

Merni sistemi u računarstvu,  
<https://automatika.etf.bg.ac.rs/sr/13e053msr>

# Merna nesigurnost tipa B

Dr Nadica Miljković, vanredna profesorka, kabinet 68, [nadica.miljkovic@etf.bg.ac.rs](mailto:nadica.miljkovic@etf.bg.ac.rs)

Prezentacija za ovo predavanje je skoro u potpunosti pokrivena udžbenikom N. Miljković, "Metode i instrumentacija za električna merenja",  
<https://doi.org/10.5281/zenodo.1335249>, odakle su i preuzete određene ilustracije.



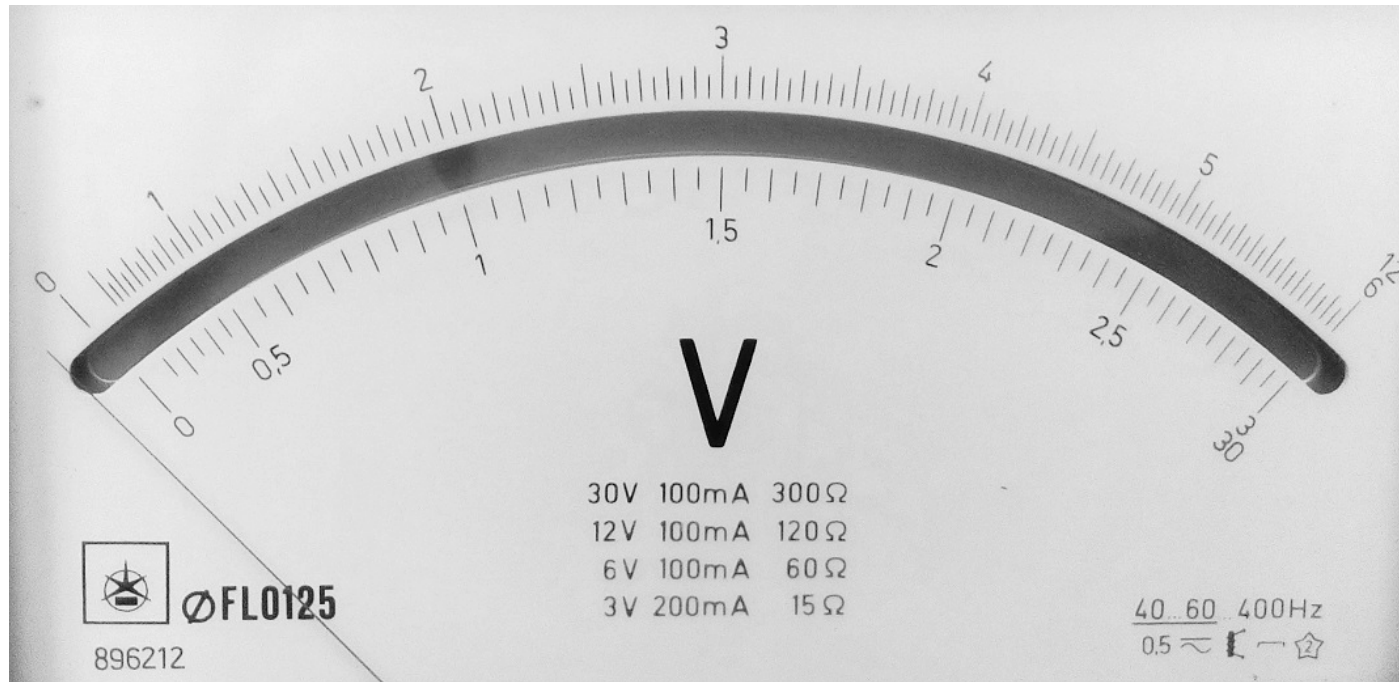
# MNB

- Merna nesigurnost tipa B (MNB) se generalno procenjuje na osnovu:
  - znanja o mernoj metodi i postupku merenja,
  - o karakteristikama instrumenata i
  - svim ostalim podacima (osim onog što je uračunato kroz proceduru računanja merne nesigurnosti tipa A).
- U principu, MNB se procenjuje na isti način kao MNA.
- Razlika je što se za MNA raspodela dobija eksperimentalno, a za MNB je raspodela pretpostavljena.
- Sledi da:
  - MNA ima objektivnu raspodelu (procenjenu na osnovu merenja),
  - a MNB subjektivnu, odnosno pretpostavljenu raspodelu.

# Potrebni podaci

- Za računanje merne nesigurnosti tipa B, potrebno je:
  - prethodno znanje o merenoj veličini (odnosi se i na prethodno izvršena merenja),
  - iskustvo ili znanje o osobinama korišćenih materijala i instrumenata,
  - podaci proizvođača (**rok je ograničen garancijom!**),
  - Podaci, koji su dobijeni na osnovu kalibracije ili sličnih metoda (**najčešće jednom godišnje!**) i
  - merna nesigurnost, koja je dobijena iz priručnika, a odnosi se na referentna merenja.
- Podaci proizvođača mogu uključiti i preporučene uslove, odnosno radne opsege za primenu instrumenta (na primer, vlažnost vazduha i temperatura).
- Digitalni displej je naročito osetljiv na promenu temperature.

# MNB analognih instrumenata



- Tačnost se najčešće izražava kao procenat od pune skale, prilikom čitanja vrednosti merenja (relativna greška).
- Kada je merena vrednost blizu cele skale (ili se bar nalazi u drugoj trećini skale), onda merna nesigurnost koja se računa ima smisla.
- Merni opseg utiče na tačnost merenja.
- Za analogni voltmetar koji ima tačnost  $\pm 3\%$  u opsegu  $[0 \ 100]$  V, koju vrednost je poželjno meriti i sa kojom tačnošću: od 90 V ili od 10 V?

# Klasa tačnosti

- Za računanje MNB, prilikom merenja analognim instrumentima od značaja je podatak o klasi tačnosti  $K_T$ .
- Ova veličina je istaknuta na samom instrumentu i daje podatak o maksimalnoj apsolutnoj grešci  $\Delta x$ , koju instrument pravi na nekom opsegu  $M$ :

$$K_T = 100 \frac{\Delta x}{M}$$

- Klasa tačnosti se definiše za svaki merni opseg.
- Postoje standardi, koji definišu posebne klase instrumenata na osnovu vrednosti klase tačnosti. Neke tipične vrednosti  $K_T$  su 0.1, 0.2, 0.5, 1, 1.5, 2.5 i 5.

# Klasa tačnosti – primer

br. merenja	[V]
1	9.8
2	10.2
3	10.4
4	10.0
5	9.6
6	9.8
7	10.4
8	10.0

br. merenja	[V]
1	5.4
2	5.1
3	4.9
4	5.3
5	4.8
6	5.0
7	5.1
8	5.3

- Korišćenjem analognog voltmetra:
  - Merenje napona od 10 V na opsegu od  $M = 12$  V i dobijene vrednosti su prikazane u tabeli levo.
  - Za merenje napona od 5 V na opsegu od  $M = 6$  V dobijene su vrednosti prikazane u tabeli desno.
- Kolike su klase tačnosti za ova dva opsega?

