe Bedeutung haben, wie im Bd. 160.

Wir setzen allgemein in der Nachbarschaft der Kommensurabilität:

$$Np - N'q = 0$$

wo N und N' gemäß den Ausdrücken:

$$\lambda = Nt + \lambda_0 \quad \gamma = N't + \gamma_0$$

die mittleren Bewegungen von λ und γ sind. Wenn man jetzt die kritischen Glieder, für welche

$$iN + i'N' = 0$$

ist, aus der Störungsfunktion herausnimmt und

$$i = sp \quad i' = -sq$$

setzt, so wird

$$\begin{array}{ll} L = L_0 + & \text{rein periodische Funktion der Zeit von der Periode } \frac{2\pi}{N} \\ G = G_0 + & \text{» » » » » » » » } \\ \lambda = \lambda_0 + Pt + & \text{» » » » » » » » } \\ \gamma = N't + & \text{» » » » » » » » } \end{array}$$

wo

$$N' = n' - k^2 m' \sum \frac{\partial D_s}{\partial G} \cos s\zeta_0 \text{ mit der mittleren Bewegung von } \gamma \text{ übereinstimmt}$$

und

$$P = \frac{k^4}{L_0^3} - n' - k^2 m' \sum \frac{\partial D_s}{\partial L} \cos s\zeta_0 \text{ gesetzt ist.}$$

Führt man noch die durch die Bedingung:

$$2P = N' = n' - k^2 m' \sum \frac{\partial D_s}{\partial G} \cos s\zeta_0 = 2 \left(\frac{k^4}{L_0^3} - n' - k^2 m' \sum \frac{\partial D_s}{\partial L} \cos s\zeta_0 \right)$$

$$i\lambda + i'\gamma = s(p\lambda - q\gamma) = s(p\lambda_0 - q\gamma_0) = s\zeta_0$$

wenn $p\lambda_0 - q\gamma_0 = \zeta_0$ gesetzt wird. Setzt man noch für diese Glieder den Koeffizienten

$$C_{ii'} = C_{sp, -sq} = D_s$$

so lautet der konstante Teil der Störungsfunktion:

$$R = k^2 m' \sum D_s \cos s\zeta_0.$$

Im Falle der Hilda, auf den wir uns von jetzt an beschränken, ist speziell: $N' = 2N$, $p = 2$, $q = 1$. Behält man bei der Integration der Differentialgleichungen nur die ersten Potenzen von m' bei und geht man von symmetrischen Konjunktionen oder Oppositionen aus, so kommt man auf Ausdrücke von der Form:

geforderte Spezialisierung der Ausgangslage des Planeten ein, so wird die ganze Bewegung periodisch von der Periode des doppelten Jupiterumlaufs.

Geht man von den kanonischen Elementen zu den gewöhnlichen zurück, gemäß den Beziehungen:

$$L_0 = k \sqrt{a_0} \quad G_0 = k \sqrt{a_0} (1 - \sqrt{1 - e_0^2}) \quad n_0 = \frac{k^4}{L_0^3} = \frac{k}{a_0^{3/2}}$$

so erhält man für letztere:

$$\begin{aligned} a &= a_0 + \text{period. Funktion} & A &= (n_0 + g)t + \text{period. Funktion} \\ e &= e_0 + \text{»} & \varpi &= ft + \text{»} \end{aligned}$$

wo

$$g = -k^2 m' \sum \frac{\partial D_s}{\partial L} \cos s \zeta_0 = -\frac{\partial R}{\partial L} \quad f = k^2 m' \sum \frac{\partial D_s}{\partial G} \cos s \zeta_0 = \frac{\partial R}{\partial G} \quad (\zeta_0 = 0 \text{ oder } \pi) \text{ ist.}$$

Die Relation $2P = N'$ nimmt dabei die Gestalt an:

$$2n_0 - 3n' + f + 2g = 0.$$

Für die numerische Berechnung des kritischen Teiles der Störungsfunktion wurde wieder die Leverriersche Entwicklung benutzt.

