

Bemerkungen zur Theorie der Fall- und Steigversuche, als einem Beispiel unsymmetrischer Fehlerverteilung.

Von **Erich Schmid** in Wien.

(Eingegangen am 5. März 1922.)

1. Einleitung. Es bedeutete in der Ehrenhaft-Millikan-schen Streitfrage des elektrischen Elementarquantums einen bedeutenden Schritt nach vorwärts, als man außer der Bestimmung der Größe und Ladung der Probekörper nach einem Fallgesetz auch die Einstein-Smoluchowskische Theorie der Brownschen Bewegung dazu heranzog. Diese gibt nämlich, unabhängig von der Dichte, unter der einzigen Voraussetzung der Kugelgestalt, Ladung und Masse des Teilchens. Neben diesem Vorzug vor der Bestimmungsmethode nach dem Fallgesetz hat die statistische Methode jedoch auch einen bedeutenden Nachteil. Die Genauigkeit ihrer Resultate, die aus den Abweichungen vom Mittelwert erschlossen werden, ist — ganz abgesehen von etwaigen Unsicherheiten des Zahlenwertes der Loschmidtschen Zahl — gegenüber der Genauigkeit der Resultate aus dem Fallgesetz (natürlich bei zutreffenden Voraussetzungen desselben), welches nur mit dem Mittelwert selbst rechnet, eine bedeutend geringere.

Schrödinger¹⁾ hat die betreffenden Formeln für den mittleren Fehler in der Bestimmung der Geschwindigkeit und der Konstanten der Brownschen Bewegung, des mittleren, sekundlichen Verschiebungsquadrates entwickelt, die, neben den Formeln zur Bestimmung dieser Größen selbst, in Tabelle 1 wiedergegeben sind.

Tabelle 1.

$v = \frac{l}{\frac{1}{n} \sum t_i} \dots \dots \dots \text{(I)}$	$\frac{\mu(v)}{v} = \frac{1}{\sqrt{2alvn}} \sqrt{1 + \frac{3}{2alvn}} \text{ (Ia)}$
$\bar{\lambda^2} = l^2 \left(\frac{1}{n} \sum \frac{1}{t_i} - \frac{1}{\frac{1}{n} \sum t_i} \right) \text{ (II)}$	$\frac{\mu(\bar{\lambda^2})}{\bar{\lambda^2}} = \frac{\sqrt{2n-1}}{n} \dots \dots \dots \text{(IIa)}$

¹⁾ E. Schrödinger, Phys. ZS. **16**, 289, 1915.

l ist die Fall- oder Steigstrecke, v die mittlere Geschwindigkeit, n die Anzahl der Beobachtungen und α der halbe Reziprokwert des mittleren, sekundlichen Verschiebungsquadrates, also

$$\alpha = \frac{1}{2\lambda^2}.$$

Den Ausgangspunkt für die Ableitung dieser Formeln bildet das Verteilungsgesetz der Fall- oder Steigzeiten immer über dieselbe Strecke l unter Einwirkung einer konstanten äußeren Kraft und der variablen Brownschen Impulse. Dieses Gesetz, also der Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit, daß eine Zeit in das Intervall zwischen t und $t + dt$ fällt, lautet:

$$M(t) dt = l \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} t^{-3/2} e^{-\frac{\alpha(l-vt)^2}{t}} dt. \quad (1)$$

Die Bedeutung der Buchstaben ist bekannt.

Formel (I) blieb nun auch in der Folge ungeändert¹⁾, während an Formel (II) von Fürth²⁾ eine Korrektur angebracht wurde. Er

behauptete nämlich, daß der Wert $\frac{\bar{1}}{t} = \int_0^\infty \frac{1}{t} M(t) dt$ durch die Formel

$\frac{\bar{1}}{t} = \frac{1}{n} \sum \frac{1}{t_i}$ wegen des Fehlens ganz kleiner Zeiten, denen ja auch eine gewisse Wahrscheinlichkeit zukommt, ständig zu klein und daher auch λ^2 , nach Formel (II) berechnet, systematisch zu klein bestimmt

wird. Es wurde also der experimentell gegebene Wert $\frac{\bar{1}}{t} = \int_\tau^\infty \frac{1}{t} M(t) dt$ gesetzt, worin τ die kleinste der Zeiten bedeutet, und für λ^2 die Formel

$$\lambda^2 = \lambda_{(II)}^2 \int_\tau^\infty M(t) dt - \frac{l^2}{t} \int_0^\tau M(t) dt + l^2 \int_0^\tau \frac{1}{t} M(t) dt$$

erhalten. Eine Schätzung der Genauigkeit dieser Formel, welche, da in $M(t)$ ja der wahre Wert von λ^2 eingeht, wiederholt angewendet werden müßte, wurde nicht versucht.

