Über wiederholbare Funktionen.

Von

Rudolf Schauffler in Berlin-Wilmersdorf.

Die Funktion $f(x)$ sei

$$(\mathrm{V}_1) \qquad \text{stetig für } a \leqq x \leqq b \quad (\text{wobei } a < b)$$

und es sei

$$(\mathrm{V}_2) \qquad a \leqq f(x) \leqq b \quad \text{für} \quad a \leqq x \leqq b.$$

Ferner werde gesetzt:

$$f_0(x) = x, \qquad f_n(x) = f(f_{n-1}(x)) \quad \text{für} \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Durch die Voraussetzung (V_2) ist die Existenz der Funktionen $f_n(x)$ $(n = 2, 3, 4, \ldots)$ für $a \leqq x \leqq b$ gewährleistet. Wir bezeichnen eine Funktion dann und nur dann als *für* $a \leqq x \leqq b$ *wiederholbar*, wenn sie (V_2) erfüllt.

Wir bezeichnen als *Fixstellen* von $f(x)$ die Wurzeln der Gleichung $f(x) = x$; $f(x)$ hat unter den Voraussetzungen (V_1) und (V_2) für $a \leqq x \leqq b$ mindestens eine Fixstelle. Wir nehmen an,

(V_3) $f(x)$ habe für $a \leqq x \leqq b$ nur *eine* Fixstelle, und zwar die Stelle $x = c$,

es sei also

$$f(c) = c, \qquad f(x) \neq x \quad \text{für} \quad x \neq c, \qquad a \leqq x \leqq b.$$

Unter diesen Voraussetzungen habe ich in einer früheren Arbeit[1]) eine einfache hinreichende *Bedingung für die Existenz der Grenzfunktion* $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$ mitgeteilt[2]).

Diesmal möchte ich die notwendige und hinreichende Konvergenzbedingung aufstellen und ein Maß für die Konvergenz angeben. Auch diese erschöpfende Konvergenzbedingung ist sehr einfacher Art.

---

[1]) Über wiederholte Funktionen, Math. Ann. 78 (1917), S. 52–62. Kenntnis dieser Abhandlung wird hier nicht vorausgesetzt.

[2]) A. a. O., S. 53 unter „Satz II".

Zunächst seien noch einige Bezeichnungen vorausgeschickt.

ε sei eine beliebige positive Zahl; dann gibt es wegen (V_1) und (V_3) eine positive Zahl δ derart, daß

$$(1) \qquad |f(x) - c| \leqq \varepsilon \quad \text{für} \quad 0 \leqq |x - c| \leqq \delta \leqq \varepsilon, \qquad a \leqq x \leqq b.$$

Wir wollen annehmen, daß δ nicht größer sei als die größere der beiden Zahlen $c - a$ und $b - c$ bzw. deren gemeinsamer Wert. Alsdann bezeichnen wir das Minimum von $|f(x) - x|$ für $|x - c| \geqq \delta$, $a \leqq x \leqq b$ mit η_1, das Minimum von $|f_2(x) - x|$ für $|x - c| \geqq \delta$, $a \leqq x \leqq b$ mit η_2 und die kleinere der beiden Zahlen η_1 und η_2 bzw. deren gemeinsamen Wert mit η; so wird:

$$(2) \qquad |f(x) - x| \geqq \eta \quad \text{für} \quad |x - c| \geqq \delta, \qquad a \leqq x \leqq b$$

und

$$(3) \qquad |f_2(x) - x| \geqq \eta \quad \text{für} \quad |x - c| \geqq \delta, \qquad a \leqq x \leqq b.$$

Nun lautet unser Konvergenztheorem wie folgt:

Lehrsatz. *Ist* $f(x)$ *für* $a \leqq x \leqq b$

(V_1) *stetig,*

(V_2) *wiederholbar und*

(V_3) *nur mit der einen Fixstelle* $x = c$ *behaftet,*

so ist dafür, daß die Grenzfunktion $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$ *für* $a \leqq x \leqq b$ *existiere, die folgende Bedingung hinreichend und notwendig:*

(V_4) *Auch* $f_2(x)$ *habe für* $a \leqq x \leqq b$ *nur die eine Fixstelle* $x = c$.

