I. Ueber die geometrischen Eigenschaften homogener starrer Structuren und ihre Anwendung auf Krystalle.

Von

William Barlow in London.

(Hierzu Taf. I und II.)

Es ist der Gegenstand dieser Abhandlung, die Art der Anordnung gleichartiger Theile in homogenen Structuren im Allgemeinen ohne Bezugnahme auf irgend eine Atom- oder Krystalltheorie zu untersuchen und auf diese Weise ein rein geometrisches Fundament zu legen, das allen Theoretikern eine gemeinschaftliche Grundlage zu bieten im Stande ist.

Man wird finden, dass die Resultate dieser Untersuchung feststellen, dass in jeder homogenen Structur von irgend welcher Art gleichartige Punkte eine symmetrische Anordnung von einem bestimmten, der Structur eigenthümlichen Typus besitzen, und dass alle Symmetriearten, die von allen beliebigen homogenen Structuren dargeboten werden, in 32 Classen zerfallen, deren unterscheidende Merkmale genau jene der 32 geometrisch-möglichen Classen der Krystallsymmetrie sind*).

Es wird ferner gezeigt werden, dass die 65 regelmässigen, in Sohncke's »Entwickelung einer Theorie der Krystallstructur« beschriebenen Punktsysteme aus zehn Fundamentalsystemen aufgebaut sind**).

Ein kleiner Raum wird der Untersuchung singulärer Punktsysteme, d. h. solcher von besonderer Symmetrie gewidmet werden, welche in allen homogenen Structuren vorhanden sind.

Definition: Eine homogene starre Structur ist eine Anordnung von beliebig beschaffener Materie constanter Form, die sich gleichförmig in ihrer ganzen Ausdehnung immer wiederholt. Präciser: Es ist eine starre Structur, in welcher jeder

*) Siehe Gadolin, Acta soc. Fennicae **9**, Helsingfors 1871 oder Sohncke, diese Zeitschr. **20**, 457.

**) Entwickelung einer Theorie der Krystallstructur von Dr. Leonh. Sohncke, Leipzig 1879.

Punkt, wenn wir die Structur als unbegrenzt denken, ihm entsprechend andere genau gleichartige oder homologe Punkte*) besitzt, die gleichförmig im Raume vertheilt sind; es ist daher eine Eigenschaft der Structur, dass alle die unendlich vielen geometrischen Punktsysteme, welche beziehungsweise gegeben sind, wenn man alle gleichartigen Punkte nimmt, regelmässige unendliche Punktsysteme sind, wie sie Sohncke definirt als »solche, bei welchen um jeden Massenpunkt herum die Anordnung der übrigen dieselbe ist, wie um jeden anderen Massenpunkt«**).

Ein Haufen gleicher Kanonenkugeln, in welchem jede Kugel zwölf andere berührt, ist ein triviales Beispiel einer solchen Structur.

Man wähle nun auf's Geradewohl einen geometrischen Punkt irgendwo in einem solchen Haufen und markire den ihm zunächst gelegenen Kugelmittelpunkt. Dann giebt es im Allgemeinen 23 andere Punkte, welche von diesem Centrum den gleichen Abstand wie der gewählte haben, und einen gleichen Ort im Haufen einnehmen, so dass der Kugelhaufen, als unbegrenzt und ohne Rücksicht auf die Richtung betrachtet, genau denselben Anblick zeigt, wenn er vom einen oder anderen der 24 Punkte aus gesehen wird. Diese Punkte bilden einen »24-Punkter«, den Sohncke in seinem oben erwähnten Werke beschreibt***).

---

*) Gleichartige Punkte sind solche, welche gleichartige Orte innerhalb der Structur einnehmen, wenn diese als unendlich und ohne Rücksicht auf die Richtung betrachtet wird, oder mit anderen Worten: Punkte, von deren jedem aus gesehen die als unendlich und ohne Bezug auf irgend etwas anderes als auf sie selbst betrachtete Structur genau denselben Anblick darbietet.

) Entwickelung einer Theorie etc. S. 28. Vergl. M. C. Jordan, »Sur les groupes de mouvements«, Comptes rendus 1867, **65, 229.

Die Starrheit der eben definirten Structur braucht keine absolute zu sein, es können Schwingungs- oder andere Bewegungen ihrer kleinsten Theile stattfinden, wie sie in allen bekannten festen Körpern vorkommen; der obigen Definition wird genügt, so lange die Bewegungen an entsprechenden Punkten im Ganzen gleichartig sind und nicht so, dass sie die relative Lage gleichartiger Theile bleibend verändern. Uebereinstimmend mit der Definition kann eine homogene Structur aus einer beliebigen Anzahl verschiedener, in irgend einer Weise angeordneter Stoffe bestehen, wenn nur ihre Anordnung der Definition genügt.

Die Frage, ob der Gebrauch des Wortes homogen in der eben gegebenen Definition berechtigt ist oder nicht, berührt die folgenden Beweisführungen nicht; wenn man will, kann man irgend ein anderes Wort anwenden, um die hier definirte Gleichheit der Theile auszudrücken. Es mag jedoch bemerkt sein, dass die gegebene Definition allen Anforderungen an die Gleichheit entsprechender Theile genügt, so lange die Structur für sich allein, ohne Bezug auf etwas Anderes betrachtet wird.

Das Wort »Structur« ist gewählt, um anzudeuten, dass die kleinsten Theile oder Raumeinheiten dreidimensional sind, und dass keine ihrer drei Dimensionen unendlich ist.

***) Entwickelung einer Theorie etc., S. 166.

Ferner können 24, mit jenen gleichartige Punkte gefunden werden, welche um jedes der anderen Kugelcentren gelagert sind, und die Punkte aller solcher gleichartiger Gruppen liefern zusammen genommen ein Beispiel zu Sohncke's System 60 (oktaëdrisches 24-Punktersystem) *).

Indem Sohncke's Definition der regelmässigen unendlichen Punktsysteme die Homogenität der Anordnung bedingt, setzt sie nicht prima facie eine bestimmte Symmetrie voraus. Wenn jedoch alle möglichen Typen der unendlichen**) regelmässigen Punktsysteme aufgesucht werden, was in Sohncke's eben angeführtem Werke geschehen ist, so zeigt sich, dass die 65***) verschiedenen Typen der unendlichen Punktsysteme, welche allein seine Definition erfüllen, alle eine bestimmte Symmetrie haben, welche genau einigen der bei Krystallen vorkommenden Symmetrietypen entsprechen.

Eine homogene Structur besitzt jedoch oft einen höheren Grad von Symmetrie, als jener des grössten Theiles der Sohncke'schen Punktsysteme, welche durch ihre gleichartigen Punkte bestimmt sind. Ein Beispiel hierfür liefert der eben erwähnte Kugelhaufen.

Andererseits zeigt zuweilen eine homogene Structur einen niedrigeren Grad der Symmetrie als jenen ihrer Sohncke'schen Punktsysteme. Beispiele hierfür werden unten gegeben†).

Wo eine homogene Structur einen höheren Grad von Symmetrie zeigt als jenen, der den meisten Sohncke'schen Punktsystemen zukommt, welche durch ihre gleichartigen Punkte bestimmt sind, da wird man immer finden, dass sie diese höhere Symmetrie dem Besitze folgender Eigenschaft neben der Eigenschaft der Homogenität verdankt: Die Structur ist nämlich identisch mit ihrem eigenen Spiegelbilde††).

---

*) Entsprechend jedem regelmässigen Punktsysteme, welches so durch gleichartige Punkte gegeben ist, giebt es in einem solchen Haufen ein anderes Punktsystem, welches das Spiegelbild desselben ist, da die Punkte eines jeden der beiden Systeme in gleicher Entfernung von den Kugelcentren gelegen sind und das Bild der Structur von einem Punkte des einen Systems das Spiegelbild seiner Ansicht von einem Punkte des anderen Systems desselben Paares ist. Wir kümmern uns jetzt jedoch nicht um jene spiegelbildlich-gleichen Punktsysteme; sie werden später behandelt (siehe S. 38).

**) Mit endlichen Punktsystemen, bestehend aus Punkten, welche eine solche Gleichartigkeit besitzen, wie sie eben definirt wurde, beschäftigen wir uns hier nicht; sie zeigen offenbar keine stetige Wiederholung derselben Structur nach jeder Richtung.

