Merni sistemi u računarstvu, https://automatika.etf.bg.ac.rs/sr/13e053msr

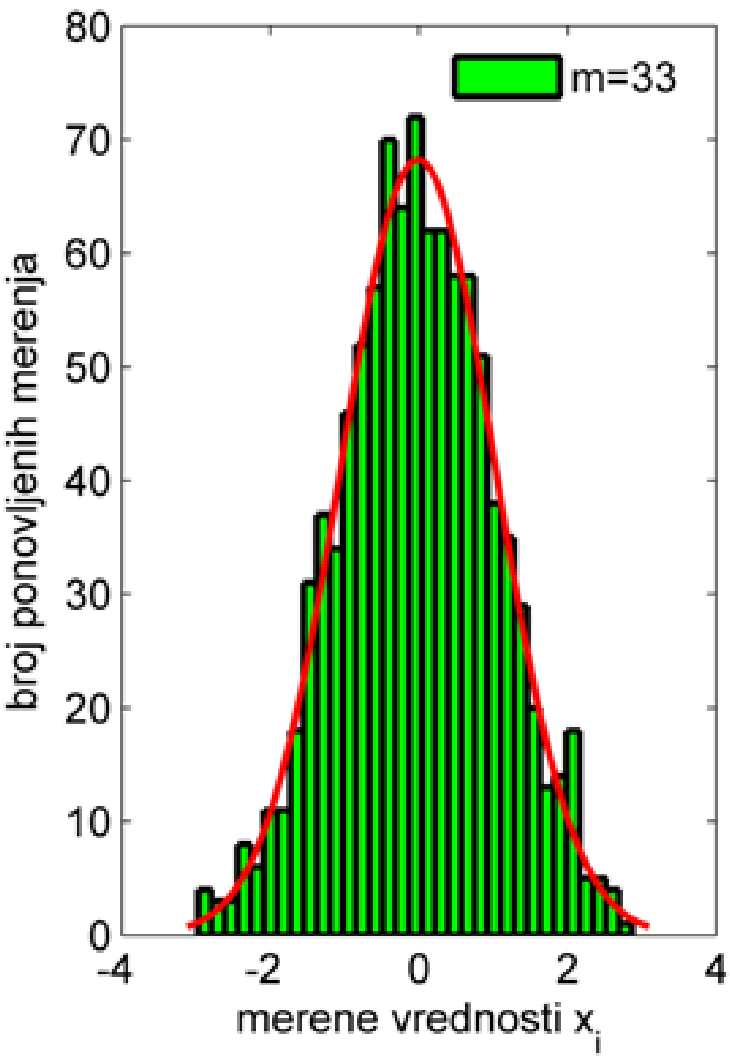
Merna nesigurnost tipa A (II deo)

Dr Nadica Miljković, vanredna profesorka, kabinet 68, nadica.miljkovic@etf.bg.ac.rs

Prezentacija za ovo predavanje je skoro u potpunosti pokrivena udžbenikom N. Miljković, “Metode i instrumentacija za električna merenja”, https://doi.org/10.5281/zenodo.1335249, odakle je i preuzet relativno veliki broj ilustracija i slika.

HISTOGRAM

Prikaz rezultata ponovljenih merenja



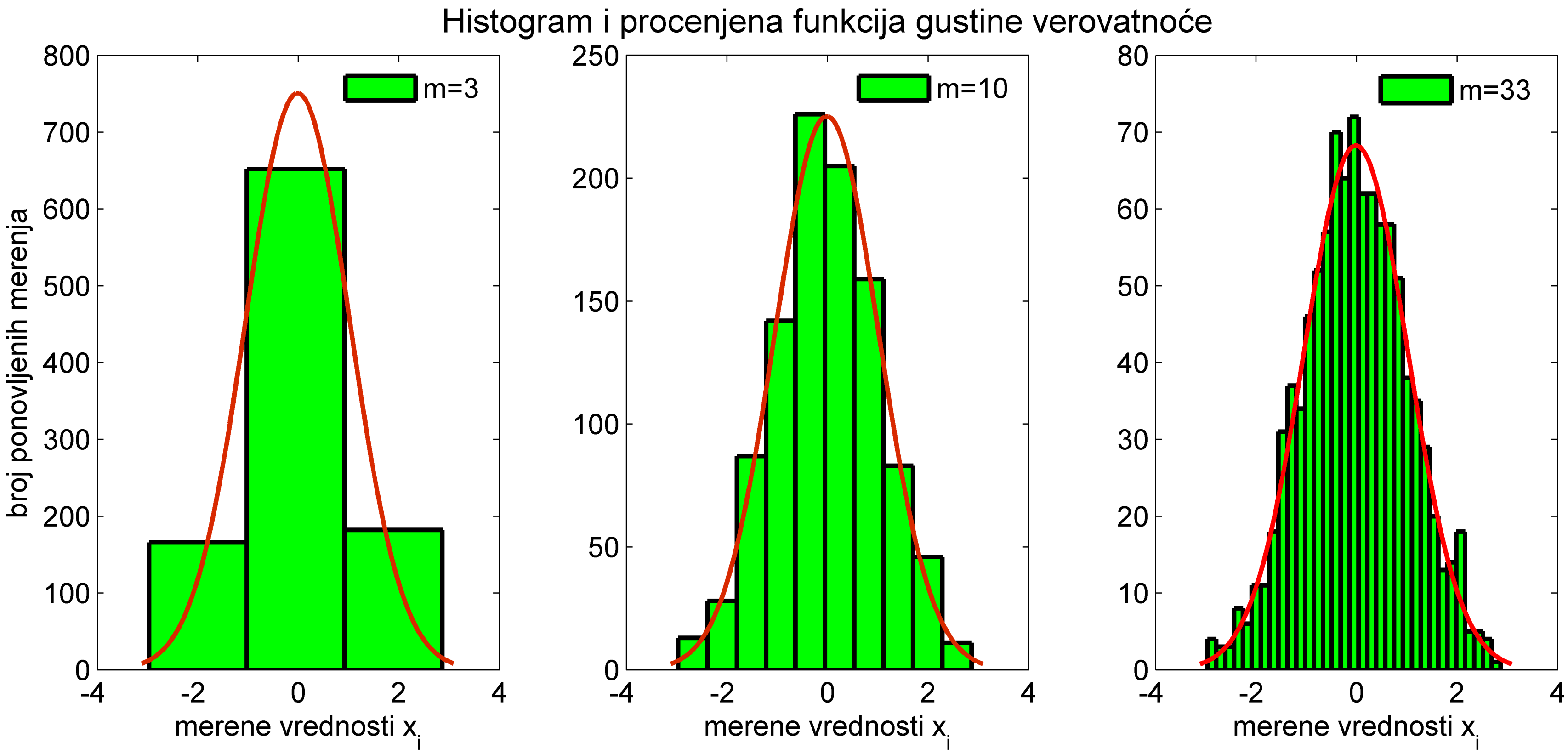
Radili ste na vežbama!
n – broj ponovljenih merenja
m – broj intervala histograma
preporučljivo je:

$$m \approx \sqrt{n} + 1$$

n_i je broj ishoda u intervalu opsega *i*, pa važi:

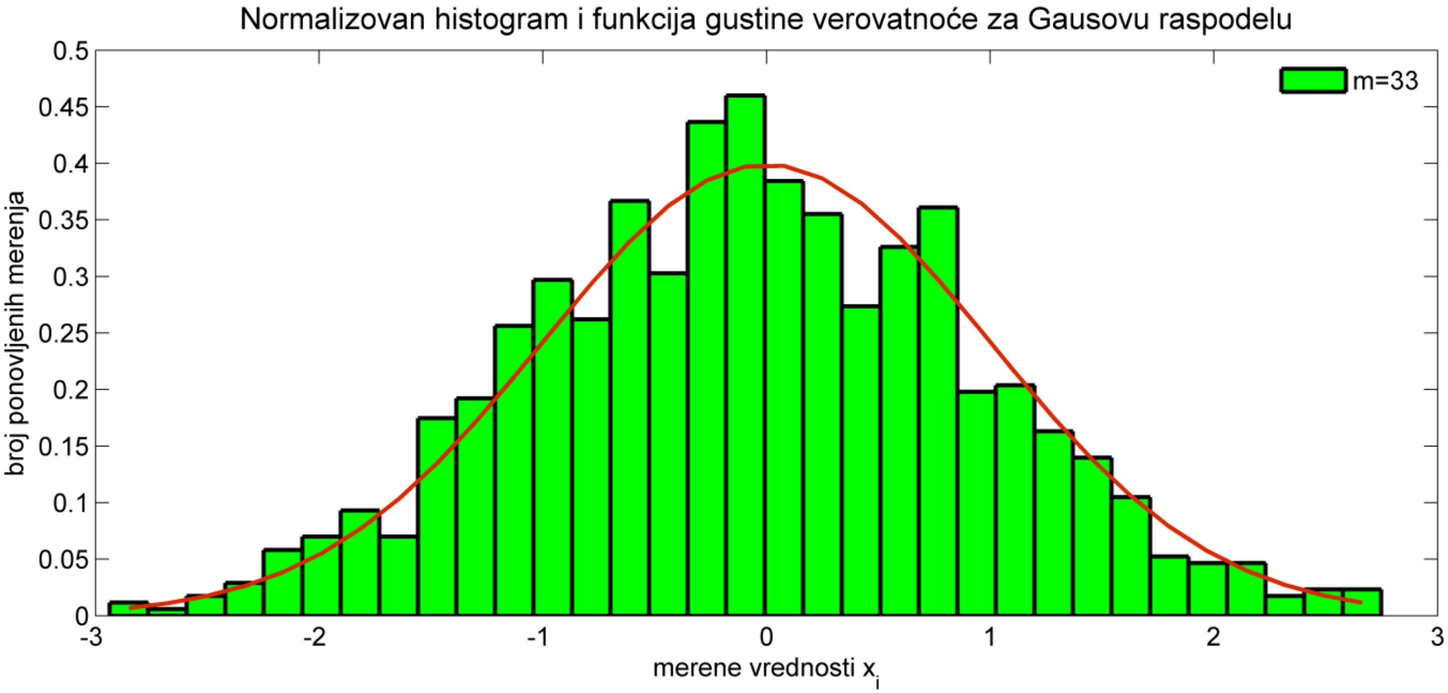
$$\sum_{i=1}^{m} n_i = n$$

Histogram i fgv



- Na histogramu je predstavljena (crvenom linijom) procenjena Gausova funkcija gustine verovatnoće za dobijene rezultate merenja.
- Sa *m* je označen broj intervala za prikaz histograma.
- Koji od histograma najbolje opisuje predstavljeno merenje koje je ponovljeno 1000 puta?
- Šta se dešava sa histogramom kada je *m* relativno malo, a šta kada je *m* relativno veliko?