# MNB raspodela

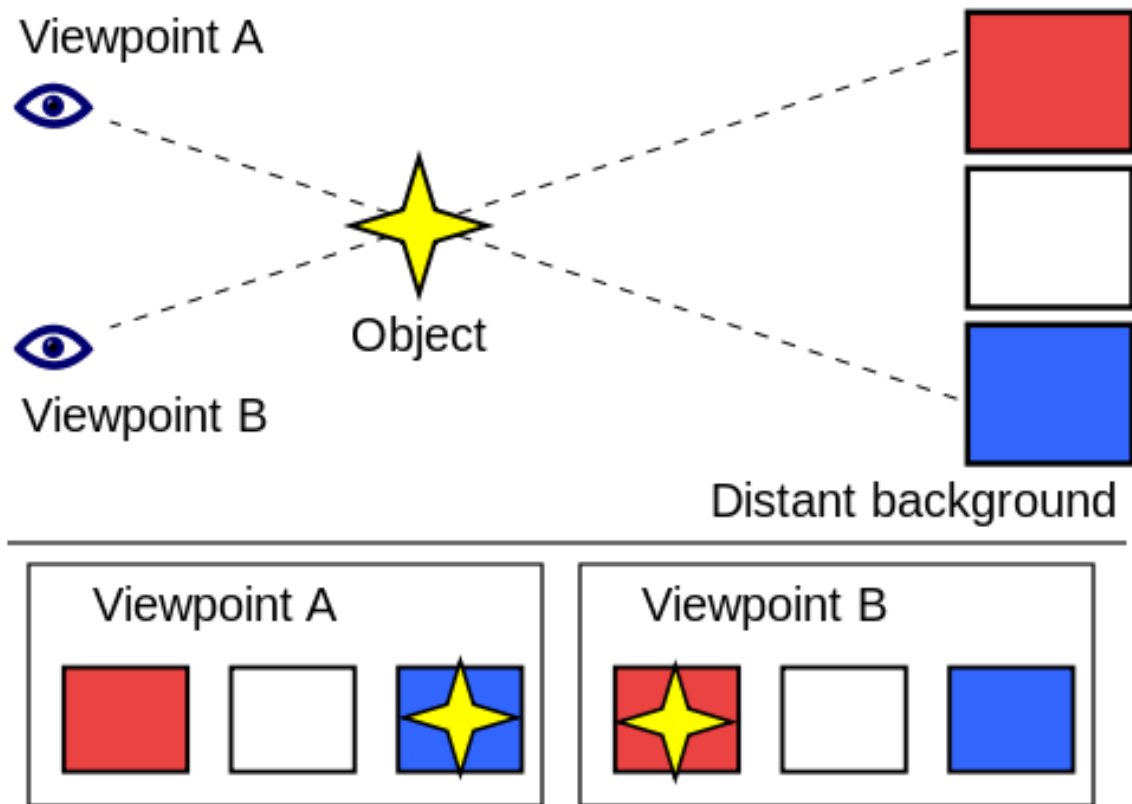
- Najčešće se uniformna raspodela. **Zašto?**
- → MNB  $u_B$  se procenjuje kao standardna devijacija za uniformnu raspodelu:

$$u_B = \frac{\Delta x}{\sqrt{3}} \quad u_B = \frac{K_T M}{100\sqrt{3}}$$

- Najveća mana analognih instrumenta je što greška merenja može biti rezultat paralakse.
- Kod digitalnih instrumenata, ne postoji mogućnost pogrešnog očitavanja merene veličine u zavisnosti od položaja posmatrača u odnosu na skalu na kojoj se očitavaju vrednosti.
- Kako se digitalni instrumenti ne zasnivaju na pokretnim delovima (mehaničkim elementima, koji omogućavaju okretanje kazaljke u zavisnosti od merene vrednosti), to je njihova tačnost ne zavisi od položaja u kome se nalaze (u kom delu opsega se nalazi merena veličina) ili od mehaničkih uticaja na sam instrument.
- Danas se proizvode i digitalni instrumenti koji su vodootporni, tako da se mogu koristiti i u različitim okruženjima, u kojima analogni instrumenti ne bi radili.

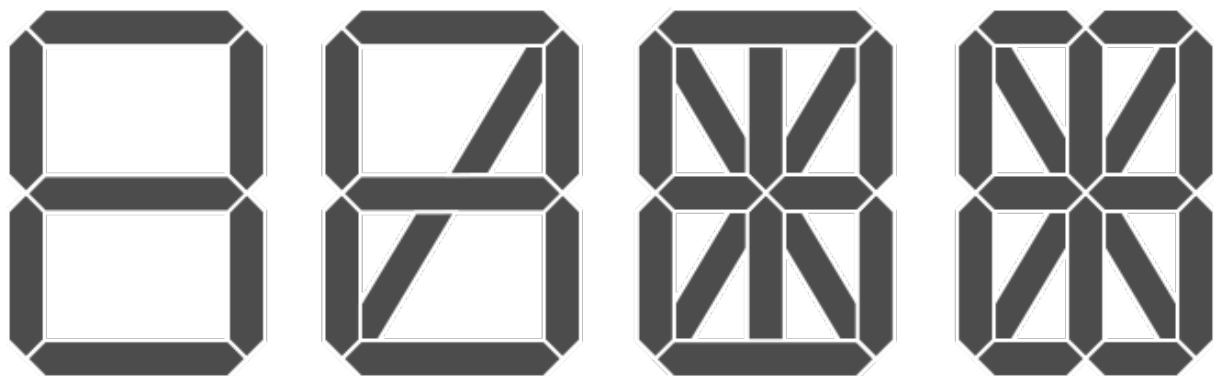


# Paralaksa



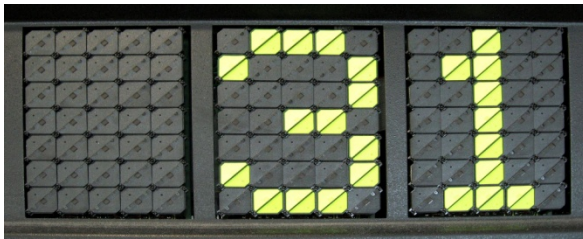
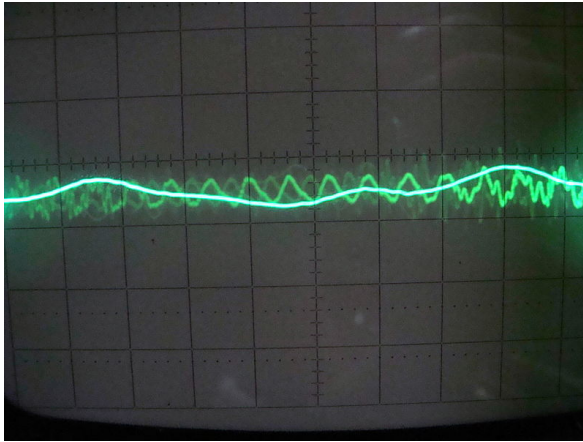
- Primer nastajanja paralakse je dat na slici.
- Slika je preuzeta sa: By Booyabazooka - Parallax Example.png, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1335592>.
- Da li je moguće “uspraviti” analogni instrument da bi se sprečila paralaksa?

# Još prednosti digitalnih instrumenata?



- Prednosti su:
  - automatska detekcija polariteta,
  - automatska promena opsega merenja ,
  - zaštita od preopterećenja (dovođenja relativno velikih napona i struja na ulaz instrumenta),
  - ...
- Međutim, MNB i dalje postoji.
- Posebno je potrebno obratiti pažnju na digitalni displej.
- Najčešće se navodi da displej ima  $3\frac{1}{2}$  cifara (eng. *digits*). Šta to tačno znači?
- Slika displeja sa 7, 9, 14 i 16 segmenata: By Errorage - Own work, CC0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=39303539>.

