XXV. Die regelmäßigen Planteilungen[1]).

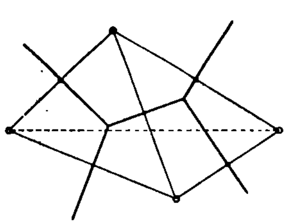
Von

F. Haag in Stuttgart.

(Mit 10 Textfiguren.)

Eine allgemeine Gebietseinteilung der Ebene hat mein Bruder Karl bei seinen Dialectstudien gefunden. Um die einzelnen Ortschaften gegeneinander abzugrenzen, hat er, anstatt den politischen Grenzen nachzugehen, für je zwei benachbarte Punkte (Ortschaften) das Mittellot der Verbindungsstrecke errichtet. Dabei hat er entdeckt, daß es für eine beliebige Punktanordnung nur eine einzige zugeordnete Gebietseinteilung gibt, gleichviel wie die Punkte untereinander verbunden werden. Den Beweis hat er etwa so ausgesprochen: Umgibt man jeden der Punkte mit gleichmäßig sich vergrößernden Kreisen, die sich beim Zusammentreffen gegenseitig abstumpfen, so kann sich um jeden Punkt nur ein ganz bestimmtes Polygon bilden. Daß die entfernteren Punkte von selbst ausscheiden, zeigte ihm der Versuch. Bei einem beliebigen Viereck der gegebenen Punkte kann nur die kürzere Diagonale in Betracht kommen, wie Fig. 1 zeigt.

Fig. 1.



Diese Methode soll nun auf die regelmäßigen ebenen Punktsysteme angewendet werden, die von Sohncke[2]) aufgestellt, von mir[3]) nach einem anderen Princip abgeleitet und eingeteilt worden sind.

1) v. Fedorow, Reguläre Plan- und Raumteilung. Abhandlungen der bayer. Akad. der Wissenschaften 1900, **2**, 20. Punktsysteme und Planteilungen sind nach ihren Symmetrieverhältnissen untersucht, die Systeme selbst sind dort nicht abgebildet.

2) Borchardt's Journal für reine und angew. Mathematik 1874, **77**.

3) F. Haag, Gittervectoren. Progr. der K. Wilhelms-Realsch., Stuttgart 1907.

Aus der Definition der regelmäßigen Punktsysteme, nach welcher die Verteilung der Systempunkte um jeden derselben die nämliche sein muß wie um jeden anderen, folgt, daß die zugehörigen Planteilungen aus congruenten Teilfiguren oder Gebieten sich zusammensetzen.

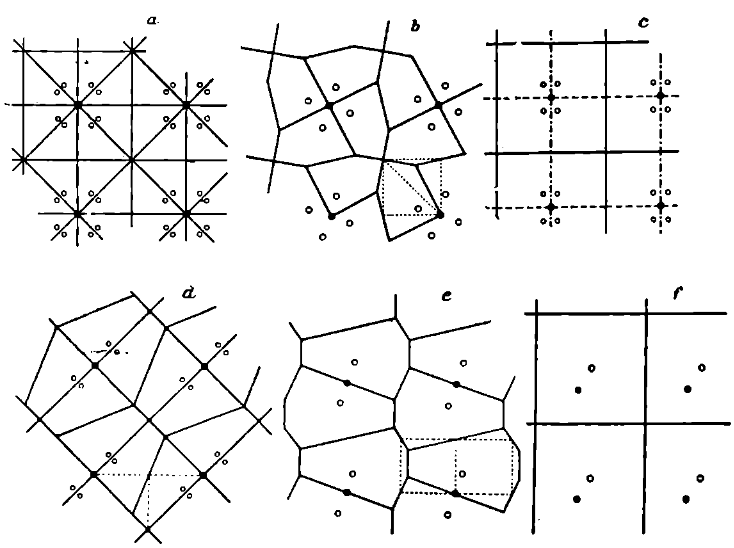
Die Systempunkte sind bei den einfachen Systemen Ecken eines Gitters mit quadratischer, hexagonaler, rechteckiger, rhombischer oder rhomboïdischer Masche. Bei den zusammengesetzten Systemen gruppieren sie sich als Zwei- bis Zwölfpunkter um die Gitterpunkte.