Bezüglich einer Untersuchung dieser endlichen Systeme siehe Jordan's oben citirtes Werk.

***) Sohncke erwähnt in seinem Werke 66, hat aber nachher darauf hingewiesen, dass es nur 65 giebt, da Nr. 9 und Nr. 13 einander gleich sind. Siehe diese Zeitschr. **14**, 423.

†) Siehe S. 25, 29, 32, 37.

††) Man wird finden, dass dies bei allen homogenen Structuren der Fall ist, welche holoëdrische und einige andere höhere Symmetriearten besitzen.

Die Art der Beziehungen, welche zwischen den Sohncke'schen Punktsystemen einer homogenen Structur bestehen, wenn letztere diese neue Eigenschaft besitzt, wird alsbald untersucht werden, nachdem die Eigenschaften der Punktsysteme selbst betrachtet worden sind*).

Was die Eigenschaften betrifft, welche homogene Structuren mit den, durch ihre gleichartigen Punkte bestimmten Punktsystemen gemein haben, bemerken wir, dass irgend eine gegebene homogene starre Structur, wie oben definirt, gleich den Sohncke'schen Systemen gewisser Deckbewegungen**) fähig sein wird, welche, indem sie irgend eine besondere Schaar entsprechender Punkte zur Deckung bringen, zu gleicher Zeit alle verschiedenen entsprechenden Theile der Structur zur Deckung bringen; es ist dies eine directe Folge der genau gleichen Lage, welche entsprechende Punkte in Bezug auf die ganze Structur besitzen. Und es ist klar, dass die Deckbewegungen, welche für die Structur als Ganzes möglich sind, auch für all die unendlich vielen regelmässigen Punktsysteme möglich sind, welche durch Schaaren entsprechender Punkte der Structur bestimmt sind, und dass die Structur, als Ganzes genommen, jene Deckbewegungen besitzen wird, welche allen verschiedenen, so bestimmten Punktsystemen gemeinsam sind.

Ferner wird die successive Ausführung jener Deckbewegungen in jedem Falle hinreichend sein, um einen beliebigen Punkt der Structur an die Stelle eines beliebigen anderen gleichartigen Punktes zu bringen. Und da im Allgemeinen ein auf die angegebene Weise bestimmtes Punksystem, selbst wenn es ohne Rücksicht auf die Structur, zu welcher es gehört, be-

---

*) Siehe S. 38.

) Eine Deckbewegung definirt Sohncke folgendermassen: »Man denke sich nun ein regelmässiges, unendliches Punktsystem starr gemacht und aus seiner Lage herausgerückt; dann bilden die zuvor von Systempunkten besetzt gewesenen Orte des Raumes ein dem System congruentes Punktsystem; es möge, im Gegensatze zu dem herausgenommenen beweglichen Systeme, das feste heissen. In welchen Systempunkt des festen Systems man nun einen beliebig gewählten Systempunkt des beweglichen auch legen mag: immer kann man in Folge der Congruenz aller Linienbündel bewirken, dass beide Systeme zur Deckung gelangen. Eine solche Bewegung nun, welche das bewegliche System aus einer Lage der Deckung mit dem festen in eine andere Lage der Deckung mit ihm überführt, soll eine **Deckbewegung heissen. Diese Bewegungen können theils Parallelverschiebungen, theils Drehungen oder Schraubungen um gewisse, im festen Systeme gegebene gerade Linien als Axen sein; und es wird ganz von der Eigenthümlichkeit des betreffenden Systems abhängen, welcherlei Deckbewegungen es besitzt. Ja man wird gerade nach den ihnen zukommenden Deckbewegungen verschiedene Gattungen von Punktsystemen unterscheiden können, so dass die verschiedenen Arten von Deckbewegungen als Eintheilungsgrund für die regelmässigen Punktsysteme dienen.« (Siehe Entwickelung einer Theorie etc. S. 28.) Vergl. Bravais »Sur les systèmes formés par des points distribués régulièrement«, Journ. de l'Ecole Polytechnique, cahier XXXIII, p. 57.

trachtet wird, keine anderen Deckbewegungen als jene, welche der Structur zukommen, besitzen wird, so ist klar, dass jede homogene starre Structur die Deckbewegungen eines der 65 Sohncke'schen Punktsysteme und keine anderen*) besitzt.

I. Die Sohncke'schen Systeme und homogenen Structuren, welche nicht mit ihren eigenen Spiegelbildern identisch sind.

Es ist deshalb wichtig zu ermitteln, welche Beziehungen zwischen regelmässigen Punksystemen verschiedener Typen bestehen, und es soll zunächst gezeigt werden, dass jedes der 65 Sohncke'schen Punktsysteme aus einer endlichen Anzahl eines oder des anderen von zehn Fundamentalsystemen besteht. Diese Fundamentalsysteme gehören den Typen an, welche Sohncke bezeichnet als System 58, 42 und 43, 26 und 27, 15 und 16, ein specieller Fall von System 3, System 3 und System 1.

Dabei werden auch einfache Methoden angegeben werden, die Sohncke'schen Systeme zu erhalten.

In allen Fällen wird festgestellt werden, zu welcher der 32 Classen der Krystallsymmetrie jeder Typus der Sohncke'schen Systeme und jeder Typus der homogenen Structur, deren Symmetrie untersucht wird, gehört.

Die reguläre Systemgruppe.

Zunächst soll in Hinsicht auf Systeme der regulären Form, d. h. jener unter VI und VII der Uebersichtstabelle auf S. 175 in Sohncke's Werk, gezeigt werden, dass jedes dieser 13 Systeme betrachtet werden kann als bestehend aus einer endlichen Anzahl untereinander identischer Systeme eines gewissen Musters, nämlich des als System 58 in der Uebersichtstabelle bezeichneten; und auch, dass jedes der 13 Systeme die Axen und Deckbewegungen des Systems besitzt, aus welchem dasselbe aufgebaut ist.

Genauer gesagt:

Typus 1 = System 58 nach Sohncke.

Typus 2 (System 57) kann betrachtet werden als das Product der

---

*) So sind z. B. die Deckbewegungen des eben beschriebenen Kugelhaufens jene des Systems 60 von Sohncke.

In seiner Erweiterung der Theorie der Krystallstructur (diese Zeitschr. **14**, 433 und 434) weist Sohncke darauf hin, dass ineinander gestellte homogene Combinationen seiner regelmässigen Punktsysteme alle Arten der in Krystallen vorkommenden Symmetrie liefern werden. Um homogen zu sein, müssen diese Combinationen so ausgedacht sein, dass sie die hier dargelegten Eigenschaften einer homogenen Structur besitzen.

Ineinanderstellung zweier mit einander identischer Systeme des Typus 1; die Axen und Deckbewegungen dieser Theilsysteme sind überdies dem zusammengesetzten System eigen.

Typus 3 und 4 (System 65 und 66) bestehen ebenfalls je aus zwei solchen Systemen, die dieselbe Beziehung zu dem zusammengesetzten System haben.

Typus 5 (System 62) besteht aus vier.
\- 6 (System 55) besteht ebenfalls aus vier.
\- 7 (System 54)
\- 8 (System 60) } besteht aus acht.
\- 9 (System 63)
\- 10 (System 56)
\- 11 (System 64) } aus sechzehn.
\- 12 (System 59)
\- 13 (System 61) aus zweiunddreissig.

Die zum Beweise des eben ausgesprochenen Satzes und ähnlicher Sätze, welche bezüglich der übrigen der 65 Sohncke'schen Typen folgen, angewendete Methode ist die folgende:

Jeder der 65 Typen von Sohncke hat seine charakteristischen Bewegungen. Die Ausführung einer derselben bringt Deckung hervor, und wenn alle nach einander einem irgendwo im Raume gelegenen Punkte ertheilt werden, so bewirken sie, dass dieser Punkt ein Punktsystem des Typus erzeugt, dem diese Bewegungen zukommen.

Wenn nun ein besonderes System das Ergebniss der Combination zweier oder mehrerer anderer identisch gleicher Systeme ist und die Axen und Deckbewegungen dieser Systeme besitzt, so ist klar, dass das zusammengesetzte System ausser diesen Deckbewegungen noch andere besitzen wird, welche geeignet sind, die Theilsysteme mit einander zur Deckung zu bringen.

