

ALGORITMO BASEADO NO MÉTODO DE POTRA-PTÁK PARA A SOLUÇÃO NÃO LINEAR DE TRELIÇAS ESPACIAIS

ALGORITHM BASED ON THE POTRA-PTÁK METHOD FOR THE NONLINEAR SOLUTION OF SPACE TRUSSES

Luiz Antonio Farani de Souza¹
Emerson Vitor Castelani²
Wesley Vagner Inês Shirabayashi³

Resumo. A tendência atual de utilizar estruturas mais esbeltas e com maior resistência torna a análise de estabilidade um assunto de fundamental importância. Pontos críticos de força e de deslocamento podem surgir na trajetória de equilíbrio da estrutura, especialmente em problemas com não linearidade geométrica severa. As treliças podem experimentar condições de carregamento que causam grandes deslocamentos, alterando significativamente sua geometria. Um algoritmo fundamentado no método iterativo de Potra-Pták com ordem de convergência cúbica, associado à técnica de continuação de Comprimento de Arco Linear, é apresentado neste artigo para a análise estática de treliças espaciais considerando a não linearidade geométrica. A formulação de Elementos Finitos Posicional é utilizada para a discretização da estrutura, que é uma abordagem alternativa que considera as coordenadas nodais como variáveis do sistema de equações não lineares ao invés dos deslocamentos. Supõe-se que o material que constitui as barras da treliça tenha comportamento constitutivo elástico linear. Simulações computacionais de problemas de treliças espaciais com o programa desenvolvido em ambiente Matlab são efetuadas, evidenciando o melhor desempenho numérico do algoritmo proposto com o método de Potra-Pták, em comparação com as análises feitas com o esquema iterativo de Newton-Raphson Padrão.

Palavras-Chave: Treliça Espacial. Elementos Finitos Posicional. Potra-Pták. Não Linearidade Geométrica. Comprimento de Arco Linear.

Abstract. The current tendency of using more slender structures with higher strength makes the stability analysis a subject of fundamental importance. Critical points of force and displacement may arise in the equilibrium path of the structure, especially in problems with severe geometric nonlinearity. Trusses may experience loading conditions that cause large displacements, altering significantly the geometry of the structure. An algorithm based on the Potra-Pták method with order of cubic convergence, associated with the Linear Arc-Length path-following technique, is presented in this paper for the static analysis of space trusses considering the geometric nonlinearity. The Positional Finite Element formulation is used for the discretization of the structure, which is an alternative approach that considers the nodal coordinates as variables of the nonlinear system instead of displacements. It is assumed that the material constituting the bars of the trusses has linear elastic constitutive behavior. Computational simulations of space trusses problems with the program developed in Matlab environment are performed, evidencing the best numerical performance of the proposed algorithm with the Potra-Pták method, compared to the analyzes done with the Standard Newton-Raphson iterative scheme.

Keywords. Space Truss. Positional Finite Element. Potra-Pták. Geometric Nonlinearity. Linear Arc-Length.

¹ Professor adjunto, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus de Apucarana. lasouza@utfpr.edu.br

² Professor adjunto, Universidade Estadual de Maringá, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática. emersonvitor@gmail.com.

³ Professor adjunto, Universidade Estadual de Maringá Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática. wvishirabayashi@uem.br

INTRODUÇÃO

Treliça é um sistema estrutural eficiente que pode sustentar carregamentos consideráveis usando uma quantidade menor de materiais. Desde o início do seu uso comercial, esse sistema tem sido cada vez mais popular, especialmente em grandes áreas abertas com poucos ou nenhum apoio intermediário. Aplicações bem sucedidas de sistemas estruturais treliçados abrangem estádios, edifícios públicos, centros de exposições, hangares de avião, pontes suspensas, entre outras (Seçer, 2009).

As treliças espaciais combinam eficiência estrutural e uma significativa redução no custo. No Brasil, o desenvolvimento e a utilização de treliças espaciais teve grande impulso com a construção, na cidade de São Paulo, do Centro de Exposições do Anhembi no final da década de 60. A treliça espacial, projetada pelo engenheiro canadense Cedric Marsh, é composta por cerca de 48000 barras tubulares de alumínio para uma área coberta de 62500 m². Nas décadas seguintes, as estruturas espaciais se multiplicaram no Brasil, com obras de relevante importância e repercussão internacional, como por exemplo: a estrutura da cobertura da Cervejaria Brahma, no Rio de Janeiro, com 132000 m² de área coberta (vãos livres de 30 m e 60 m); e o Pavilhão de Feiras e Exposições de Brasília com 57000 m² de área coberta, montada em apenas 100 dias (Souza e Gonçalves, 2006).

Quando submetidas a cargas de grande magnitude, as treliças exibem comportamento não linear e problemas de instabilidade podem surgir, como *snap-through*, *snap-back* e bifurcação. Na análise estrutural não linear, a trajetória de equilíbrio é amplamente utilizada para identificar pontos de equilíbrio relacionados a problemas de instabilidade e para explicar o comportamento não linear. Usualmente, essa trajetória é representada por uma curva deslocamento *versus* força em que cada ponto na mesma é uma configuração de equilíbrio da estrutura (Lacerda et al., 2014).

A estabilidade estrutural é um tópico importante na análise não linear. A tendência atual de usar estruturas mais esbeltas e com maior resistência torna a análise de estabilidade um assunto de fundamental relevância (Greco e Venturini, 2006). O comportamento não linear da estrutura pode surgir da não linearidade material ou geométrica. Na primeira, a relação constitutiva que descreve o material é ela própria não linear, e a resposta estrutural associada a fenômenos físicos, como a plasticidade ou o amolecimento, deve ser capturada; na segunda, a não linearidade é devida a mudanças na geometria, decorrentes de grandes deformações e/ou rotações, que entram na formulação da relação deformação-deslocamento não linear, e podem ocorrer mesmo que a relação constitutiva seja linear (Reddy, 2004; Leon et al., 2011).

Problemas não lineares decorrentes da não linearidade geométrica ou material apresentam pontos limites ou críticos ao longo da trajetória de equilíbrio. Esses pontos, mostrados na Figura 1, são pontos no caminho da solução em que a estrutura perde a estabilidade (por exemplo, com a ocorrência da flambagem) ou ocorre a bifurcação (a solução muda para dois ou mais caminhos). Os pontos limites de força (pontos de *snap-through*) ocorrem quando uma força máxima ou mínima local é alcançada na curva força *versus* deslocamento, representados pelos pontos A e D na Figura 1. Uma tangente horizontal está presente nesses pontos. Os pontos limites de deslocamento (pontos de *snap-back*), indicados pelos pontos B e C na curva, ocorrem em tangentes verticais. Nesse contexto, a estabilidade está diretamente relacionada a pontos limites de força, visto que a região entre esses pontos é instável. Usando a Teoria da Estabilidade em um sistema conservativo, um ponto crítico ocorre quando a matriz de rigidez **K** é singular (Riks, 1979).

Para se realizar a análise não linear de estruturas, com maior precisão, é de extrema importância que sejam empregados métodos ou técnicas que possam traçar a trajetória de

equilíbrio completa da estrutura. As técnicas de controle de força e iteração, também chamadas de técnicas de continuação, devem identificar e ultrapassar pontos limites de *snap-through*, de *snap-back* e de bifurcação em todos os estados de equilíbrio (Geers, 1999). Técnicas de continuação associadas ao método de Newton-Raphson foram desenvolvidas, podendo-se destacar: Controle de Deslocamento (Batoz e Dhat, 1979), Controle de Deslocamento Generalizado (Yang e Kuo, 1994; Yang e Shieh, 1990) e Controle de Comprimento de Arco (Wempner, 1971; Riks, 1972; Riks, 1979; Ramm, 1981; Crisfield, 1981; Crisfield, 1983). Na técnica de controle de Força Constante, o parâmetro de força é mantido invariável durante o ciclo iterativo. A ideia dos métodos de continuação é tratar esse parâmetro como uma variável, adicionando uma condição de restrição ao sistema de equações que descreve o equilíbrio estrutural para a determinação do mesmo.

