

Über Beziehungen zwischen kubischen Raumkurven. II.*)

Von

TH. REYE in Straßburg i/E.

18. Bezüglich einer kubischen Raumkurve k^3 , d. h. bezüglich der ∞^2 durch k^3 gehenden Flächen zweiter Ordnung, ist bekanntlich einem beliebigen Punkte P ein Punkt P' konjugiert (vgl. G. d. L. II, S. 180—184).**) Er liegt mit P auf einer Bisekante b von k^3 und ist von P harmonisch getrennt durch die Schnittpunkte von k^3 und b , falls diese reell sind. Auf jeder Bisekante von k^3 bilden die Paare konjugierter Punkte eine Involution, deren Doppelpunkte auf k^3 liegen. Einem auf k^3 gelegenen Punkte sind alle Punkte seiner Tangente konjugiert.

Den Punkten einer Geraden l oder Ebene φ sind bezüglich k^3 die Punkte einer Raumkurve l^3 oder Fläche F^3 dritter Ordnung konjugiert. Es gibt also ∞^4 kubische Raumkurven l^3 , deren Punkte den Punkten je einer Geraden l konjugiert sind bezüglich k^3 . Ist l eine Unisekante von k^3 , so zerfällt l^3 in eine Tangente von k^3 und einen Kegelschnitt. Ist insbesondere l ein Schmiegungsstrahl von k^3 , so zerfällt der Kegelschnitt in die Tangente und einen Schmiegungsstrahl l' von k^3 . Den Punkten einer Schmiegungebene von k^3 sind die Punkte einer kubischen Regelfläche konjugiert, welche ∞^1 Schmiegungsstrahlen von k^3 enthält (G. d. L. II S. 184).

19. Wir nennen „autokonjugiert“ bezüglich der kubischen Raumkurve k^3 jede Kurve oder Fläche, deren Punkte paarweise konjugiert sind bezüglich k^3 . Jede durch k^3 gehende Fläche zweiter Ordnung ist autokonjugiert bezüglich k^3 (18.). Ist eine kubische Raumkurve l^3 autokonjugiert bezüglich k^3 , so liegt sie mit k^3 auf einer Regelfläche R^2 zweiter Ordnung; denn sie hat mit k^3 die ∞^1 Bisekanten gemein, die ihre in bezug auf k^3 konjugierten Punkte verbinden. Diese Bisekanten schneiden k^3 und l^3 in je zwei Punktepaaren, die, wenn sie reell sind, einander harmonisch trennen. Jede der Raumkurven k^3 , l^3 ist also autokonjugiert be-

*) Zusatz zu der Mitteilung in den Math. Ann. 68, S. 417—421.

**) Mit „G. d. L.“ zitieren wir Reye, Geometrie der Lage, 4. Aufl., Bd. II u. III, Leipzig 1907—10.

züglich der anderen. In jedem Schnittpunkte von k^3 und l^3 wird eine der beiden Raumkurven von einer Geraden der Fläche R^2 berührt.

Aber gibt es denn kubische Raumkurven l^3 , die bezüglich einer gegebenen k^3 autokonjugiert sind? Und wenn es solche gibt, wie bestimmt man sie?

20. Wir gelangen zu einer Beantwortung dieser Fragen mit Hilfe spezieller F^2 -Gebüsch, die je sechs Punkte von k^3 zu Grundpunkten haben. Ein solches Gebüsch besteht aus den ∞^3 Flächen F^2 zweiter Ordnung, die durch sechs auf k^3 gegebene Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6 gehen. Es enthält ∞^2 Kegelflächen, und deren Mittelpunkte liegen auf einer Fläche K^4 vierter Ordnung. Diese „Kernfläche“ K^4 des Gebüsches ist autokonjugiert bezüglich k^3 (vgl. G. d. L. III, S. 159); sie hat die sechs Grundpunkte zu konischen Doppelpunkten und geht durch deren 15 Verbindungsstrahlen, durch k^3 und die Doppelstrahlen der zehn Ebenenpaare des Gebüsches. Konjugierte Punkte von K^4 liegen auf je einer Bisekante b der Raumkurve k^3 und sind durch die Schnittpunkte von b und k^3 harmonisch getrennt, falls diese reell sind. Die Bisekante b schneidet alsdann K^4 in vier harmonischen Punkten. Daraus folgt (G. d. L. III, S. 160), daß die Kernfläche K^4 von den Tangenten der Raumkurve k^3 oskuliert wird, also k^3 zur Haupttangentenkurve hat. — Das F^2 -Gebüsch ist durch k^3 und eine beliebige seiner ∞^3 Flächen bestimmt, seine Grundpunkte 1, 2, 3, 4, 5, 6 sind die sechs Schnittpunkte von k^3 mit dieser Fläche; sie können paarweise konjugiert-imaginär sein, auch können zwei oder mehrere von ihnen zusammenfallen.