Histogram



p_i je relativan broj ishoda u intervalu opsega i: $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1 \quad p_i = \frac{n_i}{n}$

Broj ishoda u intervalu n_i se naziva i učestanost intervala.

Relativna učestanost intervala (p_i) se može tumačiti i kao verovatnoća intervala.

Gustina verovatnoće intervala se dobija kada se relativna učestanost podeli sa širinom intervala → normalizovan histogram (kao na slici gore).

Parametri raspodele rezultata merenja

Ukoliko su rezultati prikazani u formi histograma, srednja vrednost može da se proceni i kao:

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{m} x_i p_i$$

gde je x_i sredina intervala i.

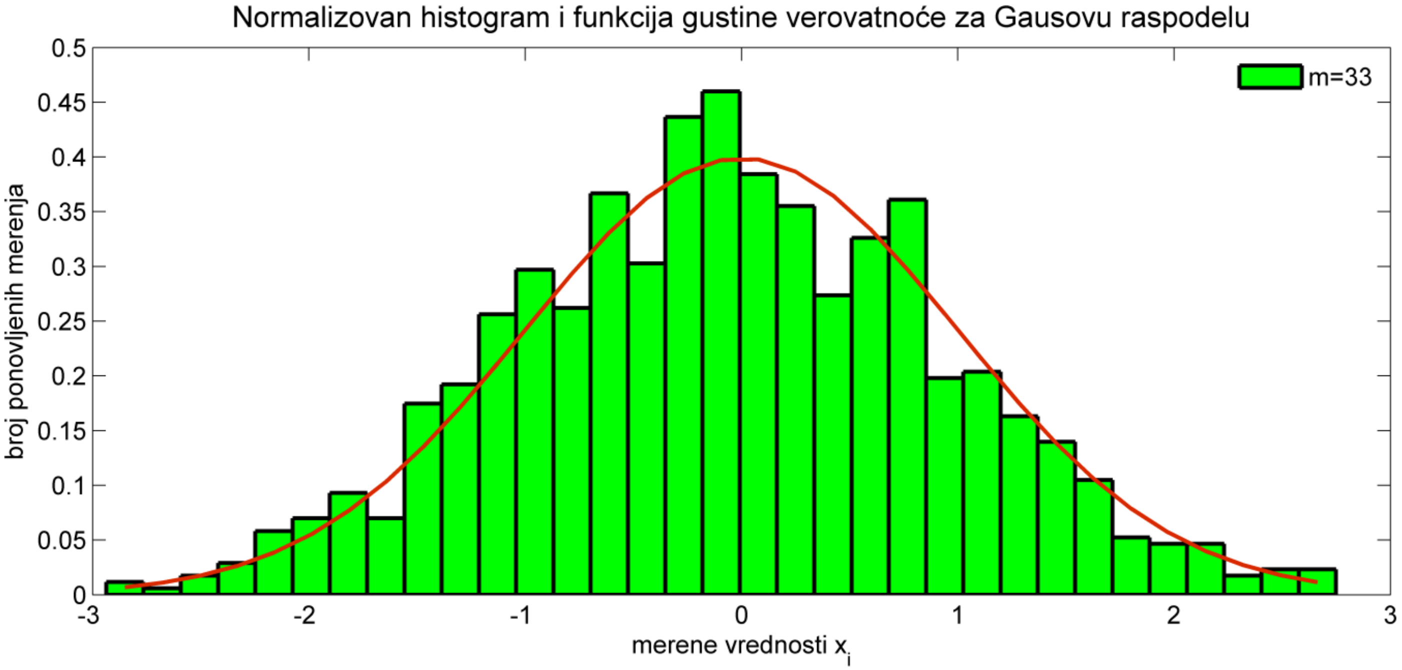
FUNKCIJA RASPODELE VEROVATNOĆE I FUNKCIJA GUSTINE VEROVATNOĆE

Verovatnoća

- Verovatnoća je u opštem slučaju, neki realan broj *p* u intervalu [0, 1], koji je pridružen nekom slučajnom događaju.
- Kada je $p = 0$, onda se taj događaj neće dogoditi, a kada je $p = 1$ onda će se sigurno dogoditi.
- Nekada se *p* izražava i u procentima.

Kockice, Javno vlasništvo,
https://as1.ftcdn.net/jpg/02/51/39/02/500_F_251390200_HpnWE9F08alVK7rjflyQKKP8RYt1Vlpd.jpg

Funkcija gustine verovatnoće



- Funkcija gustine verovatnoće fgv (eng. *Probability Density Function*, pdf, https://en.wikipedia.org/wiki/Probability_density_function) slučajne promenljive (merene vrednosti) se predstavlja u oznaci $f(x)$.
- Verovatnoća da će se merena vrednost naći u bilo kom intervalu (kolike su granice tog intervala?) je jednaka $f(x) = 1$ (100%).
- Vrednost fgv koja se, u opštem slučaju, može izraziti u procentima ili normalizovano u opsegu.
- Normalizovani histogram u ovom slučaju predstavlja diskretan prikaz merenja, a fgv odgovara procenjenom kontinualnom prikazu.

fgv

- Za fgv važi:

$$f(x) > 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

- Prema definiciji, fgv pokazuje kako su merene vrednosti raspoređene oko srednje vrednosti merenja.
- Pored fgv, definiše se i funkcija raspodele verovatnoće u oznaci *F*(*x*).

Funkcija raspodele verovatnoće

- Za merenje x_1, funkcija raspodele verovatnoće u oznaci $F(x_1)$ je jednaka verovatnoći nalaženja rezultata merenja x_1 u intervalu [-∞, x_1].
- Odnos funkcije raspodele verovatnoće i funkcije gustine verovatnoće je:

$$F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} f(x)dx$$

- Funkcija raspodele verovatnoće $F(x_1)$ je monotono neopadajuća funkcija.
- Kontinualni domen: Funkciji raspodele verovatnoće → diskretni domen: kumulativni histogram (njime se ne bavimo).

$F(x)$ i $f(x)$

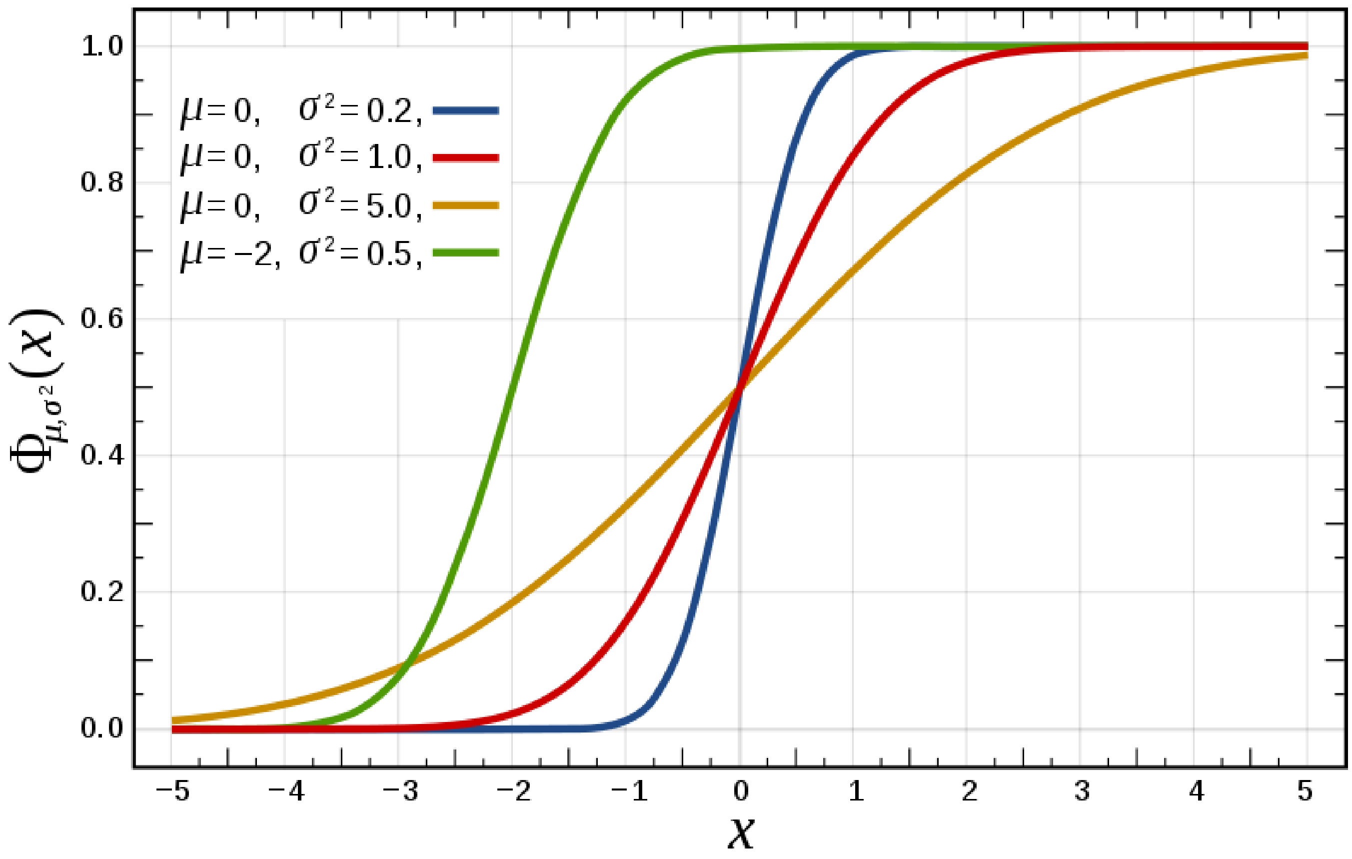
- Jednostavno se može zaključiti da se verovatnoća *P* da merena veličina *X* uzima vrednosti u opsegu $[x_1, x_2]$ u oznaci $P(x_1 < X < x_2)$ može izračunati na dva načina: 1) preko fgv i 2) preko funkcije raspodele verovatnoće:

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

- Ove dve funkcije su jednoznačno povezane, odnosno ako je poznata funkcija raspodele verovatnoće *F*(), onda se jednostavno može odrediti *f*() i obrnuto.
- Kako se fgv jednostavno procenjuje pomoću histograma, to se ona češće koristi u teoriji električnih merenja.

$F(x)$ i $f(x)$



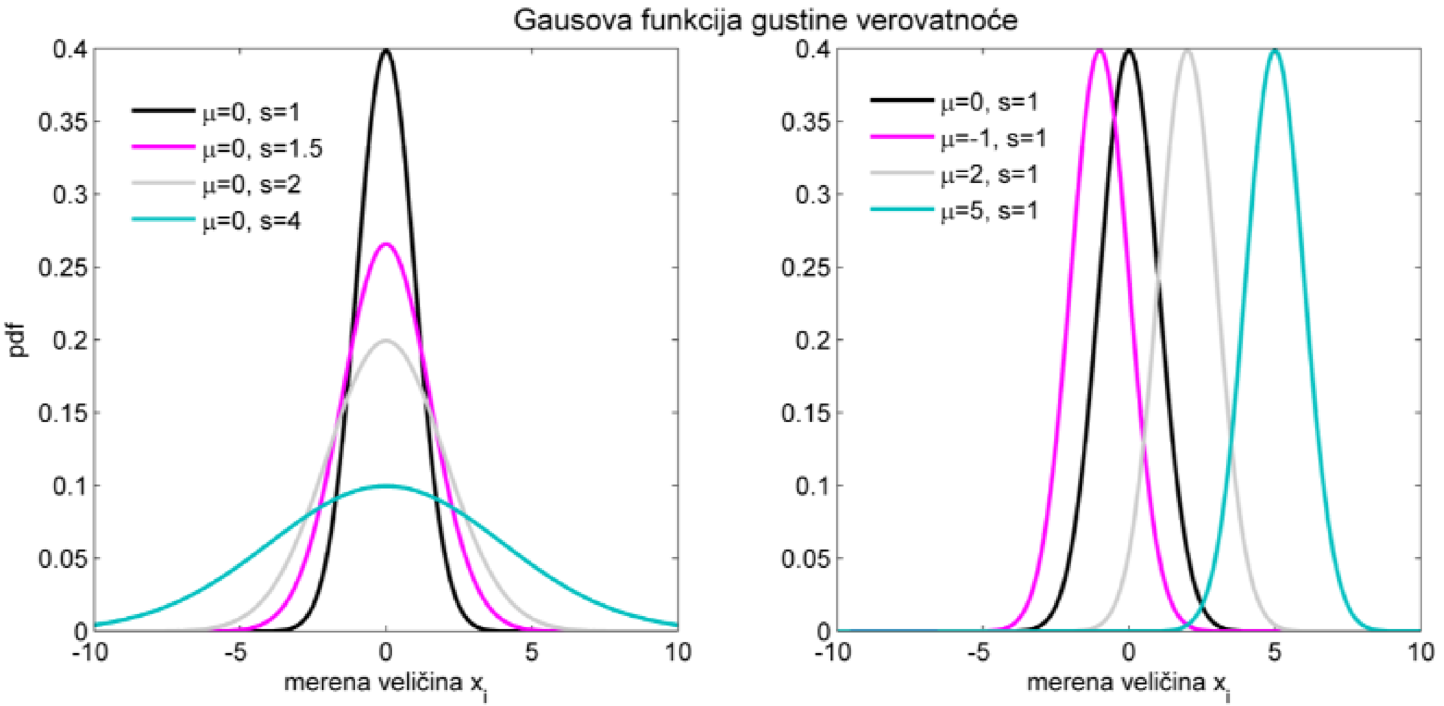
$$F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} f(x)dx$$

$$f(x) > 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Cumulative distribution function, By Inductiveload - self-made, Mathematica, Inkscape, Javno vlasništvo, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=3817960

$F(x)$ i $f(x)$



$$F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} f(x)dx$$

$$f(x) > 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Probability density function, grafik je preuzet iz udžbenika.

Gausovo zvono?

- Na dosadašnjim primerima je pokazano da fgv ima takav oblik da se rezultati "gomilaju" u neposrednoj okolini srednje vrednosti. Takođe, pokazano je na primerima i eksperimentalno je utvrđeno da je verovatnoća da se rezultat nađe u blizini srednje vrednosti veća → Gausovo zvono.
- U statistici i teoriji verovatnoće se vrednost oko koje se gomilaju rezultati merenja naziva matematičko očekivanje *E* (eng. *Expected value*, https://en.wikipedia.org/wiki/Expected_value):

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

- Fizički značaj matematičkog očekivanja je vrednost kojoj teži neko merenje.
- Za Gausovo zvono, matematičko očekivanje je bilo jednako srednjoj vrednosti merenja za ponovljena merenja. Međutim, to važi samo za Gausovu raspodelu.

Na primer?

- Bacanje kockice.
- Postoji podjednaka verovatnoća da će rezultat bacanja kockice biti brojevi u opsegu [1, 6], u opštem slučaju [1, *n*].
- Logično je da neće biti "gomilanja" rezultata merenja.
- Kako je ovo diskretno merenje, integral sa prethodnog slajda postaje suma:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_n f(x_n)$$

$$E(X) = 1\frac{1}{6} + 2\frac{1}{6} + 3\frac{1}{6} + 4\frac{1}{6} + 5\frac{1}{6} + 6\frac{1}{6} = 3.5$$

$$f(x_n) = \frac{1}{6}$$

Kockice, Javno vlasništvo,
https://as1.ftcdn.net/jpg/02/51/39/02/500_F_251390200_HpnWE9F08alVK7rjflyQKKP8RYt1Vlpd.jpg

Varijansa slučajne promenljive

- Kako bi se odredilo “rasipanje” ponovljenih merenja oko srednje vrednosti, korišćena je standardna devijacija.
- Za određivanje rasipanja merenja oko matematičkog očekivanja, koristi se varijansa *D*(*X*) od eng. *Dispersion*.

$$D(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)$$

- Varijansa je jednaka matematičkom očekivanju razlike pojedinačnog merenja i matematičkog očekivanja merenja. OK?
- Kolika je varijansa u slučaju bacanja kockice?

$$D(X) = 1^2\frac{1}{6} + 2^2\frac{1}{6} + 3^2\frac{1}{6} + 4^2\frac{1}{6} + 5^2\frac{1}{6} + 6^2\frac{1}{6} - \left(1\frac{1}{6} + 2\frac{1}{6} + 3\frac{1}{6} + 4\frac{1}{6} + 5\frac{1}{6} + 6\frac{1}{6}\right)^2$$

- Rezultat merenja, odnosno bacanja kockice je 3.5 ± 2.92.

Kockice, Javno vlasništvo, https://as1.ftcdn.net/jpg/02/51/39/02/500_F_251390200_HpnWE9F08alVK7rjflyQKKP8RYt1Vlpd.jpg

Varijansa i standardna devijacija

- U opštem slučaju, varijansa predstavlja moment drugog reda.
- Svaka fgv je u potpunosti opisana matematičkim očekivanjem, varijansom (centralni moment drugog reda), ali i momentima višeg reda. Često se centralni momenti višeg reda se ili mogu zanemariti ili su jednaki 0 (na primer, u metodi nezavisnih komponenti za obradu signala, ICA, eng. *Independent Component Analysis*). Momenat reda *p* se računa kao

$$M(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^p\right)$$

- Uobičajeno se za definisanje merne nesigurnosti, umesto varijanse, koristi standardna devijacija *σ*:

$$\sigma = \sqrt{D(X)}$$

Gausovo zvono?