Unter den Voraussetzungen (V_1) *bis* (V_4) *konvergiert die Folge*

$$(\mathfrak{F}) \qquad f_0(x),\ f_1(x),\ f_2(x), \ldots$$

für $a \leqq x \leqq b$ *gleichmäßig gegen den Wert* c, *und es ist*

$$(4) \qquad |f_n(x) - c| \leqq \varepsilon \quad \textit{für} \quad a \leqq x \leqq b, \qquad n \geqq \frac{b - a - \delta}{\eta} + 1.$$

Beweis. I. (V_4) *ist hinreichende Bedingung.*

Die Voraussetzungen (V_1) bis (V_4) seien erfüllt.

Ist $a < c$, so ist nach (V_2) und (V_3): $f(a) > a$; hieraus folgt wegen (V_1) und (V_3):

$$(5) \qquad f(x) > x \quad \text{für} \quad a \leqq x < c;$$

analog wird

$$(6) \qquad f(x) < x \quad \text{für} \quad c < x \leqq b.$$

Aus (V_1), (V_2) und (V_4) folgen entsprechende Ungleichungen für die Funktion $f_2(x)$, nämlich:

$$(7) \qquad f_2(x) > x \quad \text{für} \quad a \leqq x < c,$$

$$(8) \qquad f_2(x) < x \quad \text{für} \quad c < x \leqq b.$$

(V_1) und (V_3) geben $\eta_1 > 0$, (V_1) und (V_4) geben $\eta_2 > 0$, also ist

$$\eta > 0. \tag{9}$$

Wir greifen nun einen beliebigen Argumentwert x heraus (wo $a \leqq x \leqq b$) und zerlegen die Zahlfolge

$$f_0(x),\ f_1(x),\ f_2(x), \ldots \tag{$\mathfrak{F}$}$$

in die drei Folgen:

$$u_0,\ u_1,\ u_2, \ldots, \tag{$\mathfrak{U}$}$$

$$v_0,\ v_1,\ v_2, \ldots, \tag{$\mathfrak{V}$}$$

$$w_0,\ w_1,\ w_2, \ldots. \tag{$\mathfrak{W}$}$$

$(\mathfrak{U})$ enthalte alle Glieder von $(\mathfrak{F})$, die $< c$ sind, $(\mathfrak{V})$ alle Glieder, die $> c$ sind, und $(\mathfrak{W})$ alle Glieder, die $= c$ sind, und zwar jeweils in derselben Reihenfolge wie in $(\mathfrak{F})$.

Ist $x = c$, so sind die Folgen $(\mathfrak{U})$ und $(\mathfrak{V})$ beide leer, alle Glieder von $(\mathfrak{F})$ haben den Wert c und Ungleichung (4) ist gesichert.

Wir nehmen jetzt an, es sei $x \neq c$, so sind $(\mathfrak{U})$ und $(\mathfrak{V})$ nicht beide leer. Wir wollen überdies annehmen, $(\mathfrak{U})$ besitze zum mindesten die beiden Glieder u_0 und u_1. Dann ist $f(u_0) \neq c$.

Es sei zunächst $f(u_0) < c$, so wird $u_1 = f(u_0)$, also gemäß (5): $u_1 > u_0$. Ist überdies $u_0 \leqq c - \delta$, so ist nach (2): $u_1 - u_0 \geqq \eta$. Ist $u_1 \leqq c - \delta$, so gilt die Ungleichung $u_1 - u_0 \geqq \eta$ um so mehr.

Nun sei andererseits $f(u_0) > c$. In diesem Falle gehört $f(u_0)$ zu $(\mathfrak{V})$. Es sei etwa $f(u_0) = v_i$, so muß es, da wir Existenz von u_1 voraussetzen, einen Index $j \geqq i$ geben, für welchen

$$f(v_j) = u_1 \tag{10}$$

ist. Ist $j > i$, so wird nach (6)

$$v_\nu - v_{\nu-1} = f(v_{\nu-1}) - v_{\nu-1} < 0 \quad \text{für} \quad i+1 \leqq \nu \leqq j,$$

also

$$v_j - v_i = \sum_{\nu=i+1}^{j} (v_\nu - v_{\nu-1}) < 0;$$

nimmt man den Fall $j = i$ hinzu, so erhält man:

$$c < v_j \leqq v_i. \tag{11}$$

Nun ist $f(u_0) = v_i$, $f(c) = c$, also gibt es wegen (V_1) und (11) eine Zahl ξ, für welche

$$u_0 \leqq \xi < c, \qquad f(\xi) = v_j \tag{12}$$

ist. (7), (10) und (12) ergeben:

$$u_1 = f_2(\xi) > \xi \geqq u_0. \tag{13}$$

oder $u_1 > u_0$, wie in dem zuerst betrachteten Falle $f(u_0) < c$. Ist überdies $u_1 \leqq c - \delta$, so ist nach (13): $\xi < c - \delta$, also wegen (3): $f_2(\xi) \geqq \xi + \eta$, und es wird wieder wie im Falle $f(u_0) < c$: $u_1 - u_0 \geqq \eta$.