¹⁾ Wenn man von einer Korrektur absieht, die Fletcher, von einem — wie Schrödinger nachwies — irrigen Zeitenverteilungsgesetz ausgehend, daran anbrachte.

²⁾ R. Fürth, Ann. d. Phys. 59, 409, 1919.

Gegen diese Bevorzugung der kleinen Zeiten wurden vom Verfasser wiederholt Bedenken erhoben¹⁾, und Fürth hat sich nun auch kürzlich wieder mit dieser Frage beschäftigt²⁾. Er entwickelt, von der Zeitenverteilungsfunktion $M(t)$ ausgehend, die Wahrscheinlichkeit eines aus n Zeiten berechneten $\mathcal{A} = \frac{\lambda^2}{2}$ zwischen den Grenzen \mathcal{A} und $\mathcal{A} + d\mathcal{A}$ und findet hierfür

$$\varphi(\mathcal{A})d\mathcal{A} = \left(\frac{n}{2D}\right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{e^{-\frac{n\mathcal{A}}{2D}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \mathcal{A}^{\frac{n-3}{2}} d\mathcal{A}, \quad (2)$$

worin D den wahren Wert des Diffusionskoeffizienten bedeutet. $D = \frac{\lambda^2}{2}$.

Er bildet nun weiter $\overline{\mathcal{A}} = \int_0^\infty \mathcal{A} \varphi(\mathcal{A}) d\mathcal{A}$ und erhält hierfür $\overline{\mathcal{A}} = \frac{n-1}{n} D$. Um nun diesen Mittelwert mit D , dem wahren Wert des Diffusionskoeffizienten, in Einklang zu bringen, wird jedes aus n Zeiten berechnete \mathcal{A} mit $\frac{n}{n-1}$ multipliziert, d. h. bei der Mittelbildung hat man nicht durch n , sondern durch $n-1$ zu dividieren³⁾.

Daß das arithmetische Mittel der Verschiebungsquadrate sehr vieler Serien zu je n Zeiten tatsächlich den vom wahren Wert systematisch verschiedenen Wert $\frac{n-1}{n} \lambda^2$ liefert, erhält man auch direkt aus dem Zeitenverteilungsgesetz (1).

$$I^n \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\prod t_i^{-\frac{3}{2}}\right) e^{-\alpha \sum \frac{(1-vt_i)^2}{t_i}} dt_1 \dots dt_n$$

stellt die Wahrscheinlichkeit dar, daß die einzelnen Zeiten zwischen t_1 und $t_1 + dt_1$, t_2 und $t_2 + dt_2$ usw. liegen.

$$I^{n+2} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\prod t_i^{-\frac{3}{2}}\right) e^{-\alpha \sum \frac{(1-vt_i)^2}{t_i}} \left(\frac{1}{n} \sum \frac{1}{t_i} - \frac{n}{\sum t_i}\right) dt_1 \dots dt_n \quad (3)$$

¹⁾ E. Schmid, Wien. Ber. 129 [2a], 813, 1920 (in der Folge als l. c. bezeichnet); Verh. d. D. Phys. Ges. (3) 2, 2, 1921.

²⁾ R. Fürth, Phys. ZS. 22, 625, 1921. Vortrag auf dem deutschen Physikertag in Jena 1921.

³⁾ Es möge hier darauf hingewiesen werden, daß die Formel (2), von einer bekannten Formel der Fehlertheorie ausgehend, vom Verfasser bereits in der als l. c. bezeichneten Arbeit angegeben und auch damals schon experimentell geprüft worden ist.

stellt also die Wahrscheinlichkeit des daraus berechneten $\bar{\lambda}^2$ dar und den Mittelwert erhält man, indem man über alle t_i von 0 bis ∞ integriert¹⁾. Man findet hierfür in Übereinstimmung mit dem Obigen

$$\bar{\lambda}^2 = \frac{1}{2\alpha} \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Der mittlere Fehler des nach dieser Mittelwertsformel

$$\bar{\lambda}^2 = \frac{l^2 n}{n-1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t}\right) \quad (\text{III})$$

bestimmten Verschiebungsquadrates ergibt sich zu:

$$\frac{\mu(\bar{\lambda}^2)}{\bar{\lambda}^2} = \sqrt{\frac{2}{n-1}}. \quad (\text{IIIa})$$

Er ist also größer als der eines nach Formel (II) bestimmten Verschiebungsquadrates.