In gleicher Weise gruppieren sich bei den Planteilungen die Gebiete zu, aus zwei bis zwölf Einzelgebieten bestehenden, Bezirken.

Jeder Bezirk ist eine, in bezug auf den zugehörigen Gitterpunkt als Mittelpunkt, centralsymmetrische Figur.

Jedes System ist durch die Form des Gebiets und die zum Aufbau des Systems notwendigen Deckbewegungen gekennzeichnet. Diese zerfallen in leicht aus der Figur zu entnehmende Schiebungen, Drehungen und Spiegelungen. Ist zur Construction eines Bezirks die Drehung um eine n-zählige Axe (Hauptaxe) notwendig, so soll das System ein n-zähliges heißen. Braucht man dazu noch eine vor oder nach der Drehung auszuführende Spiegelung,

Fig. 2.



so sei das Gebiet ein doppeltes. Bei dem abwechselnden System entstehen durch die parallel den Seiten der Grundmasche mit den Bezirken auszuführenden Schiebungen Lücken, die durch Spiegelungen oder Gleitspiegelungen ausgefüllt werden können.

I. Quadratische Systeme.

a) Das vierzählige System des doppelten $(2+1)$-Seits. Das quadratische Achtpunktsystem liefert die Einteilung nach rechtwinklig-gleichschenkeligen Dreiecken, $(2+1)$-Seiten. Acht derselben bilden einen quadratischen Bezirk. Zu seiner Construction wird ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck nach der Hypotenuse gespiegelt und um einen Hypotenusenendpunkt gedreht. Außer diesen Axen und Symmetrieebenen gibt es noch andere, die aber zum Aufbau des Systems nicht notwendig sind.

b) Das vierzählige System des $(2.2+1)$-Seits. Dem quadratischen Vierpunktsystem (erster Art) ist eine Planteilung zugeordnet, bei der sich je vier Fünfecke, $(2.2+1)$-Seite, zu einem parallelseitigen zwölfeckigen Bezirk zusammenschließen. Ein solches Fünfeck läßt sich aus drei beliebigen Strecken so herstellen, daß aus a und b je als Katheten rechtwinklig-gleichschenklige Dreiecke construiert werden, deren Hypotenusen mit c das dritte der das Fünfeck zusammensetzenden Dreiecke bilden. Der Mittelpunkt des Umkreises dieses Dreiecks ist der zum Gebiet gehörige Systempunkt, das Centrum des Gebiets. Seine Spiegelbilder in bezug auf die Seiten des Gebietes sind die benachbarten Systempunkte. Deckschiebungen für die $(4.2+4)$-seitigen Bezirke sind die doppelt zu nehmenden Verbindungsstrecken der Mitte von c mit den Spitzen der recktwinkligen Dreiecke.

Fig. 3.

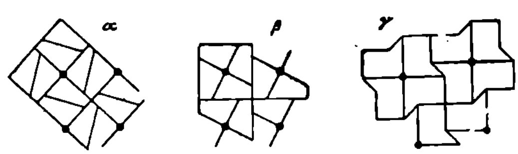


Fig. 3 zeigt bemerkenswerte Specialfälle: bei I b α sind je zwei Punkte benachbarter Vierpunkter zusammengefallen, bei β sind die vier Punkte in einem einzigen vereinigt. Hat das Fünfeck einen einspringenden Winkel, so liegt das »Gebietscentrum« außerhalb des Fünfecks, bei γ im Unendlichen.

c) Das zweizählige System des doppelten Quadrats. Aus dem quadratischen Vierpunktsystem zweiter Art ergibt sich eine Einteilung nach Quadraten, bei denen die Seiten nicht durch Drehung um die Mitte des Quadrats zur Deckung gebracht werden können.

d) Das zweizählige System des doppelten Trapezes ist dem quadratischen Vierpunktsystem dritter Art zugeordnet. Die vier Seiten des Gebiets haben im allgemeinen ungleiche Länge, daher »(4.1)«-Seit (S. 368).

e) Das zweizählige System des $(2+4.1)$-Seits folgt aus dem quadratischen Zweipunktsystem. Jedes der sechsseitigen Gebiete besteht aus einem