Es wird:

$$R = \frac{k^2 m'}{a'} \cdot S$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} A^0 + \left(\frac{e}{2}\right)^2 (A_1^0 + A_2^0) + 3 \left(\frac{e}{2}\right)^4 (A_3^0 + A_4^0) + 10 \left(\frac{e}{2}\right)^6 (A_5^0 + A_6^0) \\ &+ \cos \zeta \left[(-6A^3 - A_1^3) \left(\frac{e}{2}\right) + (66A^3 + 9A_1^3 - 8A_2^3 - 3A_3^3) \left(\frac{e}{2}\right)^3 \right. \\ &\quad \left. + \left(-178A^3 - \frac{125}{3} A_1^3 + \frac{152}{3} A_2^3 + 18A_3^3 - 20A_4^3 - 10A_5^3 \right) \left(\frac{e}{2}\right)^5 \right] \\ &+ \cos 2\zeta \left[(57A^6 + 11A_1^6 + A_2^6) \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(-1658A^6 - \frac{994}{3} A_1^6 + 14A_2^6 + 24A_3^6 + 4A_4^6 \right) \left(\frac{e}{2}\right)^4 \right. \\ &\quad \left. + \left(16234A^6 + 3866A_1^6 - \frac{1370}{3} A_2^6 - 517A_3^6 - 375A_4^6 + 65A_5^6 + 15A_6^6 \right) \left(\frac{e}{2}\right)^6 \right] \\ &+ \cos 3\zeta \left[(-606A^9 - 123A_1^9 - 16A_2^9 - A_3^9) \left(\frac{e}{2}\right)^3 + (29682A^9 + 6303A_1^9 + 516A_2^9 - 144A_3^9 - 50A_4^9 - 5A_5^9) \left(\frac{e}{2}\right)^5 \right] \\ &+ \cos 4\zeta \left[\left(6799A^{12} + \frac{4234}{3} A_1^{12} + 214A_2^{12} + 21A_3^{12} + A_4^{12} \right) \left(\frac{e}{2}\right)^4 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{2358908}{5} A^{12} - \frac{511918}{5} A_1^{12} - \frac{39634}{3} A_2^{12} + 160A_3^{12} + 456A_4^{12} + 86A_5^{12} + 6A_6^{12} \right) \left(\frac{e}{2}\right)^6 \right] \\ &+ \cos 5\zeta \left[\left(-78068A^{15} - \frac{49510}{3} A_1^{15} - \frac{8180}{3} A_2^{15} - 330A_3^{15} - 26A_4^{15} - A_5^{15} \right) \left(\frac{e}{2}\right)^5 \right] \\ &+ \cos 6\zeta \left[\left(\frac{4580508}{5} A^{18} + \frac{978228}{5} A_1^{18} + 34152A_2^{18} + 4677A_3^{18} + 471A_4^{18} + 31A_5^{18} + A_6^{18} \right) \left(\frac{e}{2}\right)^6 \right]. \end{aligned}$$

(In Leverriers Bezeichnung ist $\zeta = 3l' - 2\lambda - \varpi$).

Für den Differentialquotienten von R nach a erhält man (bis auf die vierten Potenzen der Exzentrizität):

$$\begin{aligned} a \frac{dS}{da} &= \frac{1}{2} A_1^0 + (A_1^0 + 4A_2^0 + 3A_3^0) \left(\frac{e}{2}\right)^2 + 3(3A_3^0 + 8A_4^0 + 5A_5^0) \left(\frac{e}{2}\right)^4 \\ &+ \cos \zeta \left[(-7A_1^3 - 2A_2^3) \left(\frac{e}{2}\right) + (75A_1^3 + 2A_2^3 - 33A_3^3 - 12A_4^3) \left(\frac{e}{2}\right)^3 \right] \\ &+ \cos 2\zeta \left[(68A_1^6 + 24A_2^6 + 3A_3^6) \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(-\frac{5978}{3} A_1^6 - \frac{1904}{3} A_2^6 + 114A_3^6 + 112A_4^6 + 20A_5^6 \right) \left(\frac{e}{2}\right)^4 \right] \\ &+ \cos 3\zeta \left[(-729A_1^9 - 278A_2^9 - 51A_3^9 - 4A_4^9) \left(\frac{e}{2}\right)^3 \right] \\ &+ \cos 4\zeta \left[\left(\frac{24571}{3} A_1^{12} + \frac{9752}{3} A_2^{12} + 705A_3^{12} + 88A_4^{12} + 5A_5^{12} \right) \left(\frac{e}{2}\right)^4 \right]. \end{aligned}$$