Dieselbe Betrachtung wie für u_0 und u_1 kann man für zwei beliebige aufeinanderfolgende Glieder der Folge ($\mathfrak{U}$) anstellen, und findet so:

$$(14) \qquad u_\nu - u_{\nu-1} > 0 \quad \text{für} \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

und

$$(15) \qquad u_\nu - u_{\nu-1} \geqq \eta \quad \text{für} \quad u_\nu \leqq c - \delta, \quad \nu \geqq 1.$$

Aus (14) folgt:

$$(16) \qquad u_l - u_k = \sum_{\nu=k+1}^{l} (u_\nu - u_{\nu-1}) > 0 \quad \text{für} \quad 0 \leqq k < l;$$

aus (15) folgt:

$$(17) \qquad u_l - u_0 \geqq l\eta \quad \text{für} \quad u_l \leqq c - \delta, \quad l \geqq 0.$$

Die Ungleichung (17), die unter der Voraussetzung bewiesen wurde, daß u_1 existiere, gilt für $l = 0$ auch ohne diese Voraussetzung.

Ganz analog erhält man:

$$(18) \qquad v_{\nu-1} - v_\nu > 0 \quad \text{für} \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$(19) \qquad v_{\nu-1} - v_\nu \geqq \eta \quad \text{für} \quad v_\nu \geqq c + \delta, \quad \nu \geqq 1;$$

$$(20) \qquad v_0 - v_m \geqq m\eta \quad \text{für} \quad v_m \geqq c + \delta, \quad m \geqq 0.$$

Wir nehmen nun an, es sei für einen gewissen Indexwert n:

$$(21) \qquad f_n(x) < c - \varepsilon.$$

In der Teilfolge von ($\mathfrak{F}$):

$$(\mathfrak{F}_n) \qquad f_0(x), f_1(x), \ldots, f_n(x)$$

mögen sich $q + 1$ Glieder der Folge ($\mathfrak{U}$) und $r + 1$ Glieder der Folge ($\mathfrak{B}$) befinden; Glieder von ($\mathfrak{W}$) können wegen (21) in ($\mathfrak{F}_n$) nicht vorkommen. Alsdann wird:

$$q + 1 \geqq 0, \qquad r + 1 \geqq 0,$$

und

$$(q + 1) + (r + 1) = n + 1,$$

oder

$$(22) \qquad q + r + 1 = n;$$

ferner wird wegen (21):

$$(23) \qquad u_q = f_n(x).$$

Nun sei zunächst $r + 1 > 0$. In diesem Fall enthält ($\mathfrak{F}_n$) mindestens *ein* Glied von ($\mathfrak{B}$), und v_r ist das letzte Glied von ($\mathfrak{B}$), das in ($\mathfrak{F}_n$) vor-kommt. $f(v_r)$ ist demnach eine der Zahlen $u_0, u_1, \ldots, u_q$; es sei etwa

$$(24) \qquad f(v_r) = u_p,$$

wo $0 \leqq p \leqq q$, so ist nach (1), (16), (21) und (23):

$$(25) \qquad u_p \leqq u_q < c - \varepsilon \leqq c - \delta,$$

also wegen (24): $|f(v_r) - c| > \varepsilon$; aus (1) folgt hiermit:

$$(26) \qquad v_r > c + \delta.$$

Nach (17), (20), (25) und (26) wird:

$$u_q - u_0 \geqq q\,\eta,$$
$$v_0 - v_r \geqq r\,\eta.$$

Andererseits ist aber wegen (25) und (26):

$$u_q - u_0 < c - \delta - a,$$
$$v_0 - v_r < b - c - \delta;$$

somit wird, wenn man die Ungleichung (9) berücksichtigt:

$$q < \frac{c - \delta - a}{\eta}, \qquad r < \frac{b - c - \delta}{\eta},$$

also wegen (22):

$$n < \frac{b - a - 2\delta}{\eta} + 1 < \frac{b - a - \delta}{\eta} + 1.$$

Jetzt sei $r + 1 = 0$. In diesem Falle kommt in $(\mathfrak{F}_n)$ kein Glied von $(\mathfrak{B})$ vor und man erhält:

$$q = n,$$
$$n\,\eta \leqq u_n - u_0 < c - \delta - a,$$
$$n < \frac{c - \delta - a}{\eta},$$

also um so mehr

$$n < \frac{b - a - \delta}{\eta} + 1$$

wie für $r + 1 > 0$.