Um also zu beweisen, dass irgend ein specielles System aus einer gewissen Anzahl von Systemen eines anderen Typus besteht, welche auf gewisse Art angeordnet und in der beschriebenen Weise mit ihm verwandt sind, werden wir die Deckbewegungen all dieser letzteren, sowie die verschiedenen Deckbewegungen nehmen, welche diese Theilsysteme zur Deckung mit einander bringen, und zuerst beweisen, dass das zusammengesetzte System alle jene Deckbewegungen besitzt, und dann zeigen, dass dies die charakteristischen Deckbewegungen des in Rede stehenden besonderen Punktsystemes sind.

Um dieses Beweisverfahren mit Leichtigkeit im Falle der Systeme der regulären Form auszuführen, werden wir folgende einfache geometrische Methode der Schilderung eines Systemes des Typus 1 (58 nach Sohncke) mit seinen Axen und Deckbewegungen anwenden.

Man theile den Raum durch drei Schaaren paralleler, äquidistanter Ebenen in gleiche Würfel.

Man ziehe eine einzelne Diagonale in einem der Würfel. Wenn dies geschehen, bildet sie die gemeinschaftliche Diagonale eines Stranges von Würfeln, die mit den körperlichen Ecken zusammenstossen.

Durch einen zweiten Würfel, der eine Fläche mit dem ersten gemein hat, ziehe man eine einzelne Diagonale, welche die Diagonale im ersten Würfel nicht schneidet und nicht parallel zu ihr ist. Diese bildet dann auch die gemeinschaftliche Diagonale eines Würfelstranges.

In Systemen des Typus 1 (58 nach Sohncke) schneiden sich die dreizähligen Axen nicht. Man nehme nun die zwei so gezogenen Diagonalen, deren Richtungen offenbar unter dem verlangten Winkel gegen einander geneigt sind, als zwei benachbarte dreizählige Axen eines Systems von diesem Typus.

Man führe eine dreizählige Drehung um eine dieser Axen aus, so dass die aufeinander folgenden Lagen, welche die andere Axe annimmt, zwei neue Lagen für dreizählige Axen bestimmen werden, und indem man weitere dreizählige Drehungen um die nach und nach gefundenen dreizähligen Axen ausführt, erhält man in gleicher Weise andere ähnliche Axen, so dass man schliesslich ein unendliches System dreizähliger Axen bekommt, deren jede eine Linie ist, die aus aneinander gereihten Würfeldiagonalen besteht.

Nur ein einziges solches System dreizähliger Drehaxen kann aus den zwei zuerst gezogenen Axen erzeugt werden. Keine zwei seiner dreizähligen Axen schneiden sich. Es ist ferner ein homogenes System nach der oben gegebenen Definition der Homogenität.

Dieses System dreizähliger Axen wird daher in dem fraglichen System vorkommen; in der That muss offenbar ein solches System in allen homogenen Structuren oder Systemen der regulären Form vorhanden sein, *deren dreizählige Axen sich nicht schneiden*. Seine Gestalt kann folgendermassen beschrieben werden.

Da die dreizähligen Drehaxen sich nicht schneiden, so kann nur eine der vier Diagonalen eines beliebigen Würfels eine solche Axe sein, und wir können daher die Würfel durch die Buchstaben α, β, γ, δ unterscheiden, je nach der Richtung, in welcher sie von einer dreizähligen Drehaxe durchquert werden. Die punktirten Diagonalen in Fig. 1 sollen die vier Lagen der dreizähligen Axen in den so bezeichneten Würfeln zeigen.

In Fig. 2 seien α, β zwei zusammenstossende Würfel, in welchen die in dieser Weise angedeuteten Diagonalen zwei nächste dreizählige Drehaxen eines solchen Systems von Drehaxen sind. Man sieht nun leicht, dass, wenn successive dreizählige Drehungen in der geschilderten Weise ausgeführt werden, das System von Würfeln folgendermassen von den Drehaxen durchkreuzt wird:

Die Würfelschicht, welche die Würfel α und β enthält, wird von den dreizähligen Drehaxen so durchsetzt werden, wie es die griechischen Buchstaben in Fig. 2 anzeigen.

Unmittelbar unter und unmittelbar über dieser Schicht wird eine Schicht liegen, welche so durchschnitten wird, wie die griechischen Buchstaben in Fig. 3 zeigen. Denselben werden wieder wie in Fig. 2 durchsetzte Schichten folgen.

So wird das ganze System der Würfel und Drehaxen aus Schichten bestehen, die abwechselnd diesen beiden Gattungen angehören.

Wir können nun ein Punktsystem des Typus 1 (58 nach Sohncke) um das eben beschriebene System dreizähliger Axen wie folgt construiren:

Man nehme ganz beliebig einen Punkt in diesem Axensystem, markire den Würfel, in welchem der Punkt liegt und durch eine Drehung um die einzige, diesen Würfel durchlaufende dreizählige Axe findet man in dem Würfel zwei andere Punkte, welche mit dem ursprünglichen eine gleichzeitige Punkttriade bilden.

Durch eine Drehung um die dreizählige Axe, welche einen der sechs Würfel durchläuft, die mit dem eben erwähnten Würfel eine Fläche gemeinsam haben, bringe man eine entsprechende Punkttriade in jeden der beiden Würfel, welche den ersten Würfel in zwei seiner Kanten berühren. Man führe eine Reihenfolge anderer dreizähliger Drehungen um die Axen, welche andere Würfel durchsetzen, aus, bis jeder Würfel, welcher dadurch schliesslich mit den die Triaden enthaltenden Würfeln zur Deckung gebracht werden kann, eine entsprechende in ihm gelegene Punkttriade besitzt.

Das Ergebniss ist die Erzeugung eines regelmässigen Punktsystems, welches aus gleichen Punkttriaden besteht, je eines in jedem Würfel eines zusammenhängenden Systems von Würfeln gelegen, die nur mit den Kanten an einander stossen, d. h. ein symmetrisches System, welches die Hälfte aller den Raum erfüllenden Würfel umfasst*). Dieses Punktsystem ist das verlangte.

Um seine Identität mit dem genannten Punktsystem zu zeigen, können wir folgendermassen verfahren.

Die resultirende Bewegung irgend zweier Deckbewegungen eines beliebigen, regelmässigen geometrischen Systems ist ebenfalls eine Deckbewegung dieses Systems**).

Nun besitzt das eben untersuchte System folgende Deckbewegungen:

---

*) Die zwei halben Systeme der so angeordneten Würfel werden kenntlich gemacht, wenn schwarze und weisse gleich grosse Würfel so ohne Zwischenraum zusammengeschichtet werden, dass der Haufen längs Ebenen parallel zu den Würfelflächen das Aussehen eines Schachbrettes zeigt.

*) Siehe Entwickelung einer Theorie etc., kinematische Hülfsbetrachtung IX, S. 35.

1. Eine dreizählige Drehung gegen den Drehsinn des Uhrzeigers um eine Axe, welche einen Würfel β in der in Fig. 2 dargestellten Würfelschicht durchläuft, und welche den diesem Würfel β in derselben Schicht (in der Figur) nach oben nächstliegenden Würfel α an die Stelle des Würfels γ bringt, der in der nächsthöheren Schicht über dem Würfel β liegt.

2. Eine dreizählige Drehung gegen den Drehsinn des Uhrzeigers um die dreizählige Axe dieses Würfels γ.

Man sieht leicht, dass die Resultirende dieser beiden Drehungen eine zweizählige Schraubung $A_{\frac{2\pi}{2}, a}$ ist um eine zu den Ebenen der Fig. 2 und 3 senkrechte Axe in einem Punkte A, wenn a die Länge der Würfelkante.

Daher ist die erwähnte Schraubung eine Deckbewegung des eben verfolgten Systems. Und da alle durch die Punkte A der erwähnten Figuren gezogenen Senkrechten jener Würfelschichten zu dem Punktsystem genau in der gleichen Beziehung stehen, so folgt wegen der Symmetrie, dass gleiche Schraubungen vorhanden sind um Axen, welche senkrecht auf den Ebenen der Fig. 2 und 3 durch alle Punkte A gelegt sind.

In ähnlicher Weise können wir das Vorhandensein gleicher Axen in Punkten B, C und D feststellen, welche zusammen mit den Axen A vier Schaaren zweizähliger Schraubungen senkrecht zu Zeichnungsebene der Fig. 2 und 3 bilden. Ebenso die Existenz gleicher, aus je vier Gruppen bestehender Axensysteme, welche in je einer der beiden anderen Richtungen senkrecht zu den Würfelflächen liegen.