# Više o ...



By Rippey574 at English Wikipedia, CC BY 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=11466637>  
By Ratopi - Own work, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1311688>  
By No machine-readable author provided. Karlo assumed (based on copyright claims). - No machine-readable source provided. Own work assumed (based on copyright claims)., Public Domain, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1245564>  
By Eduardo Habkost (ehabkost) - Eduardo Habkost's flickr account, CC BY-SA 2.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1761083>  
By Manuel Schneider(bla) (+/-) - Self-photographed, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1254345>

- Uređajima koji su zasnovani na korišćenju displeja na: [https://en.wikipedia.org/wiki/Display\\_device](https://en.wikipedia.org/wiki/Display_device).
- Dodatno, o istoriji displeja na: [https://en.wikipedia.org/wiki/History\\_of\\_display\\_technology](https://en.wikipedia.org/wiki/History_of_display_technology).
- Od 2003. godine OLED (eng. *Organic LED*, [https://en.wikipedia.org/wiki/Organic\\_light-emitting\\_diode](https://en.wikipedia.org/wiki/Organic_light-emitting_diode)).
- A od 2004. elektronski papir: [https://en.wikipedia.org/wiki/Electronic\\_paper](https://en.wikipedia.org/wiki/Electronic_paper).

# Digitalni displej sa 3½ cifara

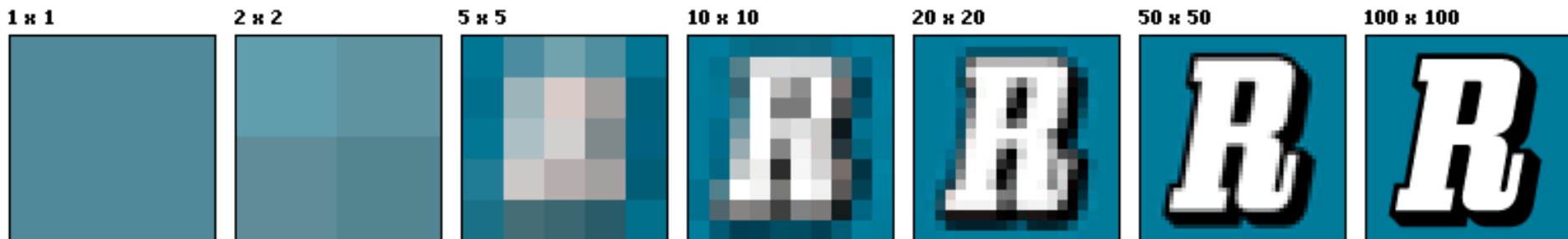
- U digitalnim displejima postoji dva tipa cifara:
  - *Full-digit*, odnosno cela cifra je cifra, koja može imati celobrojne vrednosti od 0 do 9.
  - *Half-digit*, odnosno polucifra je prva cifra, koja može imati vrednosti 0 ili 1.
- Displej sa 3½ je zapravo 4-segmentni displej sa jednom polucifrom i tri cele cifre.
- Najmanja brojna vrednost, koja se može zapisati na ovaj način je 0000, a najveća je 1999.
- Nekad se umesto oznake od 3½ cifara, koristi i oznaka *2000-count*, što znači da taj displej može prikazati ukupno 2000 različitih vrednosti merene veličine.

# 4½ i 4¾ cifara

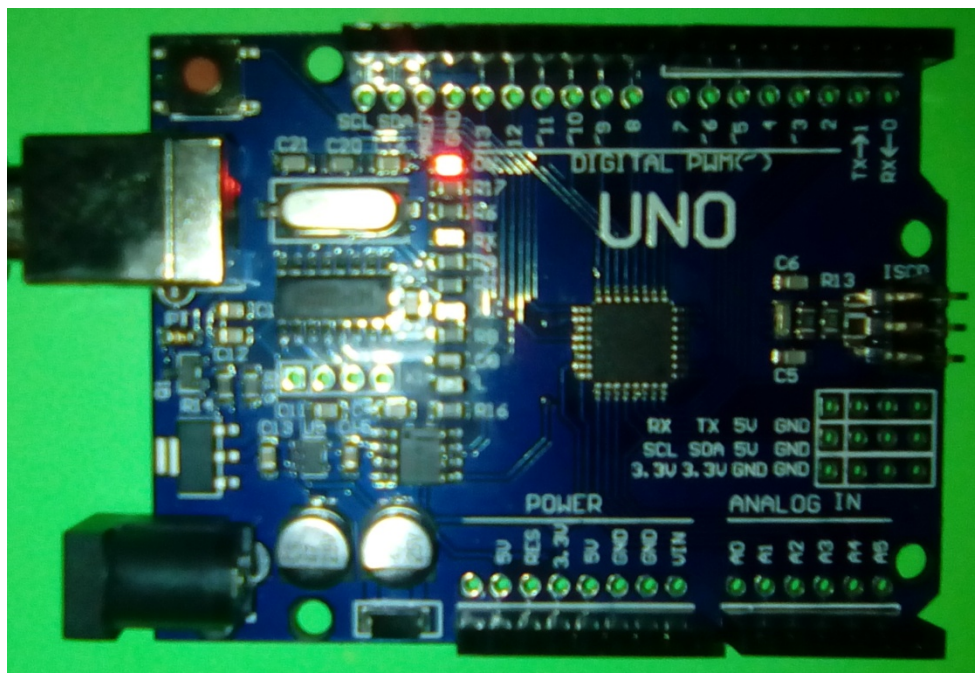
- Ako digitalni instrument ima oznaku 4½ cifara ili 20000-*count*, to znači da može da prikaže vrednosti koje se nalaze u opsegu [0 19999].
- Rezolucija se takođe može prikazati i kroz tri četvrtine jedne cifre. To znači da prva i najznačajnija cifra može imati vrednosti 0, 1, 2 ili 3 (ovo je uobičajeno u savremenim digitalnim instrumentima). Tako za instrument sa 4¾ cifara (40000-*count*) znači da se mogu prikazati vrednosti na displeju u opsegu [0 39999], odnosno može da prikaže 40000 različitih vrednosti.
- Ako je najznačajnija cifra = 0, onda se možda 0 i ne prikaže. Ušteda!
- Ako se prikazuju i negativne vrednosti, onda se sa 3½ cifara može prikazati od minimalno -1999 do maksimalno 1999.
  - Neophodno je da postoji prostor za znak. I ovde se može realizovati ušteda ako se ne prikaže znak +.

# Digitalni displej i rezolucija

- Rezolucija sa 3½ cifara se računa kao  $(1/2000) * 100\%$  što je jednako 0.05%.
- Kolika je rezolucija za 4½ cifara?
- Kolika je rezolucija za 4¾ cifara?



# Rezolucija A/D



- Za programabilnu instrumentaciju, kao što je UNO R3 rezolucija odgovara rezoluciji A/D konvertora.
- Izražava se u bitima
- Na primer, za rezoluciju od 24 bita broj koraka je  $2^{24}$ , a za rezoluciju od 12 bita broj koraka je  $2^{12}$ .
- Kolika je rezolucija UNO R3? A, u procentima?