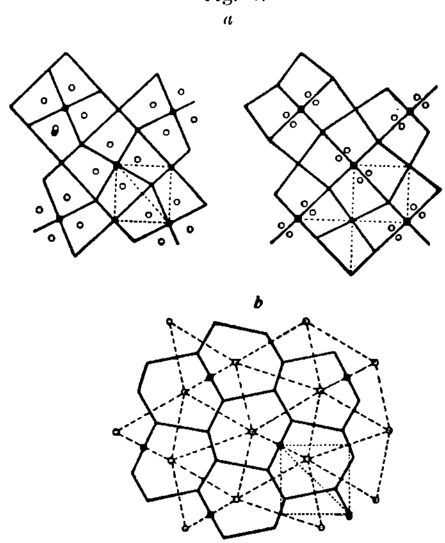
Rechteck als Mittelstück und zwei über den Parallelseiten stehenden Dreiecken mit gemeinsamem Mittelpunkt des Umkreises. Die Bedingung dafür, daß das System ein quadratisches werde, ist leicht zu finden: Die Verbindungsstrecke der Spitzen genannter Dreiecke muß der kurzen Rechtecksseite parallel und der Differenz der Rechtecksseiten gleich sein. Eine andere Bedingung ergibt sich, wenn man von einem Viereck ausgeht, dessen Diagonalen aufeinander senkrecht stehen. Beschreibt man diesem Viereck ein Rechteck so ein, daß die in den Eckpunkten des Rechtecks auf den Vierecksseiten errichteten Lote sich in einem Punkt, dem Centrum des Gebiets, schneiden, so ist die Bedingung dafür aufzusuchen, daß das Rechteck ein Quadrat wird.

f) Die einfache Teilung nach Quadraten entspricht dem quadratischen Einpunktsystem. Unter den Deckbewegungen sind keine Drehungen, nur Schiebungen parallel den Quadratseiten.

II. Abwechselnde quadratische Systeme.

a) Das vierzählige abwechselnde System des $(2 + 2.1)$-Seits. Die zweite Figur soll zeigen, daß kein neues System entsteht, wenn von einem abwechselnden Vierpunktsystem ausgegangen wird, bei welchem die Vierpunkt-Ecken von Rechtecken, statt von Quadraten sind. Faßt man acht der fünfeckigen Gebiete zu einem $(4 + 2)$-Seit zusammen, so kann ein solcher Bezirk durch Schiebungen mit congruenten zur Deckung gebracht werden.

Fig. 4.



b) Das zweizählige abwechselnde System des $(2.2 + 2.1)$-Seits. In dem sechsseitigen Gebiet bilden zwei Paare gleicher Seiten bis zum Schnitt über die unpaarigen Seiten hinaus verlängert ein Sehnenviereck. Die Mitten der letzteren sind Centren der Symmetrie für je einen $(4 + 4 + 2)$-seitigen Bezirk. Die Systempunkte des zu Grunde liegenden abwechselnden Zweipunktsystems, die Centren der Gebiete, bilden zwei verschiedene Arten von Dreiecken, die in zwei Seiten übereinstimmen. Man kann sie zu abwechselnden Reihen von Parallelogrammen zusammenfassen. Mit Hilfe solcher Parallelogramme kann die