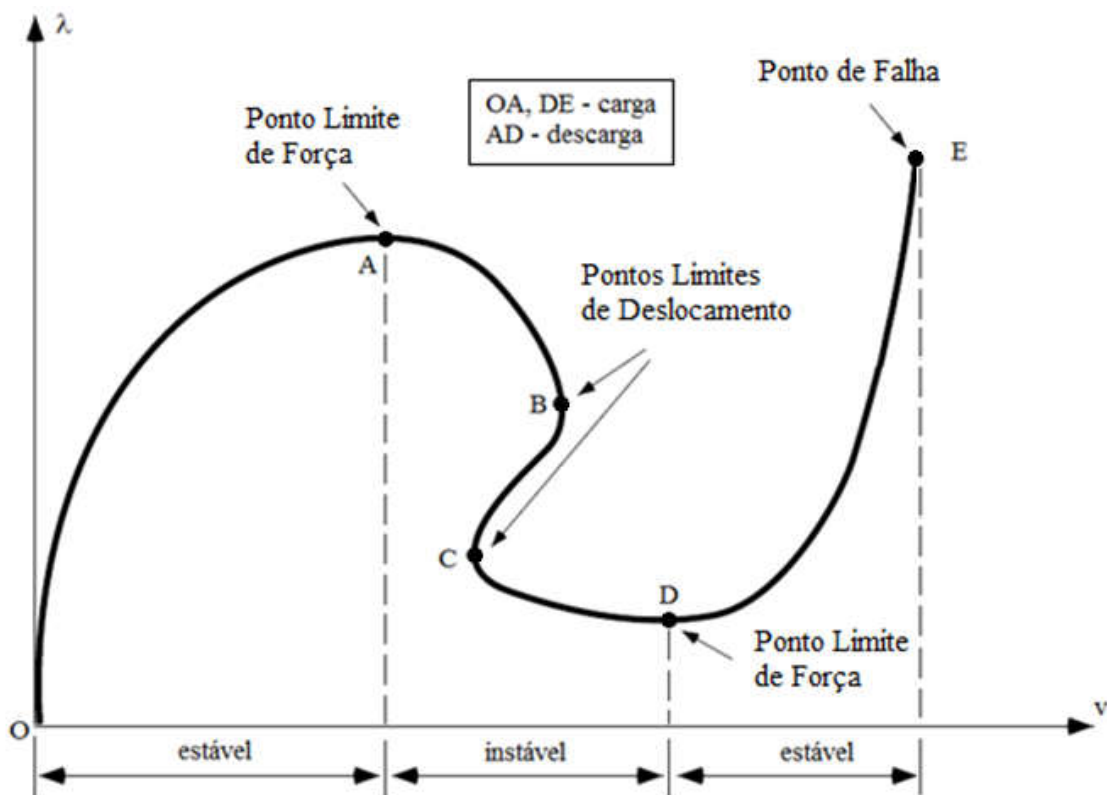


Figura 1. Pontos limites em trajetória de equilíbrio não linear. Fonte: adaptado de Leon et al. (2011).

Um procedimento para a solução do sistema de equações não lineares é eficiente quando, para uma dada precisão, a resposta é obtida de forma confiável com um mínimo de esforço do analista e com baixo custo computacional. O método de Newton-Raphson é um dos mais utilizados para resolver problemas não lineares na Engenharia Estrutural (Bathe e Dvorkin, 1983). Modificações nesse método podem ser feitas: resolver o sistema de equações não lineares de forma inexata, ou seja, resolvê-lo por algum método iterativo impondo uma precisão, como no método de Newton Inexato; aproximar a matriz Jacobiana utilizando diferenças finitas; e substituir a Jacobiana por outra matriz com alguma propriedade, como nos métodos Quase - Newton (Eustáquio, 2013). No método de Newton-Raphson Padrão é

resolvido um sistema linear a cada iteração, cuja matriz de rigidez é a Jacobiana avaliada no iterado corrente. Uma das vantagens desse método é a taxa de convergência quadrática sob condições adequadas.

Até a década de 1980, os métodos iterativos que possuíam ordem de convergência maior que a do método de Newton-Raphson exigiam o cálculo de derivadas de ordens superiores. Sendo assim, quanto maior era a ordem de convergência maior era também o custo computacional desses métodos, tornando o uso prático restrito a alguns casos. Há métodos que possuem taxa de convergência cúbica, como o método de Potra-Pták (Potra e Pták, 1984).

Para a concepção de treliças mais leves e eficientes dentro dos padrões de segurança e qualidade, é fundamental o estudo dessas estruturas próximas ao colapso devido a grandes modificações que ocorrem na geometria e a perda de linearidade na relação deformação-tensão. Neste artigo é apresentado um algoritmo baseado no método iterativo de Potra-Pták associado à técnica de continuação Comprimento de Arco Linear. Simulações com o *software* Matlab de problemas de treliças espaciais com comportamento não linear geométrico (grandes deslocamentos e rotações, e pequenas deformações) são efetuadas por meio do Método dos Elementos Finitos Posicional, cuja formulação é uma abordagem alternativa para problemas não lineares, que considera as posições nodais como variáveis do sistema não linear em vez dos deslocamentos. Assume-se que o material que constitui as barras da treliça tenha comportamento constitutivo elástico linear. Os resultados numéricos evidenciam o melhor desempenho do método de Potra-Pták nos problemas estudados, em comparação com as análises feitas com o esquema iterativo de Newton-Raphson Padrão, quanto aos parâmetros tempo de processamento e números totais de passos de força e iterações acumuladas até a convergência para a solução.

1. ELEMENTO FINITO DE TRELIÇA ESPACIAL

Esta seção descreve o elemento de treliça usando a formulação de Elementos Finitos Posicional (Coda, 2003; Coda e Greco, 2004). Esse elemento transmite somente forças axiais e tem área da seção transversal A constante. As coordenadas (X_1, Y_1, Z_1) e (X_2, Y_2, Z_2) representam a configuração inicial do elemento de barra (também conhecida como coordenadas de referência). Após uma mudança de configuração devido a deslocamentos da treliça, a barra passa a ter novas coordenadas (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) .

O comprimento inicial (ou referencial) L_0 e o comprimento atual da barra L são calculados, respectivamente, por:

$$L_0 = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2}, \quad (1)$$

$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (2)$$

A matriz de rigidez tangente \mathbf{K}_{el} e o vetor de força interna \mathbf{F}_{el} elementares são dados, respectivamente, por:

$$\mathbf{K}_{el} = \frac{EA}{L_0^3} \mathbf{B} + \frac{EA}{L_0} \varepsilon_G \mathbf{C}, \quad (3)$$

$$\mathbf{F}_{el} = \frac{EA}{L_0} \varepsilon_G \mathbf{d}, \quad (4)$$

em que EA é a rigidez axial e ε_G é a deformação de Green dada por:

$$\varepsilon_G = \frac{L^2 - L_0^2}{2L_0^2}. \quad (5)$$

Nas Eqs. (3) e (4), as matrizes \mathbf{B} e \mathbf{C} são definidas, respectivamente, por:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & -\mathbf{I}_3 \\ -\mathbf{I}_3 & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{d}\mathbf{d}^T, \quad (7)$$

em que \mathbf{I}_3 é a matriz Identidade de ordem 3 e $\mathbf{d} = [x_1-x_2, y_1-y_2, z_1-z_2, x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1]^T$.