- Da li prilikom nekog merenja pretpostaviti Gausovo zvono ili se *E* i *D* moraju računati uvek kao u slučaju bacanja kockice?
- Uobičajeno, prilikom merenja neke električne veličine postoji "nagomilavanje" merenih vrednosti oko neke vrednosti (oko srednje vrednosti?).
- Ako je to "nagomilavanje" rezultata simetrično (u obliku zvona) onda se raspodela merenih vrednosti naziva normalna ili Gausova raspodela, https://en.wikipedia.org/wiki/Normal_distribution
- Fgv za Gausovu raspodelu je:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

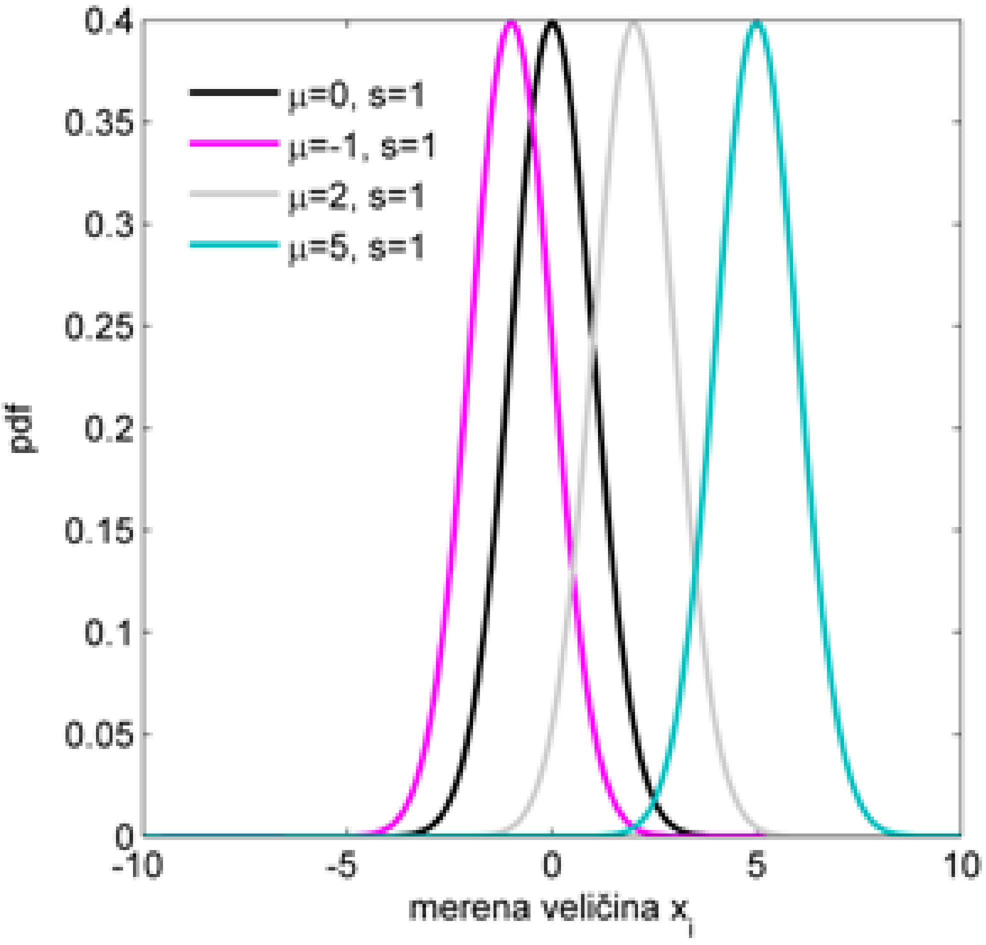
- Sa μ i σ su označeni označeni srednja vrednost i varijansa. Njihove procene u diskretnom slučaju (kada postoji neki konačan broj ponovljenih merenja) određene su sledećim formulama:

$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

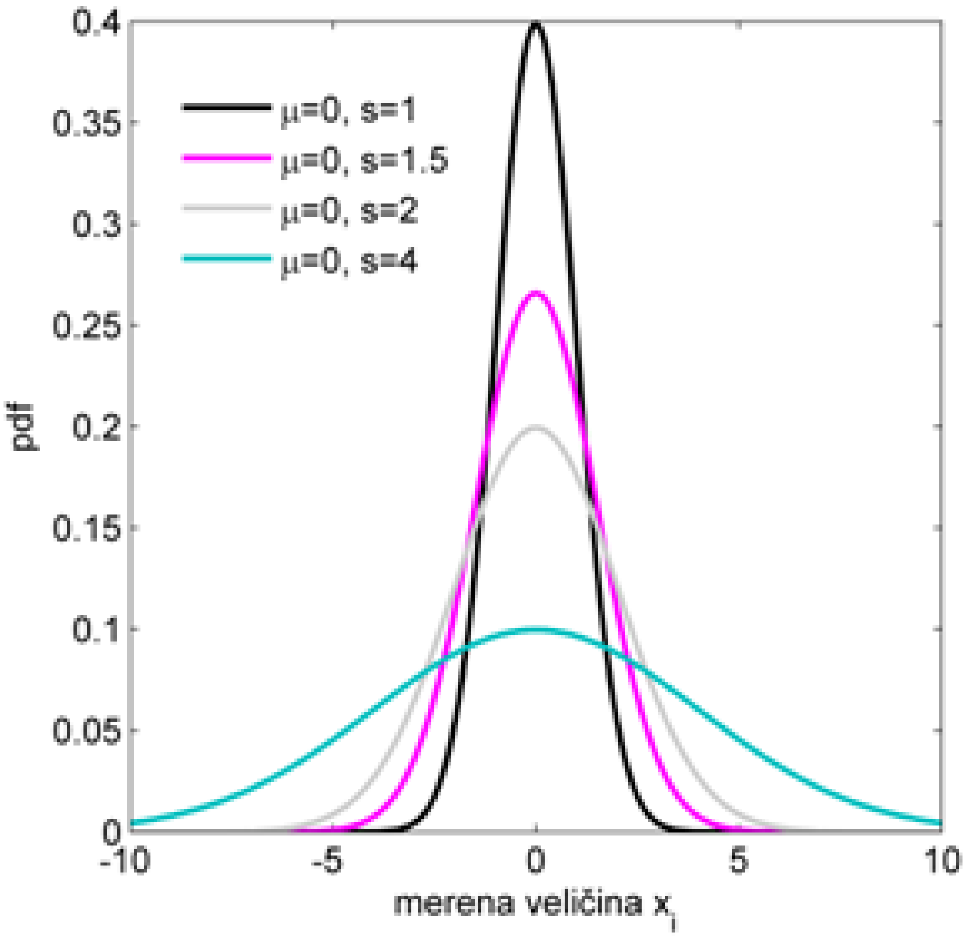
- ZAKLJUČAK: Na prethodnom času je pokazano kako se računa merna nesigurnost tipa A u slučaju Gausove raspodele.

Normalna raspodela



$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Normalna raspodela



$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Neka svojstva Gausove raspodele

- Ako je srednja vrednost jednaka 0 i ako je očekivanje jednako 1, tada se Gausova raspodela može opisati funkcijom:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

- Za generisanje pseudoslučajnih brojeva na računaru, ovo su dve najčešće podrazumevane vrednosti. Vrlo često se Gausova funkcija gustine verovatnoće normalizuje kako bi srednja vrednost bila jednaka 0 i varijansa bila jednaka 1, kao u prethodnom primeru.
- Normalizacija se vrši uvođenjem smene po *Z*.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

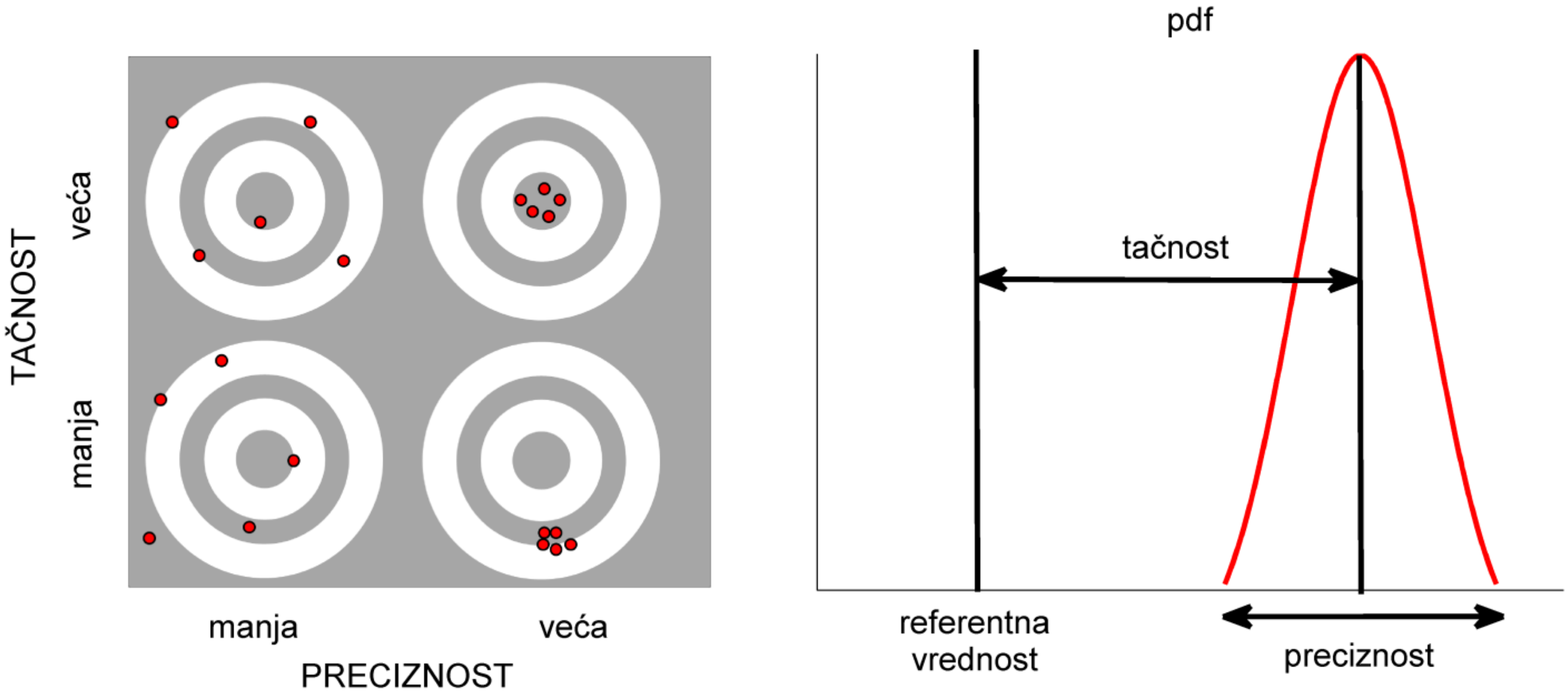
- U literaturi se vrlo česte sreće i sledeći oblik ove funkcije:

$$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^y e^{-\frac{x^2}{2}} dx \qquad \Phi(y) = \frac{1}{2} erf\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)$$