Aufgabe gelöst werden, von einem Sehnenviereck durch die unpaarigen Seiten, deren Mittellote sich im Centrum schneiden müssen, zwei Ecken so abzuschneiden, daß ein Sechseck mit zwei Paaren gleicher Seiten entsteht. Das so entstandene sechsseitige Gebiet dient zum Aufbau eines Systems mit im allgemeinen rechteckiger Grundmasche. Eine einfache Construction für die quadratische Planteilung folgt aus der Figur. Die punktierten Linien zeigen, daß das Gebiet gleich einem Quadrat ist, dessen Ecken die Mitten der unpaarigen Seiten zweier benachbarter Gebiete sind. Es ist gleich der Summe zweier Gebiete von Ia (Elementargebiete). Bei Ib ist eines dieser Elementargebiete durch die Verbindungslinien eines Punktes im Innern mit den Ecken in drei Teile geteilt, die mit dem benachbarten Elementardreieck zusammen das fünfseitige Gebiet dieses Systems bilden. Ebenso ist bei c und d das Gebiet gleich der Summe zweier Elementargebiete, bei Ie von vier, If von acht, bei IIa nur gleich einem derselben. Zwar ist IIa aus Ia zunächst durch Weglassen der abwechselnden Punkte abgeleitet, aber dafür sind um das Centrum der Masche neue, mit den anderen abwechselnde Vierpunkter gruppiert, so daß bei beiden Systemen gleichviel Punkte vorhanden sind. Wenn die abwechselnden Systeme aus dem ersten durch Verschwinden der abwechselnden n-Punkte entstehen, an deren Stelle sich die n-Punkte in gedrehter Lage setzen [1]), so enthält IIa nur den vierten Teil der Systempunkte des ersten, IIb nur den achten. Dann ist das Gebiet IIa gleich der Summe von vier, IIb von acht Elementardreiecken. So aufgefaßt entspricht jetzt IIb dem von v. Fedorow aufgestellten System 17.

Diejenigen der hier aufgezählten acht quadratischen Systeme, die nicht durch eine Viertelsdrehung um die Gitterpunkte zur Deckung gebracht werden können, also die sämtlichen nicht vierzähligen Systeme, erscheinen bei den rechteckigen oder rhombischen wieder und können als specielle Fälle von solchen aufgefaßt werden.

III. Die hexagonalen Systeme.

a) Das sechszählige System des doppelten (3.1)-Seits ist dem hexagonalen Zwölfpunktsystem zugeordnet. Das Elementargebiet der hexagonalen Planteilungen ist ein rechtwinkliges Dreieck mit den spitzen Winkeln 30^0 und 60^0.

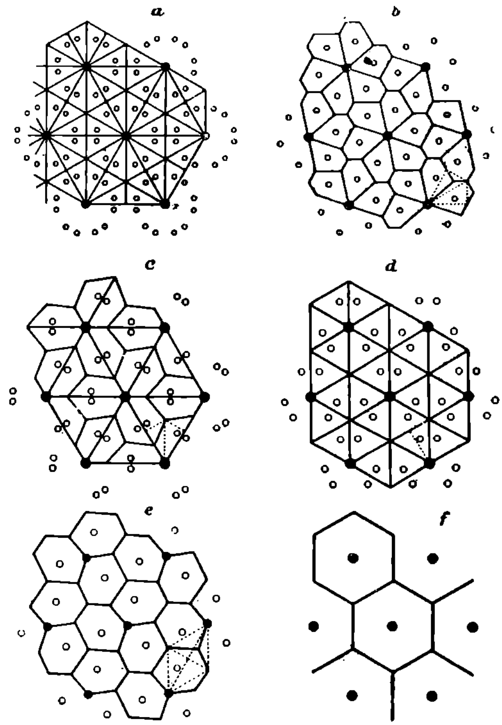
b) Das sechszählige System des $(2.2 + 1)$-Seits folgt aus dem hexagonalen Sechspunktsystem erster Art. Das Gebiet besteht aus einem Elementardreieck und drei Dreiecken, die zu einem zweiten Elementardreieck zusammengelegt werden können. Zwei gleiche Seiten des Gebiets schließen einen Winkel von 60^0, die beiden anderen einen solchen von 120^0 ein.

---

1) F. Haag, Bemerkungen zum Complicationsgesetz. Diese Zeitschr. 1908, 72.

Das Centrum des Gebiets ist der Schnittpunkt der Halbierungslinien genannter Winkel.

Fig. 5.



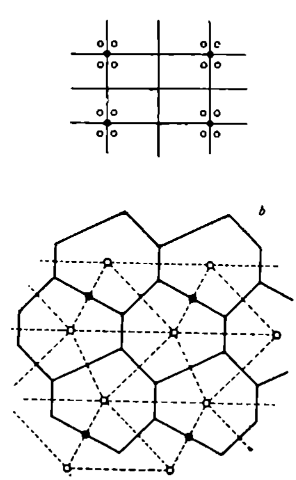
c) Das dreizählige System des doppelten (2 + 2.1)-Seits entspricht dem hexagonalen Sechspunktsystem zweiter Art. Das Gebiet besteht aus einem Elementardreieck und zwei Dreiecken, deren Summe gleich einem zweiten Elementardreieck ist. Ein Winkel ist 60^0, den gegenüberliegenden von 120^0 schließen die gleichen Seiten ein. Auf der Halbierungslinie dieses Winkels liegt das Centrum des Gebiets, das im übrigen unbestimmt ist.