2. PROBLEMA ESTRUTURAL

A equação que governa o equilíbrio estático de um sistema estrutural com comportamento não linear geométrico pode ser descrita por (Maximiano et al., 2014):

$$\mathbf{g} = \lambda\mathbf{F}_r - \mathbf{F}_{int}(\mathbf{d}) = \mathbf{0}, \quad (8)$$

na qual \mathbf{g} é o vetor de forças residuais ou desbalanceadas, \mathbf{F}_{int} é o vetor de forças internas (avaliado em função do vetor de coordenadas nos pontos nodais da estrutura \mathbf{d}), e λ é o parâmetro de força responsável pelo escalonamento do vetor \mathbf{F}_r , sendo este um vetor de referência e de magnitude arbitrária. O vetor de coordenadas residuais na iteração k do passo de força $t+\Delta t$ ($\delta\mathbf{d}^{(k)}$) é determinado em função da soma de duas parcelas (Crisfield, 1991):

$$\delta\mathbf{d}^{(k)} = \delta\mathbf{d}_g^{(k)} + \delta\lambda^{(k)} \delta\mathbf{d}_r^{(k)}, \quad (9)$$

na qual $\delta\lambda^{(k)}$ é o subincremento de força que deve ser avaliado ao longo do ciclo iterativo, $\delta\mathbf{d}_g^{(k)}$ é a parcela referente às forças residuais \mathbf{g} e $\delta\mathbf{d}_r^{(k)}$ é a parcela referente às forças de referência \mathbf{F}_r . Os vetores $\delta\mathbf{d}_g^{(k)}$ e $\delta\mathbf{d}_r^{(k)}$ são obtidos, respectivamente, por:

$$\delta\mathbf{d}_g^{(k)} = [\mathbf{K}(\mathbf{d}^{(k-1)})]^{-1} \mathbf{g}^{(k-1)}, \quad (10)$$

$$\delta\mathbf{d}_r^{(k)} = [\mathbf{K}(\mathbf{d}^{(k-1)})]^{-1} \mathbf{F}_r, \quad (11)$$

em que $\mathbf{g}^{(k-1)} = \lambda^{(k-1)}\mathbf{F}_r - \mathbf{F}_{int}(\mathbf{d}^{(k-1)})$ e \mathbf{K} é a matriz de rigidez representativa do sistema estrutural. Os parâmetros incrementais de força ($\Delta\lambda$) e de coordenadas nodais ($\Delta\mathbf{d}$) no passo de força $t+\Delta t$ e iteração k são calculados por, respectivamente,:

$$\Delta\lambda^{(k)} = \Delta\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^{(k)}, \quad (12)$$

$$\Delta\mathbf{d}^{(k)} = \Delta\mathbf{d}^{(k-1)} + \delta\mathbf{d}^{(k)}. \quad (13)$$

Os parâmetros totais de força (λ) e de coordenadas nodais (\mathbf{d}) são atualizados por, respectivamente:

$$\lambda^{(k)} = \lambda^{(k-1)} + \Delta\lambda^{(k)}, \quad (14)$$

$$\mathbf{d}^{(k)} = \mathbf{d}^{(k-1)} + \Delta\mathbf{d}^{(k)}. \quad (15)$$

A solução do problema estrutural dado na Eq. (8) é obtida usando um esquema incremental e iterativo. Como tal, para uma sequência incremental do parâmetro de força $\Delta\lambda$, os respectivos incrementos de coordenadas nodais $\Delta\mathbf{d}$ são calculados. A determinação do

subincremento de força $\delta\lambda$ é função da estratégia de iteração ou da equação de restrição imposta adicionalmente ao problema não linear. O vetor de deslocamentos nodais na iteração corrente ($\mathbf{u}^{(k)}$) é determinado por:

$$\mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{d}^{(k)} - {}^0\mathbf{d}, \quad (16)$$

na qual ${}^0\mathbf{d}$ é o vetor de coordenadas nodais no passo de força 0 (estrutura indeformada).

3. MÉTODO DE COMPRIMENTO DE ARCO LINEAR

A metodologia para a solução de problemas estruturais não lineares deve ser capaz de traçar a trajetória de equilíbrio completa, identificando e passando por todos os pontos críticos existentes. Para tal, utiliza-se um processo incremental-iterativo que consiste de duas etapas (Leon et al., 2011):

1. a partir da última configuração de equilíbrio da estrutura, seleciona-se um subincremento de força (definido como incremento de força inicial - $\Delta\lambda^{(0)}$), procurando satisfazer alguma equação de restrição imposta ao problema. Após a seleção desse parâmetro, determina-se o incremento inicial de coordenadas nodais $\Delta\mathbf{d}^{(0)}$; e

2. na segunda etapa de solução, procura-se por meio de uma estratégia de continuação corrigir a solução incremental inicialmente proposta na etapa anterior, com o objetivo de restaurar o equilíbrio da estrutura. Se as iterações envolverem as coordenadas nodais (\mathbf{d}) e o parâmetro de força (λ), então uma equação adicional de restrição é requerida. O formato dessa equação é o que distingue as várias estratégias de iteração.

No método de Comprimento de Arco Linear proposto por Riks (1972, 1979), a trajetória de iteração é mantida sempre ortogonal à tangente inicial em cada passo. A expressão para o incremento inicial do parâmetro de força (solução predita) é dada por:

$$\Delta\lambda^{(0)} = \frac{\Delta l}{\|\delta\mathbf{d}_r\|}, \quad (17)$$

na qual Δl representa o incremento de comprimento de arco. Como proposto por Crisfield (1991), o incremento Δl pode ser utilizado como parâmetro de controle no passo de força corrente da seguinte forma:

$$\Delta l = {}^t\Delta l \left(\frac{Nd}{t_k} \right)^{0,5}, \quad (18)$$

na qual ${}^t\Delta l$ representa o incremento de comprimento de arco no passo de força anterior, Nd é o número de iterações desejadas para a convergência do processo iterativo corrente, e t_k é o número de iterações que foram necessárias para convergir no passo de força anterior.

No processo iterativo subsequente, a equação de restrição $c^{(k)}$ usada para calcular $\delta\lambda^{(k)}$ é obtida fazendo com que a solução iterativa ($\delta\mathbf{d}^{(k)}$, $\delta\lambda^{(k)}\mathbf{F}_r$) seja ortogonal à solução incremental predita ($\Delta\mathbf{d}^{(0)}$, $\Delta\lambda^{(0)}\mathbf{F}_r$), ou seja:

$$c^{(k)} = \delta\mathbf{d}^{(k)T} \Delta\mathbf{d}^{(0)} + \delta\lambda^{(k)} \Delta\lambda^{(0)} \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r = 0. \quad (19)$$

Substituindo a Eq. (9) na Eq. (19), obtém-se uma expressão para a determinação da correção do subincremento de força ($k > 1$):

$$\delta\lambda^{(k)} = -\frac{\Delta\mathbf{d}^{(0)\text{T}}\delta\mathbf{d}_g^{(k)}}{\Delta\mathbf{d}^{(0)\text{T}}\delta\mathbf{d}_r^{(k)} + \Delta\lambda^{(0)}\mathbf{F}_r^{\text{T}}\mathbf{F}_r}. \quad (20)$$

Desprezando-se o segundo termo no denominador da Eq. (20), isto é, $\Delta\lambda^{(0)}\mathbf{F}_r^{\text{T}}\mathbf{F}_r = 0$, o parâmetro $\delta\lambda^{(k)}$ fica:

$$\delta\lambda^{(k)} = -\frac{\Delta\mathbf{d}^{(0)\text{T}}\delta\mathbf{u}_g^{(k)}}{\Delta\mathbf{d}^{(0)\text{T}}\delta\mathbf{u}_r^{(k)}}. \quad (21)$$

O sinal do incremento inicial de força ($\Delta\lambda^{(0)}$) pode ser positivo ou negativo. A escolha correta do sinal é de suma importância na definição das sequências de soluções (\mathbf{d} , λ) que permitam o avanço contínuo na resposta força-deslocamento. O procedimento utilizado neste trabalho consiste na análise do produto interno entre o vetor de coordenadas nodais incrementais obtido no passo de força anterior ${}^t\Delta\mathbf{d}$ e o vetor de coordenadas nodais corrente $\delta\mathbf{d}_r$, ou seja: se ${}^t\Delta\mathbf{d}^{\text{T}}\delta\mathbf{d}_r > 0$, então o preditor $\Delta\mathbf{d}^{(0)}$ tem o mesmo sentido de $\delta\mathbf{d}_r$; caso contrário, o preditor tem sentido oposto ($\Delta\lambda^{(0)} \leftarrow -\Delta\lambda^{(0)}$).

Com o objetivo de limitar o processo iterativo, é utilizado um critério de convergência que deve obedecer à seguinte desigualdade:

$$\|\mathbf{g}\| \leq \text{tol} \cdot \|\mathbf{F}_r\|, \quad (22)$$

em que $\|\mathbf{g}\|$ é a norma do vetor forças residuais, $\|\mathbf{F}_r\|$ é a norma do vetor de referência e tol é a tolerância definida pelo usuário.