- gde je sa φ(*y*) označena funkcija greške (eng. *error function*), a sa erf je označena komplementarna funkcija greške:

$$erf(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-x^2} dx \qquad erf(y) = 1 - erfc(y)$$

Tačnost ≠ preciznost merenja

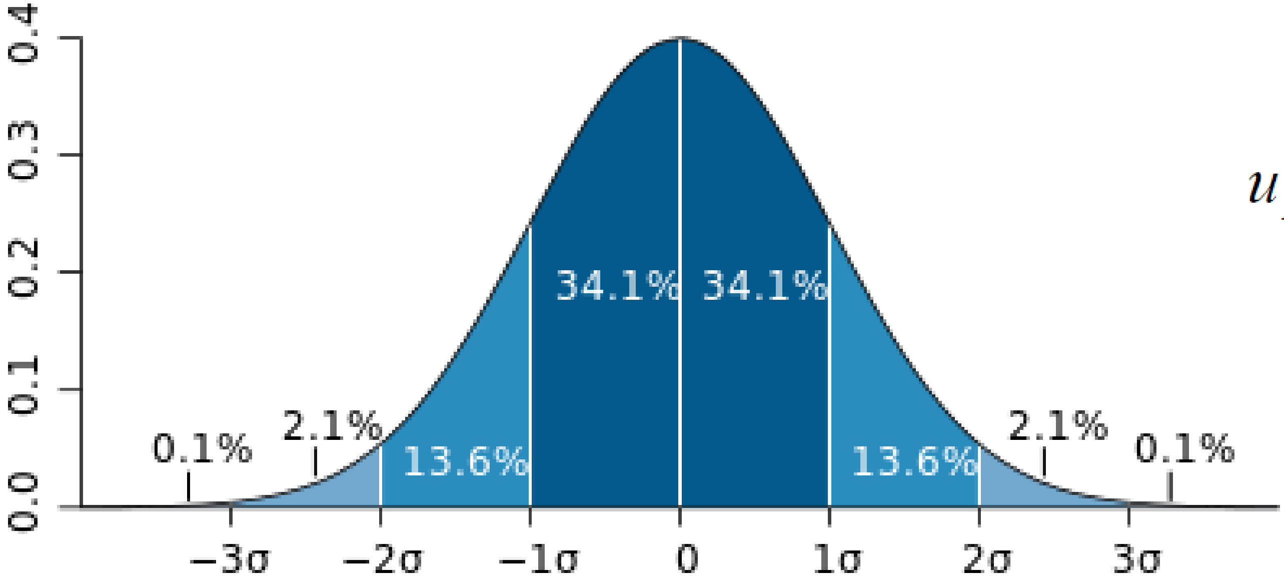


Preciznost i tačnost merenja u slučaju pikada (levi panel) i u odnosu na Gausovu funkciju gustine verovatnoće (desni panel).

Oznaka pdf (eng. *probability density function*) označava funkciju gustine verovatnoće.

MERNA NESIGURNOST TIPA A
GAUSOVA RASPODELA VEROVATNOĆE

Merna nesigurnost tipa A



$$u_A = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n\left(n-1\right)}}$$

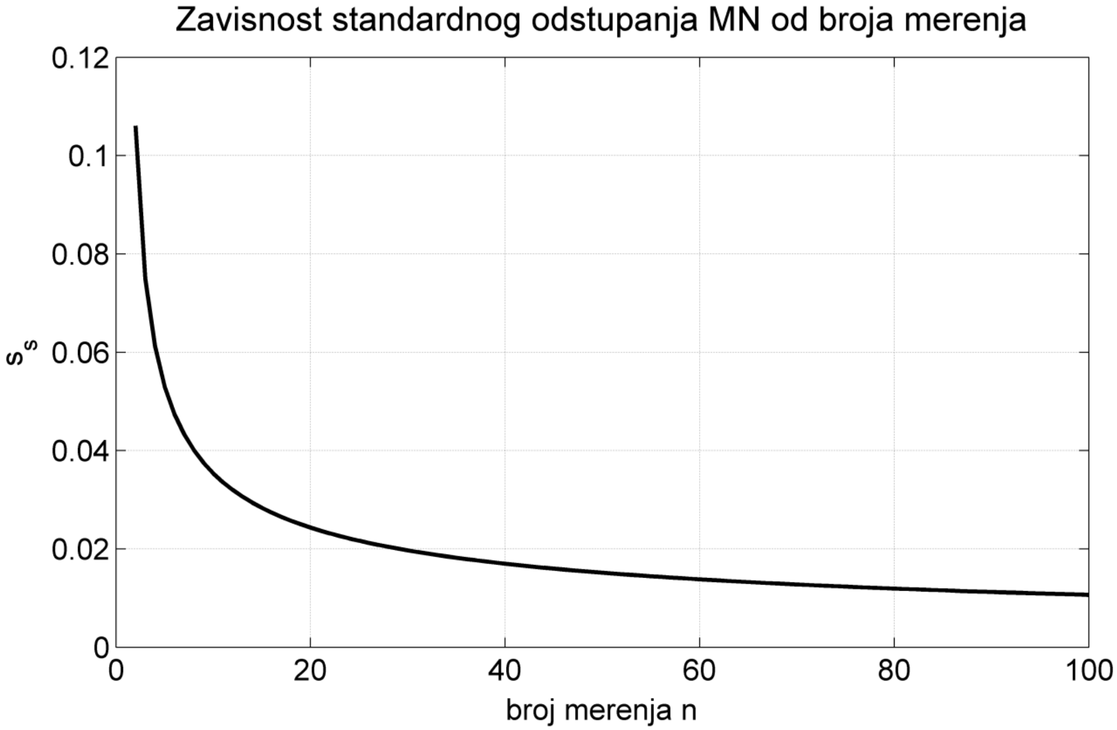
Standardna devijacija srednje vrednosti merenja je procena merne nesigurnosti tipa A. Teorijski, deli se sa još jednim sqrt(*n*).

Kako zavisi MN tipa A od broja merenja?

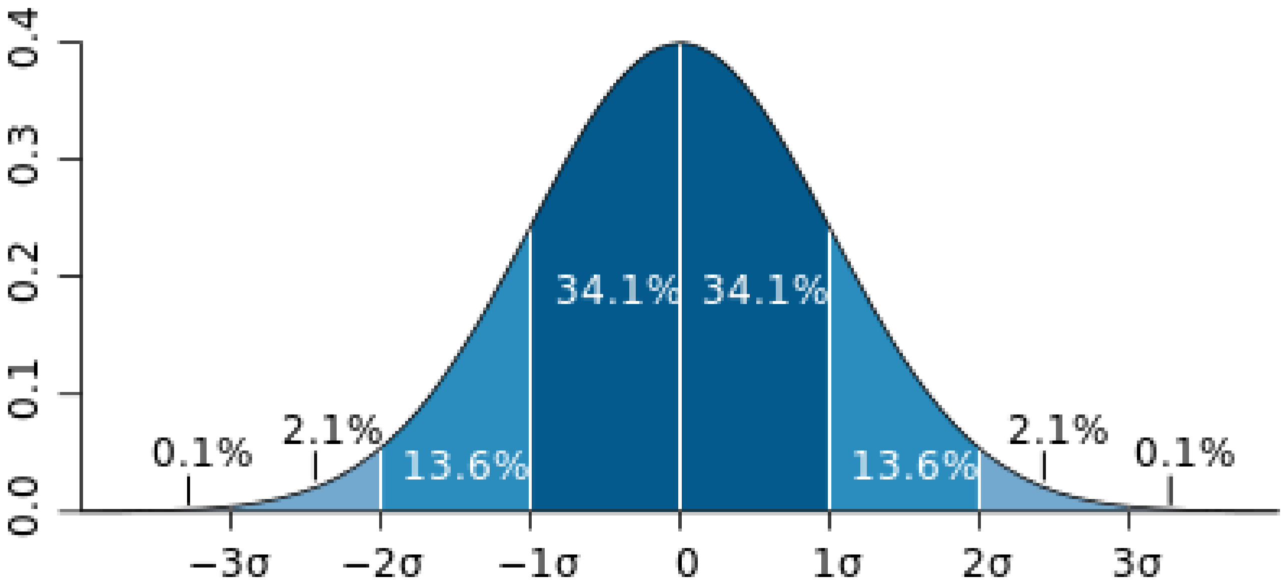
- Populacija (eng. *mean*) ≠ uzorak (eng. *average*)
- Standardno odstupanje s ima svoju mernu nesigurnost, koja je opisana sa:

$$s_s = \frac{s}{\sqrt{2(n-1)}}$$

- Zavisnost standardnog odstupanja od broja merenja je prikazano na slici.



Šta znače procenti na grafiku?



$$u_A = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n(n-1)}}$$

$$\bar{x} \pm u_A$$

By M. W. Toews - Own work, based (in concept) on figure by Jeremy Kemp, on 2005-02-09, CC BY 2.5, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1903871

Kada se rezultat merenja predstavi kao na slici, ovakvom rezultatu se pridružuje odgovarajuća verovatnoća, odnosno nivo poverenja.

Ukoliko se zahteva veća tačnost, potrebno je uvesti faktor proširenja. Kako?

Važno! Faktor proširenja!