Würde man nun dagegen verlangen, daß nicht der Mittelwert der ersten Potenz von $\bar{\lambda}^2$ aus vielen n -zeitigen Serien mit dem theoretischen Wert übereinstimmt, sondern etwa der der Wurzel daraus (was dem Gaußschen Präzisionsmaß h entsprechen würde) oder des Quadrates usw., so würde man natürlich wieder zu anderen Formeln für $\bar{\lambda}^2$ mit anderen mittleren Fehlern kommen.

2. Berechnung der genauesten Werte von $\bar{\lambda}^2$ und v . Es soll nun von einem anderen Gesichtspunkt aus versucht werden, an Formel (II) eine Korrektur anzubringen. Wenn man — wie hier — in der glücklichen Lage ist, den mittleren Fehler der Formel, der ein Maß ihrer Genauigkeit darstellt, exakt berechnen zu können, so liegt es nahe, die Formel so abzuändern, daß sie eben am genauesten, d. h. ihr mittlerer Fehler ein Minimum wird. Es wurde also versucht, die Formel (II) mit einem solchen konstanten Faktor zu multiplizieren, daß der mittlere Fehler des so bestimmten $\bar{\lambda}^2$ am kleinsten wird.

In (3) haben wir die Wahrscheinlichkeit eines aus den Zeiten t_1 bis t_n berechneten Verschiebungsquadrates. Multiplizieren wir statt mit dem Verschiebungsquadrat mit dem Quadrat des Fehlers im Verschiebungsquadrat, also mit $\left[l^2 \left(\frac{1}{n} \sum \frac{1}{t_i} - \frac{1}{\frac{1}{n} \sum t_i}\right) - \frac{1}{2\alpha}\right]^2$, so stellt

¹⁾ Bei der Bildung dieses oder ähnlicher Integrale scheint es mir zweckmäßig, von dem bestimmten Integral:

$$\int_0^{\infty} e^{-p^2 x^2 - \frac{q^2}{x^2}} dx = \frac{1}{2p} e^{-2pq} \sqrt{\pi}$$

auszugehen. Bierens de Haan (1867), S. 53, Formel 10.

uns das Produkt die Wahrscheinlichkeit des betreffenden Fehlerquadrates dar, und über alle Zeiten von 0 bis ∞ integriert, erhalten wir das mittlere Fehlerquadrat, wie es ja auch von Schrödinger zum ersten Male angegeben wurde:

$$\mu^2(\lambda^2) = l^n \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int_0^\infty \dots n \dots \int_0^\infty \left(\prod t_i^{-\frac{3}{2}} \right) e^{-\alpha \sum \frac{(1 - v t_i)^2}{t_i}} \left[l^2 \left(\frac{1}{n} \sum t_i - \frac{1}{\frac{1}{n} \sum t_i} \right) - \frac{1}{2\alpha} \right]^2 dt \dots dt_n.$$

Die Auswertung dieses Integrals liefert (IIa).

Setzt man nun die Formel für $\bar{\lambda}^2$ in der Form an:

$$\bar{\lambda}^2 = c l^2 \left(\frac{1}{n} \sum \frac{1}{t_i} - \frac{1}{\frac{1}{n} \sum t_i} \right),$$

worin c eine noch unbestimmte Konstante bedeutet, die die Bedingung erfüllen soll, daß $\mu^2(\lambda^2)$ ein Minimum wird, so wird man nach Ausführung der Integration auf folgende Bestimmungsgleichung für c geführt:

$$c \frac{n^2 - 1}{n^2} - \frac{n - 1}{n} = \theta;$$

daraus ergibt sich

$$c = \frac{n}{n + 1}.$$

Rechnet man sich nun mit diesem c , also nach der Formel

$$\bar{\lambda}^2 = \frac{n l^2}{n + 1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\bar{t}} \right) \quad (\text{IV})$$

den mittleren Fehler in der Bestimmung von $\bar{\lambda}^2$ wirklich aus, so findet man:

$$\frac{\mu(\bar{\lambda}^2)}{\bar{\lambda}^2} = \sqrt{\frac{2}{n + 1}}, \quad (\text{IV a})$$

also in der Tat einen kleineren Wert als (IIa) und (IIIa). Insbesondere ist der Unterschied gegenüber dem Wert aus (IIIa) bei kleinem n nicht unerheblich.

Aber noch eine andere Eigenschaft von (IVa) ist hervorzuheben. Diese Formel gibt nämlich, ebenso wie (IIa), auch noch für $n = 1$ den richtigen Wert, nämlich 100 Proz. Aus einer Zeit berechnet ergibt sich ja $\bar{\lambda}^2 = 0$, und der Fehler beträgt also wirklich immer 100 Proz. des wahren Wertes.