d) Das dreizählige System des doppelten Dreiseits ergibt sich aus dem hexagonalen Sechspunktsystem dritter Art.

e) Das dreizählige System des (3.2)-Seits aus dem hexagonalen Dreipunktsystem. Bei dem aus vier Elementardreiecken sich zusammensetzenden Gebiet stoßen in drei abwechselnden Eckpunkten gleiche Seiten unter Winkeln von 120^0 zusammen.

f) Die Teilung nach regulären Sechsseiten.

Fig. 6.



IV. Die rechteckigen Systeme.

a) Das zweizählige System des doppelten Rechtecks ist dem rechteckigen Vierpunktsystem zugeordnet. Es muß hier, ähnlich wie bei Ic, ein Unterschied zwischen den Seiten festgehalten werden.

b) Das zweizählige System des (2 + 4.1)-Seits folgt aus dem rechteckigen Zweipunktsystem. System Ie stellt den besonderen Fall dar, in dem aus der rechteckigen Grundmasche ein Quadrat geworden ist. Auch in Fig. 6b ist ein besonderer Fall dieses Systems abgebildet. Die dem rechteckigen Mittelstück angefügten Dreiecke sind congruent und dem Sechseck läßt sich ein Kreis umbeschreiben. Die Verbindungsstrecken der Punkte des zugeordneten Punktsystems bilden abwechselnde (symmetrische) Reihen congruenter Dreiecke, eine regelmäßige Planteilung, die einen besonderen Fall von verschiedenen Planteilungen darstellt. Die Eckpunkte der Sechsecke bilden ein abwechselndes rechteckiges Zweipunktsystem, dem die Dreiecke als Gebiete einer Planteilung zugeordnet sind.

Allgemein gilt der Satz: Liegen die Eckpunkte des Gebietes einer regelmäßigen Planteilung auf einem Kreis, so bildet das zugeordnete Punktsystem wieder eine regelmäßige (reciproke) Planteilung.

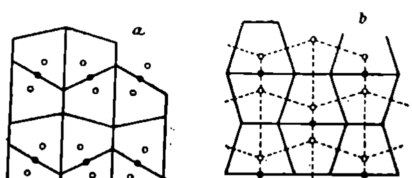
Durch die besondere Annahme der Fig. 6b sind Symmetrieebenen (senkrecht auf der Zeichnungsebene, die Spuren sind die Symmetrieaxen der Sechsecke) hinzugekommen. Diese sich des öfteren wiederholende Erscheinung zeigt, daß das Vorhandensein oder Fehlen von Symmetrieebenen nicht als Einteilungsprincip zu verwenden ist.

c) Die einfache Teilung nach Rechtecken, $(2 + 2)$-Seiten.

V. Abwechselnde rechteckige Systeme.

a) Das zweizählige abwechselnde System des Trapezes ergibt sich aus dem abwechselnden rechteckigen Zweipunktsystem. Der specielle Fall, in dem die Trapeze gleichschenklig werden, ist identisch mit dem folgenden.

Fig. 7.



b) Das zweizählige abwechselnde System des $(2.2 + 2.1)$-Seits ist schon unter IIb angeführt. In dem besonderen Fall, daß die (dort eingezeichneten) von dem zugeordneten Punktsystem bestimmten Dreiecke congruent sind, wird es zum System IVb. Ein anderer bemerkenswerter Sonderfall ist in Fig. 7b abgebildet: Die Verbindungsstrecken der Zweipunkte liegen auf den Maschenseiten. Dadurch werden die unpaarigen Seiten der sechsseitigen Gebiete zu Grundlinien von gleichschenkligen Trapezen; zwei der paarigen Seiten verschwinden. Die Eckpunkte dieser Trapeze bilden wiederum ein abwechselndes centriertes Punktsystem, dem die von dem ursprünglichen Punktsystem gebildeten Trapeze als neue Planteilung zugewiesen sind. Hier sind die beiden (reciproken) Planteilungen congruent, weil statt einer rechteckigen eine quadratische Masche zu Grunde gelegt worden ist.