Nur Systeme des Typus 1 (58 nach Sohncke) besitzen zweizählige Schraubenaxen in drei zu einander senkrechten Richtungen, wobei vier Gruppen dieser Axen in jeder dieser drei Richtungen liegen und die Axen genau wie im Falle des vorliegenden Systems angeordnet sind. Es ist dasselbe daher ein System des Typus 1.

Um die Identität der beiden Typen bequemer veranschaulichen zu können, ist eine Copie von Sohncke's Figur des Theilsystems seines Systems 58 beigefügt (Fig. 4), mit der Projection der Würfelflächen, welche als punktirte Linien darin angegeben sind, und mit den Schnittpunkten jener zweizähligen Schraubenaxen, welche senkrecht zur Zeichnungsebene stehen, entsprechend mit A, B, C, D bezeichnet, wie in den Fig. 2 und 3.

Nachdem wir so gezeigt haben, dass das oben geschilderte System ein System des Typus 1 (58 nach Sohncke) ist, können wir nun dazu übergehen, zu beweisen, dass ein System des Typus 2 (57 nach Sohncke) als das Ergebniss der Ineinanderstellung zweier mit einander identischer Systeme des Typus 1 angesehen werden kann, indem die Axen und Deckbewegungen der beiden Theilsysteme übereinstimmen und also auch dem zusammengesetzten Systeme angehören.

Um ein System vom Typus 2 aus einem Systeme des Typus 1 abzuleiten, können wir folgende Constructionsmethode anwenden:

Durch irgend einen der Punkte E, F, G, H der Fig. 2 und 3 denke man sich eine Senkrechte auf den Ebenen dieser Figuren errichtet, und führe eine zweizählige Drehung um diese Senkrechte als Axe eines Punktsystems vom Typus 1 mit seinen Würfeln und Axen aus.

Die Folge davon ist, wie schon aus den erwähnten Figuren ersichtlich, dass die dreizähligen Drehaxen zur Deckung gelangen, und folglich auch die verschiedenen zweizähligen Schraubungen, deren Existenz ja, wie wir gesehen, durch das Vorhandensein jener dreizähligen Drehaxen bedingt ist.

Das Würfelsystem ist gleichzeitig mit sich selbst zur Deckung gebracht worden, aber das Halbsystem der Würfel, welche die Triaden enthalten, welche ein System vom Typus 1 bilden, kommt nicht mit sich selbst zur Deckung, sondern fällt mit dem anderen Halbsystem der Würfel zusammen, welche mit den ersten eine Fläche gemein haben.

Die Triaden, welche ursprünglich in dem einen Halbsystem der Würfel vorhanden waren, finden sich daher nun in gleicher Weise im complementären Halbsystem angeordnet. Die beiden so erhaltenen identischen Punktsysteme haben dieselben Axen, und das aus beiden zusammengesetzte System besitzt also auch diese Axen und hat ausserdem zweizählige Drehaxen senkrecht zur Zeichnungsebene durch die Punkte E, F, G, H in Fig. 2 und 3. Wegen der Symmetrie ist leicht zu sehen, dass es auch Schaaren gleichartiger Drehaxen besitzt, welche in jeder der beiden anderen, zu den Würfelflächen senkrechten Richtungen liegen.

Dieses zusammengesetzte System, welches aus der beschriebenen Ineinanderstellung zweier Systeme vom Typus 1 resultirt, ist ein Beispiel vom Typus 2 (57 nach Sohncke).

Seine Identität mit einem Punktsystem vom genannten Typus wird durch die Thatsache bewiesen, dass die relative Lage entsprechender Schrauben- und Drehaxen in beiden dieselbe ist.

Um diese Identität besser veranschaulichen zu können, ist eine Copie von Sohncke's Figur eines Theilsystems vom System 57 beigefügt (Fig. 5) mit den Projectionen der Würfelflächen, welche als punktirte Linien darin zu sehen sind, und mit den Schnittpunkten jener zweizähligen Schraubenaxen A, B, C, D, welche senkrecht auf der Zeichnungsebene stehen, sowie der zweizähligen Drehaxen, E, F, G, H, entsprechend bezeichnet wie in Fig. 2 und 3.

Wir wollen nun dazu übergehen, nachzuweisen, dass ein System, welches ein Beispiel zum Typus 3 oder 4 (65 und 66 nach Sohncke) ist, als das Resultat der Ineinanderstellung zweier mit einander identischer Systeme vom Typus 1 (58 nach Sohncke) betrachtet werden kann, indem die Axen und Deckbewegungen der zwei Theilsysteme coincidiren und also auch dem zusammengesetzten Systeme zukommen.

Durch die Mittelpunkte der Würfel, in welche der Raum, wie oben*), getheilt worden ist, lege man Ebenen parallel zu den drei zuerst gelegten Schaaren von Ebenen. Die Folge davon ist eine neue Theilung des Raumes in Würfel, identisch mit der früheren Theilung, aber die Würfelmittelpunkte bei der einen Theilung fallen mit den Würfelecken bei der anderen zusammen und vice versa.

Die dreizähligen Axen, welche in dem ersten Würfelsystem gezogen waren, durchschneiden Würfelstränge des zweiten Systems gerade so wie diejenigen der ersten, und wenn wir, wie vorher, die Würfel durch die Buchstaben α, β, γ, δ unterscheiden, je nach der Richtung, in welcher sie von einer dreizähligen Drehaxe durchschnitten werden, so werden Würfel, welche von der gleichen Axe durchkreuzt werden, immer durch den gleichen Buchstaben gekennzeichnet sein, und die Würfelschicht des zweiten Systems, welche unmittelbar über den Mittelpunkten einer in Fig. 2 dargestellten Schicht liegen, wird, wie man findet, von diesen Drehaxen so durchkreuzt wie Fig. 6 zeigt, und die Schicht, welche unmittelbar über den Centren einer in Fig. 3 dargestellten Schicht liegt, so wie Fig. 7 zeigt.

Die Schraubenaxen des Typus 1, welche senkrecht auf den Zeichnungsebenen stehen, werden die Schichten des zweiten Würfelsystems in den in Fig. 6 und 7 mit A, B, C, D bezeichneten Punkten schneiden, und die Drehaxen des Typus 2 werden dieselben Schichten in den Punkten E, F, G, H treffen; die Durchschnittspunkte jeder Axe mit den vier Schichten sind so in jedem Falle gleich bezeichnet.

Um ein System vom Typus 3 aus einem System vom Typus 1 abzuleiten, können wir nun folgendermassen verfahren:

Um eine der zweizähligen Schraubenaxen des letzteren Systems, welche durch einen Punkt B oder durch einen Punkt C geht, führe man eine vierzählige Rechtsschraubung**) aus, so dass zwei Bewegungen dieser Schraubung mit einer Bewegung der zweizähligen Schraubung äquivalent sind.

Da eine Drehung oder Schraubung um 90⁰ im Sinne des Uhrzeigers einen Würfel α in einen Würfel β, β in γ, γ in δ und δ in α verwandelt, so sehen wir aus der Betrachtung der Fig. 2, 3, 6 und 7, dass eine solche Schraubung die dreizähligen Drehaxen mit einander zur Deckung bringt, und folglich auch die verschiedenen zweizähligen Schraubenaxen zur Deckung bringt, deren Existenz ja, wie wir gesehen, durch Vorhandensein jener dreizähligen Axen bedingt ist.

*) Siehe S. 7.

**) Die Bewegung, welche ein Korkzieher macht, wenn er in einen Kork eindringt oder ihn verlässt, heisst eine Rechtsschraubung.

Das Halbsystem der Würfel von dem ersten Würfelsysteme, welches die Triaden enthält, die ein System vom Typus 1 bestimmen, kommt mit einem Halbsysteme des zweiten Würfelsystems zur Deckung.

Die Triaden, welche ursprünglich in einem Halbsysteme des ersten Würfelsystems vorhanden waren, finden sich daher jetzt in gleicher Weise angeordnet in einem Halbsysteme des zweiten Würfelsystems. Die beiden so erhaltenen, identischen Punktsysteme haben die gleichen Axen, und das aus den beiden Systemen zusammengesetzte System besitzt also diese Axen ebenfalls.