4. MÉTODOS DE SOLUÇÃO

Os autores Potra e Pták (1984) desenvolveram um método de dois passos baseado no método de Newton-Raphson. Consistindo de duas avaliações da função dada e necessitando apenas do cálculo de derivadas de primeira ordem, foi possível obter uma convergência cúbica e um índice de eficiência maior que o do método de Newton-Raphson (Soleymani et al., 2012). O esquema iterativo para o método de Potra-Pták, adaptado ao problema estrutural não linear, é dado pelas equações:

$$\mathbf{K}(\mathbf{d}^{(k-1)})\delta\mathbf{d}^{(k)} = \mathbf{F}_1^{(k)} + \mathbf{F}_2^{(k)}, \quad (23)$$

$$\mathbf{d}^{(k)} = \mathbf{d}^{(k-1)} + \delta\mathbf{d}^{(k)}, \quad (24)$$

$$\mathbf{F}_1^{(k)} = \delta\lambda_1^{(k)}\mathbf{F}_r + \mathbf{g}(\mathbf{d}^{(k-1)}), \quad (25)$$

$$\mathbf{F}_2^{(k)} = \delta\lambda_2^{(k)}\mathbf{F}_r + \mathbf{g}(\mathbf{y}^{(k)}), \quad (26)$$

$$\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{d}^{(k-1)} + [\mathbf{K}(\mathbf{d}^{(k-1)})]^{-1}\mathbf{F}_1^{(k)}. \quad (27)$$

O algoritmo referente ao Método de Potra-Pták associado à técnica de Comprimento de Arco Linear é apresentado em seguida.

Algoritmo: Método de Potra-Pták associado à técnica de Comprimento de Arco Linear

1. $\mathbf{d} \leftarrow \mathbf{0}, \Delta\mathbf{d} \leftarrow \mathbf{0}, \lambda \leftarrow 0$
 2. Para $n \leftarrow 1, \dots, n_{\text{máx}}$
 3. $\delta\mathbf{d}_r \leftarrow \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}_r$
 4. $\Delta\lambda = \Delta l / \|\delta\mathbf{d}_r\|$
 5. Se $\Delta\mathbf{d}^T \delta\mathbf{d}_r < 0$
 6. $\Delta\lambda \leftarrow -\Delta\lambda$
 7. Fim-Se
 8. $\Delta\mathbf{d}^{(0)} \leftarrow \Delta\lambda \delta\mathbf{d}_r$
 9. $\Delta\mathbf{d} \leftarrow \Delta\mathbf{d}^{(0)}$
 10. $\mathbf{g} \leftarrow (\lambda + \Delta\lambda) \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{d} + \Delta\mathbf{d})$
 11. Para $k \leftarrow 1, \dots, i_{\text{máx}}$
 12. $\delta\mathbf{d}_g \leftarrow \mathbf{K}^{-1} \mathbf{g}$
 13. $\delta\lambda_1 \leftarrow -(\Delta\mathbf{d}^{(0)T} \delta\mathbf{d}_g) / (\Delta\mathbf{d}^{(0)T} \delta\mathbf{d}_r)$
 14. $\delta\mathbf{d}_1 \leftarrow \delta\mathbf{d}_g + \delta\lambda_1 \delta\mathbf{d}_r$
 15. $\Delta\mathbf{d} \leftarrow \Delta\mathbf{d} + \delta\mathbf{d}_1$
 16. $\Delta\lambda \leftarrow \Delta\lambda + \delta\lambda_1$
 17. $\mathbf{g} \leftarrow (\lambda + \Delta\lambda) \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{d} + \Delta\mathbf{d})$
 18. $\delta\mathbf{y} \leftarrow \mathbf{K}^{-1} \mathbf{g}$
 19. $\delta\lambda_2 \leftarrow -(\Delta\mathbf{d}^{(0)T} \delta\mathbf{y}) / (\Delta\mathbf{d}^{(0)T} \delta\mathbf{d}_r)$
 20. $\delta\mathbf{d}_2 \leftarrow \delta\mathbf{y} + \delta\lambda_2 \delta\mathbf{d}_r$
 21. $\Delta\mathbf{d} \leftarrow \Delta\mathbf{d} + \delta\mathbf{d}_2$
 22. $\Delta\lambda \leftarrow \Delta\lambda + \delta\lambda_2$
 23. $\mathbf{g} \leftarrow (\lambda + \Delta\lambda) \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{d} + \Delta\mathbf{d})$
 24. Se $\|\mathbf{g}\| \leq \text{tol} \cdot \|\mathbf{F}_r\|$
 25. Terminar a execução do Para
 26. Fim-Se
 27. Calcular $\mathbf{K}(\mathbf{d} + \Delta\mathbf{d})$
 28. $\delta\mathbf{d}_r \leftarrow \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}_r$
 29. Fim-Para
 30. $\mathbf{d} \leftarrow \mathbf{d} + \Delta\mathbf{d}$
 31. $\lambda \leftarrow \lambda + \Delta\lambda$
 32. $\Delta l \leftarrow \Delta l (Nd/k)^{0,5}$
 33. Fim-Para
-

O esquema iterativo do Método de Newton-Raphson é dado por:

$$\mathbf{K}(\mathbf{d}^{(k-1)}) \delta\mathbf{d}^{(k)} = \mathbf{F}_1^{(k)}, \quad (28)$$

$$\mathbf{d}^{(k)} = \mathbf{d}^{(k-1)} + \delta\mathbf{d}^{(k)}. \quad (29)$$

Para a análise com esse método, no algoritmo apresentado anteriormente as linhas 18 a 23 não são executadas, visto que o subincremento de deslocamento $\delta\mathbf{d}_2 = \mathbf{0}$.

5. RESULTADOS E ANÁLISE

Nesta seção são apresentados os resultados numéricos de problemas de treliças espaciais com comportamento não linear geométrico, com o intuito de aplicar o algoritmo proposto com o método de Potra-Pták e compará-lo com o método clássico de Newton-Raphson Padrão. O peso próprio das estruturas é desprezado nas análises. Ressalta-se, ainda, que não estão contabilizadas no tempo de processamento a geração da malha e a visualização dos resultados.

O algoritmo desenvolvido para a solução do problema não linear descrito na Equação (8) foi implementado usando o *software* Matlab, versão 8.6 R2015b (MATLAB, 2015). Os testes computacionais foram realizados em um computador Core i7 - 3537U com 8GB de memória.

5.1. CÚPULA COM 25 NÓS

Na Figura 2 é mostrada uma cúpula com 25 nós e 60 elementos de barra com rigidez axial adimensional $EA = 1,0 \times 10^4$, e submetida a seis forças verticais de igual magnitude P aplicadas nos nós 13 ao 18. Este problema de treliça foi estudado por Matias (2002). Os parâmetros considerados nas simulações são: comprimento de arco inicial $\Delta l = 3,0$; número máximo de iterações em cada ciclo $i_{\max} = 100$; número de iterações desejadas $Nd = 2$; incremento de força $\Delta P = 10,0$; e tolerância $tol = 1,0 \times 10^{-6}$.