# Digitalni instrumenti i opseg

- Većina ima automatski odabir opsega.
- Međutim, neke starije verzije digitalnih instrumenata imaju manuelnu opciju za odabir opsega. Kako odabrati opseg?
  - Za DMM, koji može da meri napon za sledeće opsege napona 200 mV, 2 V, 20 V, 200 V i 1000 V, potrebno je opseg instrumenta postaviti na najveći (1000 V) i postepeno smanjivati opseg dok se ne zadovolji uslov da se merena vrednost očitava, kada se nalazi u poslednjoj trećini opsega.
- Ako je u uputstvu proizvođača dato da je tačnost DMM-a pri merenju  $\pm 1\%$  od očitane vrednosti, onda znači da je očekivana vrednost za merenje DC napona od 1 V jednaka  $1\text{ V} \pm 1\%$  ili u opsegu  $[0.99\ 1.01]\text{ V}$ . Ovako izražena tačnost instrumenta ne uzima u obzir sve elemente, kao što su:
  - tolerancija,
  - nelinearnost,
  - *offset* A / D konvertora i
  - prisustvo šuma prilikom merenja.
- → zato treba imati na umu ova ograničenja prilikom MNB proračuna.



# Specifikacija: primer za digitalni instrument

- "*Complete accuracy specifications:  $\pm$ (% of reading + number of LSD)*" znači sledeće:
  - generalna tačnost je određena brojem (koji je izražen u procentima) u odnosu na izmerenu, odnosno "pročitano" (eng. *read*) vrednost koji se sabira najmanjom značajnom cifrom (LSD od eng. *Least Significant Digit*).
- LSD definiše nesigurnost koja može nastati usled, *offset*-a, šuma i greške zaokruživanja.
- Broj LSD može da varira u zavisnosti od opsega, pa je veoma važno da se posmatra u odnosu na opseg u kome je merenje izvršeno.

# Digitalni displej: prikaz vrednosti

- Predstavljanje 30 kV na displeju sa  $3\frac{1}{2}$  cifara je: 30.0 kV:
  - Ne koristi se prva cifra.
- Predstavljanje 10 kV na displeju sa  $3\frac{1}{2}$  cifara je: 10.00 kV.
- Predstavljanje 30 kV na displeju sa  $4\frac{1}{2}$  cifara je: 30.00 kV.
- Predstavljanje 30 kV na displeju sa  $4\frac{3}{4}$  cifara je: 30.000 kV.
- Predstavljanje 10 kV na displeju sa  $4\frac{1}{2}$  cifara je: 10.000 kV.
- Poseban slučaj je prikaz opsega kao što su 2, 20, 200 i 2000.
  - Predstavljanje 20 kV na displeju sa  $3\frac{1}{2}$  cifara, može biti približno 19.99 kV. Iako povećava rezoluciju, potreban je OPREZ, jer je sada maksimalna vrednost 19.99 kV, a ne 20 kV.
  - Za dovođenje većeg napona na opseg, koji meri maksimalno 19.99 kV, pojavilo bi se upozorenje za prekoračenje (eng. *overload*) ili bi bila prikazana maksimalna vrednost.

# MNB

Ako je rezolucija nekog digitalnog instrumenta  $\delta_x$ , onda se očitana vrednost merenja nepoznate merene veličine  $x$  nalazi u opsegu  $\left[x - \frac{\delta_x}{2}, x + \frac{\delta_x}{2}\right]$ . Pod pretpostavkom simetrične uniformne raspodele, standardna devijacija (merna nesigurnost tipa B) za svako očitavanje je  $u_B = \frac{\delta_x}{\sqrt{12}} = 0.29\delta_x$ .

Greška merenja sa digitalnim instrumentima se najčešće procenjuje kao zbir procentualne greške u odnosu na pročitano vrednost (eng. *accuracy*) i procentualne greške opsega koji se koristi za merenje (LSD). LSD (eng. *least significant digit*) je oznaka greške opsega koji se koristi za merenje i odgovara najmanjoj mogućoj vrednosti koju je moguće izmeriti na nekom opsegu. Ukupna greška merenja sa digitalnim instrumentom može se predstaviti sledećom relacijom:

$$\Delta_x = \frac{\delta_1}{100} X + \frac{\delta_2}{100} M$$

Ili kao:

$$\Delta_x = \frac{\delta_1}{100} X + NR$$

U relacijama 51-52 sa  $X$  je označena merena vrednost, sa  $\Delta_x$  ukupna greška merenja digitalnim instrumentom,  $N$  je broj cifara najmanje težine za procenu opsega greške,  $R$  je rezolucija instrumenta,  $\delta_1$  je greška u odnosu na očitano vrednost i  $\delta_2$  je greška opsega na kom se meri.

Za slučaj da raspodela nije navedena ili na neki način eksperimentalno utvrđena, uvek se pretpostavlja da je raspodela greške uniformna, pa se merna nesigurnost tipa B računa kao:

$$u_B = \sigma = \frac{\Delta_x}{\sqrt{3}}$$

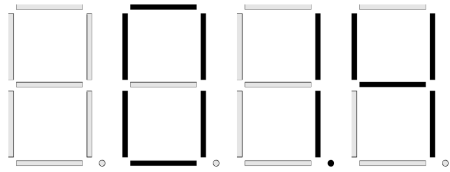
# MNB – primer #1

- Neka je potrebno odrediti MNB za merenje sa UNO R3 mikrokontrolerskom pločicom.
- Rezolucija A/D konvertora UNO R3 pločice je 10 bita, pa je broj kvantizacionih nivoa  $2^{10} = 1024$ , a maksimalni napon koji je moguće meriti je 5 V.
- Rezolucija je  $5 \text{ V} / 1024 = 0.0049 \text{ V}$ , pa je MNB kada se pretpostavi uniformna raspodela jednaka:

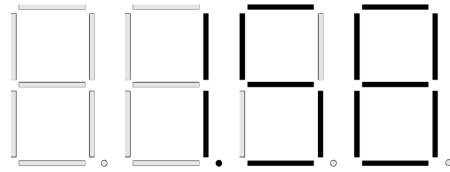
$$u_B = 0.5 * 0.0049 / \text{sqrt}(3) \text{ V}$$

$$u_B = 0.0014 \text{ V}$$

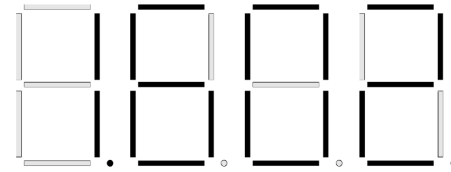
# MNB – primer #2



opseg 200 V



opseg 20 V



opseg 2 V

- **Zadatak:**
  - Digitalnim voltmetrom sa  $3\frac{1}{2}$  cifara, meri se napon od 1.6 V. Ako DMM za merenje DC napona, ima tačnost definisanu kao  $\pm(0.5\% + 3)$ , potrebno je odrediti MNB za mereni napon.
- **Rešenje:**
  - Detaljno na vežbama. Primititi da MNB zavisi od opsega.