Nunmehr kann man f , g und die Stabilitätskoeffizienten:

$$A = \frac{\partial^2 R}{\partial \zeta^2} \quad \text{und} \quad 2C + \frac{1}{2}B = 3 \frac{k^4}{L_0^4} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 R}{\partial G^2} - \frac{\partial^2 R}{\partial L \partial G}$$

in Reihen entwickeln. Herr Prof. Schwarzschild hat gezeigt, daß gleichem Vorzeichen dieser Koeffizienten eine stabile, verschiedenen aber eine instabile Lösung entspricht. Für die Kommensurabilitätsstelle hat man:

$$\frac{n_0}{n'} = \frac{3}{2} = \left(\frac{a'}{a_0}\right)^{3/2} \quad \frac{a_0}{a'} = \alpha = 0.763143.$$

Die Berechnung der A -Koeffizienten erfolgte zum Teil mit Hilfe der Tafeln von Runcle, zum Teil nach Leverrier'schen Formeln. Man bekommt:

$$S = \frac{1}{2}A^0 + 1.152803e^2 + 4.366848e^4 + 24.84389e^6 + \cos \zeta [-2.025225e - 1.100902e^3 - 18.95855e^5] \\ + \cos 2\zeta [5.332186e^2 - 13.38896e^4 - 34.97202e^6] + \cos 3\zeta [-17.32741e^3 + 106.6627e^5] \\ + \cos 4\zeta [61.83773e^4 - 620.1829e^6] + \cos 5\zeta [-232.8038e^5] + \cos 6\zeta [907.6387e^6].$$

$$\frac{dS}{da} = 0.764521 + 8.516034e^2 + 68.93890e^4 - \cos \zeta [9.320982e + 38.89170e^3] \\ + \cos 2\zeta [42.31575e^2 - 1.20813e^4] - \cos 3\zeta [192.8354e^3] + \cos 4\zeta [881.7695e^4].$$

Indem man jetzt die Werte $n' = 299.128$ und $m' = \frac{1}{1047.355}$ einsetzt und nach Potenzen von e entwickelt, erhält man:

$$f = \mp 0.661799 \frac{1}{e} + 4.23830 \mp 17.73504 e + 66.9168 e^2 \mp 228.0437 e^3 + 509.2300 e^4 \\ g = -0.499658 \pm 5.760886 e - 31.10223 e^2 \pm 142.5793 e^3 - 542.0387 e^4$$

wo das obere Zeichen denjenigen periodischen Lösungen, für welche $\zeta = 0$ ist, das untere denjenigen, für welche $\zeta = \pi$ ist, entspricht. Für die Stabilitätskoeffizienten ergibt sich:

$$\frac{a'}{k^2 m'} A = \pm 2.025225 - 21.32874 e^2 \pm 157.0476 e^3 - 935.8478 e^4 \pm 4879.088 e^5 - 22612.179 e^6 \\ (2C + \frac{1}{2}B)k\sqrt{a} = \pm 0.16540 \frac{1}{e^3} \pm 2.15500 \frac{1}{e} + 1312.472 \pm 265.359 e - 1651.62 e^2.$$

Im Falle $\zeta = 0$ wird $2C + \frac{1}{2}B$ positiv und A wird solange $e < 0.14837$ positiv. Es werden also in diesem Bereiche die Lösungen stabil. Wenn man nur die vierte Potenz der Exzentrizität berücksichtigt, so erhält man für das positive A die Grenze $e < 0.124$. Man überzeugt sich leicht, daß die Entwicklungen für den Hildatypus nicht so rasch konvergieren, wie für den Hekubatypus. Auf Grund dieser Überlegungen kann man aber erwarten, daß bei weiterer Entwicklung (also 7., 8. u. s. w. Potenz der Exzentrizität) auch die obere Grenze für das positive A wachsen wird.