Da ferner eine vierzählige Rechtsschraubung um eine Axe durch einen Punkt *B* das System, welches aus gleichen, durch andere Punkte *B* gezogenen Axen besteht, zur Deckung bringt, so besitzt das zusammengesetzte System vierzählige Rechtsschraubungen um alle jene zweizähligen Axen der beiden Theilsysteme vom Typus 1, welche durch Punkte *B* gehen. Und dies schliesst in sich gleiche vierzählige Schraubungen um die zweizähligen Axen durch *C* und ebenso gleiche vierzählige Schraubungen um Axen, welche, in jeder der anderen beiden auf den Würfelflächen senkrechten Richtungen, den beiden Schaaren von Axen durch *B* und *C* entsprechen.

Das zusammengesetzte System, welches aus der beschriebenen Ineinanderstellung zweier Systeme vom Typus 1 hervorgeht, ist ein Beispiel zum Typus 3 (65 nach Sohncke).

Seine Identität mit dem genannten Punktsysteme ist durch die Thatsache erwiesen, dass die relative Lage seiner oben beschriebenen Axen und Deckbewegungen die gleiche ist, wie jene der Axen und Deckbewegungen des letzteren Systems.

Um diese Identität besser veranschaulichen zu können, ist eine Copie von Sohncke's Figur des Systems 65 beigefügt (Fig. 8), in welcher die Projectionen der Würfelflächen als punktirte Linien angegeben sind. Die punktirten Linien sind verschieden für die zwei verschiedenen Theilungen, und die Schnittpunkte der Axen sind der Bezeichnung in Fig. 2, 3, 6 und 7 entsprechend benannt.

Ein System vom Typus 4 (66 nach Sohncke) kann aus einem Systeme vom Typus 1 in ähnlicher Weise hergeleitet werden, wenn eine der zweizähligen Axen durch einen Punkt *A* oder *D* an Stelle einer solchen durch einen Punkt *B* oder *C* als vierzählige Schraubenaxe gewählt wird, und wenn die Schraubung eine linke statt einer rechten ist. Der Beweis wird mit dem oben gegebenen identisch sein.

Wir wollen nun weiter zeigen, dass ein System, welches ein Beispiel zum Typus 5 (62 nach Sohncke) ist, als das Ergebniss der Ineinanderstellung von vier mit einander identischen Systemen vom Typus 1 (58 nach Sohncke) angesehen werden kann, indem die Axen und Deckbewegungen der vier Theilsysteme coincidiren und folglich auch dem zusammengesetzten Systeme zukommen.

Um ein System vom Typus 5 aus einem Systeme vom Typus 1 abzuleiten, führt man eine zweizählige Drehung aus, wie sie vorher angewandt wurde, um ein System vom Typus 2 *) zu erzeugen, und ferner eine vierzählige Schraubung, wie sie eben ausgeführt wurde, um ein System vom Typus 3 **) herzustellen. Die Ordnung, in welcher Drehung und Schraubung ausgeführt werden, ist gleichgültig.

Oder anstatt der vierzähligen, zur Erzeugung des Typus 3 angewendeten Schraubung kann man die vierzählige Schraubung benutzen, die den Typus 4 erzeugt.

Die Ausführung beider Bewegungen, welche Schraubung wir auch anwenden mögen, bewirkt Deckung der dreizähligen Drehaxen, und folglich auch Deckung der verschiedenen Axen, deren Vorhandensein durch die Existenz jener dreizähligen Axen bedingt ist, mit resp. Axen der gleichen Art.

Das Doppelsystem, gebildet aus den beiden Würfelsystemen, in welche der Raum nach einander getheilt wurde, wird auch als Ganzes zur Deckung gebracht, aber das Halbsystem der Würfel, die von Anfang an die ein System vom Typus 1 bestimmenden Triaden enthielten, wird direct oder indirect nach einander mit jedem der drei anderen Halbsysteme zur Deckung kommen.

Die Triaden, welche ursprünglich in einem bestimmten Halbsysteme der Würfel vorhanden waren, werden durch eine der genannten Bewegungen in ein anderes der vier Halbsysteme gebracht, und dann kommt durch die zweite Bewegung das aus den zwei so gelegenen Systemen vom Typus 1 zusammengesetzte System an Stelle der übrigen zwei der vier Halbsysteme von Würfeln.

So kommt es, dass jedes der vier Halbsysteme von Würfeln das System vom Typus 1 in den dasselbe bildenden Würfeln gleichartig angeordnet besitzt. Und da die erwähnten Bewegungen die dreizähligen Axen zur Deckung bringen, so besitzen alle vier so gelegenen, identischen Punktsysteme dieselben Axen und Deckbewegungen, und das aus diesen vier Systemen zusammengesetzte System hat daher diese Axen und Deckbewegungen ebenfalls. Ausserdem besitzt es noch zweizählige Drehungen um Axen senkrecht zur Zeichnungsebene der Fig. 2, 3, 6 und 7, wie sie im Typus 2 vorhanden sind und vierzählige Rechtsschraubungen um jene der zwei Arten von Schraubenaxen vom Typus 1, welche im Typus 3 vierzählige Schraubenaxen geworden sind, und vierzählige Linksschraubungen um die

*) Siehe S. 10.

**) Siehe S. 11.

übrigen zweizähligen Schraubenaxen vom Typus 1, welche vierzählige Schraubenaxen im Typus 4 geworden sind. Es besitzt auch Schaaren gleicher Deckbewegungen um entsprechende Axen, die in den beiden anderen, auf den Würfelflächen senkrechten Richtungen liegen.

Dieses zusammengesetzte System, welches in der beschriebenen Weise aus der Ineinanderstellung von vier Systemen des Typus 1 hervorgeht, ist ein Beispiel zum Typus 5 (62 nach Sohncke).

Seine Identität mit einem Punktsysteme des genannten Typus wird durch die Thatsache erwiesen, dass die relative Lage der entsprechenden Schrauben- und Drehaxen in beiden die gleiche ist.

Um diese Identität noch deutlicher hervortreten zu lassen, ist eine Copie von Sohncke's Figur des Systems 62 beigefügt (Fig. 9), in welcher die Projectionen der Würfelflächen als punktirte Linien von zweierlei Art zu sehen sind, und die Schnittpunkte der Axen entsprechend wie in Fig. 2, 3, 6 und 7 benannt sind.

Wir wollen nun dazu übergehen zu zeigen, dass ein System, welches ein Beispiel zu Typus 6 (55 nach Sohncke) ist, als das Erzeugniss der Ineinanderstellung von vier mit einander identischen Systemen des Typus 1 (58 nach Sohncke) angesehen werden kann, indem die Axen und Deckbewegungen der sämmtlichen vier Systeme dem zusammengesetzten Systeme*) angehören.

Um ein System vom Typus 6 aus einem Systeme des Typus 1 abzuleiten, können wir wie folgt vorgehen:

In einem beliebigen Würfel eines der beiden vollständigen Würfelsysteme, in welche der Raum wie oben**) nach einander getheilt wurde, mache man ausser der Diagonale dieses Würfels, welcher im Falle des Typus 1 bereits eine dreizählige Axe ist, irgend eine der drei übrigen Diagonalen auch zu einer dreizähligen Axe. Zieht man diese Linie, so bildet sie die gemeinschaftliche Diagonale eines Würfelstranges in jedem der beiden vollständigen Würfelsysteme, und durchläuft Würfel, welche jedem der vier Halbsysteme von Würfeln angehören. Und in jedem Würfel der beiden Systeme, welchen sie durchkreuzt, wird sie die in demselben schon vorhandene, dem Typus 1 angehörige dreizählige Axe im Würfelmittelpunkte schneiden.

Man führe nun dreizählige Drehungen aus um die dreizähligen Axen des Typus 1 und ebenso um die vorhin neu hinzugekommene Axe, so dass alle neuen dreizähligen Axen, welche durch die Existenz dieser neuen Axe bedingt sind, dadurch erhalten werden.

---

*) Die Theilsysteme haben diesmal nicht wie in den vorhergehenden Fällen zusammenfallende Axensysteme.

**) Siehe S. 7 und 11.

Man wird finden, dass das so erhaltene, erweiterte System von Axen aus allen Linien besteht, welche gemeinschaftliche Diagonalen von Würfelreihen der zwei vollständigen Systeme von Würfeln bilden, in welche der Raum getheilt wurde. Jeder Würfelmittelpunkt beider Systeme ist also der Schnittpunkt von vier dreizähligen Axen, welche die vier Würfeldiagonalen sind.