21. Die durch k^3 und die zwei Bisekanten $\overline{34}$, $\overline{56}$ gelegte Regelfläche R^2 zweiter Ordnung schneidet die Kernfläche K^4 in k^3 , $\overline{34}$, $\overline{56}$ und einer kubischen Raumkurve l^3 . Diese l^3 ist zugleich mit K^4 und R^2 autokonjugiert bezüglich der Raumkurve k^3 . Sie schneidet k^3 in den zwei Doppelpunkten 1, 2 von K^4 und in den Berührungspunkten A , B der auf R^2 liegenden zwei Tangenten von k^3 ; diese oskulieren ja K^4 in A und B , sie können aber imaginär sein. In den Punkten 1, 2 berührt die Raumkurve l^3 zwei der ∞^1 auf R^2 liegenden Bisekanten von k^3 (19.). Sie ist durch die vier Punkte 1, 2, A , B und diese Tangenten eindeutig bestimmt.

22. Die Grundpunkte 1, 2 des F^2 -Gebüsches können auf k^3 je ∞^1 Lagen annehmen; auf der durch k^3 gelegten Fläche R^2 zweiter Ordnung gibt es deshalb ∞^2 kubische Raumkurven l^3 , die bezüglich der Raumkurve k^3 autokonjugiert sind.*) Durch einen Punkt P von R^2 und den

*) Die Raumkurve l^3 ändert auf R^2 ihre Lage nicht, wenn die Punktepaare 3, 4 und 5, 6 mit zwei anderen vertauscht werden, in denen k^3 von zwei ihrer ∞^1 auf R^2 liegenden Bisekanten geschnitten wird. Sie ändert sich aber mit der Lage der Punkte 1, 2.

ihm konjugierten P' gehen ∞^1 von ihnen. Sie bilden auf R^2 einen Kurvenbüschel und schneiden die ∞^1 auf R^2 liegenden Bisekanten von k^3 in Paaren konjugierter Punkte. Zwei Paare bezüglich k^3 konjugierter Punkte P, P' und Q, Q' , die auf R^2 , nicht aber auf derselben Bisekante liegen, können durch eine der autokonjugierten Raumkurven l^3 verbunden werden; diese geht durch die Berührungspunkte A, B der zwei auf R^2 enthaltenen Tangenten von k^3 .

Ohne Benutzung der Punkte A, B , die ja imaginär sein können, bestimmen wir diese Raumkurve l^3 wie folgt. Auf R^2 gehen durch P, P', Q und Q' ∞^1 kubische Raumkurven; sie schneiden eine auf R^2 liegende Bisekante b von k^3 in den Punktepaaren einer Involution. Diese hat mit der Involution der bezüglich k^3 konjugierten Punkte von b ein Punktepaar R, R' gemein, welches mit P, P' und Q, Q' auf jener autokonjugierten Raumkurve l^3 liegt und sie bestimmt.

23. Bezüglich einer kubischen Raumkurve k^3 sind ∞^4 andere l^3 autokonjugiert. Jede der ∞^2 Regelflächen R^2 zweiter Ordnung, die durch k^3 gehen, enthält ∞^2 von ihnen. Durch zwei Punkte P, Q , die nicht auf derselben Bisekante von k^3 liegen, und die ihnen konjugierten P', Q' geht eine der Raumkurven l^3 (22.). Durch vier Punkte von k^3 gehen sechs von ihnen; sie liegen auf je einer der sechs Flächen zweiter Ordnung, welche k^3 mit den Tangenten von je zwei der vier Punkte verbinden (21.). Die Kernfläche K^4 jedes speziellen F^2 -Gebüsches, das sechs reelle Punkte von k^3 zu Grundpunkten hat, enthält 45 der bezüglich k^3 autokonjugierten Raumkurven l^3 .