Dieselbe Ungleichung erhält man durch ähnliche Betrachtungen auch für $f_n(x) > c + \varepsilon$. Es ist somit:

$$(4) \qquad |f_n(x) - c| \leqq \varepsilon \quad \text{für} \quad a \leqq x \leqq b, \quad n \geqq \frac{b - a - \delta}{\eta} + 1,$$

was zu beweisen war.

II. (V_4) *ist notwendige Bedingung.*

Die Voraussetzungen (V_1), (V_2), (V_3) seien erfüllt. Nimmt man an, $f_2(x)$ habe außer $x = c$ noch die Fixstelle $x = \alpha$, wo $a \leqq \alpha \leqq b$, so wird $f_2(\alpha) = \alpha$, und nach (V_3): $f(\alpha) \neq \alpha$, und es wird:

$$f_{2n}(\alpha) = \alpha, \quad f_{2n+1}(\alpha) = f(\alpha) \neq \alpha \quad \text{für} \quad n = 0, 1, 2, \ldots;$$

demnach divergiert die Folge

$$f_0(\alpha),\ f_1(\alpha),\ f_2(\alpha),\ \ldots .$$

Hiermit ist bewiesen, daß (V_4) für Konvergenz der Folge $(\mathfrak{F})$ im abgeschlossenen Intervall $a \leqq x \leqq b$ notwendig ist. —

Jetzt werde unsere Konvergenzbedingung der Anschaulichkeit halber noch auf eine mehr geometrische Form gebracht:

Unter Beibehaltung der Voraussetzungen (V_1), (V_2) *und* (V_3) *ist die folgende Bedingung mit* (V_4) *gleichbedeutend*:

(V_5) *Die Kurve* $y = f(x)$ *und ihre Spiegelkurve*[3]) $x = f(y)$ *haben in dem Quadrat* $a \leqq x \leqq b$, $a \leqq y \leqq b$ *nur den Punkt* $x = y = c$ *gemein.*

Beweis. Ist $f_2(\alpha) = \alpha$, wo $a \leqq \alpha \leqq b$, so ist der Punkt $x = \alpha$, $y = f(\alpha)$ ein gemeinsamer Punkt der Kurven $y = f(x)$ und $x = f(y)$, wie man durch Einsetzen erkennt. Also ist (V_4) erfüllt, sobald (V_5) erfüllt ist.

Ist andererseits $x = \beta$, $y = \gamma$ $(a \leqq \beta \leqq b)$ ein gemeinsamer Punkt der beiden Kurven, so wird $\gamma = f(\beta)$ und $\beta = f(\gamma)$, woraus folgt: $\beta = f_2(\beta)$, d. h. (V_5) ist erfüllt, sobald (V_4) erfüllt ist. Damit ist die Äquivalenz von (V_4) und (V_5) bewiesen[4]).

Zum Schlusse sei noch auf die Anwendung des Lehrsatzes auf die numerische Lösung der Gleichung $f(x) = x$ hingewiesen. Erfüllt $f(x)$ die Voraussetzungen des Lehrsatzes und ist $a \leqq x_1 \leqq b$, so konvergiert die Folge

$$x_1,\ f(x_1),\ f_2(x_1),\ f_3(x_1),\ \ldots$$

gegen die Wurzel c der Gleichung $f(x) = x$. Da die Konvergenz, wie bewiesen, gleichmäßig ist, so ist es unwesentlich, welcher Wert des Intervalles $a \leqq x \leqq b$ zum ersten Näherungswert gemacht wird.

---

[3]) $x = f(y)$ ist offenbar das Spiegelbild von $y = f(x)$ bezüglich der ersten Mediane $y = x$.

[4]) Versteht man unter G das Maximum von $f(x)$ für $a \leqq x \leqq c$, so läßt sich ferner beweisen, daß unter den Voraussetzungen des Lehrsatzes *die Kurve* $y = f(x)$ *für* $c < x \leqq G$ *oberhalb der Spiegelkurve* $x = f(y)$ verlaufen muß, wenn man sich die positive y-Halbachse nach oben gerichtet denkt.

(Eingegangen am 26. 1. 1921.)