Für $\zeta = \pi$ ist A negativ. $2C + \frac{1}{2}B$ ist ebenfalls für kleine Werte von e negativ und geht ins positive über, sobald $e > 0.0509$ wird. Deswegen sind die Lösungen stabil, solange $e < 0.0509$ ist.

Die zweite Methode zur Berechnung des kritischen Teiles der Störungsfunktion benutzt die Tisserandschen Formeln (Méc. céle. I p. 433). Wie schon erwähnt, waren die numerischen Rechnungen für den Hildatypus nach dieser Methode von Herrn Jastram fast bis zu Ende durchgeführt. Die folgende Tafel stellt die Resultate nach beiden Methoden zusammen.

e_0	Perihelbewegung f		Störung d. mittl. Bewegung g		$n_0 = k a_0^{-3/2}$		$\log \delta_1$	N
	I	II	I	II	I	II		

$\zeta = 0.$								
0.01	-62.1125		-0.4451		480.1933		9.1118	480.044
0.02	-29.1813		-0.3959		463.6786		8.7989	463.190
0.03	-18.2994		-0.3515		458.1932		8.6014	456.940
0.04	-12.9223	-12.9208	-0.3113	-0.3117	455.4644	455.4641	8.4530	453.280
0.05	-9.7424		-0.2751		453.8383		8.3318	450.456
0.06	-7.6575		-0.2422		452.7630		8.2282	447.920
0.07	-6.1956		-0.2129		452.0027		8.1369	445.390
0.08	-5.1206	-5.1162	-0.1870	-0.1839	451.4393	451.4340	8.0548	442.820
0.09	-4.3020		-0.1647		451.0077		7.9795	440.160
0.10	-3.6611		-0.1462		450.6688		7.9097	437.420
0.11	-3.1482		-0.1319		450.3980		7.8445	434.390
0.12	-2.7298	-2.7246	-0.1223	-0.0936	450.1792	450.1479	7.7827	431.210

e_0	Perihelbewegung f		Störung d. mittl. Bewegung g		$n_0 = k a_0^{-3/2}$		$\log \delta_1$	N
	I	II	I	II	I	II		
0.13	— 2.3828		— 0.1180		450.0014		7.7239	427.860
0.14	— 2.0902		— 0.1198		449.8569		7.6671	424.300
0.15	— 1.8402		— 0.1286		449.7407		7.6119	420.570
0.16	— 1.6228	— 1.6378	— 0.1454	— 0.0277	449.6488	449.5386	7.5574	416.610
0.17	— 1.4308		— 0.1715		449.5789		7.5028	412.480
0.18	— 1.2579		— 0.2079		449.5288		7.4469	408.227
0.19	— 1.0995		— 0.2564		449.4981		7.3885	403.782
0.20	— 0.9505	— 1.0450	— 0.3183	+ 0.0222	449.4855	449.1923	7.3252	399.118