Denn wo ein Würfel von der neuen Axe sowohl als von der zum Typus 1 gehörigen Axe durchkreuzt wird, ergiebt die Ausführung der dreizähligen Drehung um eine dieser zwei Axen zwei weitere Axen und verwandelt damit alle vier Würfeldiagonalen in dreizählige Axen. Und weil die neue Axe Würfel eines jeden der vier Halbsystemen von Würfeln durchläuft, so ist dies in einigen Würfeln eines jeden der vier Halbsysteme der Fall.

Auf einander folgende dreizählige Drehungen des Typus 1 können aber einen Würfel mit einem beliebigen anderen Würfel desselben Halbsystems zur Deckung bringen*). Da also in einigen Würfeln jedes der vier Halbsysteme von Würfeln die vier Diagonalen dreizählige Axen sind, so folgt daraus, dass sie es in jedem Würfel eines jeden dieser vier Halbsysteme sind.

Man sieht leicht, dass keine anderen dreizähligen Axen ausser diesen erhalten werden; denn es ist klar, dass die Ausführung einer dreizähligen Drehung um irgend eine derselben die beiden ganzen Würfelsysteme zur Deckung bringt und deshalb immer die gemeinschaftliche Diagonale eines Würfelstranges an die Stelle einer anderen solchen gemeinschaftlichen Diagonale bewegt und folglich keine dreizähligen Axen in anderer Lage als der der einen oder anderen der gemeinschaftlichen Diagonalen im oben beschriebenen System ergeben wird.

Daher ist, wie oben festgestellt, das erweiterte System dreizähliger Axen, welches sich ergiebt, wenn man eine Würfeldiagonale, welche eine der dreizähligen Axen vom Typus 1 schneidet, zu einer neuen dreizähligen Axe macht, zugleich dasjenige System, welches entsteht, wenn alle Linien, welche gemeinschaftliche Diagonalen von aneinandergereihten Würfeln bilden, in welche der Raum getheilt worden, dreizählige Axen bilden.

Es wird nun gezeigt werden, dass die Folge dieser Erweiterung des Systems dreizähliger Axen in einem Punktsystem vom Typus 1 die Erzeugung eines Punktsystems des Typus 6 aus jenem ist.

Das eben abgeleitete erweiterte System von Axen ist erhalten worden, ohne die Existenz irgend welcher anderer als dreizähliger Axen vorauszusetzen; folglich werden alle neuen Lagen des Punktsystems vom Typus 1, welche aus der Erweiterung des Systems dreizähliger Axen folgen, solche

*) Siehe S. 8.

sein, dass man das Punktsystem in dieselben bringen kann, indem man Drehungen um eine oder mehrere dieser Axen ausführt.

Nun bringt eine Drehung um irgend eine der dreizähligen Axen immer jedes der Halbsysteme von Würfeln zur Deckung und bewirkt nicht das Zusammenfallen der neuen Lage des einen Halbsystems mit der ursprünglichen Lage eines anderen*). Welche aufeinder folgende Drehungen um diese Axen also auch ausgeführt werden mögen, immer werden die Triaden des Systems 1 noch in demselben Halbsystem zu finden sein, in welchem sie ursprünglich lagen.

Nun zu den Lagen, welche die Triaden in den Würfeln dieses Halbsystems einnehmen!

Die Ecken der Würfel des Halbsystems können in zwei Classen getheilt werden; die eine Classe enthält vier der acht Ecken jedes Würfels, welche verbunden reguläre gleich und gleichliegende Tetraëder bilden, die andere die übrigen vier, welche ebenfalls reguläre, gleiche und gleichliegende Tetraëder bilden, deren Orientirung jedoch derjenigen der von der ersten Classe gebildeten Tetraëder entgegengesetzt ist. Und es ist leicht zu sehen, dass keine Drehung um eine der dreizähligen Axen eine Ecke der einen dieser Classen mit einer Ecke der anderen Classe zur Deckung bringen wird.

Folglich werden durch die Ausführung aufeinander folgender Drehungen um die dreizähligen Axen des erweiterten Systems drei und nur drei neue Triaden, identisch mit der schon vorhandenen Triade des Typus 1, in jeden Würfel des Halbsystems der Würfel, welche die Triaden vom Typus 1 enthalten, gebracht; diese neuen Triaden liegen so, dass die Deckbewegungen des Systems der durch die jetzt vorhandenen vier Triaden gebildeten 12 Punkte diejenigen eines regulären Tetraëders sind, dessen Ecken die Hälfte der Würfelecken einnehmen. Mit anderen Worten: diese 12 Punkte bilden einen 12-Punkter von Sohncke**), dessen Mittelpunkt und Axen mit dem Mittelpunkt und den Axen des eben erwähnten Tetraëders übereinstimmen.

Nun bilden die Mittelpunkte der Würfel eines jeden der vier Halbsysteme der Würfel das, was Sohncke »ein regulär oktaëdrisches Raumgitter«***) nennt, und daher besteht das Punktsystem, welches aus der oben beschriebenen Erweiterung des Systems dreizähliger Axen des Typus 1 entsteht, aus identischen 12-Punktern, deren Mittelpunkte ein regulär oktaëdrisches Raumgitter bilden, und deren Axen parallel zu den entsprechen-

---

*) Vergl. S. 8.

**) Siehe Entwickelung einer Theorie etc. S. 156 bezüglich Sohncke's Definition eines »12-Punkters«.

***) Entwickelung etc. S. 157.

den Axen dieses Raumgitters sind. Es ist daher ein Beispiel zu Sohncke's System 55*).

Um nun zu beweisen, dass das eben beschriebene System aus vier mit einander identischen Punktsystemen vom Typus 1 besteht, und dass es ihre Axen und Deckbewegungen besitzt, können wir folgendermassen vorgehen:

Zwei dreizählige Drehungen um zwei Diagonalen eines beliebigen Würfels können so gewählt werden, dass ihre Resultante eine zweizählige Drehung um eine Axe ist, welche senkrecht auf einer der drei Ebenen des Würfels steht und durch den Mittelpunkt desselben geht**). Daher besitzt das erweiterte System drei Schaaren von Axen, welche je auf den drei Ebenen der Würfel senkrecht stehen; drei dieser Axen, je eine aus einer Schaar, schneiden sich in jedem Würfelcentrum.

Durch den Mittelpunkt eines der Würfel, welche eine Triade des Typus 1 enthalten, ziehe man drei solche Axen.

Man führe eine zweizählige Drehung um eine derselben aus und bringe so eine zweite Triade in jeden Würfel des die Triaden des Typus 1 enthaltenden Halbsystems. Die Lage der Axen dieser zweiten Triaden können leicht in Fig. 2 und 3 aufgesucht werden: eine zweizählige Drehung um eine zur Zeichnungsebene senkrechte Axe verwandelt Würfel α in Würfel γ, β in δ, γ in α und δ in β.

Auf das aus den zwei identischen Systemen des Typus 1 zusammengesetzte System, welches erhalten wird, wenn man sowohl die alte als die neue Lage der Triaden nimmt, wende man eine zweite zweizählige Drehung um eine andere der drei eben gezogenen Axen an.

Die Folge davon ist offenbar die, dass in jedem der Würfel, welche die Triaden enthalten, die zwei Diagonalen, um welche die Triaden gruppirt sind, an den Ort der beiden anderen Diagonalen gebracht werden, so dass man vier gleichartige Lagen für das System des Typus 1 erhält.

Die so erhaltenen vier identischen Systeme ergeben zusammengenommen offenbar das System des Typus 6.

Ferner, wenn man das erweiterte System dreizähliger Axen von jenen eines Systems vom Typus 1 herleitet, so werden die dreizähligen Drehungen des letzteren unverändert beibehalten, und daher besitzt dieses erweiterte System jene dreizähligen Drehungen und alle anderen durch die Existenz derselben bedingten Deckbewegungen. Und wegen der Symmetrie besitzt es auch die Deckbewegungen der drei anderen identischen Systeme des Typus 1, welche an seiner Zusammensetzung theilnehmen.

---

*) Siehe Entwickelung einer Theorie etc., S. 156 und 177.