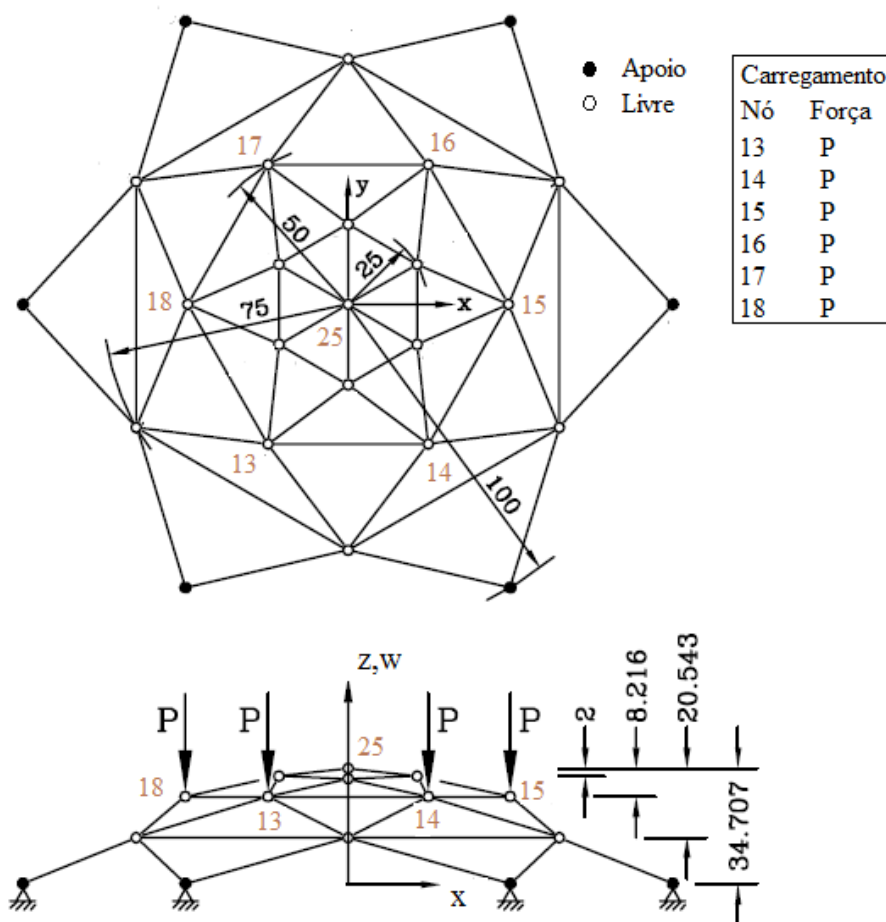


Figura 2. Modelo estrutural da cúpula com 25 nós. Fonte: adaptada de Matias (2002).

Na Figura 3 são exibidas as trajetórias de equilíbrio (deslocamento vertical no topo da estrutura *versus* força P) obtidas com os métodos de Newton-Raphson (NR) e Potra-Pták, verificando-se boa concordância com a resposta obtida por Matias (2002), com vários pontos limites de força (*snap-throughs*) e de deslocamento (*snap-backs*). O ponto limite de força é um ponto extremo (ponto de máximo ou mínimo) no caminho de equilíbrio, em que a tangente é horizontal; e o ponto de deslocamento é um ponto cuja tangente é vertical no caminho de equilíbrio. Quando a estrutura atinge os pontos críticos a mesma pode tornar-se instável e, por isso, a identificação desses pontos é de grande importância para um projeto estrutural de engenharia. Na Tabela 1 são apresentados os resultados numéricos das simulações efetuadas, quanto aos números totais de incrementos de força (NP) e iterações acumuladas (k_t) até a convergência para a solução e o tempo de processamento t (em segundos).

Na Figura 4 é mostrada a cúpula na configuração deformada para os passos de força NP = 3, 50, 100 e 174, identificando as barras tracionadas (cor preta) e comprimidas (cor vermelha), a partir da simulação com o método de solução de Potra-Pták. Vê-se, nessa figura, que com o avanço dos incrementos de força há barras que invertem o sinal da força normal, alterando a tensão de tração para tensão de compressão e vice-versa.

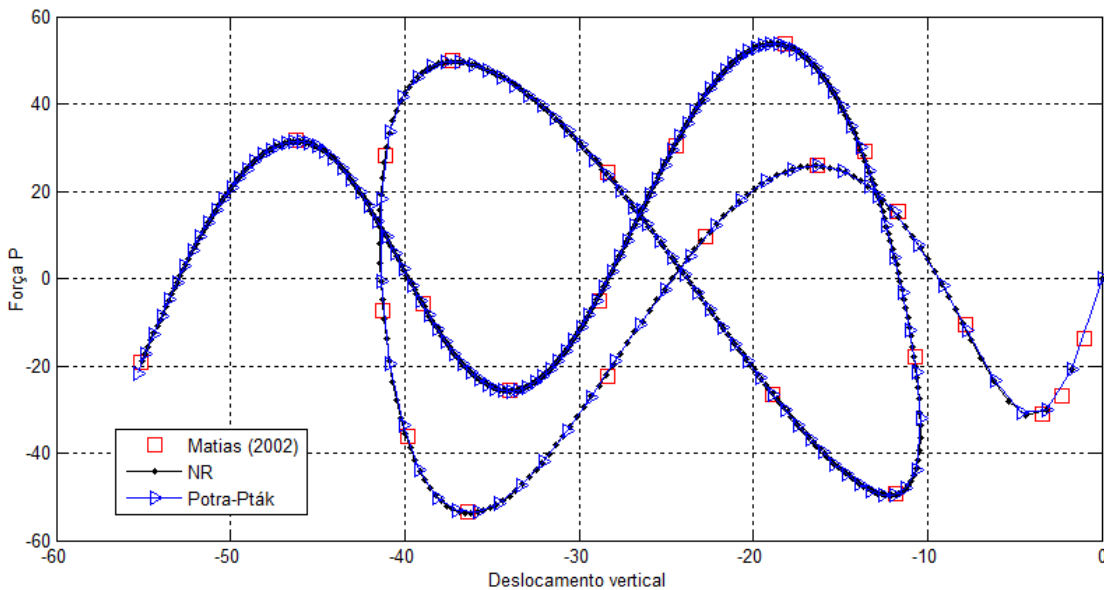


Figura 3. Trajetórias de equilíbrio da cúpula com 25 nós.

Tabela 1. Resultados numéricos das simulações da cúpula com 25 nós.

Método	NP	k_t	t (s)
NR	575	1163	6,605297
Potra-Pták	174	356	2,550688

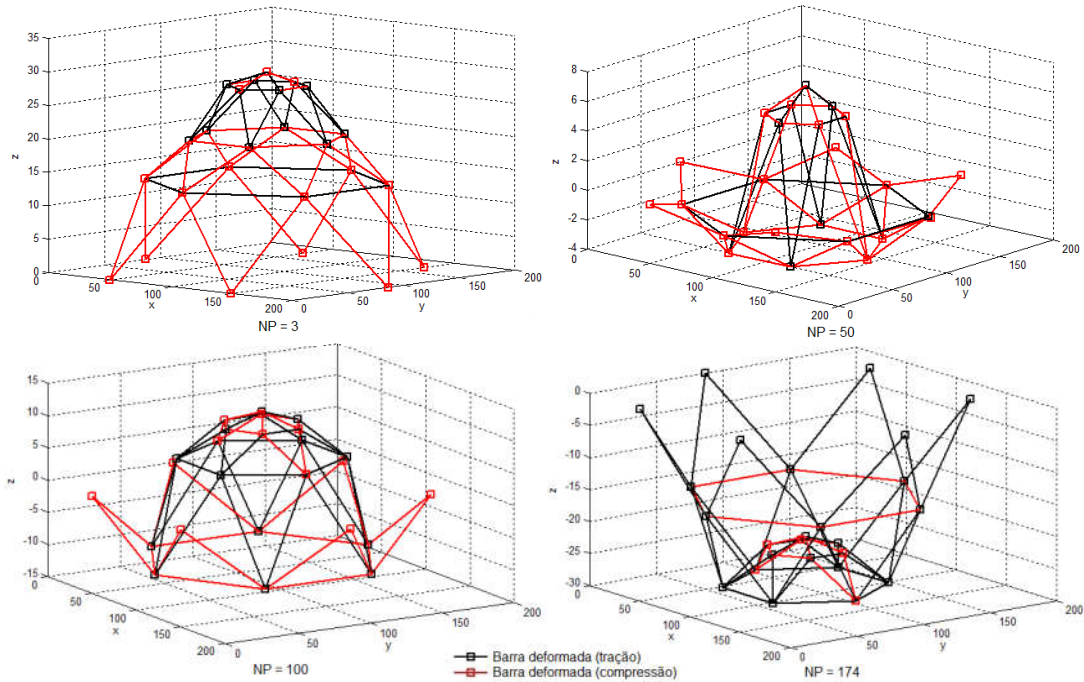


Figura 4. Cúpula com 25 nós na configuração deformada para os passos de força NP = 3, 50, 100 e 174.

5.2. CÚPULA COM 73 NÓS

A Figura 5 ilustra uma cúpula construída de aço com módulo de elasticidade longitudinal $E = 206,0$ GPa. A seção transversal de todas as barras é $A = 2,16 \times 10^{-4}$ m². Na base da treliça há apoios do tipo pino, e uma força vertical P é aplicada no ápice da mesma. Essa estrutura possui 73 nós, 168 elementos de barra e 147 graus de liberdade. A Tabela 2 apresenta os valores para os parâmetros NP, k_t e t (em segundos), obtidos das simulações com os métodos de NR e Potra-Pták. Nas análises foram considerados $\Delta l = 0,01$, $N_d = 3$, $i_{\max} = 100$, $\Delta P = 37,5$ kN, e $\text{tol} = 1,0 \times 10^{-6}$.

