Über affine Geometrie XXVIII: Bestimmung aller Flächen, die von den umschriebenen Zylindern längs ebener Kurven berührt werden.

Von

Wilhelm Blaschke in Hamburg.

Von einer Frage der Variationsrechnung aus[1]) kommt man zu der im Titel gestellten Aufgabe, die man auch so ausdrücken kann: *Alle Flächen zu ermitteln, die bei jeder Parallelbeleuchtung ebene Eigenschattengrenzen haben.* Ich will hier zeigen: *Die einzigen nicht abwickelbaren Flächen mit dieser Eigenschaft sind die Flächen von zweiter Ordnung.* Dabei werde ich von den Flächen nur voraussetzen, daß die Koordinaten eines Flächenpunktes fünfmal stetig ableitbare Funktionen der Flächenparameter sind. Früher[1]) hatte ich das Ergebnis unter der erheblich engeren Annahme bewiesen, daß die Auswahl nur unter den geschlossenen konvexen Flächen (Eiflächen) zu treffen sei. Zum Schluß gebe ich noch als Anwendung eine Kennzeichnung der Maßbestimmungen Riemanns unter den allgemeineren, zu beliebigen Variationsproblemen gehörigen Maßbestimmungen.

§ 1.

Hyperbolisch gekrümmte Flächen.

Besonders einfach läßt sich der Nachweis für den Fall hyperbolisch gekrümmter Flächen erbringen, was schon Herr G. Herglotz bemerkt hat, wie mir durch mündliche Mitteilung bekannt ist, nämlich etwa folgendermaßen. An einer Stelle hyperbolischer Krümmung kann man durch ge-

[1]) W. Blaschke, Räumliche Variationsprobleme mit symmetrischer Transversalitätsbedingung. Berichte der math.-phys. Klasse d. sächs. Ges. d. Wiss. Leipzig, 68 (1916), S. 50–55. Vgl. auch im folgenden § 3.

eignete Wahl des (im allgemeinen schiefwinkligen) Achsenkreuzes die Flächengleichung in der Form ansetzen:

$$z = xy + \tfrac{1}{6}(Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3) + (4). \tag{1}$$

Für die Berührungspunkte der Fläche mit dem Zylinder, dessen Erzeugende parallel zur x-Achse laufen, muß $z_x = \partial z / \partial x = 0$ sein oder

$$0 = y + \tfrac{1}{2}(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2) + \dots . \tag{2}$$

Da die Tangente an die Berührungslinie dieses Zylinders mit der Fläche im Ursprung mit der x-Achse zusammenfällt, so kann man diese „Eigenschattengrenze“ in der Form $y = y(x)$, $z = z(x)$ dargestellt denken, und man findet durch Ableitung der beiden Gleichungen (2) und (1) nach x

$$\begin{aligned} 0 &= y' + Ax + By + \dots, \\ 0 &= y'' + A + \dots; \\ z' &= y + xy' + \tfrac{1}{2}(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2) + \dots, \\ z'' &= 2y' + xy'' + Ax + By + \dots, \\ z''' &= 3y'' + A + \dots \end{aligned} \tag{3}$$

Setzt man hierin $x = y = 0$, so folgt für die Ableitungen im Ursprung

$$\begin{aligned} &y' = 0, \quad y'' = -A; \\ &z' = 0, \quad z'' = 0, \quad z''' = -2A. \end{aligned} \tag{4}$$

Soll die Eigenschattengrenze eben sein, so muß

$$y'' z''' - z'' y''' = 2A^2 = 0 \tag{5}$$

oder

$$A = 0 \tag{6}$$

sein.

Für die Asymptotenlinie auf unserer Fläche, die im Ursprung die x-Achse berührt, gilt die Differentialgleichung

$$z_{xx} + 2z_{xy}y' + z_{yy}y'^2 = 0. \tag{7}$$

Durch Ableitung nach x folgt daraus

$$\begin{aligned} z_{xxx} + 3z_{xxy}y' + 3z_{xyy}y'^2 + z_{yyy}y'^3 \\ + 2z_{xy}y'' + 2z_{yy}y'y'' = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Für den Ursprung $\mathfrak{o}$ ergibt sich aus (7) $y' = 0$ und wegen $A = 0$ aus (8) $y'' = 0$. Da für die Asymptotenlinie überdies $z' = 0$, $z'' = 0$ ist, so hat sie hier einen Wendepunkt. Vertauscht man in der ganzen Betrachtung die x- und y-Achse, so folgt, daß auch die zweite Asymptotenlinie im Ursprung $\mathfrak{o}$ einen Wendepunkt besitzt.