**) Vergl. Kinematische Hülfsbetrachtung III (Euler'scher Satz), Entwickelung einer Theorie etc. S. 31.

Es ist also festgestellt, dass ein System des Typus 6 aus vier identischen Systemen des Typus 1 besteht, welche in der bestimmten Weise in einander gestellt sind, wobei die Axen und Deckbewegungen dieser sämmtlichen vier Systeme dem zusammengesetzten System zukommen.

Wir wollen nun zum Beweise übergehen, dass ein System, welches ein Beispiel zum Typus 7 (54 nach Sohncke) ist, als Ergebniss der Ineinanderstellung von acht mit einander identischen Punktsystemen des Typus 1 (58 nach Sohncke) betrachtet werden kann, wobei die Axen und Deckbewegungen dieser acht Theilsysteme auch dem zusammengesetzten System angehören.

Um ein System vom Typus 7 aus einem System des Typus 1 abzuleiten, führe man eine zweizählige Drehung aus, so wie sie eben angewandt wurde, um ein System des Typus 2 *) zu erzeugen und ferner zwei zweizählige Drehungen, wie sie gerade ausgeführt wurden, um ein System des Typus 6 zu erhalten; die Reihenfolge ist gleichgültig.

Man sieht leicht, dass, wenn acht identische Systeme des Typus 1 in dieser Weise symmetrisch angeordnet werden, das sich ergebende zusammengesetzte System wie Typus 6 ein System von gleichen 12-Punktern ist. In diesem Falle jedoch enthalten alle Würfel eines der Systeme von Würfeln, in welche der Raum geteilt wurde **), 12-Punkter und nicht bloss die Hälfte derselben wie im Falle des Typus 6. Die Mittelpunkte der 12-Punkter bilden daher ein kubisches Raumgitter ***).

Das erweiterte System dreizähliger Axen des Typus 6 gehört offenbar diesem System an, und da wir schon gesehen haben, dass dieses erweiterte System die Axen des Typus 1 umfasst, so ist der obige Satz aus Gründen der Symmetrie bewiesen.

Wir wollen nun fortfahren zu zeigen, dass ein System, welches ein Beispiel des Typus 8 (60 nach Sohncke) ist, als das Resultat der Ineinanderstellung von acht mit einander identischen System des Typus 1 (58 nach Sohncke) angesehen werden kann, wobei das zusammengesetzte System die Axen und Deckbewegungen dieser acht Theilsysteme besitzt.

Um ein System vom Typus 8 aus einem System des Typus 1 herzuleiten, führe man zwei solche zweizählige Drehungen aus, wie sie zur Erzeugung eines Systems vom Typus 6 angewandt wurden, und sodann eine vierzählige Drehung, indem man die Axe einer dieser Drehungen in eine vierzählige verwandelt.

---

*) Siehe S. 10.

**) Dies gilt in gleicher Weise für die beiden Theilungen.

***) Siehe Entwickelung einer Theorie etc., S. 156.

Man sieht leicht, dass die zwei Lagen des Systems von 12-Punktern des Typus 6, welche man durch Anwendung der letzteren Drehung erhält, zusammengenommen ein System von 24-Punktern ergeben, deren Mittelpunkte und deren dreizählige Axen jene des Systems von 12-Punktern sind*).

Es wurde gezeigt, dass das System vom 12-Punktern aus vier Systemen des Typus 1 besteht und die Axen dieser Systeme besitzt; deshalb besteht das System von 24-Punktern aus acht solchen Systemen und besitzt ebenfalls ihre Axen.

Die obige Behauptung ist also bewiesen.

Wir wollen nun weitergehen und zeigen, dass ein System, welches ein Beispiel zum Typus 9 (63 nach Sohncke) ist, als das Ergebniss der Ineinanderstellung von acht mit einander identischen Systemen des Typus 1 (58 nach Sohncke) betrachtet werden kann, wobei das zusammengesetzte System die Axen und Deckbewegungen dieser acht Theilsysteme besitzt.

Um ein System des Typus 9 aus einem System des Typus 1 abzuleiten, führe man eine vierzählige Schraubung aus, entweder eine solche, wie sie gerade angewandt wurde, um ein System des Typus 3 zu erzeugen, oder die zur Erzeugung des Typus 4 gebrauchte, und ferner zwei zweizählige Drehungen, wie sie zur Herstellung des Typus 6 nöthig waren**); die Aufeinanderfolge ist gleichgültig. Jede der obigen Schraubungen bringt das erweiterte System dreizähliger Axen zur Deckung.

Wenn die Drehungen zuerst ausgeführt werden, sieht man leicht, dass die zwei Lagen des Systems von 12-Punktern des Typus 6, welche man durch Anwendung einer der erwähnten Schraubungen erhält, 12-Punkter in den Würfeln eines Halbsystems von Würfeln jeder der beiden Raumtheilungen ergeben; die 12-Punkter des einen Halbsystems haben jedoch die entgegengesetzte Orientirung bezüglich der vier Richtungen der Würfeldiagonalen, wie jene der 12-Punkter des anderen Halbsystems.

Das in dieser Weise aus acht identischen Systemen vom Typus 1 zusammengesetzte System hat, weil es das erweiterte System der dreizähligen Axen besitzt, die Deckbewegungen dieser Axen, welche, wie wir gesehen, die Deckbewegungen des Typus 1 in sich begreifen.

Die Identität dieses zusammengesetzten Systems mit Sohncke's System 63 wird durch die Thatsache bewiesen, dass die relative Lage entsprechender Schrauben- und Drehaxen in beiden die gleiche ist.

Um diese Identität besser hervortreten zu lassen, ist eine Zeichnung beigefügt (Fig. 10), welche die relativen Lagen entsprechender Gruppen

*) Vergl. Entwickelung einer Theorie etc., S. 166.

**) Siehe S. 11, 12, 17.

von vier Punkten jedes 12-Punkters vielleicht etwas deutlicher zeigt als Fig. 63, Taf. V in Sohncke's Werk, welche dieselbe Art Theilsystem darstellt. Die Bezeichnungsweise entspricht der in den Fig. 2, 3, 6 und 7.

Wir wollen nun weiter zeigen, dass ein System, welches ein Beispiel zu Typus 10 (56 nach Sohncke) ist, als das Resultat der Ineinanderstellung von sechzehn mit einander identischen Systemen des Typus 1 (58 nach Sohncke) angesehen werden kann, wobei die Axen und Deckbewegungen dieser 16 Theilsysteme dem zusammengesetzten Systeme angehören.

Um ein System des Typus 10 aus einem Systeme des Typus 1 abzuleiten, führe man in beliebiger Ordnung aus: eine zweizählige Drehung, wie sie eben angewandt wurde, um ein System des Typus 2 *) zu erhalten, zwei zweizählige Drehungen, wie sie zur Erzeugung eines Systems vom Typus 6 **) nöthig waren, und eine Schiebung in einer der vier Richtungen der Würfeldiagonalen, so dass die Würfel, in welche der Raum durch die erste Theilung eingetheilt wurde, zur Deckung mit jenen kommen, in welche der Raum durch die zweite Theilung abgetheilt ward.

Wenn die Drehungen zuerst ausgeführt werden, sieht man leicht, dass die zwei Lagen des Systems von 12-Punktern des Typus 7, welche man durch die Ausführung der Schiebung erhält, identische 12-Punkter in allen Würfeln der beiden Systeme von Würfeln ergeben, in welche der Raum nach einander getheilt wurde; und dass das erhaltene zusammengesetzte System aus 16 identischen Systemen des Typus 1 besteht. Ueberdies bringt diese Schiebung das erweiterte System der dreizähligen Axen zur Deckung, und daher besitzt das zusammengesetzte System die Deckbewegungen dieser Axen, welche die Deckbewegungen des Typus 1 in sich begreifen.

Die Identität dieses zusammengesetzten Systems mit Sohncke's System 56 wird durch die Thatsache bewiesen, dass die relative Lage der entsprechenden Schrauben- und Drehaxen und Schiebungsrichtungen in beiden dieselbe ist.

Es soll nun weiter gezeigt werden, dass ein System, welches ein Beispiel zu Typus 11 (64 nach Sohncke) ist, als das Product der zusammensetzung von sechszehn mit einander identischen Systemen des Typus 1 (58 nach Sohncke) betrachtet werden kann, indem die Axen und Deckbewegungen dieser 16 Theilsysteme dem zusammengesetzten Systeme zukommen.