Slika: Polar Bears Across the Arctic Face Shorter Sea Ice Season by NASA Goddard Space Flight Center, Flickr:  
<https://www.flickr.com/photos/gsfcr/29664357826/>; CC BY 2.0



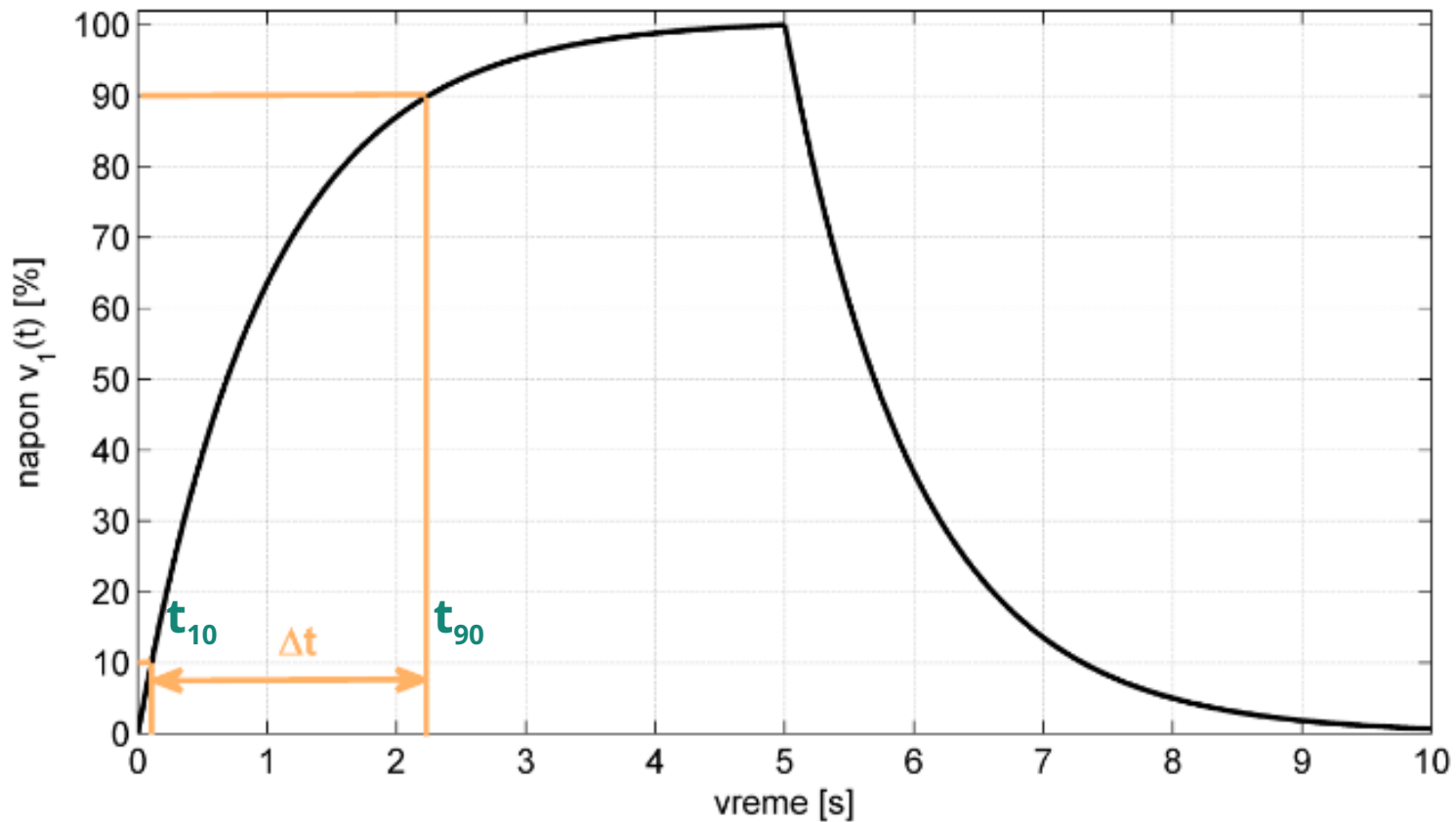
# MNB

- MNB je kompleksnije odrediti od MNA, jer ne postoji standardizacija.
- Korišćenjem osnovnih saznanja o MNA, podataka iz specifikacije i sa pretpostavkom o uniformnoj raspodeli, moguće je doći do podatka o MNB.

# Statička i dinamička merenja

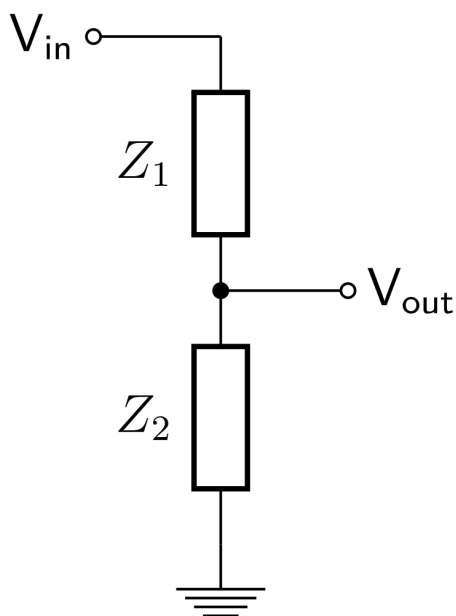
- Merena veličina i parametri okoline imaju određenu brzinu promene.
- Većina laboratorijskih merenja ima statički karakter, odnosno merenje se obavlja nakon što se uspostavi stacionarno, tj. ustaljeno stanje.
- Praktično nije moguće održati apsolutno stacionarno stanje i dinamička greška merenja je uvek prisutna, odnosno postoji nesigurnost. Nekada se može uračunati / proceniti u MNB.
- Neka merenja je poželjno vršiti van ustaljenog stanja, tokom tranzijenta.
- **Primer? Sa laboratorijskih vežbi?**

# Tranzijentno merenje





# Merenje u ustaljenom/stacionarnom stanju



- Moguće je koristiti kondezatorski razdelnik napona.
- Za razliku od merenja RC karakteristike, ovo merenje se izvodi u ustaljenom stanju.
- Pod pretpostavkom da su količine naelektrisanja jednake moguće je pisati za kolo sa slike u kome su sa  $Z_1$  i  $Z_2$  predstavljeni kondezatori odgovarajućih kapacitivnosti  $C_1$  i  $C_2$ :

$$V_{out} = \frac{X_{c2}}{X_{c1} + X_{c2}} \cdot V_{in} = \frac{1/C_2}{1/C_1 + 1/C_2} \cdot V_{in} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \cdot V_{in}$$

Slika: By Velociostrich -  
Own work, CC BY-SA 3.0,  
[https://  
commons.wikimedia.org/w  
/index.php?curid=7765066](https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=7765066)