Dieses selbe Prinzip des minimalen Fehlers läßt sich natürlich auch auf die anderen Arten der Bestimmung des mittleren, sekundlichen Verschiebungsquadrates anwenden. Wir wollen hier nur noch den Fall untersuchen, bei dem in einer von äußeren Kräften freien — etwa horizontalen — Richtung in gleichen Zeitintervallen die Verschiebungen gemessen werden und daraus dann $\overline{\lambda^2}$ berechnet wird. Die sekundlichen Verschiebungen befolgen hier das symmetrische Gaußsche Fehlergesetz

$$\omega(\lambda) d\lambda = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha \lambda^2} d\lambda,$$

wobei wieder $\alpha = \frac{1}{2\overline{\lambda^2}}$ den halben Reziprokwert des mittleren, sekundlichen Verschiebungsquadrates bedeutet.

Da man es hier mit wahren Fehlern zu tun hat (Abweichungen vom Wert 0), ist bei der Mittelbildung durch n zu dividieren:

$$\overline{\lambda^2} = \frac{1}{n} \sum \lambda_i^2, \quad (\text{V})$$

und die Größe des mittleren Fehlers im mittleren Verschiebungskadrat bestimmt sich durch das Integral

$$\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\right)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} \sum \lambda_i^2 - \frac{1}{2\alpha}\right)^2 e^{-\alpha \sum \lambda_i^2} d\lambda_1 \dots d\lambda_n.$$

Ausgewertet liefert das Integral

$$\frac{\mu(\overline{\lambda^2})}{\overline{\lambda^2}} = \sqrt{\frac{2}{n}}, \quad (\text{Va})$$

wie dies ja auch die Fehlertheorie verlangt.

Setzt man nun das Verschiebungskadrat wieder in der Form $\overline{\lambda^2} = \frac{c}{n} \sum \lambda_i^2$ an und bestimmt c derart, daß das obige Integral ein Minimum wird, so findet man $c = \frac{n}{n+2}$. Den mit dem kleinsten Fehler behafteten Wert von $\overline{\lambda^2}$ findet man also nach der Formel

$$\overline{\lambda^2} = \frac{1}{n+2} \sum \lambda_i^2 \quad (\text{VI})$$

und für die Größe des Fehlers ergibt sich

$$\frac{\mu(\overline{\lambda^2})}{\overline{\lambda^2}} = \sqrt{\frac{2}{n+2}}. \quad (\text{VIa})$$

Die Forderung hingegen, daß das arithmetische Mittel aus vielen Beobachtungsreihen zu je n Einzelbeobachtungen sich mit dem wahren Wert deckt, führt hier wieder auf (V) bzw. (Va).

In ganz analoger Weise wird sich auch der für praktische Beobachtung wohl kaum bedeutungsvolle Fall erledigen lassen, daß die Verschiebungen des Teilchens in einem homogenen Kraftfeld in gleichen Zeitintervallen registriert werden. Auch hier wird der nach der Vorschrift für scheinbare Fehler (also mit Division durch $n - 1$) gebildete Mittelwert nicht mit dem kleinsten Fehler behaftet sein.

Für den Fall des mittleren Fehlerquadrates bei Gaußscher Fehlerverteilung ist dieser Vorschlag des kleinsten Fehlers übrigens nicht neu. Er wurde schon seinerzeit von Bertrand gebracht¹⁾.

Schließlich soll mit diesem Prinzip des genauesten Wertes auch die Bestimmung der mittleren Geschwindigkeit nach Formel (I) untersucht werden. Wird in das n -fache Integral, welches zum mittleren Fehler führt, statt $v = \frac{l}{\frac{1}{n} \sum t_i}$, welcher Wert (Ia) liefert, die Ge-

schwindigkeit wieder mit einem Faktor c multipliziert eingesetzt, so ergibt die Minimumbedingung

$$c = 1 - \frac{1}{\alpha l n v} + \frac{3}{4 \alpha^3 l^3 n^3 v^3} \dots$$

Der mit dem kleinsten mittleren Fehler behaftete Wert von v ergibt sich also nach der Formel:

$$v = \left(1 - \frac{1}{\alpha l n v} + \frac{3}{4 \alpha^3 l^3 n^3 v^3} \dots \right) \frac{l}{\frac{1}{n} \sum t_i} \quad (\text{VII})$$

und der mittlere Fehler selbst zu:

$$\frac{\mu(v)}{v} = \frac{1}{\sqrt{2 \alpha l n v}} \sqrt{1 - \frac{1}{2 \alpha l n v} + \frac{3}{8 \alpha^3 l^3 n^3 v^3} \dots} \quad (\text{VIIa})$$

In den Korrekturgliedern genügt es natürlich, für den wahren Wert v den nach (I) berechneten Wert einzusetzen.