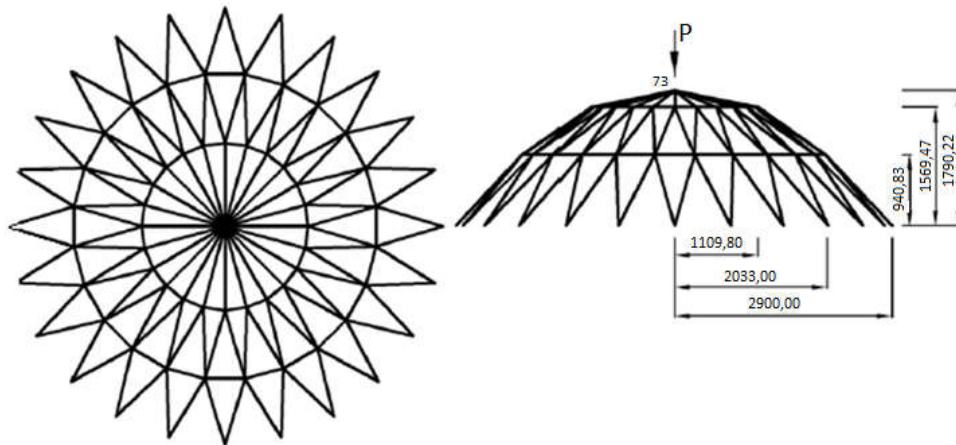


Figura 5. Modelo estrutural da cúpula com 73 nós. Fonte: adaptada de Rezaiee-Pajand et al. (2012).

As curvas deslocamento vertical no topo da cúpula *versus* força P obtidas com o algoritmo implementado são mostradas na Figura 6 com dois pontos limites de força, comparando-as com os resultados numéricos de Rezaiee-Pajand et al. (2012). As simulações efetuadas com os códigos desenvolvidos neste trabalho foram conduzidas para além dos pontos de equilíbrio obtidos por esses autores. O ponto (a), na Figura 6, é um ponto crítico que representa a força máxima em que a estrutura pode suportar antes do *snap-through*. Nas posições intermediárias, a força P decresce e reverte de sinal duas vezes enquanto o deslocamento vertical continua a crescer. Entretanto, é impossível permanecer em uma das posições intermediárias porque elas são posições de equilíbrio instável. Quando o efeito *snap-through* termina no ponto (b), a estrutura começa a suportar valores adicionais de força. A cúpula indeformada (posição inicial) e deformada (posição final) são apresentadas na Figura 7, identificando as barras tracionadas e comprimidas.

Tabela 2. Resultados numéricos das simulações da cúpula com 73 nós.

Método	NP	k_t	t (s)
NR	105	284	4,644256
Potra-Pták	36	70	1,685369

5.3. TRELIÇA ESPACIAL COM 46 NÓS

Na Figura 8 é apresentado o modelo estrutural de uma treliça espacial do tipo quadrado sobre quadrado, com módulos piramidais de 2,5 m x 2,5 m e altura de 1,5 m, sendo três módulos na direção do menor vão e seis módulos na direção do maior vão, submetida a forças verticais nos nós indicados. Esta estrutura foi adaptada do trabalho de Souza e Gonçalves (2006). A estrutura é apoiada em dois vértices (nós 1 e 22) e em dois pontos laterais (nós 5 e 26), apresentando um balanço com 5,0 metros de comprimento. Os banzos inferiores da treliça são constituídos por barras de seção tubular vazada $\Phi 76 \times 2$ e as demais barras por $\Phi 60 \times 2$, com módulo de elasticidade longitudinal $E = 200,0$ GPa. Nas simulações são considerados os seguintes parâmetros: $\Delta l = 0,1$; $N_d = 2$; $i_{\max} = 100$; $\Delta P = 10,0$ N; e $tol = 1,0 \times 10^{-6}$.

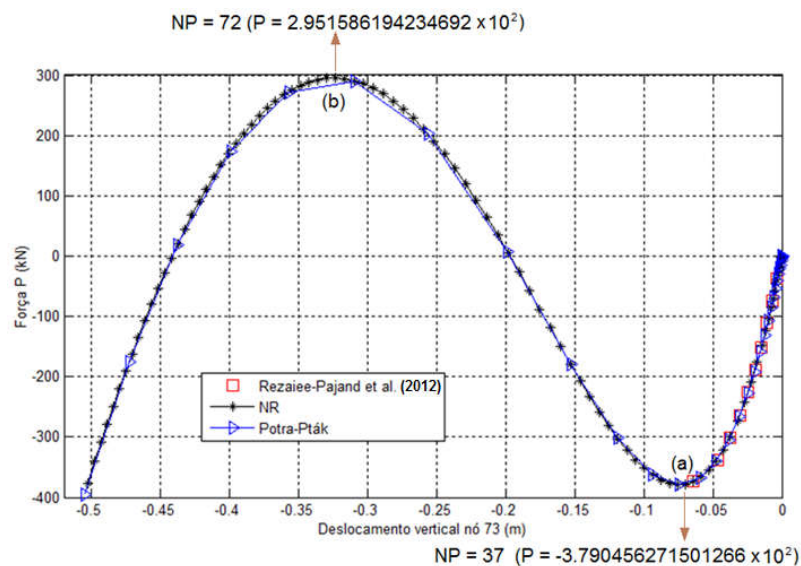


Figura 6. Curvas deslocamento vertical *versus* força P no topo da cúpula com 73 nós.

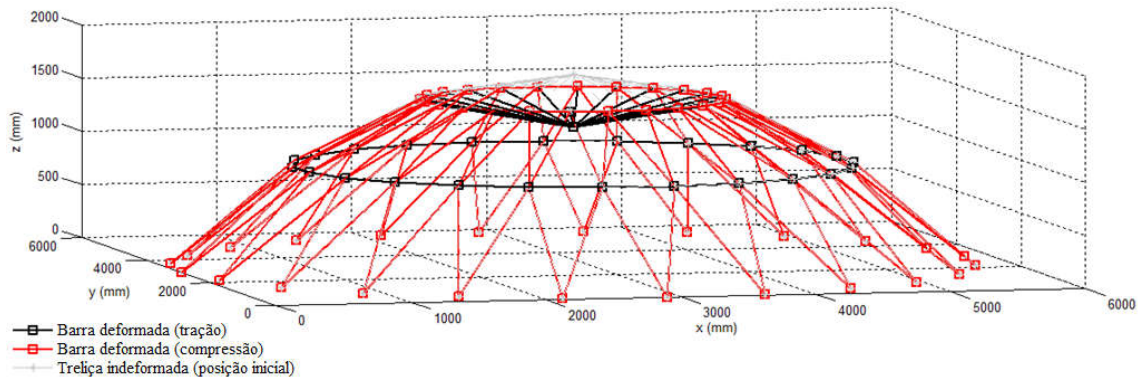


Figura 7. Cúpula com 73 nós nas configurações indeformada e deformada.