- U praksi se ne sme *k* proizvoljno povećavati, kako bi interval obuhvatio sistematske greške, jer se pojmovi merne nesigurnosti i sistematskog efekta / greške značajno razlikuju.
- Za odgovarajući odabir *k*, potrebno je prethodno poznavanje funkcija gustine verovatnoće rezultata merenja.

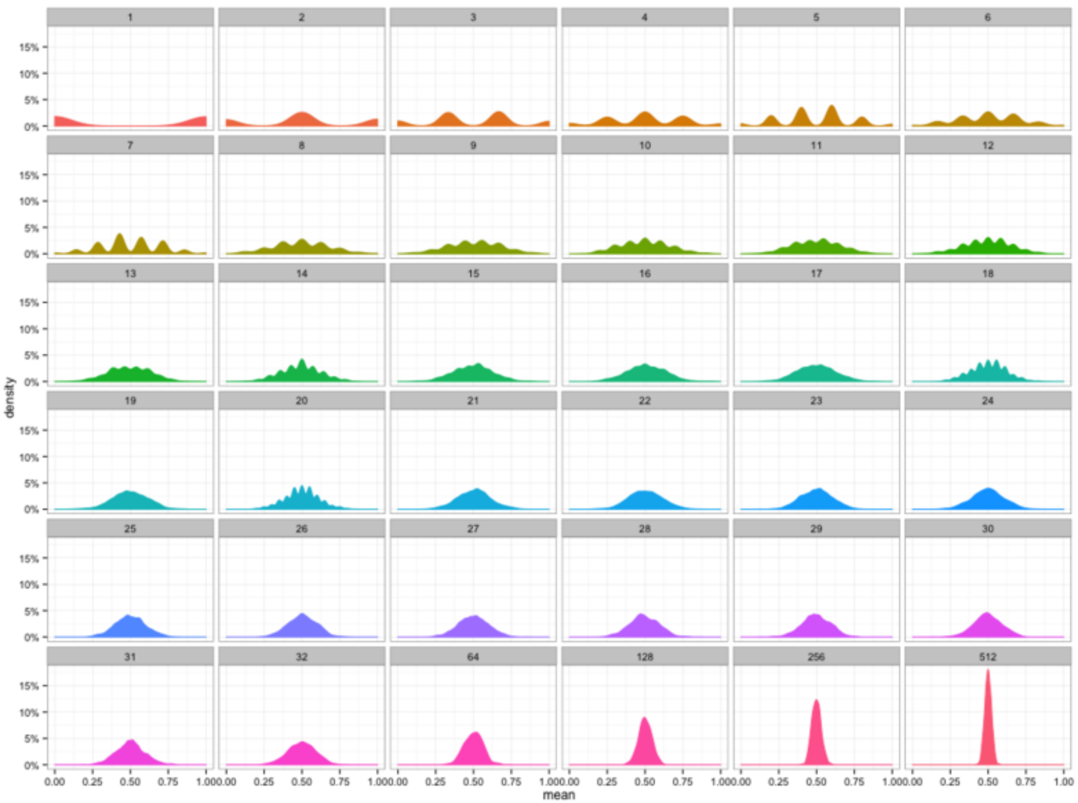
MERNA NESIGURNOST TIPA A
UNIFORMNA GUSTINA RASPODELE VEROVATNOĆE
I DRUGE RASPODELE

u_A za negausovske raspodele

- Pri određivanju merne nesigurnosti, najčešće se, pored Gausove, odnosno normalne, koriste sledeće raspodele:
  - ravnomerna (uniformna),
  - trougaona i
  - trapezoidna.
- Svaka funkcija gustine verovatnoće, mora da ispunjava uslov normiranosti:

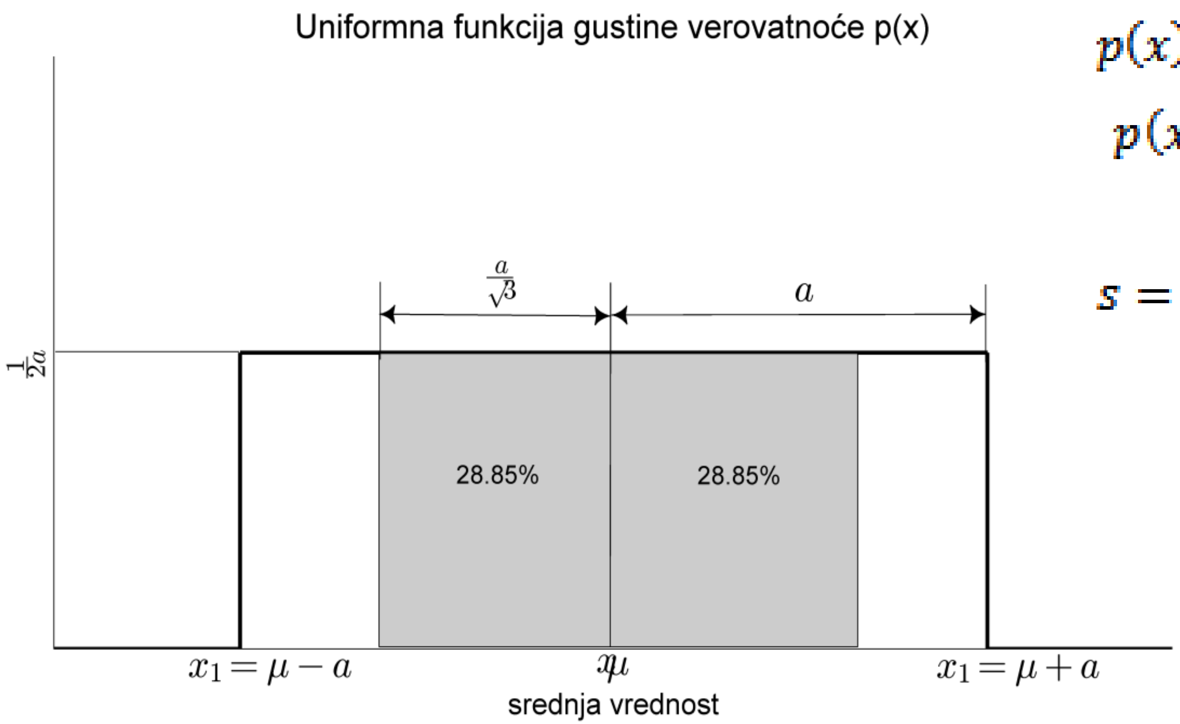
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Sve raspodele teže jednoj!



- Za bilo koje merenje, koje je izvršeno dovoljno veliki broj puta, prema centralnoj graničnoj teoremi (eng. *Central Limit Theorem*), važi da takvo merenje ima Gausovu raspodelu, https://en.wikipedia.org/wiki/Central_limit_theorem
- Otud najveći značaj Gausove raspodele i u teoriji verovatnoće i statistici, ali i u teoriji električnih merenja.
- U praksi se ne može izmeriti beskonačno mnogo puta neka veličina, pa je potrebno koristiti i fgv koje nisu Gausova fgv.

Uniformna fgv

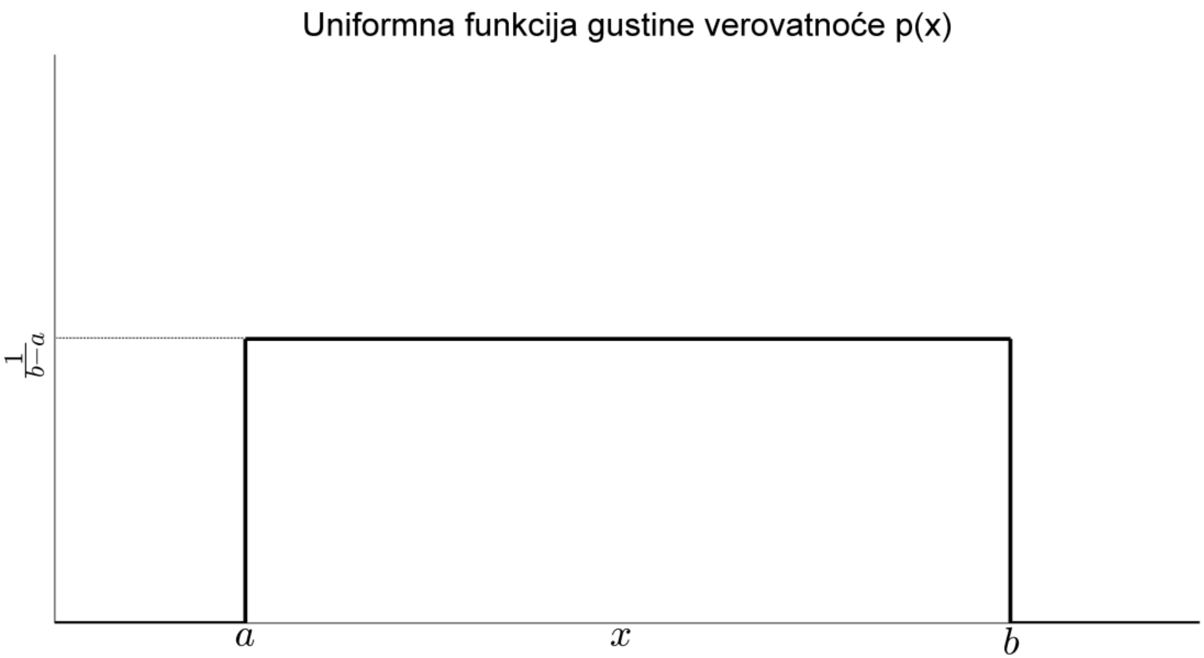


$$p(x) = \frac{1}{2a}, \qquad x_1 < x < x_2$$
$$p(x) = 0, \qquad x \leq x_1 \cap x \geq x_2$$

$$s = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

- Primena:
  - za generisanje slučajnih brojeva,
  - kada se procenjuje merna nesigurnost prilikom očitavanja merene veličine na skali digitalnog indikatora (tada je merna nesigurnost jednaka polovini *digit*-a) i
  - kada su dati tablični podaci o osobinama nekog materijala sa opsegom u kome se nalaze određeni parametri tog materijala (na primer specifična otpornost).