Stellen wir hingegen die Mittelwertsbedingung an die Formel für v , d. h. verlangen wir, daß das aus sehr vielen Zeitenserien zu je n Zeiten gemittelte v sich mit dem wahren Werte deckt, so erhalten wir die Formel

$$v = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 \alpha l v n}} \frac{l}{\frac{1}{n} \sum t_i}, \quad (\text{VIII})$$

und der mittlere Fehler dieses v ergibt sich zu

$$\frac{\mu(v)}{v} = \frac{1}{\sqrt{2 \alpha l v n}} \sqrt{1 - \frac{1}{4 \alpha^2 l^2 v^2 n^2} \dots} \quad (\text{VIII a})$$

¹⁾ J. Bertrand, C. R. 106, 440, 1888.

Dieser Wert von v und sein mittlerer Fehler liegen also zwischen den korrespondierenden Werten nach den Formeln (I) und (VII), (Ia) und (VIIa).

Die Forderung, ein mit dem kleinsten mittleren Fehler behaftetes Resultat zu erhalten, führte uns also zu Formeln, die von den bisher verwendeten abweichen. Während sich aber der Korrekturfaktor für das mittlere, sekundliche Verschiebungsquadrat exakt angeben läßt, läßt er sich für die Geschwindigkeit nur näherungsweise berechnen.

Der besseren Übersicht halber sind in der folgenden Tabelle 2 die oben besprochenen Formeln für v und λ^2 und ihr mittlerer Fehler noch einmal zusammengestellt, wobei jedoch jene Fürthsche Korrektur, welche auf die kleinste vorkommende Zeit Rücksicht nimmt und auch die Formeln, die zum λ_n^2 in der Horizontalen führen, weggelassen wurden.

Tabelle 2.

	A	B
$v =$	$\frac{l}{\frac{1}{n} \sum t_i}$ (I)	$\frac{1}{1 + \frac{1}{2alnv}} \frac{l}{\frac{1}{n} \sum t_i}$ (VIII)
$\frac{\mu(v)}{v} =$	$\frac{1}{\sqrt{2alnv}} \sqrt{1 + \frac{3}{2alnv}}$ (Ia)	$\frac{1}{\sqrt{2alnv}} \sqrt{1 - \frac{1}{4a^2l^2n^2v^2}} \dots$ (VIIIa)
$\lambda^2 =$	$l^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\bar{t}} \right)$ (II)	$\frac{l^2 n}{n-1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\bar{t}} \right)$ (III) (Fürth)
$\frac{\mu(\lambda^2)}{\lambda^2} =$	$\frac{\sqrt{2n-1}}{n}$ (IIa)	$\sqrt{\frac{2}{n-1}}$ (IIIa)

	C
$v =$	$\left(1 - \frac{1}{alnv} + \frac{3}{4a^2l^2n^2v^2} \right) \frac{l}{\frac{1}{n} \sum t_i}$ (VII)
$\frac{\mu(v)}{v} =$	$\frac{1}{\sqrt{2alnv}} \sqrt{1 - \frac{1}{2alnv} + \frac{3}{8a^2l^2n^2v^2}} \dots$ (VIIa)
$\lambda^2 =$	$\frac{l^2 n}{n+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\bar{t}} \right)$ (IV)
$\frac{\mu(\lambda^2)}{\lambda^2} =$	$\sqrt{\frac{2}{n+1}}$ (IVa)

Die mit A überschriebene Spalte enthält die ursprünglichen, die Spalte B die der Mittelwertsforderung und die Spalte C die der Forderung maximaler Genauigkeit genügenden Formeln.

Um den Unterschied der Größe des mittleren Fehlers im Verschiebungsquadrat durch Zahlenwerte zu belegen, sind in der Tabelle 3 die mittleren Fehler im nach den Formeln (II), (III) und (IV) berechneten $\bar{\lambda}^2$ aus 10, 20 und 40 Zeiten angegeben.

Tabelle 3.

n	$\frac{\mu(\bar{\lambda}^2)}{\bar{\lambda}^2}$ in Prozent		
	II	III	IV
10	43,6	47,1	42,6
20	31,2	32,4	30,9
40	22,2	22,7	22,1

Wie aus dieser Tabelle und den Formeln für $\bar{\lambda}^2$ ersichtlich ist, wird also noch bei relativ kleinen Zeitenanzahlen die Frage einer Korrektur an der ursprünglichen $\bar{\lambda}^2$ -Formel praktisch bedeutungslos; ein Umstand, dem bei der Auswahl der günstigsten Formel jedoch keinerlei Bedeutung zukommen kann.