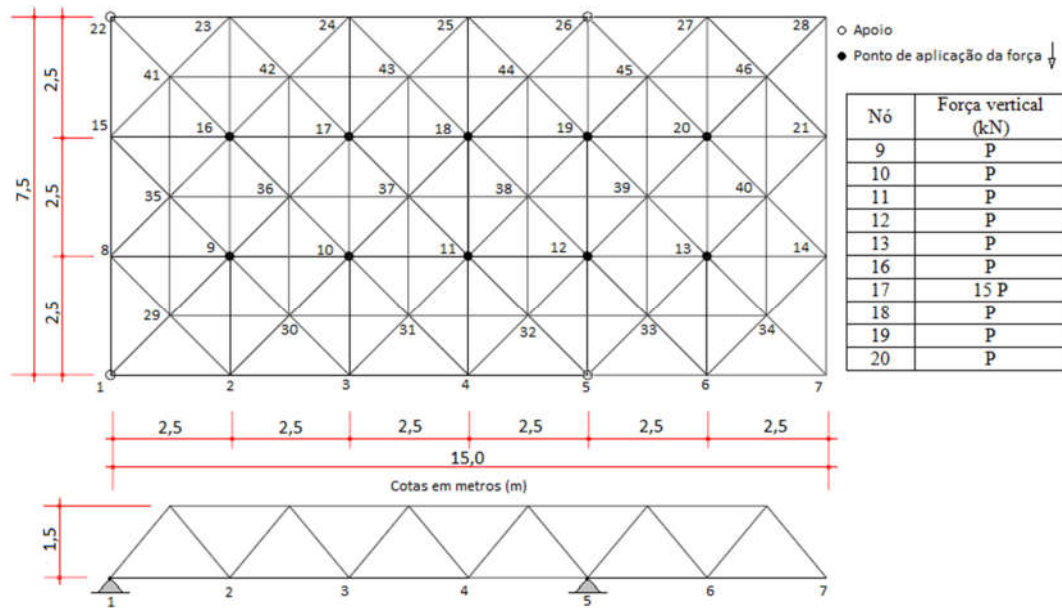


Figura 8. Modelo estrutural da treliça espacial com 46 nós.

Na Figura 9 são mostradas as configurações indeformada e deformada da treliça, indicando as barras que estão tracionadas e comprimidas. As deformações máximas de tração e compressão ocorrem nas barras 23-24 (banzo inferior) e 42-43 (banzo superior), respectivamente. Na Tabela 3 são apresentados os resultados numéricos (NP, k_t e t) obtidos com os métodos de NR e Potra-Pták.

Os caminhos de equilíbrio (deslocamento vertical *versus* força P) em pontos específicos da estrutura (nós 2, 15 e 28) aparecem na Figura 10. Na região em balanço, vê-se que há pontos com deflexões positivas, como observado na curva deslocamento vertical no nó 28 *versus* força P (Figura 10c), ocorrendo o levantamento de parte da estrutura.

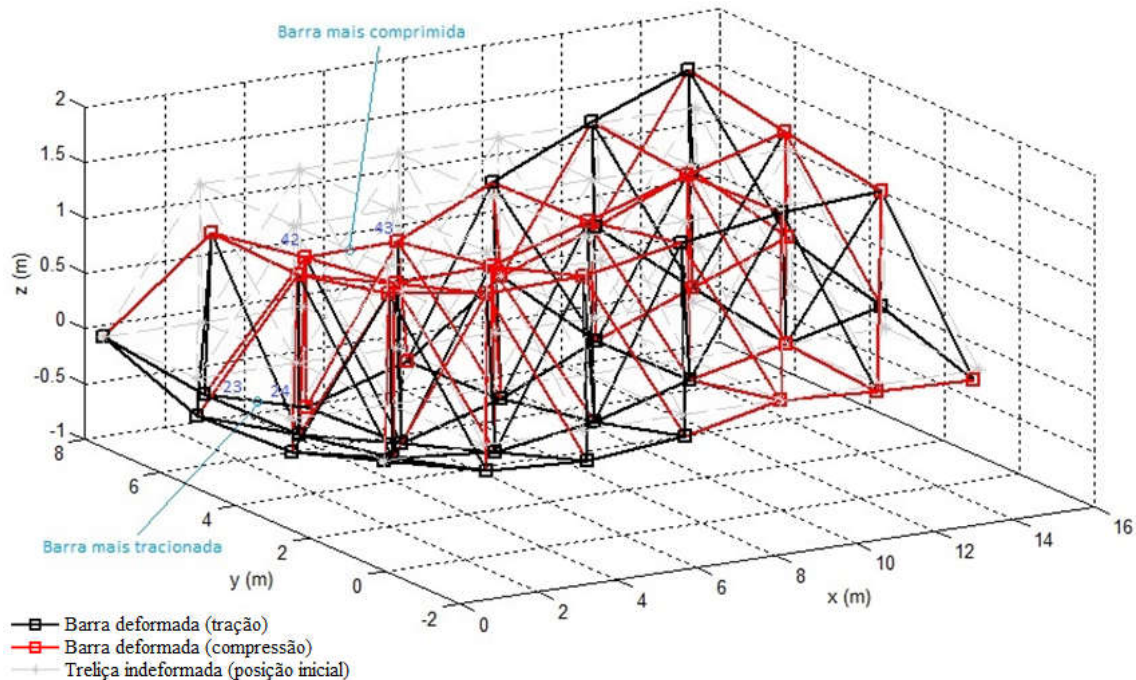


Figura 9. Configurações indeformada e deformada da treliça espacial com 46 nós.

Tabela 3. Resultados numéricos das simulações da treliça espacial com 46 nós.

Método	NP	k_t	t (s)
NR	78	161	2,053653
Potra-Pták	30	60	1,195119

5.4. ANÁLISE DOS RESULTADOS

Os resultados numéricos com o método de Potra-Pták mostraram que a convergência para as respostas dos problemas é alcançada com uma quantidade inferior de incrementos de força e iterações acumuladas necessárias para a convergência em comparação com o método clássico de Newton-Raphson Padrão (NR). Isso implica na diminuição da quantidade de vezes em que os sistemas de equações lineares (gerados da discretização por Elementos Finitos) são solucionados no processo incremental e, ainda, diminuem-se as atualizações da matriz de rigidez \mathbf{K} e do vetor de força interna \mathbf{F}_{int} durante o ciclo iterativo. O custo maior da iteração do método de Potra-Pták, em contraste com a iteração do método de NR, é compensado com a redução do número passos de força e iterações. Observa-se que no método de dois passos de Potra-Pták, resolve-se um sistema de equações lineares a mais do que NR na iteração.

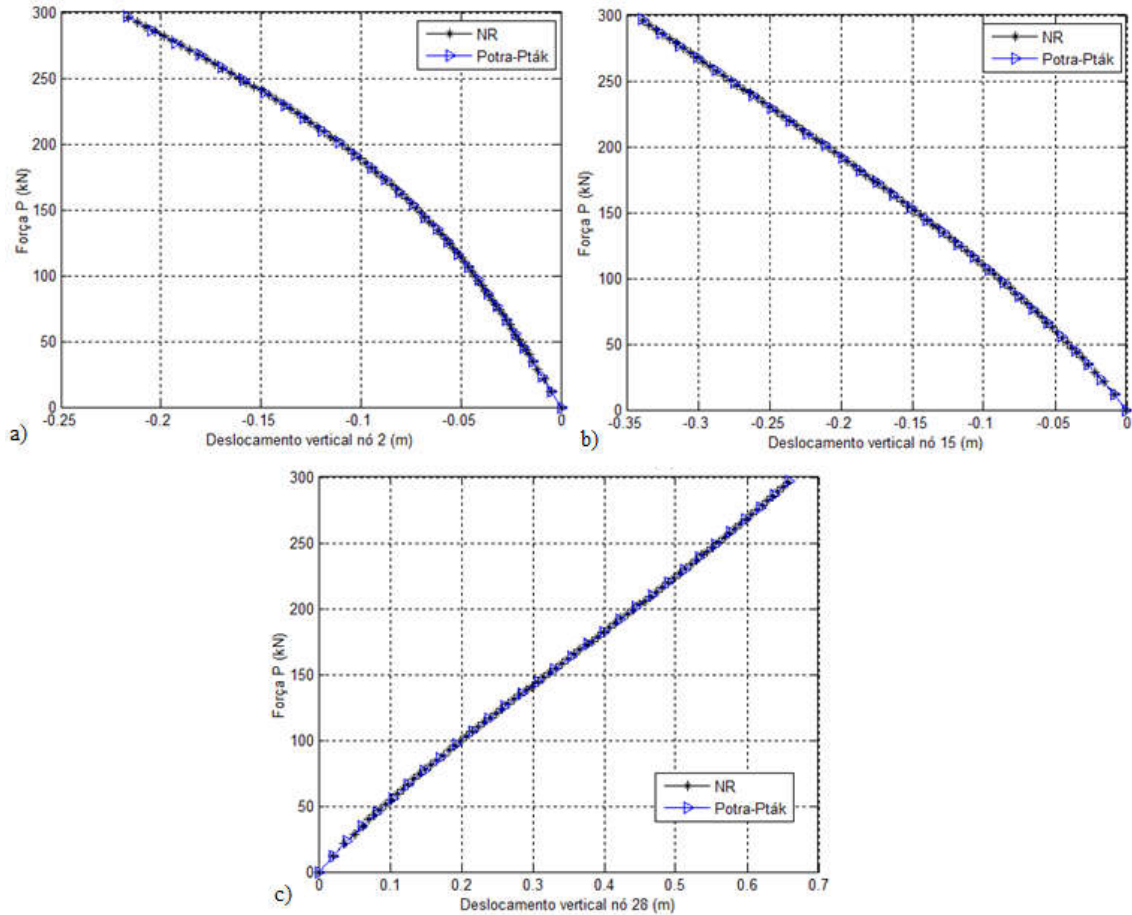


Figura 10. Trajetórias de equilíbrio para a treliça espacial com 46 nós: a) deslocamento vertical no nó 2 x força P; b) deslocamento vertical no nó 15 x força P; c) deslocamento vertical no nó 28 x força P.

