Bemerkung über die harmonische Reihe.

Von **L. Theisinger** in Stockerau.

In dieser kleinen Untersuchung über die Reihe

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

wird zuerst gezeigt, daß ihre Summe, welche mit σ_n bezeichnet werden soll, niemals eine ganze Zahl sein kann, wie auch das n gewählt werden mag. Dabei sind die beiden Fälle zu unterscheiden, ob n eine Primzahl oder eine zusammengesetzte Zahl ist. Im ersten Falle folgt durch Multiplikation mit $(n-1)!$

$$(n-1)!\ \sigma_n=(n-1)!+\frac{(n-1)!}{2}+\frac{(n-1)!}{3}+\cdots+\frac{(n-1)!}{n}.$$

Das letzte Glied auf der rechten Seite dieser Gleichung kann zufolge der gemachten Annahme keine ganze Zahl sein, währenddem alle anderen Glieder ganze Zahlen sind. Hieraus ist also zu ersehen, daß wenn n eine Primzahl ist, das Produkt $(n-1)!\ \sigma_n$ und daher auch σ_n selbst keine ganze Zahl sein kann.

Ist aber n eine zusammengesetzte Zahl, so sei p die größte in der Reihe $1, 2, 3, \ldots n$ vorkommende Primzahl. Denkt man sich diese Zahlenreihe in die beiden Gruppen

$$1, 2, 3, \ldots p \quad \text{und} \quad p+1, p+2, \ldots n$$

zerlegt, so kann es in der zweiten Gruppe keine Zahl geben, welche durch p teilbar ist. Denn im Falle des Bestehens der Gleichung

$$p+k=l\,.\,p, \quad l\geqq 2, \quad k\leqq n-p$$

müßte einem Theorem von Tschebyscheff zufolge (welches besagt, daß zwischen p und $2p-2$ für $p>3$ mindestens eine Primzahl liegt) zwischen p und $p+k$, und daher auch zwischen p und n wenigstens eine Primzahl enthalten sein, was aber gegen die gemachte Voraussetzung wäre, daß p die letzte Primzahl in der Reihe $1, 2, 3, \ldots n$ ist. Hieraus folgt, daß in der Gleichung

$$1.2.3\ldots(p-1)(p+1)\ldots n\,\sigma_n=1.2.3\ldots(p-1)(p+1)\ldots n+$$
$$+\frac{1.2.3\ldots(p-1)(p+1)\ldots n}{2}+\frac{1.2.3\ldots(p-1)(p+1)\ldots n}{3}+\cdots$$
$$+\frac{1.2.3\ldots(p-1)(p+1)\ldots n}{p}+\cdots+\frac{1.2.3\ldots(p-1)(p+1)\ldots n}{n}$$

das Glied $1.2.3\ldots(p-1)(p+1)\ldots n:p$ keine ganze Zahl ist. Da aber alle anderen Glieder ganze Zahlen sind, so muß also das Produkt

$$1.2.3\ldots(p-1)(p+1)\ldots n\,\sigma_n$$

und somit auch σ_n selbst eine gebrochene Zahl sein. Mithin ist also nachgewiesen, daß man durch Addition einer beliebigen Anzahl von Gliedern der divergenten Reihe

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$$

niemals zu einer ganzen Zahl gelangen kann.

Weiterhin soll nun eine eigentümliche Darstellung der mit σ_n bezeichneten Summe abgeleitet werden. Zu diesem Zwecke werde gesetzt:

$$\begin{aligned}&(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(x-\frac{1}{n}\right)=\\ &=x^n+A_1\,x^{n-1}+A_2\,x^{n-2}+\ldots+A_n\,. \qquad (1)\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich, wenn für x der Reihe nach die Werte $1, \frac{1}{2}\cdots\frac{1}{n}$ gesetzt werden, das System von Gleichungen:

$$\begin{array}{l} A_1+A_2+A_3+\ldots+A_n=-1\\ 2A_1+2^2A_2+2^3A_3+\ldots+2^nA_n=-1\\ 3A_1+3^2A_2+2^3A_3+\ldots+3^nA_n=-1 \qquad (2)\\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots\\ nA_1+n^2A_2+n^3A_n+\ldots+n_nA^n=-1.\end{array}$$

Durch Auflösung dieser Gleichungen nach A_1 folgt:

$$A_1=-\begin{vmatrix}1, 1, & 1, & \ldots 1\\ 1, 2^2, & 3^2, & \ldots n^2\\ 1, 2^3, & 3^3, & \ldots n^3\\ \vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots\\ 1, 2^n, & 3^n, & \ldots n^n\end{vmatrix} : \begin{vmatrix}1, 2, & 3, & \ldots n\\ 1, 2^2, & 3^2, & \ldots n^2\\ 1, 2^3, & 3^3, & \ldots n^3\\ \vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots\\ 1, 2^n, & 3^n, & \ldots n^n\end{vmatrix}. \qquad (3)$$

Der Divisor kann umgeformt werden in

$$D=n!\begin{vmatrix}1, 1, & 1, & \ldots 1\\ 1, 2, & 3, & \ldots n\\ 1, 2^2, & 3^2, & \ldots n^2\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ 1, 2^{n-1}, & 3^{n-1}, & \ldots n^{n-1}\end{vmatrix}.$$

Die hier stehende Determinante ist eine Cauchysche Determinante und daher wie in der Theorie der Determinanten gezeigt wird:

$$D = n!(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}[(1-2)(1-3)\ldots(1-n)][(2-3)(2-4)\ldots(2-n)]\ldots$$

$$\ldots[(n-1)-n] = n!(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}[(-1)^{n-1}(n-1)!].[-1)^{n-2}(n-2)!]\ldots$$

$$\ldots[(-1).1!] = 1!\,2!\,3!\ldots n!$$

Somit geht (3) über in:

$$-A\frac{1}{1!\,2!\,3!\ldots n!}\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & \ldots 1 \\ 1, & 2^2, & 3^2, & \ldots n^2 \\ 1, & 2^3, & 3^3, & \ldots n^3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1, & 2^n, & 3^n, & \ldots n^n \end{vmatrix}.$$

Anderseits ist aber auch

$$-A_1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Durch Vergleichung dieser beiden für $-A_1$ erhaltenen Werte gelangt man zu der angekündigten Summenformel

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \frac{1}{1!\,2!\,3!\ldots n!}\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & \ldots 1 \\ 1, & 2^2, & 3^2, & \ldots n^2 \\ 1, & 2^3, & 3^3, & \ldots n^3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1, & 2^n, & 3^n, & \ldots n^n \end{vmatrix}.$$