24. Einer Regelfläche R^2 zweiten Grades, die zwei für einander autokonjugierte kubische Raumkurven k^3, l^3 enthält, sind längs der Kurven zwei kubische Ebenengewinde κ^3, λ^3 umschrieben. Diese sind bzw. zu k^3, l^3 polar bezüglich R^2 , sie haben die ∞^1 auf R^2 gelegenen Bisekanten von k^3 und l^3 zu gemeinsamen Biplanaren und bestehen aus den Schmiegungebenen von zwei anderen kubischen Raumkurven. Die in je einer der Biplanaren sich schneidenden Ebenen von λ^3 (oder κ^3) sind konjugiert in bezug auf κ^3 (bzw. λ^3), also harmonisch getrennt durch zwei Ebenen dieses anderen Gewindes, falls letztere reell sind. Deshalb nennen wir jedes der kubischen Ebenengewinde κ^3, λ^3 „autokonjugiert“ bezüglich des anderen.

25. Bezüglich eines kubischen Ebenengewindes κ^3 sind ∞^4 andere λ^3 autokonjugiert. Jeder Regelfläche R^2 zweiten Grades, die von κ^3 eine Schar Biplanaren enthält, sind ∞^2 dieser λ^3 umschrieben (22.). Sie schicken durch jede der Biplanaren Ebenenpaare einer Involution, deren Doppelsebenen in dem Gewinde κ^3 liegen. Die Involution ist symmetrisch bezüglich einer jeden ihrer zwei Doppelsebenen, wenn diese sich rechtwinklig

schneiden. Nun kann aber das Ebenengewinde κ^3 der Fläche R^2 so um-
beschrieben sein, daß sich in jeder seiner ∞^1 Biplanaren auf R^2 zwei
seiner Ebenen rechtwinklig schneiden; es möge in diesem Falle „ortho-
gonal-involutorisch“ heißen. Die ∞^2 der R^2 umbeschriebenen Ebenen-
gewinde λ^3 schicken dann durch jede der ∞^1 Biplanaren Paare von Ebenen,
deren Flächenwinkel von zwei Ebenen des Gewindes κ^3 gehäuftet werden.
Eine Konstruktion des orthogonal-involutorischen Ebenengewindes ergibt
sich aus folgenden Erwägungen.

26. Die Schnittgeraden von je zwei zueinander normalen Ebenen eines
kubischen Ebenengewindes liegen auf einer Regelfläche sechsten Grades*);
im Falle unseres orthogonal-involutorischen Gewindes κ^3 aber zerfällt
diese Fläche in R^2 und eine Fläche vierten Grades. Die in den Biplanaren
auf R^2 sich rechtwinklig schneidenden Ebenen von κ^3 sind in einem ge-
schart involutorischen Raume Σ einander zugeordnet (G. d. L. II, S. 174);
sie und die übrigen ∞^2 Paare normaler, in Σ einander zugeordneter Ebenen
umhüllen ein gleichseitiges Paraboloid Π^2 (G. d. L. II, S. 289). Das bi-
quadratische Gewinde der gemeinsamen Berührungsebenen von R^2 und Π^2
enthält demnach alle Ebenen des Gewindes κ^3 und zerfällt in κ^3 und einen
orthogonal-involutorischen Ebenenbüschel erster Ordnung, dessen Achse v
eine Fokalachse von Σ ist und auf R^2 und Π^2 liegt.