Nas simulações não lineares de problemas de estruturas num processo incremental e iterativo, resolver o sistema de equações lineares gerado a cada iteração é, em geral, o passo mais caro e que demanda maior tempo e esforço computacional durante o processamento. Mesmo com o impacto que o setor da microeletrônica tem causado no desenvolvimento de componentes computacionais, com destaque a sistemas mais compactos de memória e processadores cada vez mais rápidos, ainda assim, essas poderosas máquinas por si só nem sempre conseguem tratar adequadamente os diversos modelos estruturais, quer por falta de memória, quer por excessivo tempo de resposta.

Nota-se que na iteração do método Potra-Pták é utilizada a mesma matriz de rigidez para a resolução dos sistemas de equações lineares; assim, estes sistemas podem ser solucionados via decomposição (por exemplo, decomposição LU), visto que uma única fatoração no início da iteração é necessária. Deve-se ressaltar, no entanto, que os problemas numéricos resolvidos são de pequena escala no contexto computacional atual, pois possuem menos de 220 graus de liberdade. Para sistemas dessa ordem de grandeza, métodos diretos costumam ser mais eficientes. Os métodos iterativos de solução são vantajosos quando os problemas tiverem um número maior de graus de liberdade e recursos de alocação de memória.

A matriz de rigidez \mathbf{K} do sistema estrutural é caracterizada por um elevado índice de esparsidade. Pode-se obter uma melhor eficiência numérica do código computacional apresentado por meio de algoritmos que armazenam os coeficientes não nulos presentes na matriz e efetuam operações entre matrizes e vetores com estes coeficientes, evitando, dessa maneira, os cálculos redundantes envolvendo elementos nulos.

CONCLUSÃO

A crescente simulação de modelos estruturais complexos - por meio do Método dos Elementos Finitos - tem exigido a manipulação de grande quantidade de dados, que é intrínseco ao método, bem como a procura da diminuição do tempo de resposta para a resolução do problema estrutural. O código computacional desenvolvido com o método de solução de Potra-Pták, associado à técnica de Comprimento de Arco Linear, conseguiu traçar a trajetória de equilíbrio das treliças espaciais estudadas, identificando e ultrapassando pontos limites existentes de força e de deslocamento. As análises não lineares com a metodologia proposta mostraram-se bastante promissoras, visto que para os problemas testados não ocorreram instabilidades numéricas durante as simulações, obtendo-se as respostas com menor tempo de processamento, em comparação com as obtidas com o método de Newton-Raphson Padrão.

AGRADECIMENTO

À Universidade Tecnológica Federal do Paraná e ao Programa de Pós-Graduação em Matemática - UEM, pela apoio para o desenvolvimento desta pesquisa.

REFERÊNCIAS

- BATHE, K. J. & DVORKIN, E. N. On the automatic solution of nonlinear finite element equations. *Computers & Structures*, 17(5-6); 871-879. 1983.
- BATOZ, J. L. & DHAT, G. Incremental displacement algorithms for nonlinear problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 14(8): 1262-1267, 1979.
- CODA, H. B. & GRECO, M. A simple FEM formulation for large deflection 2D frame analysis based on position description. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, England, 193(33-35): 3541-3557, 2004.
- CODA, H. B. Análise não linear geométrica de sólidos e estruturas: uma formulação posicional baseada no MEF. 2003. Tese (Texto complementar para concurso de professor titular).- Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.
- CRISFIELD, M. A. A fast incremental/iterative solution procedure that handles snap-through. *Computers and Structures*, 13: 55-62, 1981.
- CRISFIELD, M. A. An arc-length method including line searches and accelerations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 19(9): 1269-1289, 1983.
- EUSTÁQUIO, R. G. Classe de métodos Chebyshev-Halley inexata livre de tensores com convergência cúbica para resolução de sistemas não lineares e um estudo sobre raio de convergência. 2013. Tese (Doutorado em Métodos Numéricos em Engenharia) – Universidade Federal do Paraná, 2013.

- GEERS, M. G. D. Enhanced solution control for physically and geometrically non-linear problems. Part II - comparative performance analysis. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 46(2): 205-230, 1999.
- GRECO, M. & VENTURINI, W. S. Stability analysis of three-dimensional trusses. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 3: 325-344, 2006.
- LACERDA, E. G. M., MACIEL, D. N. & SCUDELARI, A. C. Geometrically static analysis of trusses using the arc-length method and the positional formulation of Finite Element Method. In: PARENTE JR., E. (ed.). *Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*, 35., 2014, Fortaleza. Anais... Fortaleza: ABMEC, 2014.
- LEON, S. E., PAULINO, G. H., PEREIRA, A., MENEZES, I. F. M. & LAGES, E. N. A Unified Library of Nonlinear Solution Schemes. *Applied Mechanics Reviews*, 64: 1-26, 2011.
- MATIAS, W. T. El control variable de los desplazamientos en el análisis no lineal elástico de estructuras de barras. *Rev. In. Mét. Num. Cál. Dis. Ing.*, 18(4), 549-572, 2002.
- MATLAB, version 8.6.0 (R2015b). Natick, Massachusetts: The MathWorks Inc., 2015.
- MAXIMIANO, D. P., SILVA, A. R. D. & SILVEIRA, R. A. M. Iterative strategies associated with the normal flow technique on the nonlinear analysis of structural arches. *Revista Escola de Minas (Impresso)*, 67(2): 143-150, 2014.
- POTRA, F. A. & PTAK, V. Nondiscrete Induction and Iterative Processes. *Research Notes in Mathematics*, 103, 1984.
- RAMM, E. Strategies for tracing the non-linear response near limit-points, nonlinear finite element analysis in structural mechanics. Wunderlich, W. (ed.). Berlin: Springer-Verlag, 1981, p. 63-89.
- REDDY, J. N. *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*. New York: Oxford University Press, 2004.
- REZAIEE-PAJAND, M., SARAFRAZI, S. R. & REZAIEE, H. Efficiency of dynamic relaxation methods in nonlinear analysis of truss and frame structures. *Computers and Structures*, 112-113: 295-310, 2012.
- RIKS, E. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. *International Journal of Solids and Structures*, 15(7): 529-551, 1979.
- RIKS, E. The application of Newton's method to the problem of elastic stability. *Transactions of the ASME: Journal of Applied Mechanics*, 39(4): 1060-1066, 1972.
- SEÇER, M. Inelastic and large deformation analyses of plane trusses. *Technology*, 12(3): 175-184, 2009.
- SOLEYMANI, F., SHARMA, R., LI, X. & TOHIDI, E. An optimized derivative-free form of the Potra-Pták method. *Mathematical and Computer Modelling*, 56(5-6): 97-104, 2012.
- SOUZA, A. S. C. & GONÇALVES, R. M. Análise teórica e experimental de treliças espaciais. *Cadernos de Engenharia de Estruturas*, São Carlos, 8(31): 31-61, 2006.

WEMPNER, G. A. Discrete approximations related to nonlinear theories of solids. *International Journal of Solids and Structures*, 7: 1581-1599, 1971.

YANG, Y. B. & KUO, S. R. *Theory & Analysis of Nonlinear Framed Structures*. Singapore: Prentice-Hall, 1994.

YANG, Y. B. & SHIEH, M. S. Solution method for nonlinear problems with multiple critical points. *AIAA Journal*, 28(12): 2110–2116, 1990.