Eine Beurteilung des Einflusses der Korrekturen in den Formeln für die mittlere Geschwindigkeit läßt sich, da hier die Größe des mittleren Fehlers außer von n auch noch von den individuellen Teilchenkonstanten abhängt, erst an Hand konkreter Beispiele durchführen.

3. Vergleich mit der Erfahrung. Schon in einer früheren Arbeit wurden vom Verfasser¹⁾ die Ausdrücke für die Genauigkeit der aus den unkorrigierten Formeln berechneten Werte von Geschwindigkeit und Verschiebungsquadrat einer experimentellen Kontrolle unterzogen, wobei sich eine befriedigende Bestätigung derselben ergeben hat. Als Zahlenmaterial wurden damals die vom Verfasser seinerzeit²⁾ an Selen angestellten Beobachtungen herangezogen und heute, wo es sich darum handelt, so feine Unterschiede in der Genauigkeit nachzuweisen, bin ich noch ebenso gezwungen, auf diese Zeitenserien zurückzugreifen. Denn eine experimentelle Bestimmung des mittleren Fehlers im arithmetischen Mittel oder im mittleren Fehlerquadrat ist ja nur aus einer sehr viele Einzelbeobachtungen umfassenden Serie möglich.

¹⁾ E. Schmid, Phys. ZS. 22, 438, 1921.

²⁾ l. c.

Vorerst soll — obwohl dies schon einmal geschehen ist ¹⁾ — Formel (2) einer experimentellen Kontrolle unterzogen werden. Damals waren für n die Werte 50 und 100 gewählt worden, wobei 1500 bzw. 1800 Einzelbeobachtungen zur Verfügung standen. Es wurden also beispielsweise die 1500 Zeiten des Partikels I in 30 Gruppen zu je 50 Zeiten geteilt und die Verteilung der daraus berechneten $\bar{\lambda}^2$ untersucht.

Da nun durch die oben erwähnte Überprüfung der Formel (IIa), welche für die Werte $n = 10, 20, 40, 100$ und 150 durchgeführt worden war, der Hauptteil der auch für die Verteilungsuntersuchung nötigen Rechenarbeit geleistet war, wurde schon damals ein Vergleich der aus der Theorie folgenden und der wirklich aufgetretenen Verteilung der $\bar{\lambda}^2$ -Werte aus je 10 Zeiten durchgeführt. Formel (2) wurde in der ihr ursprünglich vom Verf. gegebenen Form

$$w(u)du = \left(\frac{1}{2\bar{\lambda}^2}\right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{u^{\frac{n-3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} e^{-\frac{u}{2\bar{\lambda}^2}} du$$

der theoretischen Untersuchung zugrunde gelegt. [$w(u)du$ stellt die Wahrscheinlichkeit dar, daß die Quadratsumme von n Verschiebungen zwischen u und $u + du$ liegt.] Als wahrer Wert des Verschiebungsquadrates und der Geschwindigkeit wurden die aus allen 1502 Zeiten erschlossenen Werte verwendet. Tabelle 4 enthält in der dritten

Tabelle 4.

$\bar{\lambda}_{10}^2 \cdot 10^6$ zwischen	Häufigkeit		Häufigkeit			
	theor.	exper.	theor.	experimentell		
0 — 0,2	0,40	1	0,13	—	1	—
0,2 — 0,4	5,44	5	1,81	1	1	3
0,4 — 0,6	12,42	10	4,14	2	4	4
0,6 — 0,8	20,30	22	6,77	5	8	9
0,8 — 1,0	23,15	28	7,72	10	10	8
1,0 — 1,2	21,82	30	7,27	15	10	5
1,2 — 1,4	18,80	19	6,27	7	7	5
1,4 — 1,6	14,88	5	4,96	4	1	—
1,6 — 1,8	10,98	13	3,66	2	5	6
1,8 — 2,0	7,56	7	2,52	2	1	4
2,0 — 2,2	5,07	2	1,69	—	1	1
2,2 — 2,4	3,90	2	1,30	1	—	1
2,4 — 2,6	2,13	2	0,71	—	—	2
2,6 — 2,8	1,35	3	0,45	1	1	1
2,8 — 3,0	0,85	1	0,28	—	—	1
3,0 — 3,2	0,52	0	0,17	—	—	—
3,2 — ∞	0,51	0	0,17	—	—	—

¹⁾ Vgl. Anmerkung 3, S. 213.