 $\zeta = \pi.$

0.01	+ 70.6025		— 0.5605		414.4512		9.2314n	414.327
0.02	+ 37.7117		— 0.6285		430.4646		8.9425n	430.000
0.03	+ 26.8972		— 0.7047		435.9481		8.7903n	434.760
0.04	+ 21.6157	+ 21.6160	— 0.7903	— 0.7912	438.6744	438.6752	8.6926n	436.580
0.05	+ 18.5602		— 0.8867		440.2986		8.6248n	437.020
0.06	+ 16.6291		— 0.9952		441.3726		8.5761n	436.650
0.07	+ 15.3524		— 1.1173		442.1331		8.5406n	435.660
0.08	+ 14.4954	+ 14.5127	— 1.2548	— 1.2668	442.6991	442.7025	8.5151n	434.250
0.09	+ 13.9294		— 1.4097		443.1370		8.4974n	432.470
0.10	+ 13.5779		— 1.5836		443.4866		8.4860n	430.450
0.11	+ 13.3934		— 1.7789		443.7742		8.4797n	428.000
0.12	+ 13.3446	+ 13.4667	— 1.9977	— 2.1043	444.0174	444.0630	8.4779n	425.300
0.13	+ 13.4120		— 2.2422		444.2282		8.4799n	422.380
0.14	+ 13.5812		— 2.5152		444.4161		8.4852n	419.160
0.15	+ 13.8436		— 2.8192		444.5894		8.4933n	415.760
0.16	+ 14.1930	+ 14.6334	— 3.1568	— 3.6960	444.7523	445.0714	8.5039n	412.080
0.17	+ 14.6258		— 3.5311		444.9102		8.5168n	408.190
0.18	+ 15.1399		— 3.9449		445.0670		8.5317n	404.173
0.19	+ 15.7347		— 4.4014		445.2260		8.5483n	399.945
0.20	+ 16.4101	+ 17.7647	— 4.9039	— 7.0734	445.3908	446.8830	8.5664n	395.473

Man sieht, daß die nach den beiden Methoden erhaltenen Werte bis $e_0 = 0.12$ ganz gut übereinstimmen. Für $e_0 = 0.16$ ist die Abweichung schon ziemlich groß, und endlich für $e_0 = 0.20$ ist schon der Sinn zum Teil verschieden. Es zeigt sich also, daß für größere Werte der Exzentrizität auch die Entwicklung bis zur 6. Potenz der Exzentrizität noch ungenügend ist.

Die Spalte $\log \delta_1$ gibt den Wert

$$\delta_1 = -\frac{f}{n_0}$$

den man mit dem von Prof. Brendel in seiner »Theorie der kleinen Planeten« I, p. 132 vergleichen kann. Die Übereinstimmung der numerischen Werte ist ziemlich gut.

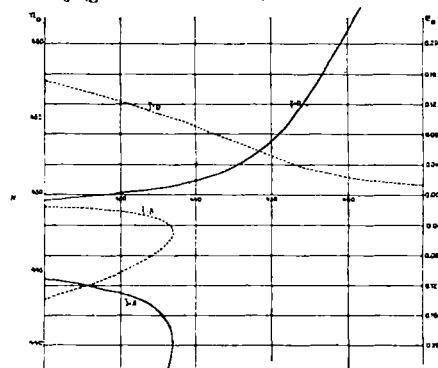
Wenn man, nach dem Vorschlage von Herrn Prof. Schwarzschild, die Größe:

$$N = \frac{k^4}{(L + 2G)^3} = \frac{n_0}{(3 - 2\sqrt{1 - e^2})^3}$$

als Abszisse nimmt, so kann man als Ordinate ein anderes Bestimmungsstück der periodischen Lösungen nehmen. Dann geben die Kurven dort Verzweigungen, wo sich der Stabilitätscharakter ändert. Es sind in der Figur die Kurven für n_0 und e_0 als Funktionen von N dargestellt.

Göttingen, Sternwarte, 1909 Sept. 25.

Darstellung von $n_0 = k a_0^{-3/2}$ (ausgezogene Kurven) und von e_0 (gestrichelte Kurve) als Funktion von N



In dem Falle des Hildatypus ergibt sich ein Verzweigungspunkt in der Nähe von 437.020 (für N), was für e_0 dem Werte 0.05 entspricht; und es zeigte sich früher, daß beinahe für diesen Wert der Exzentrizität sich der Stabilitätscharakter ändert.

Die Änderung des Stabilitätscharakters im Falle $\zeta = 0$, die der Exzentrizität $e_0 = 0.148$ entsprach, hängt, wie erwähnt, von der ungenügenden Konvergenz der Reihe ab, wenn man nur die 6. Potenz der Exzentrizität mitnimmt. Nach der graphischen Methode findet auch keine derartige Änderung statt.

W. Dziwulski.