Da $\mathfrak{o}$ keine ausgezeichnete Rolle auf unserer Fläche spielt, so bestehen die Asymptotenlinien nur aus Wendepunkten, sind also geradlinig, und somit ist unsere Fläche notwendig eine algebraische Fläche zweiter Ordnung. Diese Flächen haben aber in der Tat die gewünschte Eigenschaft, und demnach ist für hyperbolisch gekrümmte Flächen der Nachweis zu Ende. Beschränkt man sein Augenmerk auf *analytische* Flächen, so ist damit der Nachweis auch für elliptische Flächen erledigt, sonst bedarf es für diesen Fall einer besonderen Überlegung.

§ 2.

Elliptisch gekrümmte Flächen.

An einer Stelle elliptischer Krümmung kann man durch geeignete Achsenwahl die Flächengleichung, wie man leicht einsieht[2]), auf die „kanonische“ Form bringen

$$z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{C}{6}(x^3 - 3xy^2) + \\ + \frac{1}{24}(ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4) + (5). \tag{9}$$

Für alle Flächenpunkte, deren Tangentenebenen zu einer festen Richtung in $z = 0$ parallel laufen, gilt

$$z_x + \lambda z_y = 0 \tag{10}$$

für festes λ. Die Kurve der Berührungspunkte möge in der Ebene

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \tag{11}$$

liegen. Dann müssen die beiden Gleichungen

$$\alpha x + \beta y + \frac{\gamma}{2}(x^2 + y^2) + \frac{C\gamma}{6}(x^3 - 3xy^2) + \dots = 0 \tag{12}$$

und (10) oder

$$\begin{aligned} & x + \lambda y + \frac{C}{2}(x^2 - 2\lambda xy - y^2) \\ & + \frac{1}{6}\{(a+\lambda b)x^3 + 3(b+\lambda c)x^2y + 3(c+\lambda d)xy^2 + (d+\lambda e)y^3\} \\ & + \dots = 0 \end{aligned} \tag{13}$$

dieselbe Kurve der x, y-Ebene darstellen. Nehmen wir für den Augenblick $\lambda \neq 0$, so können wir die Kurve in der Form $y = y(x)$ darstellen und finden durch Ableitung von (12) und (13) im Ursprung

---

[2]) G. Pick, Über affine Geometrie IV; Differentialinvarianten der Flächen gegenüber affinen Transformationen. Leipziger Berichte, 69 (1917), S. 107—136, bes. S. 124—126.

$$(14) \qquad y' = -\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{1}{\lambda},$$

$$(15) \qquad y'' = -\frac{\gamma(1+\lambda^2)}{\beta\lambda^2} = -C\frac{3\lambda^2-1}{\lambda^3}.$$

Daraus folgt zunächst

$$(16) \qquad \alpha : \beta : \gamma = (1+\lambda^2) : \lambda(1+\lambda^2) : C(3\lambda^2-1).$$

Die Schmiegebenen an die Eigenschattengrenzen durch einen Punkt einer beliebigen elliptisch gekrümmten Fläche umhüllen also einen rationalen Kegel (15), *der für $C \neq 0$ von dritter Klasse ist und sich für $C = 0$ auf ein Ebenenbüschel reduziert.*

Durch nochmalige Ableitung von (13) und (12) folgt unter Benutzung der bereits für y' und y'' gefundenen Werte einerseits

$$(17) \qquad y''' = -\frac{\lambda\{(a+\lambda b)\lambda^3 - 3(b+\lambda c)\lambda^2 + 3(c+\lambda d)\lambda - (d+\lambda e)\} + 3C^2(\lambda^2-1)(3\lambda^2-1)}{\lambda^5}$$

und andererseits

$$(18) \qquad y''' = -C^2\frac{(3\lambda^2-1)(\lambda^4+6\lambda^2-3)}{(1+\lambda^2)\lambda^5}.$$

Der letzte Ausdruck wäre für $C \neq 0$ ein irreduzibler Quotient eines Polynoms 6. und eines Polynoms 7. Grades in λ, könnte also mit dem vorhergehenden Ausdruck, in dem die Gradzahlen je um eine Einheit niedriger sind, nicht identisch in λ übereinstimmen. Somit muß notwendig

$$(19) \qquad C = 0$$

sein.