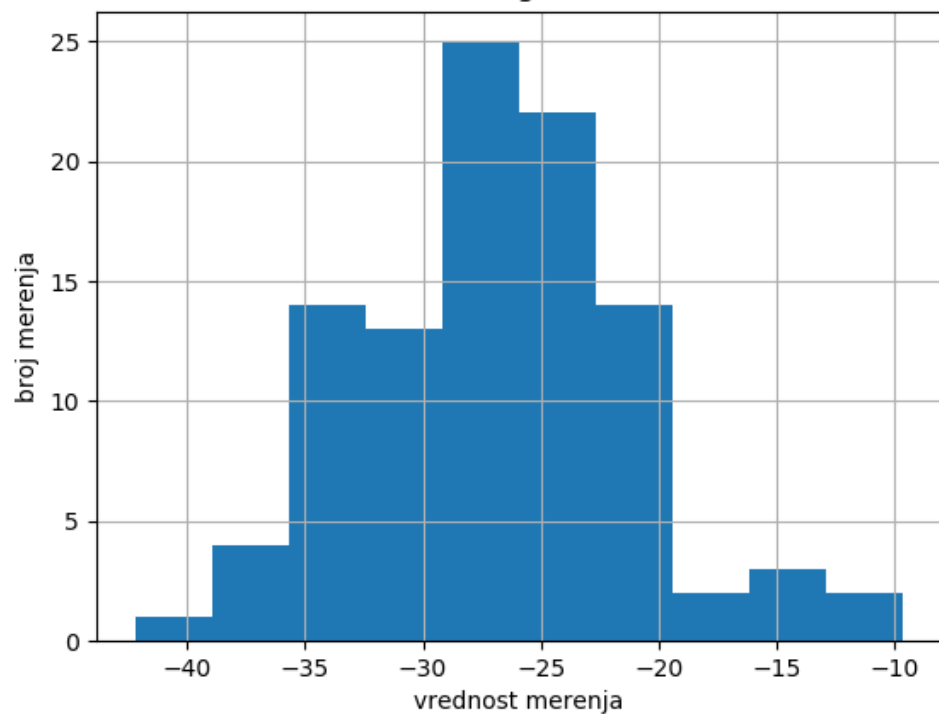


# Zašto?

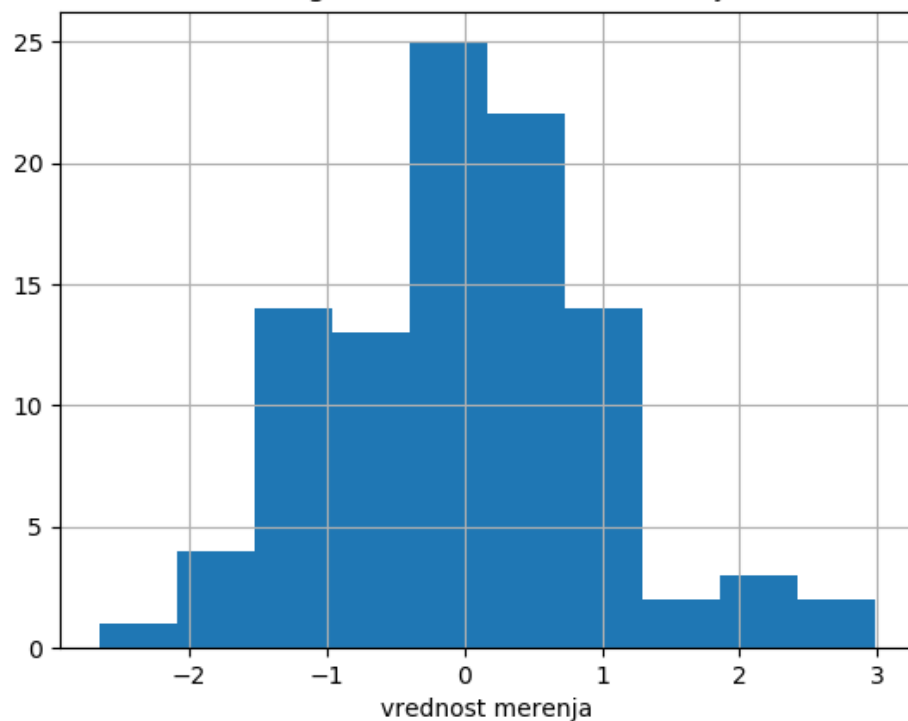
- Računarska jednostavnost.
- Mogućnost poređenja merenja sa različitih skala.
- Normalizacija ili normiranje,  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Normalization\\_\(statistics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Normalization_(statistics))
  - Normiranje se češće koristi kada je reč o Gausovoj raspodeli, čija se srednja vrednost normalizuje na vrednost 0 i varijansa na vrednost 1.
  - Kolika je standardna devijacija tada?
- U praksi, najčešće, Gausovski raspodeljeni rezultati merenja se normalizuju tako da im je srednja vrednost 0, a varijansa 1.
  - Slučajna promenljiva čije je matematičko očekivanje jednako 0 se takođe naziva i centrirana slučajna promenljiva.

# Primer #1

Histogram



Histogram normalizovanih merenja



# Pajton kod

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# promenljiva u koju se smeštaju učitane vrednosti
mer = []

# čitanje podataka iz fajla
f = open('C:/Users/Nadica Miljkovic/Desktop/merenje3.txt', 'r')
for line in f:
    mer.append(float(line.strip()))

# korišćenje numpy biblioteke za osnovne parametre
print np.mean(mer)
print np.std(mer)

# prikaz histograma
plt.hist(mer)
plt.xlabel('vrednost merenja')
plt.ylabel('broj merenja')
plt.grid(True)
plt.title('Histogram')
plt.show()

# normalizacija
merM = np.mean(mer)
merS = np.std(mer)
mer = [vr - merM for vr in mer]
mer = [vr/merS for vr in mer]

# prikaz histograma za normalizovane podatke
plt.hist(mer)
plt.xlabel('vrednost merenja')
plt.ylabel('broj merenja')
plt.grid(True)
plt.title('Histogram normalizovanih merenja')
plt.show()