27. Der involutorische Raum Σ ist eindeutig bestimmt durch seine
Fokalachse v und die sie enthaltende Regelfläche R^2 zweiten Grades. Denn
die Strahlen der einen Regelschar von R^2 sind in Σ so gepaart, daß sie
aus v durch die Ebenenpaare einer orthogonalen Ebeneninvolution pro-
jiziert werden, die andere Regelschar aber besteht aus Doppelstrahlen von Σ .
Die Strahleninvolution der ersteren Schar wird aus den von v verschie-
denen Strahlen der letzteren Schar durch ∞^1 in Σ enthaltene Ebenen-
involutionen projiziert; die ∞^1 Paare normaler Ebenen dieser Involutionen
bilden das orthogonal-involutorische Gewinde κ^3 .

Da die Achse v auf R^2 verschiedene ∞^1 Lagen haben kann, so lassen
sich der Regelfläche R^2 zweiten Grades ∞^1 orthogonal-involutorische ku-
bische Ebenengewinde umbeschreiben. Unter den ∞^{12} kubischen Ebenen-
gewinden gibt es demnach ∞^{10} orthogonal-involutorische. —

28. Hier mögen einige Bemerkungen folgen über kubische Raum-
kurven k^3 , l^3 , von denen eine auf der Tangentenfläche der anderen liegt.
Die Tangenten von k^3 sind auf einer abwickelbaren Fläche T^4 vierter Ord-
nung gelegen (G. d. L. II, S. 198); sie und die Schmiegungsstrahlen von
 k^3 sind sich selbst zugeordnet durch die Nullkorrelation ν , von welcher k^3
eine kubische Nullkurve ist. Durch ν ist jeder durch k^3 gehenden Regel-

*) Heinr. Krüger, Die Fokaleigenschaften der kubischen Raumkurven (Inaug.-
Diss.), Breslau 1885.

fläche R^2 zweiten Grades eine Fläche R_1^2 zweiten Grades zugeordnet. Eine Tangente von k^3 nun berührt nicht nur zugleich R^2 , sondern, da sie sich selbst zugeordnet ist, auch R_1^2 ; ihr Berührungspunkt mit R_1^2 (oder R^2) ist durch ν der sie enthaltenden Berührungsebene von R^2 (bzw. R_1^2) zugeordnet. In den Punkten von k^3 aber wird die Fläche R^2 von den Ebenen eines kubischen Ebenengewindes κ^3 berührt, das zu der kubischen Raumkurve k^3 polar ist in bezug auf R^2 . Diesem Gewinde κ^3 ist durch die Nullkorrelation ν eine kubische Raumkurve l^3 auf R_1^2 zugeordnet, und jede Ebene von κ^3 schneidet l^3 in ihrem Nullpunkte, dem Berührungspunkte von R_1^2 mit einer Tangente von k^3 . Die Fläche R_1^2 zweiten Grades berührt also jede Tangente von k^3 in einem Punkte von l^3 , sie berührt folglich die Tangentenfläche T^4 von k^3 längs der kubischen Raumkurve l^3 .

29. Die durch k^3 gelegte Regelfläche R^2 zweiten Grades enthält die Tangenten a, b zweier reeller oder imaginärer Punkte A, B von k^3 ; ihre Berührungsebenen α, β in A und B sind Schmiegungebenen von k^3 und schneiden R^2 bzw. in a, b und je einem Schmiegungestrahle von k^3 . Die Flächen R^2, R_1^2 gehen beide durch a, b und diese zwei Schmiegungestrahlen (28.), sie berühren sich also in A und B . Mit k^3 hat deshalb die Raumkurve l^3 die Punkte A, B , deren Tangenten a, b und deren Schmiegungebenen α, β gemein (28.). Die Fläche R_1^2 und die Tangentenfläche T^4 von k^3 berühren sich längs der kubischen Raumkurve l^3 und schneiden sich in deren zwei Tangenten a, b .