Um nun weiter zu schließen, kann man verschiedene Wege einschlagen. Am schnellsten kommt man zum Ziele, wenn man einen Satz aus der zwölften dieser Mitteilungen über Affingeometrie heranzieht[3]). Dort habe ich nämlich gezeigt: Wenn bei einer elliptisch gekrümmten Fläche durchweg $C = 0$ ist, d. h. wenn es zu jeder Stelle Flächen zweiter Ordnung gibt, die die Fläche in (mindestens) dritter Ordnung berühren, so ist die Fläche selbst von zweiter Ordnung. Aber man kann auch ohne diesen Hilfssatz auskommen, und zwar etwa folgendermaßen[4]).

Für $C = 0$ wird aus (16)

$$(20) \qquad \alpha : \beta : \gamma = 1 : \lambda : 0.$$

Die Gleichungen

$$(21) \qquad x + \lambda y = 0$$

[3]) W. Blaschke, Über affine Geometrie XII: Von den Eiflächen. Leipziger Berichte, 70 (1918), S. 18—37, bes. § 7, S. 30.

[4]) Die folgende Schlußweise ist ähnlich wie in meiner unter [1]) genannten Schrift.

und

(10) $$z_x + \lambda z_y = 0$$

geben also dieselbe Bedingung zwischen x, y. Somit genügt die Fläche der partiellen Differentialgleichung

(22) $$x z_y - y z_x = 0,$$

deren allgemeine Lösung die Form

(23) $$z = f(x^2 + y^2)$$

hat. Da unsere Koordinatenachsen im allgemeinen schiefwinklig sind, finden wir: Unsere Fläche ist affin zu einer Drehfläche, und jede Ebene $z =$ konst. schneidet sie in einer Ellipse.

Unsere Aufgabe ist affininvariant, wir können also durch eine Affinität erreichen, daß unser Achsenkreuz rechtwinklig und die Fläche eine wirkliche Drehfläche wird. Schneiden wir nun die transformierte Fläche durch eine Ebene $\alpha x + z = 0$, wo α genügend klein ist, so muß die Schnittkurve, da der Ursprung $\mathfrak{o}$ auf der Fläche keine ausgezeichnete Rolle spielt, wieder eine Ellipse sein, die wegen (23) zur Ebene $y = 0$ symmetrisch liegt. Durch Umdrehung dieser Ellipse um die z-Achse entsteht aber ein Stück einer Fläche zweiter Ordnung, und dieses Stück enthält eine Umgebung des Ursprungs $\mathfrak{o}$ auf der Fläche. Somit liegt diese Umgebung von $\mathfrak{o}$ ganz auf einer Fläche zweiter Ordnung, und daher muß, da $\mathfrak{o}$ auf der Fläche nicht ausgezeichnet ist, unsere ganze Fläche derselben Fläche zweiter Ordnung angehören, w. z. b. w.

§ 3.

Variationsprobleme mit symmetrischer Transversalität.

Es sei

(24) $$\int F(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ x_1', x_2', \ldots, x_n')\, dt$$

das Grundintegral eines Variationsproblems in der Parameterform von Weierstraß, so daß also die Funktion F die Homogeneitätseigenschaft hat:

(25) $$F(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ \lambda x_1', \lambda x_2', \ldots, \lambda x_n') = \lambda F(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ x_1', x_2', \ldots, x_n')$$

für $\lambda > 0$. Dann sieht die sogenannte *Transversalitätsbedingung* bekanntlich[5]) so aus

(26) $$F_1 \delta x_1 + F_2 \delta x_2 + \ldots + F_n \delta x_n = 0,$$

[5]) Vgl. etwa O. Bolza, Vorlesungen über Variationsrechnung, Leipzig und Berlin 1909, S. 303 (5).

wo

$$F_k = \frac{\partial F}{\partial x'_k}$$

bedeutet. In dieser Bedingung treten zwei Richtungen: die „Extremalenrichtung“ $x'_1 : x'_2 : \ldots : x'_n$ und die „Transversalenrichtung“ $\delta x_1 : \delta x_2 : \ldots : \delta x_n$ im allgemeinen unsymmetrisch auf, da die Beziehung in den δx_k linear, in den x'_k im allgemeinen nicht linear ist.