Spalte die Anzahl der wirklich in das durch Spalte 1 gegebene Intervall fallenden Verschiebungsquadrate, während in der zweiten Spalte der entsprechende theoretische Wert angegeben ist.

Teilt man die ganze Zeitenserie in drei Gruppen zu je 500 Zeiten und überprüft nun für jede dieser Gruppen die Verteilung der Verschiebungsquadrate für $n = 10$, so kommt man zu den weiteren Spalten der Tabelle.

Wie man der Tabelle entnimmt, ist die Übereinstimmung im großen und ganzen befriedigend. Die Unsymmetrie der Verteilungsformel kommt voll zum Ausdruck. Während die aus der ganzen Serie und den beiden ersten Gruppen zu 500 Zeiten folgenden Verteilungen ein leichtes Zusammendrängen um mittlere Werte zeigen, zeigt die letzte Gruppe eine schwache Bevorzugung großer λ^2 -Werte.

Für dasselbe Partikel I wurde nun für $n = 10$ der mittlere Fehler im nach den Formeln (III) und (IV) berechneten Verschiebungsquadrat bestimmt¹⁾. Tabelle 5 gibt in der zweiten Spalte den theoretischen und in der dritten Spalte den experimentellen Wert des mittleren Fehlers in Prozent von $\bar{\lambda}^2$.

Tabelle 5.

Formel	$\frac{\mu(\bar{\lambda}^2)}{\bar{\lambda}^2}$ in Prozent				
	theor.	exper.	1—500	500—1000	1000—1500
II	43,6	41,7	35,4	39,9	48,7
III	47,1	44,3	36,3	41,5	53,3
IV	42,6	42,4	37,0	42,6	46,7

Der mittlere Fehler von (IV) ergibt sich zwischen den beiden anderen, statt der kleinste zu sein. Außer der Kleinheit der Unterschiede spielt hier noch folgender Umstand eine Rolle. Die von Fürth vorgeschlagene Korrektur, welche in der Formel (III) enthalten ist, vergrößert den Wert von $\bar{\lambda}^2$, während die Korrektur, die zum minimalen Fehler führt, gerade umgekehrt wirkt. Wenn nun, wie dies zufällig bei diesem Partikel der Fall ist, mittlere Werte häufiger, als theoretisch erwartet wird, vorkommen, so wird Formel (IV) den mittleren Fehler eventuell vergrößern, da eben den vielen größeren Beiträgen, welche die kleinen λ^2 -Werte zum mittleren Fehler liefern, zu wenig Verkleinerungen gegenüberstehen, die von den großen Werten herrühren. Bei den ersten beiden Gruppen zu 500 Zeiten,

¹⁾ Die Messungsprotokolle sind in der unter l. c. bezeichneten Arbeit veröffentlicht.

deren Resultate in den Spalten 4 und 5 verzeichnet sind, sehen wir, der noch größeren Benachteiligung großer $\bar{\lambda}^2$ -Werte entsprechend, die Vergrößerung des mittleren Fehlers noch deutlicher.

Bei der dritten Gruppe ist die Sache gerade umgekehrt. Hier finden wir leichte Bevorzugung großer Werte von $\bar{\lambda}^2$ und demgemäß deutlich kleineren Fehler im $\bar{\lambda}^2$ nach Formel (IV).

Formel (III), welche in unserem Beispiel in allen Fällen den mittleren Fehler vergrößert, könnte bei nach kleineren Werten verschobener Verteilung der λ^2 den Fehler verkleinern, wird ihn aber bereits bei schwacher Bevorzugung großer λ^2 -Werte erheblich vergrößern.

Wenn die Schlüsse aus diesem einen Partikel auch noch keineswegs bindende sein können, so wird man nach dem eben Gesagten das Ergebnis des Vergleiches kaum als eine experimentelle Widerlegung, sondern vielleicht eher als eine Bestätigung der Theorie ansehen können.

Wir wenden uns nun zu Formel (VI), welche bei Gaußscher Verteilung der Verschiebungen den genauesten Wert des mittleren Verschiebungsquadrates gibt. Als Beobachtungsmaterial werden die 420 Verschiebungen in horizontaler Richtung des Partikels XIII (l. c.) verwendet, an denen die Genauigkeit der Formel (V) auch bereits¹⁾ überprüft worden ist. Das Ergebnis für $n = 10$ stellt Tabelle 6 dar und es zeigt sich, daß durch Division durch $n + 2$, statt durch n , tatsächlich der mittlere Fehler herabgedrückt wird.

Tabelle 6.