30. Die Berührungsebenen von R^2 in den Punkten von k^3 bilden, wie gesagt, ein kubisches Ebenengewinde κ^3 ; sie sind also die Schmiegungebenen einer kubischen Raumkurve l_1^3 und umhüllen deren Tangentenfläche T_1^4 (G. d. L. II, S. 177). Durch die Nullkorrelation ν , von welcher k^3 eine kubische Nullkurve ist, sind die Raumkurven l^3, l_1^3 projektiv so aufeinander bezogen, daß jedem Punkte der einen die Schmiegungeebene des entsprechenden Punktes der anderen als Nullebene zugeordnet ist. Die homologen Punkte von l^3 und l_1^3 liegen also auf je einem gemeinsamen Schmiegungestrahle dieser Raumkurven. Die drei Raumkurven k^3, l^3, l_1^3 sind projektiv und zu dem Ebenengewinde κ^3 perspektiv; ihre homologen Punkte liegen in je einer Schmiegungeebene von l_1^3 , und ihre homologen Schmiegungeebenen schneiden sich in je einem Punkte von l^3 . Die Tangenten von k^3 verbinden je zwei homologe Punkte von k^3 und l^3 , durch sie gehen je zwei homologe Schmiegungeebenen von k^3 und l_1^3 .

31. Die Tangentenflächen T^4 von k^3 und T_1^4 von l_1^3 sind zueinander polar bezüglich der Fläche R^2 und haben mit R^2 und R_1^2 die zwei Strahlen a, b gemein. Je zwei in bezug auf R^2 polare Tangenten von k^3 und l_1^3 schneiden sich in einem Punkte von k^3 und berühren in ihm die Fläche R^2 .

Die Tangentenfläche T_1^4 von l_1^3 berührt demnach die Fläche R^2 längs der Raumkurve k^3 , und l_1^3 steht zu k^3 in derselben invarianten Beziehung wie k^3 zu l^3 . Die Tangenten von l_1^3 verbinden je zwei homologe Punkte von l_1^3 und k^3 . Die Raumkurven l_1^3, k^3 sind projektiv so aufeinander bezogen, daß die Schmiegungsebene jedes Punktes der einen den entsprechenden Punkt der anderen zum Pol hat bezüglich R^2 . Die drei kubischen Raumkurven l_1^3, k^3, l^3 berühren einander und die Strahlen a, b in zwei Punkten A, B , sie haben die Tangentialebenen α, β von R^2 in A und B zu gemeinsamen Schmiegungsebenen (vgl. 29.).

32. Durch eine kubische Raumkurve k^3 gehen die Tangentenflächen von ∞^2 anderen kubischen Raumkurven l_1^3 , sie berühren längs der Kurve k^3 je eine der ∞^2 durch k^3 gehenden Regelflächen R^3 zweiten Grades (31.). Die Tangentenfläche T^4 von k^3 enthält ∞^2 andere kubische Raumkurven l^3 , sie berührt längs jeder von ihnen eine Fläche R_1^2 zweiten Grades (29.). Die ∞^2 Flächen R_1^2 sind je einer durch k^3 gehenden Fläche R^2 zugeordnet durch die Nullkorrelation ν (28.). Die ∞^2 Raumkurven l^3 und l_1^3 sind auf k^3 und aufeinander projektiv bezogen, so daß homologe Punkte der l^3 auf je einer Tangente von k^3 liegen, und homologe Schmiegungsebenen der l_1^3 sich in je einer Tangente von k^3 schneiden (30.).

Die Nullkorrelation ν ordnet jedem Punkte von k^3 seine Schmiegungsebene zu, sie transformiert homologe Punkte, Tangenten, Schmiegungsebenen der ∞^2 Raumkurven l_1^3 in homologe Schmiegungsebenen, Tangenten, Punkte der l^3 (30.). Homologe Tangenten der Raumkurven l_1^3 schneiden sich in je einem Punkte von k^3 (31.); homologe Tangenten der l^3 liegen in je einer Schmiegungsebene von k^3 . Die Pole einer Schmiegungsebene φ von k^3 bezüglich der ∞^2 durch k^3 gehenden Flächen R^2 sind homologe Punkte der Raumkurven l_1^3 (31.); sie sind je einem Punkte von φ konjugiert bezüglich k^3 und liegen auf einer kubischen Regelfläche, die ∞^1 Schmiegungsstrahlen von k^3 enthält (18.). Ihnen sind ∞^2 homologe Schmiegungsebenen der Raumkurve l^3 durch ν zugeordnet, und diese umhüllen dieselbe kubische Regelfläche.

Straßburg, den 7. März 1914.