Uniformna fgv, nesimetrična



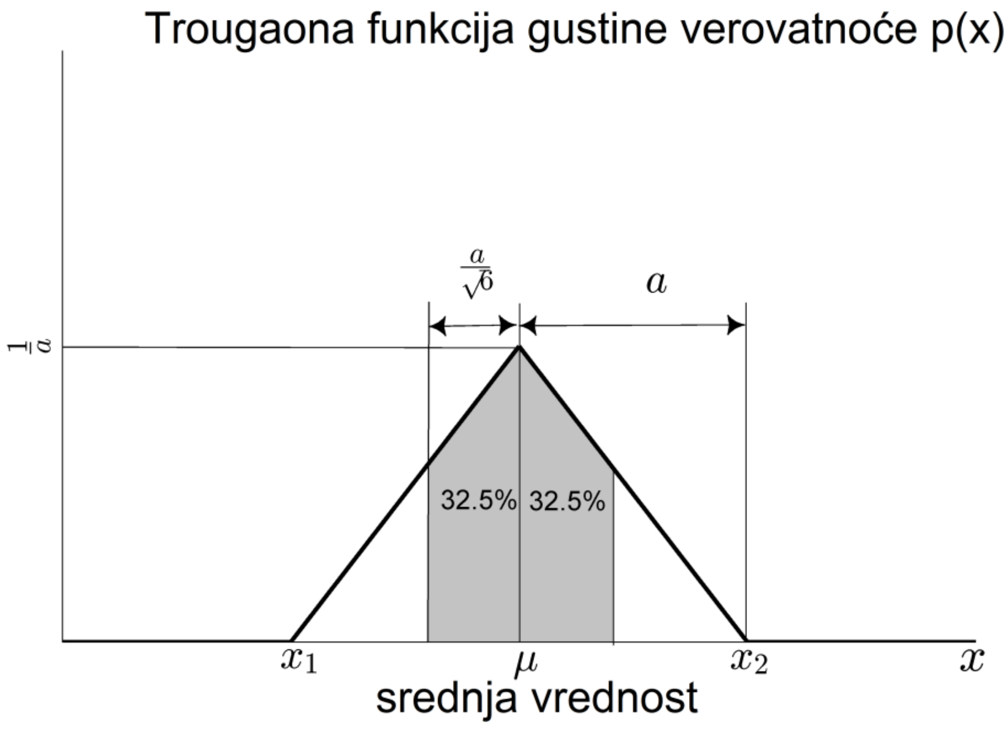
$$p(x) = \frac{1}{b-a}$$

$$E(X) = \frac{b+a}{2}$$

$$\sigma = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$$

- Uniformna fgv za nesimentričan interval.
- Za *k* = 1.5, interval je jednak 86.6%. Treba imati na umu da faktor proširenja ne može da bude veći od *sqrt*(3) u slučaju uniformne raspodele, jer je u tom slučaju obuhvaćen ceo merni opseg (100%).
- Vrlo često proizvođači elektronskih komponenti u specifikaciji proizvoda daju informaciju o opsegu električne veličine, pa se za računanje merne nesigurnosti koristi uniformna raspodela.

Simetrična trougaona fgv



$$p(x) = \frac{(x - x_1)}{a^2} \qquad x_1 \leq x \leq \mu$$

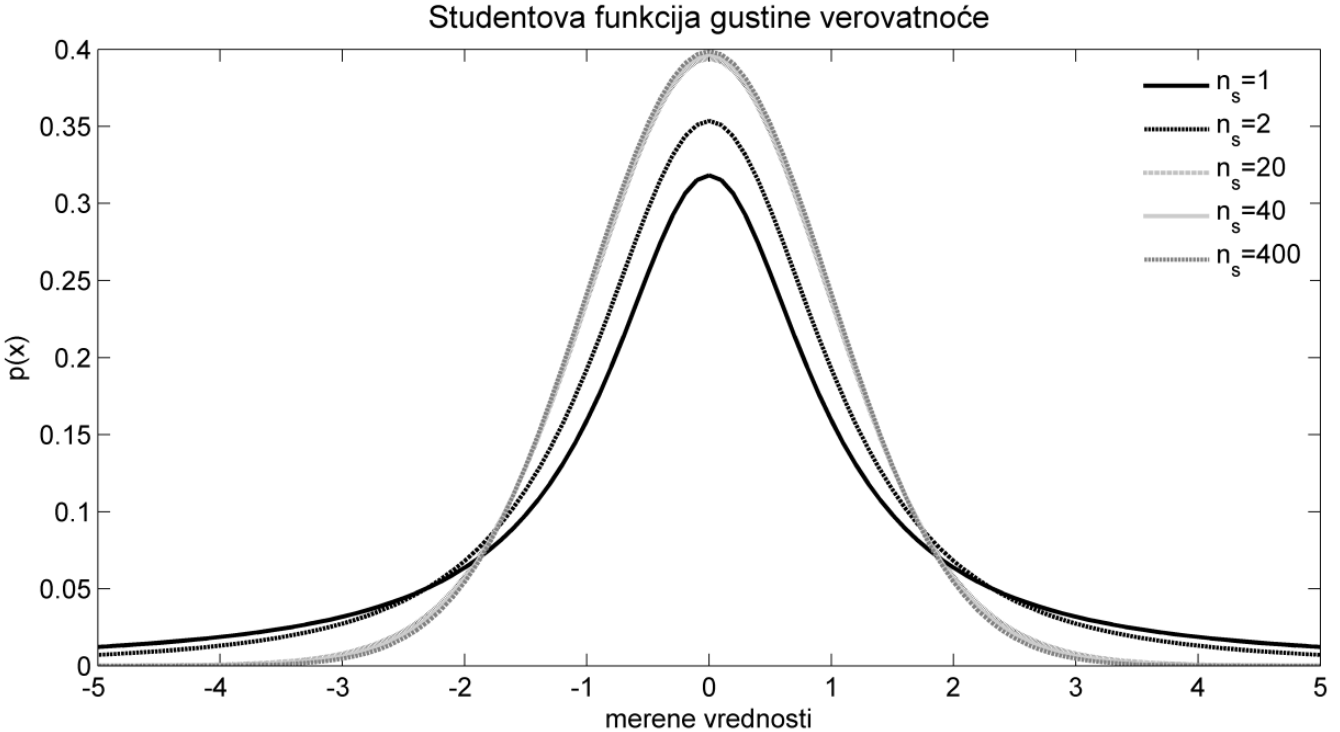
$$p(x) = \frac{(x_2 - x)}{a^2} \qquad \mu \leq x \leq x_2$$

$$p(x) = 0 \qquad x < x_1 \cap x > x_2$$

$$s = \frac{a}{\sqrt{6}}$$

- Osnovna odlika ove fgv je skoncentrisanost rezultata merenja.
- Koristi se kada je poznato da postoji grupisanje rezultata merenja oko neke vrednosti, a raspodela nije Gausova.

Studentova raspodela



$$p(x,v) = \frac{1}{\sqrt{\pi v}} \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}}$$

- Kada broj stepeni slobode *v* teži beskonačnosti, tada Studentova funkcija gustine verovatnoće postaje Gausova funkcija gustine verovatnoće sa srednjom vrednošću 0 i varijansom 1.
- Studentova raspodela se koristi u posebnim slučajevima, kada se zahteva velika preciznost u definisanju intervala poverenja prilikom predstavljanja rezultata merenja.

Kako znate koju raspodelu da koristite?

- Generalno i uprošćeno gledano, postoje dva koraka:
  - prvo se merene vrednosti predstavljaju u vidu histograma i
  - potom se pretpostavljena funkcija gustina verovatnoće testira / proverava. U tu svrhu se može koristiti hi kvadrat (χ^2) test.
- Korisno o odabiru raspodela i poređenju fgv:
  - Uniformna fgv ima najmanju statističku sigurnost u intervalu $\mu \pm \sigma$ i najmanji koeficijent proširenja.
  - Kod Gausove fgv postoji veća razlika između vrednosti koeficijenta proširenja u odnosu na uniformnu funkciju za različite statističke sigurnosti: na primer, za $k = 3$ i $k = 2.58$ odgovarajuće statističke sigurnosti su 99.7% i 99%.
  - Trougaona i Gausova fgv imaju bliske vrednosti koeficijenata proširenja, odnosno standardnog odstupanja pri istoj ekvivalentnoj poluširini intervala.
  - Studentova fgv ima značajno proširenje intervala za relativno mali broj izmerenih uzoraka (relativno mali broj ponovljenih merenja) i relativno visoku verovatnoću koja se priključuje mernoj nesigurnosti.

χ^2 test (Pearson-ov test)

Kada nije poznata raspodela rezultata merenja, potrebno ju je odrediti, kako bi se na osnovu određene raspodele izračunala merna nesigurnost. Predstavlja statistički test, kojim se proverava hipoteza o “poklapanju” gustine raspodele rezultata merenja sa nekom unapred pretpostavljenom gustinom raspodele, https://en.wikipedia.org/wiki/Pearson's_chi-squared_test.

Pretpostavka je da parametri gustine raspodele mogu da se odrede na osnovu rezultata merenja.

Testira se i prihvata / odbacuje hipoteza:
H_0 – “gustina raspodele odgovara ...”
Slaganje empirijske sa teorijskom raspodelom se obavlja prema formuli:

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{K} \frac{(f_{rm} - f_{rt})^2}{f_{rt}}$$

MERNA NESIGURNOST TIPA A
PRIMER

Merenje otpornosti

Digitalnim multimetrom visoke tačnosti (smatrati da se uticaj ovog instrumenta na tačnost merenja može zanemariti) izvršeno je po 10 uzastopnih merenja otpornosti dva otpornika R_1 i R_2. Rezultati ova dva merenja dati su u tabeli 2 (pretpostaviti da oba merenja imaju Gausovu funkciju gustine verovatnoće).