print np.mean(mer)
print np.std(mer)
```

# Primer #2

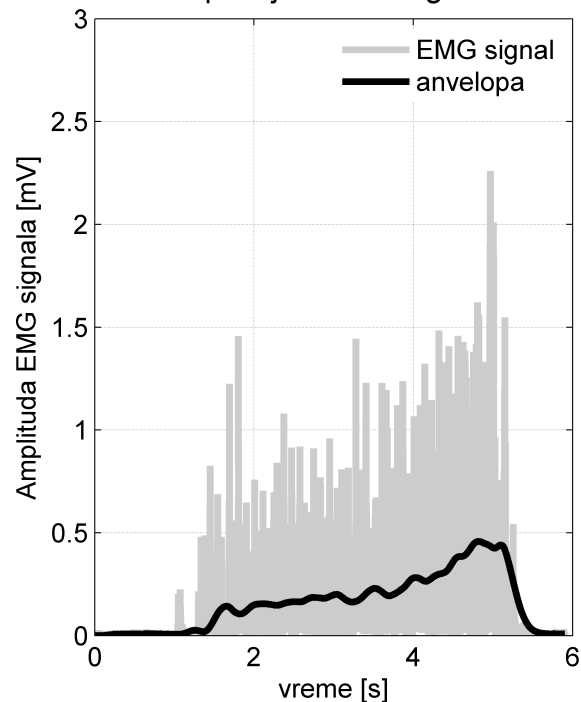
- Jedan praktičan primer normalizacije signala je za potrebe merenja biomedicinskih signala na osnovu kojih se vrši procena električne aktivnosti mišića (elektromiografija, EMG).
- Ovaj signal se meri primenom površinskih senzora, koji se postavljaju na kožu ispitanika iznad mišića od interesa. Amplituda ovako izmerenog signala je u korelaciji sa mišićnom kontrakcijom.
- Vrlo često se za prikaz ovih signala koristi i dvostrano ispravljanje, jer im je srednja vrednost jednaka 0.
- Posebno je važno poređenje ovog signala sa različitim ispitanika.

# Primer #2

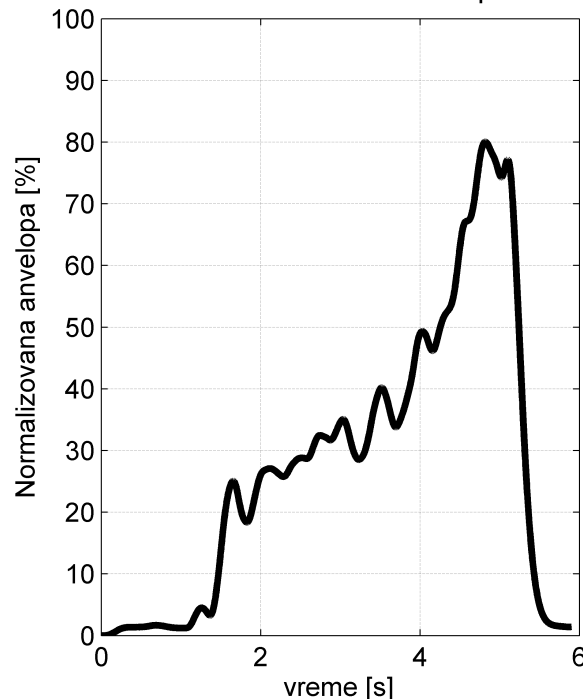
- Faktori koji utiču na EMG amplitudu su:
  - konfiguracija elektroda (njihov oblik, veličina, međusobna udaljenost),
  - pravac postavljanja elektroda na kožu u odnosu na pravac prostiranja električnih potencijala mišića,
  - impedansa kože,
  - vlažnost i temperatura kože,
  - anatomska dimenzija i pozicija mišića,
  - debljina masnog tkiva (izolatora) na mestu merenja i
  - drugi.
- Svi ovi faktori su promenljivi u zavisnosti od eksperimentatora, koji vrši merenje, u zavisnosti od primenjene merne opreme i u zavisnosti od ispitanika na kome se meri signal.
- Postoji niz predloženih metoda, koje se koriste za normalizaciju EMG signala, ali je najrasprostranjeniji pomoću maksimalne voljne kontrakcije (MVK, eng. *Maximal Voluntary Contraction* - MVC).
  - Normalizacija se sprovodi dodatnim referentnim merenjem MVK.

# EMG normalizovan

Dvostrano ispravljen EMG signal i anelopa



Normalizovana anelopa



$$v_{RMS} = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^N v_i^2}$$

- U ovoj metodi, ispitanik izvodi MVK mišića, koji se meri i na osnovu tog signala računa se RMS (eng. *Root Mean Square*) vrednost u mV, prema datoj formuli.
- Nekada se normalizacija EMG signala vrši u odnosu na amplitudu nekog drugog parametra, koji je proračunat za EMG signal snimljen tokom izvođenja referentnog pokreta, pa vrednost normalizovanog signala može biti i veća od 100%.





# Definicija

- Kombinovana i odgovarajuća proširena merna nesigurnost predstavlja rezultantu više različitih nesigurnosti i ona je krajnji cilj merenja. Određuje se za:
  - Merenje koje je ponovljeno  $n$  puta za koje je određena merna nesigurnost tipa A, a iz raspoloživih znanja o merenju (o instrumentu i metodi) je određena i merna nesigurnost tipa B.
  - Izvršeno je jedno merenje ( $n = 1$ ) i analizom je utvrđeno da postoji određen broj veličina koje utiču na mernu nesigurnost tipa B ( $u_{B1}, u_{B2}, \dots$ ).
- Može se računati kombinovana merna nesigurnost korelisanih i nekorelisanih veličina. Šta znači korelisana veličina?
- Kada su poznate merne nesigurnosti tipa A i tipa B, ukupna / kombinovana merna nesigurnost  $u_C$  se dobija kao:

$$u_C = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}$$

# Primer $u_C$ računanja

Neka je na primer potrebno odrediti kombinovanu mernu nesigurnost za faktor proširenja  $k = 2$  prilikom merenja struje analognim ampermetrom. Rezultati  $n = 8$  ponovljenih merenja su dati u tabeli 6. Opseg mernog instrumenta je  $I_{max} = 3$  A, tačnost očitavanja (iz specifikacije proizvođača) je  $\pm 0.04\%$ , a tačnost opsega (iz specifikacije proizvođača) je  $\pm 0.007\%$ . Smatrati da je unutrašnja otpornost ampermetra dovoljno mala i da se svi sistematski efekti mogu zanemariti. Pretpostaviti Gausovu raspodelu za ponovljena merenja i uniformnu raspodelu za računanje merne nesigurnosti tipa B.

Za rezultate merenja koji su dati u tabeli 6, moguće je izračunati srednju vrednost struje kao:

$$\bar{I} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_i = 1.02 \text{ A}$$

Merna nesigurnost tipa A (kao standardna devijacija od srednje vrednosti sa Beselovom korekcijom) je:

$$u_A = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (I_i - \bar{I})^2} = 0.0255 \text{ A}$$

Merna nesigurnost tipa B se može izraziti kao:

$$u_B = \frac{\frac{\delta_1 I_{max}}{100} + \frac{\delta_2 \bar{I}}{100}}{\sqrt{3}} = 0.0004 \text{ A}$$

Tabela 6, Vrednosti ponovljenih merenja struje

redni broj merenja	1	2	3	4	5	6	7	8
$I$ [A]	0.98	0.90	1.10	1.00	1.05	0.97	1.12	1.03

MERNA NESIGURNOST  
DIREKTNO I INDIREKTNO MERENJE

# Direktna i indirektna merenja

Pod direktnim merenjem podrazumeva se merenje kod koga se neposredno meri (i očitava) vrednost veličine koja se meri.

## **Direktno merenje:**

Na primer, merenje otpornosti ommetrom je direktno merenje, bez obzira što se u samom instrumentu zapravo meri napon, ali se sa instrumenta čita direktno vrednost u  $\Omega$ .

## **Indirektno merenje:**

Na primer, merenje otpornosti merenjem struje i napona  $\rightarrow$  indirektno merenje podrazumeva da je rezultat funkcija nekoliko procenjenih vrednosti veličina koje se direktno mere:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

$y$  – indirektno merena vrednost (na primer, otpornost)

$x_1, x_2, \dots, x_N$  – direktno merene veličine (na primer,  $x_1$  – struja merena ampermetrom i  $x_2$  – napon meren voltmetrom)

# Indirektno merenje

$$u_y = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} u_{xi} \right)^2}$$

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

$y$  – indirektno / posredno merena veličina (na primer, otpornost)

$x_1, x_2, \dots, x_N$  – direktno merene veličine (npr.  $x_1$  – struja merena ampermetrom  
i  $x_2$  – napon meren voltmetrom)

**merena veličina  $\equiv$  veličina procenjena merenjem**

Izraz za  $u_y$  važi pod uslovom da su  $x_1, x_2, \dots, x_N$  nekorelisane, što će biti podrazumevano na MSR predmetu

$u_{xi}$  je kombinovana merna nesigurnost procenjena prilikom merenja merne veličine  $x_i$

# Indirektno merenje – primer

Meri se nepoznata otpornost otpornika  $R_x$  ommetrom (direktna metoda).

Meri se nepoznata otpornost otpornika  $R_x$  ampermetrom i voltmetrom prema šemi (tzv. “naponska veza” ili indirektna metoda).

