SULLA DERIVATA SECONDA MISTA DI UN INTEGRALE DOPPIO.

Nota di **Guido Fubini** (Torino) e **Leonida Tonelli** (Parma).

Adunanza del 13 febbraio 1916.

I.

(da una lettera di LEONIDA TONELLI a GUIDO FUBINI).

Egregio Professore,

Desidererei sottoporle la seguente questione. Consideriamo la funzione

$$F(xy) = \int_0^x \int_0^y f(xy)\,dx\,dy,$$

dove $f(xy)$ è una funzione integrabile, nel senso del LEBESGUE, in un certo campo A, contenente l'origine $(0, 0)$. Il LEBESGUE ha dimostrato (ed è molto facile il vederlo) che, quasi dappertutto in A, esiste la derivata parziale $\frac{\partial F}{\partial x}$, uguale a $\int_0^y f(xy)\,dy$. Ha poi aggiunto [1]) che, *trascurando un insieme di misura nulla, esiste anche la derivata seconda mista* $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)$, *uguale a* $f(xy)$. Questa derivata l'ho scritta racchiusa in una parentesi per ricordare che essa non è una vera derivata seconda. Per definizione, detto $\bar{A}$ l'insieme, di misura uguale a quella di A, che resta togliendo l'insieme che si è detto di trascurare, la $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)$, in un punto $P(x, y)$ di $\bar{A}$, è il limite del rapporto

$$(1) \qquad \frac{\dfrac{\partial F(x, y')}{\partial x} - \dfrac{\partial F(x, y)}{\partial x}}{y' - y},$$

per $y' \to y$, considerato *soltanto* nei punti $P'(x, y')$ di $\bar{A}$. Ora io pongo la seguente questione: *si può dimostrare che, quasi dappertutto in* A, *esiste la derivata seconda mista* $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ [*uguale necessariamente, per quanto sopra si è detto, a* $f(xy)$]*?* Si tratta cioè di

[1]) H. LEBESGUE, *Sur l'intégration des fonctions discontinues* [Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure (Paris), III^e série t. XXVII (1910), pp. 361-450], vedi anche CH. J. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Cours d'Analyse*, 2^e édition, t. II (Paris, Gauthier-Villars, 1911), p. 122.

togliere la restrizione, relativa a y', della definizione di $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)$, e di dimostrare che quasi dappertutto esiste il limite di (1) per y' tendente liberamente a y.

Mi è riuscito di rispondere affermativamente alla domanda posta nel caso della $f(xy)$ limitata ed anche in alcuni casi notevoli in cui la $f(xy)$ è illimitata; ma non nel caso generale. Crede Ella che si possa rispondere affermativamente anche nel caso generale? Poichè Ella si è già occupata, e con tanto successo, di questioni prossime a questa, così mi permetto di importunarla con questa mia.

Ecco, frattanto, come si trattano il caso della $f(xy)$ limitata e quegli altri cui sopra ho accennato. Sia $\varphi(xy)$ una funzione integrabile linearmente rispetto alla x, in un certo intervallo (a, b), per tutti i valori di y di un intervallo (c, d). Fissato un valore di y di (c, d), la $\varphi(x, y)$ è quasi dappertutto in (a, b) la derivata di $\int_a^x \varphi(xy)\,dx$. *Dico che si può determinare un insieme I di (a, b), di misura $m(I) = b - a$, sul quale la $y(x, y)$ sia la derivata di $\int_a^x \varphi(xy)\,dx$, per tutti gli y di (c, d).* Consideriamo i valori razionali di y, compresi in (c, d). Ad ognuno di essi ccrrisponde un insieme I_y di (a, b), di misura $b - a$, sul quale la φ è la derivata di $\int_a^x \varphi(x, y)\,dx$. Indichiamo con I l'insieme dei punti comuni a tutti gli I_y detti. I ha misura uguale a $b - a$ e su esso la $\varphi(x, y)$ è la derivata di $\int_a^x \varphi(x, y)\,dx$ per tutti i valori razionali di y, compresi in (c, d). Siano ora $\bar{y}$ un valore irrazionale di (c, d) e y_r un valore razionale tendente a $\bar{y}$, per $r \to \infty$, e supponiamo [*ipotesi* α)] *che* $\varphi(xy_r)$, *per* $r \to \infty$, tenda uniformemente a $\varphi(x\bar{y})$ su tutto (a, b). Allora è $\varphi(x\bar{y}) = \varphi(x, y_r) + \varepsilon(x, y_r)$, con $\varepsilon(x, y_r)$ tendente uniformemente a zero per $y_r \to \bar{y}$, e quindi

$$\int_a^x \varphi(x\bar{y})\,dx = \int_a^x \varphi(x, y_r)\,dx + \int_a^x \varepsilon(x, y_r)\,dx.$$