Poznato je da je prilikom merenja jednog od ova dva otpornika korišćen priključak sa Kelvinovim kontaktima, a u drugom merenju nije. Na osnovu *Color Code* šeme proizvođača, poznato je da su nominalne vrednosti ova dva otpornika od $R_{nom1} = 820\ \Omega$ i $R_{nom2} = 540\ \Omega$. Potrebno je:

a) Izračunati mernu nesigurnost tipa A za oba merenja i prikazati rezultat merenja za faktor proširenja $k = 2$.
b) Koje merenje je preciznije, a koje merenje je tačnije?
c) Koje merenje je izvršeno primenom Kelvinovih kontakta, a koje nije?
d) Izračunati otpornost kablova u slučaju merenja bez Kelvinovih kontakta?

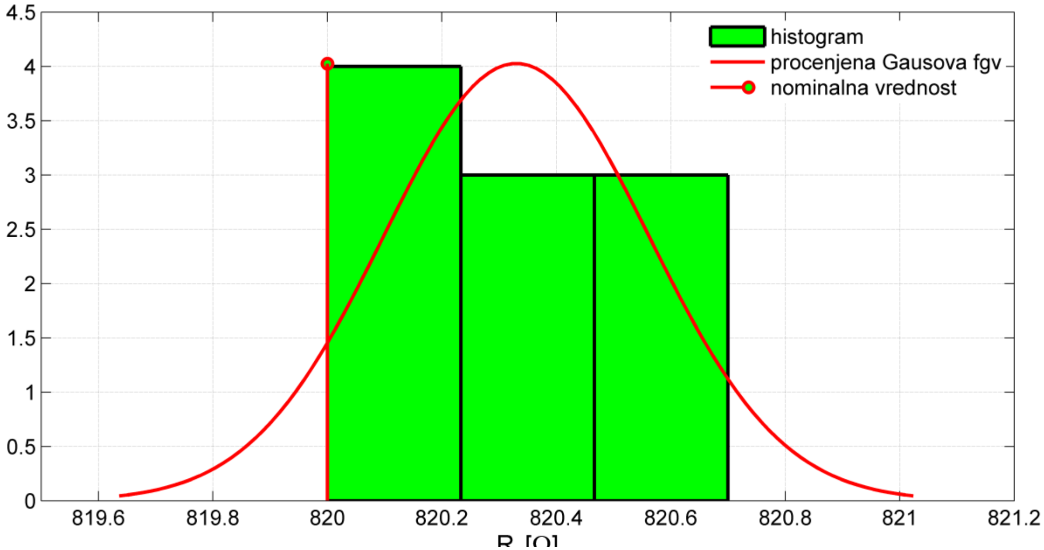
Srednje vrednosti rezultata merenja za 10 ponovljenih merenja ($n = 10$) otpornosti su:

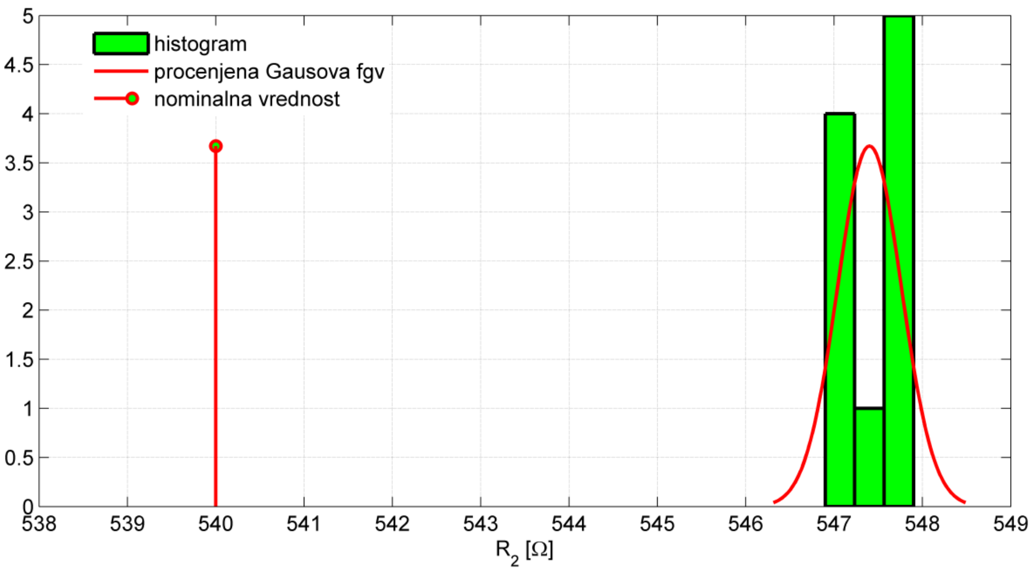
$$\bar{R}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} R_{1i} = 820.33\ \Omega$$

$$\bar{R}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} R_{2i} = 547.40\ \Omega$$

redni br. merenja		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
otpornost [Ω]	R_1	820.5	820.0	820.1	820.6	820.4	820.3	820.2	820.1	820.4	820.7
	R_2	547.9	546.9	547.1	547.6	547.3	547.0	547.1	547.8	547.6	547.7

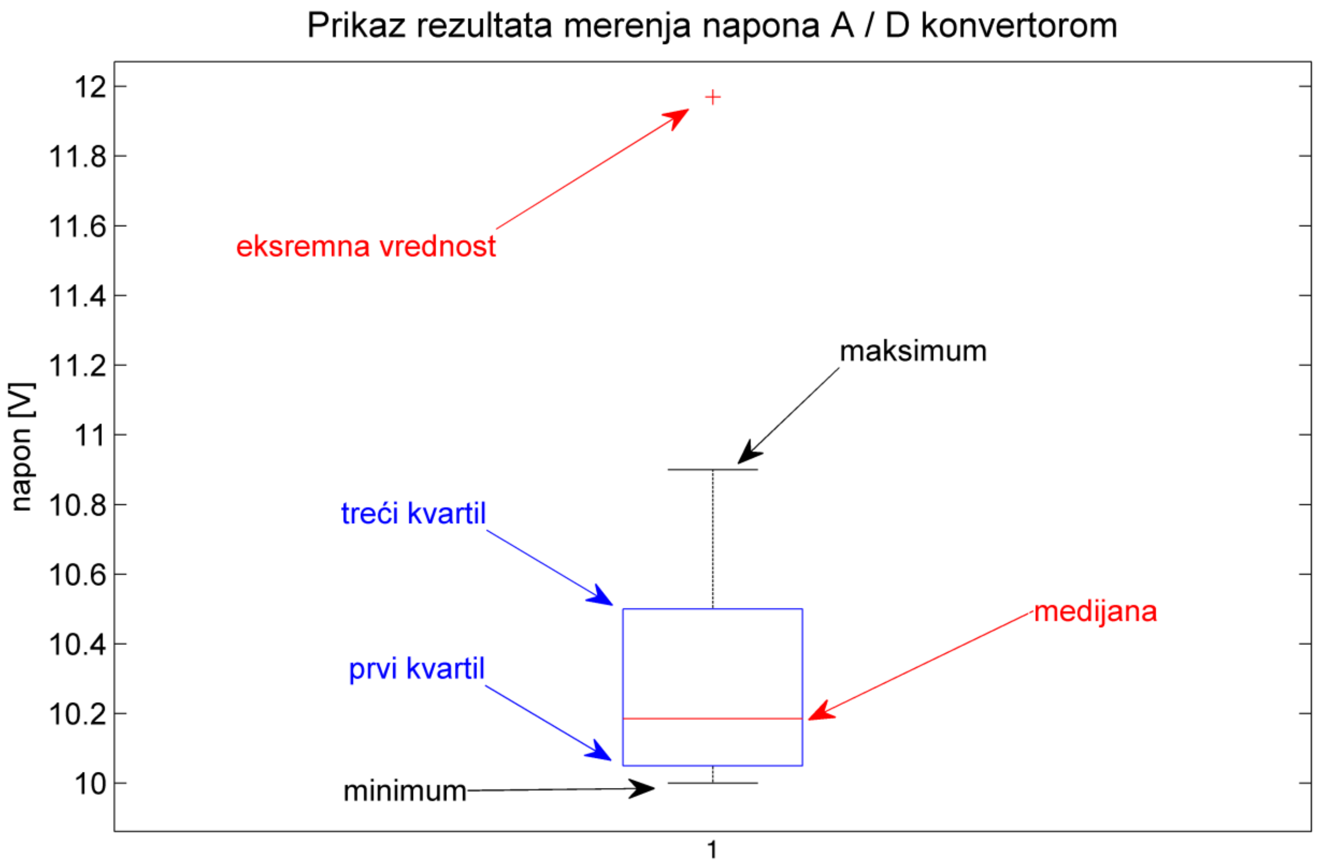
Rešenje





- Ovaj zadatak nema praktičnog značaja.
- Ponovljena merenja ovde nemaju nikakvog smisla, jer se tačnost merenja svodi na tačnost korišćenog instrumenta, odnosno, merna nesigurnost tipa A se može zanemariti.
- Ponovljena merenja imaju smisla, samo ako se radi o otpornicima visoke preciznosti, kao što su (bili) etaloni.
- Ovaj primer ima samo i isključivo obrazovni značaj.

Box plot



- Primer predstavljanja rezultata merenja primenom *box plot*-a, https://en.wikipedia.org/wiki/Box_plot
- Ovaj grafik se, za razliku od *error bar*-a, https://en.wikipedia.org/wiki/Error_bar, koji se crta samo za Gausovu raspodelu, koristi kada nije poznata raspodela merenih podataka.