Formel	$\frac{\mu(\bar{\lambda}^2)}{\bar{\lambda}^2}$ in Prozent	
	theor.	exper.
V	44,7	39,0
VI	40,8	38,1

Wenn wir nun noch eine experimentelle Kontrolle der Formeln (Ia), (VIIa) und (VIIIa) versuchen wollen, bemerken wir vor allem, daß dies nur mit sehr kleinen Teilchen möglich sein wird, da nur dort die Korrekturglieder einen nennenswerten Betrag erreichen. Es werden also demgemäß im folgenden die Partikel XVI und XVII (l. c.) herangezogen, an denen je 100 Fallzeiten beobachtet wurden²⁾. Es wurden die Zeiten in Gruppen zu je 10 geteilt, für jede Gruppe die

¹⁾ E. Schmid, Phys. ZS. 22, 438, 1921.

²⁾ Die Messungsprotokolle von Partikel XVI sind l. c. enthalten.

Geschwindigkeit nach den Formeln (I), (VII) und (VIII) berechnet und mit dem Gesamtmittel jeder Serie als wahren Wert der mittlere Fehler bestimmt. Den Vergleich mit den theoretisch geforderten Werten gibt Tabelle 7, in der auch die Werte c der Korrekturfaktoren angegeben sind.

Tabelle 7.

Partikel XVI.
Partikel XVII.

Formel	$\frac{\mu(v)}{v}$ in Proz.		c	$\frac{\mu(v)}{v}$ in Proz.		c
	theor.	exper.		theor.	exper.	
I	34,1	29,9	—	29,7	28,2	—
VII	28,8	25,4	0,840	25,9	25,1	0,870
VIII	30,0	26,2	0,917	26,8	25,8	0,932

Die Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment ist vollauf befriedigend. Die Minimumformel liefert in beiden Fällen wirklich den kleinsten mittleren Fehler und die Mittelwertsformel steht wirklich zwischen diesem und dem Fehler des arithmetischen Mittels.

Hervorzuheben ist noch die Größe der Korrekturfaktoren, die in dieser Größenordnung — die Teilchen zeigten bereits lebhaft Beugungsfarben — bei kurzen Serien schon erheblich von 1 abweichen. Bei Partikel XVI würde man, wenn nur 10 Zeiten zur Verfügung ständen, die daraus nach (I) berechnete Geschwindigkeit um etwa 16 Proz. (da man ja dann auch nicht die wahren Werte von α und v zur Verfügung hätte), bei Partikel XVII um etwa 13 Proz. verkleinern, um das Minimum des Fehlers zu erhalten. Zur Erklärung der an so kleinen Teilchen häufig beobachteten, sog. Subelektronen kann diese Korrektur nicht herangezogen werden, da sie ja gerade im entgegengesetzten Sinne wirkt.

Daß diese Korrektur wirklich nur bei sehr kleinen Geschwindigkeiten von Bedeutung ist, erhellt daraus, daß sie bei Partikel XIV (l. c.), welches noch deutlich gelbgrüne Beugungsfarbe zeigt, für $n=10$ zu den Werten 18,1, 17,1 und 17,3 Proz. für die mittleren Fehler der Formeln (I), (VII) und (VIII) führt, wobei die Korrekturfaktoren 0,943 und 0,971 sind. Eine experimentelle Bestätigung dieser feinen Unterschiede zu erhalten, wurde nicht mehr versucht.

4. Zusammenfassung. Wenn man jenen Wert einer unbekannten Größe, für welche mehrfache Beobachtungen vorliegen, als den günstigsten ansieht, welchem der kleinste mittlere Fehler zukommt, so ergeben sich zur Berechnung von Geschwindigkeit und mittlerem, sekundlichen Verschiebungsquadrat aus einer vorliegenden Zeitenserie

Formeln, welche von den bisher üblichen abweichen. Während sich der zur Berechnung des Verschiebungsquadrates notwendige Korrekturfaktor exakt berechnen läßt und nur eine Funktion der Zeitenanzahl ist, läßt sich der Korrekturfaktor zur Berechnung der genauesten Geschwindigkeit, der außer von der Zeitenanzahl auch noch von den individuellen Teilchenkonstanten abhängt, nur näherungsweise bestimmen.

Obwohl zur experimentellen Prüfung der angegebenen Formeln ein sehr bedeutendes statistisches Zahlenmaterial zur Verfügung stehen müßte, so scheint doch die an bereits vorhandenem Beobachtungsmaterial durchgeführte experimentelle Kontrolle die theoretischen Erwägungen zu bestätigen. Es ergibt sich hierbei auch, daß die an der Geschwindigkeit anzubringende Korrektur nur bei sehr kleinen Teilchen von Bedeutung ist.

Wien, II. phys. Laboratorium der Techn. Hochschule, 23. Febr. 1922.