Es sollen nun die Variationsprobleme mit symmetrischer Transversalitätsbedingung aufgesucht werden.

Das Ergebnis ist folgendes: *Unter geeigneten Voraussetzungen über die Funktion F unter dem Grundintegral sind für $n \geqq 3$ die einzigen Variationsprobleme mit symmetrischer Transversalität die von der Form*

$$F^2 = \sum g_{ik} x'_i x'_k, \tag{27}$$

wo die g_{ik} Funktionen der x mit von Null verschiedener Determinante sind.

Die Funktion F genügt wegen (25) der Formel von Euler für homogene Funktionen

$$F_1 x'_1 + F_2 x'_2 + \ldots = F \tag{28}$$

und daraus ergibt sich durch partielle Ableitung nach den x' weiter

$$\sum F_{ik} x'_k = 0, \tag{29}$$

wenn die F_{ik} die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von F nach den x' bedeuten. Daraus folgt: Es gibt eine Funktion Φ der x und x', so daß zwischen den algebraischen Komplementen Φ_{ik} in der Matrix der F_{ik} die Beziehung

$$\Phi_{ik} = \Phi x'_i x'_k \tag{30}$$

besteht.

Als *Voraussetzung über die Funktion F* werde ich im folgenden benutzen, daß F mit den Ableitungen bis zur zweiten Ordnung stetig ist und daß Φ nicht identisch verschwindet, so daß in der wegen (29) verschwindenden Determinante der F_{ik} nicht auch alle $(n-1)$-reihigen Minoren Null sind[6]).

Für den Fall $n = 3$ läßt sich unser Satz auf die Überlegungen von § 1 und § 2 zurückführen, wenn man die Transversalitätsbedingung an der „Eichfläche“ geometrisch deutet, die im Raum der x' durch die Gleichung

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) = 1 \tag{31}$$

[6]) Die Voraussetzung $\Phi \neq 0$ entspricht dem, daß wir in den vorhergehenden Abschnitten nicht abwickelbare Flächen betrachtet hatten.

erklärt ist[1]). Hier soll aber ein anderer Nachweis erbracht werden, von dem sofort einleuchtet, daß er für jede Dimensionenzahl $n \geqq 3$ gilt.

Da in (26) die Richtungen δx_k und $-\delta x_k$ gleichwertig sind, so müssen im Fall der Symmetrie auch die Richtungen x_k' und $-x_k'$ gleichwertig auftreten. Wir können daher die x_k' als homogene Koordinaten in einem $(n-1)$-dimensionalen Raum R' deuten oder, wenn wir $x_n' = 1$ setzen, die $x_1', \ldots, x_{n-1}$ als unhomogene Koordinaten. Wir setzen bei festgehaltenen x_k

$$F_k(x_1', x_2', \ldots, x_{n-1}', 1) = y_k \tag{32}$$

und können die x' so wählen, daß eines der y_k, z. B. $y_n \neq 0$ wird. Dann können wir die $y_1 : y_n, y_2 : y_n, \ldots, y_{n-1} : y_n$ als unhomogene Koordinaten in einem Raum R wählen. Für die Funktionaldeterminante der Abbildung ergibt sich

$$\frac{\partial\left(\frac{y_1}{y_n}, \frac{y_2}{y_n}, \ldots, \frac{y_{n-1}}{y_n}\right)}{\partial(x_1', x_2', \ldots, x_{n-1}')} = \frac{1}{y_n^n} \cdot \begin{vmatrix} F_{11} & F_{21} & \ldots & F_{n-11} & y_1 \\ F_{12} & F_{22} & \ldots & F_{n-12} & y_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_{1n} & F_{2n} & \ldots & F_{n-1n} & y_n \end{vmatrix}. \tag{33}$$

Multipliziert man die erste Zeile mit x_1', die zweite mit $x_2' \ldots$ und addiert zur letzten, nachdem man diese mit $x_n' = 1$ multipliziert hat, so folgt wegen (29), daß die $n-1$ ersten Glieder der letzten Zeile Null werden und wegen (28) für das letzte der Wert F. Somit ist nach (30)

$$\frac{\partial\left(\frac{y_1}{y_n}, \frac{y_2}{y_n}, \ldots, \frac{y_{n-1}}{y_n}\right)}{\partial(x_1', x_2', \ldots, x_{n-1})} = \frac{F \cdot \Phi_{nn}}{y_n^n} = \frac{F \cdot \Phi}{y_n^{n-2}}. \tag{34}$$