VI. Die rhombischen Systeme.

a) Das zweizählige System des doppelten Trapezes unterscheidet sich von Id dadurch, daß hier die aus je zwei benachbarten Trapezen zusammengesetzten Vierecke nicht Quadrate, sondern Rechtecke sind.

b) Das zweizählige System des (2 + 4.1)-Seits stellt einen besonderen Fall des folgenden VIIa dar. Die Verbindungsstrecken der Zweipunkte des zugeordneten rhombischen Punktsystems ist in Fig. 8b der längeren Diagonale des Rhombus parallel (bei Vb der kürzeren). Durch diese besondere Annahme verschwindet eines der beiden dem rechteckigen Mittelstück aufgesetzten Dreiecke und das andere wird gleichschenklig. Liegt die Spitze dieses Dreiecks mit den vier Ecken des Rechtecks auf einem Kreis, so bildet

Fig. 8.

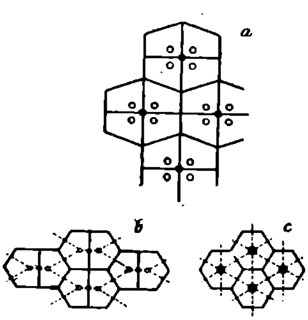
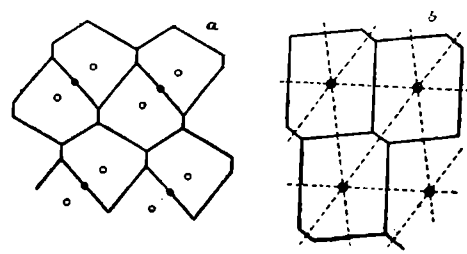


Fig. 9.



das zugehörige Punktsystem eine reciproke Planteilung, deren Gebiet ein (parallelseitiges) Sechseck mit zwei Symmetrieaxen, ein (4 + 2)-Seit, ist.

c) Das System des (4 + 2)-Seits unterscheidet sich von dem eben genannten dadurch, daß die Ecken des Gebietes auf einem Kreise liegen. Reciprok zugeordnet ist die Einteilung nach gleichschenkligen Dreiecken.

VII. Die rhomboïdischen Systeme.

a) Das zweizählige System des (2 + 4.1)-Seits folgt aus dem rhomboïdischen Zweipunktsystem. Das sechsseitige Gebiet besteht aus einem Rechteck als Mittelstück und zwei an den Parallelseiten angesetzten Dreiecken. Die Umkreise der Dreiecke haben einen gemeinsamen Mittelpunkt, aber im allgemeinen verschiedene Radien. Für den Fall gleicher Radien, also wenn das Sechsseit ein Sehnensechsseit, ist durch das Zweipunktsystem eine Planteilung bestimmt, die aus zwei abwechselnden Reihen congruenter Dreiecke besteht. Bei dem folgenden System des parallelseitigen Sehnensechsseits sind die Dreiecke beider Reihen congruent.

b) Das System des 3.2-Seits folgt aus dem rhomboïdischen Einpunktsystem. Die Ecken des Sechsseits liegen auf einem Kreis und das zugeordnete rhomboïdische Gitter stellt die einfache Teilung nach Dreiseiten dar.

Die bisherigen Untersuchungen haben gezeigt, daß den 24 regelmäßigen Punktsystemen ebensoviele regelmäßige Planteilungen entsprechen. Es fragt sich aber, ob es nicht noch weitere Planteilungen gibt. Die Antwort wird durch die von v. Fedorow vorgeschlagene affine Transformation gefunden. Bei dieser Abänderung bleiben congruente Figuren im allgemeinen nicht congruent, sodaß sie nur auf einige wenige Systeme angewendet werden kann: System Ia gibt die einfache Teilung nach Dreiseiten, die VIIb reciprok zugeordnet ist. If und IVc die Teilung nach Parallelogrammen, (2 + 2)-Seiten. IIIf und VIIb liefern ein 3.2-Seit, das ein Symmetriecentrum besitzt, dessen Ecken aber nicht wie bei VIIb auf einem Kreise liegen. Das (2 + 4.1)-Seit Ie geht durch affine Transformation über in IVb, VIIa und schließlich in ein Sechsseit, dessen Mittelstück ein Parallelogramm statt eines Rechtecks ist, das also nur die eine Bedingung erfüllt, daß zwei Seiten gleich und parallel sein sollen. Bei den drei letzten Systemen ist die Art der Zuordnung von Punktsystem und Planteilung eine allgemeine: die Punktsysteme werden von homologen Punkten in den Ge-