## Zadatak

Pod pretpostavkom da su unutrašnje otpornosti ampermetra, voltmetra i izvora jednosmernog napona idealne (**koliko?**), da je faktor proširenja 2, da je  $E = 12\text{ V}$  i da su svi instrumenti pravilno kalibrisani (**šta to znači?**), izračunati mernu nesigurnost tipa A u slučaju:

- 1) direktnog merenja i
- 2) indirektnog merenja.

# Indirektno merenje – primer

$R_i$	$U_i$	$I_i$
802	12	13.5
806	12.1	14.6
807	11.8	14.8
809	12.2	13.9
809	12.3	14.7
810	11.5	14
811	12	14.9
812	12.08	13.8
808	12.1	13.9
810	11.9	14.4

Izmerene vrednosti otpornosti ( $\Omega$ ) ommetrom, napona (V) voltmetrom i struje (mA) ampermetrom za ponovljena merenja date su u tabeli.



# Indirektno merenje – rešenje

$$R_x = \frac{U}{I}$$

$$u_{rx} = \sqrt{\left( \left| \frac{\partial R_x}{\partial U} \right| u_v \right)^2 + \left( \left| \frac{\partial R_x}{\partial I} \right| u_i \right)^2} = \sqrt{\left( \frac{1}{I} u_v \right)^2 + \left( \frac{U}{I^2} u_i \right)^2}$$

Sa  $U$  je označena srednja vrednost merenog napona, sa  $I$  je označena srednja vrednost merene struje. Merne nesigurnosti tipa A u oznakama  $u_{rx}$ ,  $u_v$  i  $u_i$  odgovaraju indirektnom merenju otpornosti, napona i struje.

# Tačna vrednost i izmerena vrednost



Za otpornik (sa slike) odrediti "tačnu" vrednost pomoću *Color Code* šeme.

Uporediti "tačnu" vrednost sa vrednostima, koje su dobijene direktnim i indirektnim merenjem u prethodnom zadatku.

IZVEŠTAJ REZULTATA MERENJA I  
DODATNA RAZMATRANJA

# Izveštaj

- Svako merenje, osim na odgovarajući način procenjene merene vrednosti i merne nesigurnosti, mora da sadrži i precizno (tehničkom terminologijom) opisane:
  - metodu merenja,
  - merenu veličinu i
  - uslove pod kojima je izvršeno merenje.
- Što je merenje većeg značaja, odnosno što se traži veća tačnost i preciznost merenja, to su ovi kriterijumi predstavljanja rezultata strožiji.
- Merenja od “velikog značaja” su na primer:
  - Određivanje vrednosti neke fundamentalne fizičke konstante (na primer, Avogadrovog broja, [https://en.wikipedia.org/wiki/Avogadro\\_constant](https://en.wikipedia.org/wiki/Avogadro_constant)).
  - Merenje mehaničkih, termičkih i / ili električnih parametara materijala (na primer, dielektrična konstanta).

# Elementi izveštaja

- Generalno, izveštaj merenja bi trebalo da sadrži:
  - Opis metode.
  - Listu svih mernih nesigurnosti, koje su dobijene direktnim merenjem i dodatnim opisima. Dodatni opisi mogu da sadrže i kovarijansne i korelacione matrice u slučaju procene merne nesigurnosti kod indirektnog merenja.
  - Detaljnu analizu podataka, koja je primenjena, tako da se omogući jednostavna reprodukcija rezultata merenja i analize.
  - Spisak konstanti i korekcija.
- Potrebno je uvek uz rezultat merenja pisati jedinice u kojima je rezultat predstavljen.
- Nekada se za ovakav izveštaj koristi termin i dnevnik merenja i u praksi je poželjno da je što iscrpniji u pogledu informacija, koje sadrži. Poslednjih par godina obavezan je i video snimak procedure merenja.

# Primeri merenja

primer	broj merenja	podaci	merna nesigurnost	rezultat	raspodela	značaj merenja
I	1	ne postoje	--	$x_1$	--	relativno mali
II	$n \gg 1$	statistička obrada	$A, u_A = \frac{s}{\sqrt{n}}$	$x_s \pm ku_A$	Gausova	veći od I
III	1	sistematski uticaj	$B, u_B$	$x_s \pm ku_B$	zavisi od sistematskog uticaja	veći od I
IV	1	svi sistematski uticaji	kombinovana $B, u_{CB}$	$x_s \pm ku_{CB}$		veći od II i III
V	$n \gg 1$	statistička obrada i svi sistematski uticaji	kombinovana $A$ i $B, u_{CAB}$	$x_s \pm ku_{CAB}$	skoncentrisana (Gausova, Studentova ili trougaona)	veći od I-IV
VI	$n \gg 1$	statistička obrada i svi sistematski uticaji				maksimalan

- I: merenje predstavlja samo okvirni podatak o merenoj veličini, a nema veliku vrednost
- II: ponovljena merenja, kada ne postoje podaci o korišćenoj mernoj opremi
- III: slučaj pojedinačnog merenja, ali je moguće odrediti MNB
- IV: pojedinačno merenje, ali ukupna MNB
- V i VI: merna nesigurnost tipa A i dodatno svi sistematski efekti kao u IV

# Dodatna razmatranja

- Ponovljivost rezultata merenja (eng. *repeatability*) definiše slaganje rezultata merenja dobijenih iz više sukcesivnih merenja, koji su izvedeni pod istim (ponovljivim) mernim uslovima. Pod ponovljivim uslovima merenja može se smatrati:
  - ista procedura merenja,
  - ista osoba koja sprovodi merenja,
  - isti instrument koji se koristi pod istim uslovima,
  - ista lokacija merenja i
  - postignuta ponovljivost u kratkom vremenskom roku (merenja su izvršena unutar granica kalibracije).
- Reproducibilnost rezultata merenja (eng. *reproducibility*) podrazumeva slaganje rezultata merenja iste fizičke veličine pod promenljivim uslovima merenja.

# Dodatno

- Nekada se računa i nesigurnost merne metode. Jedan od načina da se ovo ostvari je da se realizuje poređenje mernih nesigurnosti rezultata merenja, koje se dobijaju primenom različitih mernih metoda.
- Ovakva eksperimentalna procedura se nekada sprovodi i sa ciljem identifikacije sistematskih efekata koji su svojstveni nekoj metodi.
- **Primer?**
- U praksi se dodatno može javiti varijabilnost na nivou ponovljenih merenja, koje vrši jedan ispitivač (eng. *intra-rater reliability*) i na nivou ponovljenih merenja koje vrše različiti ispitivači (različiti timovi i institucije, eng. *inter-rater reliability*).
- U praksi, najčešće se merna nesigurnost tipa B može zanemariti u odnosu na mernu nesigurnost tipa A.



# Rezime, MNA i MNB

- Nijedno uputstvo, knjiga, predmet, ni primer ne mogu da zamene kritičko razmišljanje, intelektualnu iskrenost i profesionalnu veštinu, koji su od ključne vrednosti za stručno obavljeno merenje.
- Metoda računanja merne nesigurnosti, nije ni rutinski ni matematički zadatak i ne postoji egzaktno uputstvo po kom će se ona računati.
- Dakle, ne može se u potpunosti automatizovati. Svaki primer podleže odgovarajućim modifikacijama.
- Treba imati na umu da se veliki broj rezultata u industriji objavljuje bez informacije o mernoj nesigurnosti, zbog unapred poznatih elemenata:
  - primene zakonskih regulativa za korišćene instrumente,
  - instrumenti se redovno kalibrišu i
  - garantovane su određena tačnost i preciznost.