Man kann also nach unseren Voraussetzungen das Stellenpaar x' in R' und y in R so wählen, daß die Funktionaldeterminante der Abbildung $\neq 0$ ausfällt, und deshalb zwei Umgebungen (x') und (y) dieser Stellen abgrenzen, die durch die Abbildung (32) eineindeutig und stetig einander zugeordnet werden.

Soll die Transversalitätsbedingung (26) symmetrisch sein, so muß auch festgehaltenen δx_k eine lineare Beziehung zwischen den x_k' entsprechen, d. h. einer „Ebene"

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n = 0 \tag{35}$$

in R muß eine „Ebene" in R' entsprechen. Da also den Ebenen in (y) die Ebenen in (x') zugeordnet sind und die Abbildung umkehrbar eindeutig und stetig ist, folgt[7]), daß die Beziehung für $n \geqq 3$ kollinear sein muß:

$$y_i = \varrho \sum g_{ik} x_k'. \tag{36}$$

[7]) Man sehe etwa das Lehrbuch von G. Darboux, Principes de géométrie analytique, Paris 1917. S. 28—32. Oder Enzyklopädie III AB 5 (A. Schoenflies), S. 449 unten.

Daraus ergibt sich aber für F

$$F = \sum x_i' y_i = \varrho \sum g_{ik} x_i' x_k', \tag{37}$$

wo der Faktor ϱ von den x und x' abhängen kann. Durch Ableitung von (37) nach x_i' folgt

$$F_i = y_i = \frac{\partial \varrho}{\partial x_i'} \sum g_{ik} x_i' x_k' + 2\varrho \sum g_{ik} x_k'. \tag{38}$$

Durch Vergleichung mit (36) ergibt sich

$$\frac{\partial \varrho}{\partial x_i'} \sum g_{ik} x_i' x_k' = -\varrho \sum g_{ik} x_k' \tag{39}$$

oder

$$\frac{\partial \ln \varrho}{\partial x_i'} = \frac{\partial}{\partial x_i'} \ln \frac{1}{\sqrt{\pm \sum g_{ik} x_i' x_k'}}. \tag{40}$$

Daraus folgt

$$\varrho = \frac{\sigma(x_1, \ldots, x_n)}{\sqrt{\pm \sum g_{ik} x_i' x_k'}}, \tag{41}$$

oder für F, wenn man noch den Faktor σ in die g_{ik} hineinnimmt:

$$F = \sqrt{\pm \sum g_{ik} x_i' x_k'}, \tag{27}$$

w. z. b. w. Für die Determinante der g_{ik} ergibt sich durch eine kleine Rechnung der Wert $F^{n+1} \cdot \Phi$. Nach unseren Voraussetzungen darf also diese Determinante nicht identisch verschwinden. Die Transversalitätsbedingung (26) wird jetzt tatsächlich symmetrisch:

$$\sum F_{ik} x_i' \delta x_k = 0. \tag{42}$$

Wenn $n = 2$ ist, gibt es noch andere Variationsprobleme mit symmetrischer Transversalität[8]).

Hamburg, zu Weihnachten 1919.

[8]) J. Radon, Über eine besondere Art ebener konvexer Kurven, Leipziger Berichte, 68 (1916), S. 123–128.

Zusatz bei der Korrektur. Wie ich aus dem letzterschienenen Hefte der Rendiconti des circolo matematico di Palermo [43 (1919), Fondamenti di geometria projettivo-differenziale, S. 1–46] ersehe, hat Herr G. Fubini während des Krieges eine Reihe von Arbeiten über projektive Differentialgeometrie der Flächen herausgegeben [vgl. die Zusammenstellung ebenda S. 3]. Diese Schriften Fubinis haben zahlreiche Berührungspunkte mit den der vorliegenden Arbeit vorausgegangenen Abhandlungen über affine Geometrie in den Leipziger Berichten 68 (1916) – 71 (1919).

(Eingegangen am 30. Dezember 1919.)