Zusammenstellung

der Planteilungen und Punktsysteme.

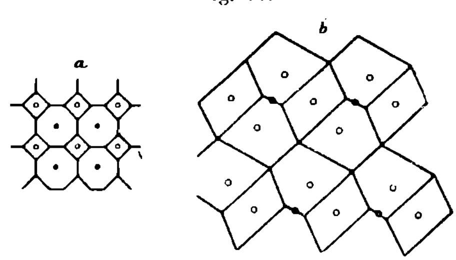
	Zahl der Gebiete eines Bezirks	Seitenzahl eines Gebiets	Seitenzahl des Bezirks	Zugeordnetes Punktsystem
I a	4.2	2 + 1	4	Quadratisches Achtpunktsystem
b	4.	2.2 + 1	4.2 + 4	» Vier »
c	1	4		» Ein »
II	4	2 + 2.1	4	Abwechselndes quadr. Vierpunktsystem
III a	6.2	3.1	6	Hexagonales Zwölfpunktsystem
b	6	2.2 + 1	6.2 + 6	» Sechs »
c	3.2	2 + 2.1	6.2	» 3.2-Punktsystem 1. Art
d	3.2	3	6	» 3.2 » 2. »
e	3	3.2	3.2 + 3.2	» Dreipunktsystem
f	1	6		» Ein »
IV a	2.2	4	2 + 2	Rechteckiges Vierpunktsystem
c	1	2 + 2		» Ein »
V a	2	4.1	2 + 2	Abwechselndes rechteckiges Zweipunktsystem
b	2	2.2 + 2.1	2.4 + 2	Abwechselndes centriertes rechteckiges Zweipunktsystem
VI a	2.2	4.1	2.2 + 2	Rhombisches Vierpunktsystem
c	1	4 + 2		» Ein »
VII a	2	2 + 4.1	4 + 3.2	Rhomboïdisches Zweipunktsystem
b	1	3.2		» Ein »

bieten der Planteilung gebildet. Wenn in der Tabelle auf S. 368 die durch affine Transformation auseinander abgeleiteten Systeme nur einmal genannt sind, so brauchen die letztgenannten drei Systeme nicht besonders aufgeführt zu werden. Aber auch das erste, dem wie schon bemerkt, ein bestimmtes Punktsystem und zwar ein rhomboïdisches Zweipunktsystem zugeordnet ist, kommt als besonderes System in Wegfall, wenn es als ein specieller Fall von VII a angesehen wird. Die Parallelseiten des $(2 + 4.1)$-Seits verschwinden und eines der beiden Dreiecke wird zur Strecke.

Halbregelmäßige Systeme.

Aus den regelmäßigen Systemen können halbregelmäßige dadurch hervorgehen, daß die Punkte ungleich werden. In Fig. 10 a kommt den abwechselnden Punkten ungleiches Gewicht zu. Punktsysteme mit übereinstimmenden Maschen können combiniert werden entweder so, daß die Gitterpunkte zur Deckung kommen, oder daß die Gitter parallel ineinander gestellt sind. Im ersten Fall schließen sich die ungleichen Gebiete zu congruenten Bezirken zusammen,

Fig. 10.



die durch Parallelschiebungen zur Deckung gebracht werden können. Im zweiten bilden die ungleichen Gebiete abwechselnde Reihen unter sich congruenter Gebiete. Fig. 10 b kann auf beiderlei Weise erklärt werden. Die beschriebenen abwechselnden Systeme lassen sich als Combinationen ansehen, bei denen die abwechselnden Reihen durch Gleitspiegelung zur Deckung gebracht werden können.