Se x_1 è un punto qualunque di I, si ha perciò

$$\Lambda \int_a^{x_1} \varphi(x, \bar{y})\,dx = \varphi(x_1, y_r) + \bar{\varepsilon},$$

$$\lambda \int_a^{x_1} \varphi(x\bar{y})\,dx = \varphi(x_1, y_r) + \bar{\bar{\varepsilon}},$$

con $\bar{\varepsilon} \to 0$, $\bar{\bar{\varepsilon}} \to 0$, per $y_r \to \bar{y}$; e analogamente per $\Lambda' \int_a^{x_1} \varphi(x, \bar{y})\,dx$ e $\lambda' \int_a^{x_1} \varphi(x, \bar{y})\,dx$. In x_1 esiste dunque la derivata di $\int_a^x \varphi(x\bar{y})\,dx$ e tale derivata è uguale a

$$\lim_{y_r \to \bar{y}} \varphi(x_1, y_r) = \varphi(x_1, \bar{y}).$$

L'ipotesi α) è soddisfatta se la $\varphi(x, y)$ ha, rispetto ad y, la prima derivata parziale limitata, ed anche se è $\int_a^b \left|\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right|^{1+\alpha} dx < M$, qualunque sia l'$y$ di (c, d), con $\alpha > 0$.

Basta porre $\varphi(xy) = \int_0^y f(x, y)\,dy$, per avere i risultati accennati.

LEONIDA TONELLI.

II.

(da una lettera di GUIDO FUBINI a LEONIDA TONELLI).

Egregio Professore,

Ho pensato alla Sua questione senza leggere le Sue considerazioni, per non essere spinto a trattare il problema in un modo anzichè nell'altro. E mi sono accorto poi di aver battuto proprio la Sua strada, con piccole modificazioni, così da ottenere precisamente il risultato da Lei desiderato.

Conservo le Sue notazioni e pongo

$$F(xy) = \int_0^x \int_0^y f(xy)\,dx\,dy.$$

Poichè, per l'ipotesi da Lei fatta, la $f(xy)$ è integrabile, secondo LEBESGUE, in un campo *superficiale*, anche $|f(xy)|$ è integrabile. Cioè $f(xy)$ è la differenza di due funzioni *positive* integrabili. Io posso studiare ciascuna di queste due funzioni separatamente, cioè *posso supporre $f(xy)$ positiva*. Si dimostra col Suo metodo che *vale la*

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \int_0^y f(xy)\,dy$$

per tutti i valori *razionali* di y e per tutti i valori di x che non appartengono a un certo gruppo G di misura lineare nulla.

Sia x un punto non appartenente a G; sia y irrazionale; siano y_1, y_2 numeri razionali qualsiasi tali che $y_1 < y < y_2$. Suppongo, per es., le h, x, y, y_1, y_2, positive. Allora è

$$\int_x^{x+h} \int_0^{y_1} f\,dx\,dy \leqq \int_x^{x+h} \int_0^{y} f\,dx\,dy \leqq \int_x^{x+h} \int_0^{y_2} f\,dx\,dy.$$

E ciò perchè $f \geqq 0$ e perchè il campo a cui è esteso il primo integrale è contenuto nel campo cui è esteso il secondo, il quale è contenuto in quello cui è esteso il terzo. Dividendo per h e passando al limite per $h = 0$, ne deduciamo: *I numeri derivati a destra di* $\int_0^x \int_0^y f\,dx\,dy$ *sono compresi tra le derivate di* $\int_0^x \int_0^{y_1} f\,dx\,dy$ e

$\int_0^x \int_0^{y_2} f\,dx\,dy$, *che per ipotesi esistono e valgano*

$$\int_0^{y_1} f\,dy \quad \text{e} \quad \int_0^{y_2} f\,dy.$$

E ciò qualunque siano i numeri razionali y_1 e y_2 tali che $y_1 < y < y_2$. Passando al limite per $y_1 = y_2 = y$, poichè $\int_0^y f\,dx$ è funzione non decrescente e continua della y, si trova che la derivata di $F(x, y)$ rispetto ad x, *qualunque sia* y, e purchè x non appartenga a G, vale proprio

$$\int_0^y f\,dy,$$

che noi possiamo ora derivare rispetto ad y, etc. etc.

GUIDO FUBINI.