Um ein System des Typus 11 aus einem Systeme des Typus 1 abzuleiten, führe man in beliebiger Ordnung aus: eine zweizählige Drehung,

*) Siehe S. 10.
**) Siehe S. 17.

wie sie vorhin angewendet wurde, um ein System des Typus 2 zu erzeugen, eine vierzählige Schraubung, entweder eine solche, wie sie zur Herstellung eines Systems des Typus 3 nöthig war, oder die zur Erzeugung eines Systems vom Typus 4 gebrauchte, und zwei zweizähligen Drehungen, wie sie die Erzeugung eines Systems des Typus 6 verlangte.

Man sieht leicht, wenn die zur Erzeugung des Typus 6 erforderlichen zweizähligen Drehungen zuerst ausgeführt werden, dass die vier Lagen von 12-Punktern des Typus 6, welche man durch die Ausführung der übrigen Bewegungen erhält, gleiche 12-Punkter in die Würfel aller vier Halbsysteme von Würfeln liefern, in welche der Raum getheilt worden, wobei jedoch die 12-Punkter des einen vollständigen Würfelsystems die entgegengesetzte Orientirung bezüglich der vier Richtungen der Würfeldiagonalen haben, wie jene des anderen vollständigen Würfelsystems.

Das derartig aus sechzehn identischen Systemen des Typus 1 aufgebaute System hat, da es das erweiterte System dreizähliger Axen besitzt, die Deckbewegungen dieser Axen, welche jene des Typus 1 in sich begreifen.

Die Identität dieses zusammengesetzten Systems mit Sohncke's System 64 wird durch die Thatsache bewiesen, dass die relative Lage der entsprechenden Schrauben- und Drehaxen in beiden dieselbe ist.

Um diese Identität besser hervortreten zu lassen, ist eine Zeichnung beigefügt (Fig. 11), welche die relativen Lagen entsprechender Gruppen von vier Punkten jedes 12-Punkters vielleicht etwas deutlicher zeigt, als Fig. 64, Tafel V in Sohncke's Werk, welche dieselbe Art Theilsystem darstellt. Die Bezeichnungsweise entspricht der in den Fig. 2, 3, 6 und 7.

Wir wollen nun weiter zeigen, dass ein System, welches ein Beispiel zu Typus 12 (59 nach Sohncke) ist, als das Resultat der Zusammensetzung von 16 mit einander identischen Systemen des Typus 1 (58 nach Sohncke) angesehen werden kann, indem die Axen- und Deckbewegungen dieser 16 Theilsysteme dem zusammengesetzten Systeme angehören.

Um ein System des Typus 12 aus einem Systeme des Typus 1 abzuleiten, führe man in beliebiger Ordnung aus: eine zweizählige Drehung, wie sie gerade angewendet wurde, um ein System des Typus 2 zu erzeugen, zwei zweizählige Drehungen, wie sie zur Erzeugung eines Systems des Typus 6 erforderlich waren, und ferner eine vierzählige Drehung, indem man die Axe einer dieser letztgenannten Drehungen in eine vierzählige Axe verwandelt.

Man sieht leicht, dass die zwei Lagen des Systems von 12-Punktern des Typus 7, welche man durch die Ausführung der letztgenannten Drehung erhält, zusammengenommen ein System von 24-Punktern erzeugen, deren

Centra und deren dreizählige Axen diejenigen des Systems von 12-Punktern sind.

Es wurde gezeigt, dass das System von 12-Punktern aus acht Systemen des Typus 1 besteht und die Axen dieser Systeme besitzt; das System der 24-Punkter besteht also aus 16 solchen Systemen und besitzt ebenfalls ihre Axen.

Es soll nun weiter gezeigt werden, dass ein System, welches ein Beispiel zu Typus 13 (61 nach Sohncke) ist, als das Resultat der Ineinanderstellung von 32 mit einander identischen Systemen des Typus 1 (58 nach Sohncke) betrachtet werden kann, indem das zusammengesetzte System die Axen und Deckbewegungen dieser 32 Theilsysteme besitzt.

Um ein System des Typus 13 aus einem System des Typus 1 abzuleiten, führe man in beliebiger Ordnung aus: eine zweizählige Drehung, wie sie angewendet wurde, um ein System des Typus 2 zu erhalten; eine vierzählige Schraubung, entweder eine solche, welche zur Herstellung eines Systems des Typus 3 nöthig war, oder die zur Erzeugung eines Systems des Typus 4 erforderliche, zwei zweizählige Drehungen, wie sie die Erzeugung eines Systems des Typus 6 verlangte, und endlich eine vierzählige Drehung, indem man die Axe einer dieser beiden letztgenannten Drehungen in eine vierzählige Axe verwandelt.

Man sieht leicht, dass die zwei Lagen des Systems von 12-Punktern des Typus 11, welche man durch die letztere Drehung erhält, zusammengenommen ein System von 24-Punktern ergeben, deren Centra und deren dreizählige Axen jene des Systems der 12-Punkter sind.

Es wurde gezeigt, dass das System der 12-Punkter aus sechzehn Systemen des Typus 1 besteht und die Axen dieser Systeme besitzt; daher besteht das System der 24-Punkter aus 32 solchen Systemen und besitzt ihre Axen ebenfalls.

Entsprechend jedem der so untersuchten 13 regelmässigen Sohncke-schen Systeme giebt es einen mindest-symmetrischen Typus einer homogenen Structur ohne Symmetriecentren und Symmetrieebenen, welcher dieselben Deckbewegungen wie das Sohncke'sche System besitzt, und in welchem daher jede Schaar gleichartiger Punkte ein solches Punktsystem bestimmt.

Von diesen 13 Typen der homogenen Structur haben jene fünf, deren Punktsysteme beziehungsweise den Typen 1, 2, 6, 7 und 10 angehören, die Tetartoëdrie der Classe 32 in Sohncke's Verzeichniss der Krystallclassen*), und die übrigen acht, deren Punktsysteme bezw. von den Typen 3, 4, 5, 8, 9, 11 und 13 sind, die gyroëdrische Hemiëdrie der Classe 29. Alle

*) Diese Zeitschr. **20**, 467.

13 Typen homogener Structur haben denselben Grad der Symmetrie, wie die mindest-symmetrischen Punktsysteme, welche ihre gleichartigen Punkte bestimmen.

Die hexagonale Systemgruppe.

Diese Rubrik umfasst nur jene Systeme, welche sechszählige Axen besitzen.

Die zwölf Sohncke'schen Systeme, welche hexagonale Symmetrie besitzen, d. s. jene unter V A, V B seiner Uebersichtstabelle, bestehen je aus einer endlichen Anzahl mit einander identischer Systeme, entweder von dem Muster, welches Sohncke als System 42 bezeichnet, oder von dem als 43 bezeichneten, und jedes der zwölf Systeme besitzt die Axen und Deckbewegungen der Systeme, aus welchen es gebildet wird.

Genauer:

Typus 14 und 15 = Sohncke's Systemen 42 und 43.

Typus 16 und 17 (System 44 und 45) entstehen durch die Ineinanderstellung zweier mit einander identischer Systeme bezw. vom Typus 14 und 15; die Axen und Deckbewegungen dieser Theilsysteme gehören auch dem zusammengesetzten Systeme an.

Typus 18 und 19 (System 48 und 49) bestehen ebenfalls bezüglich aus zwei solchen Systemen, die ebenso mit dem zusammengesetzten Systeme in Beziehung stehen.

Typus 20 (System 46) besteht aus drei mit einander identischen Systemen entweder vom Typus 14 oder vom Typus 15.

Typus 21 und 22 (System 50 und 51) bestehen aus vier mit einander identischen Systemen bezw. vom Typus 14 und Typus 15.

Typus 23 (System 47) besteht aus sechs solchen Systemen des Typus 14 oder des Typus 15.

Typus 24 (System 52) besteht ebenfalls aus sechs solchen Systemen vom Typus 14 oder 15.

Typus 25 (System 53) besteht aus zwölf solchen Systemen vom Typus 14 oder vom Typus 15.

Diese Sätze können in fast derselben Weise bewiesen werden, wie jene bezüglich der regulären Systemgruppen.

Um die Typen 14 oder 15 (42 und 43 nach Sohncke) zu erhalten, theile man den Raum in gleiche regelmässige sechsseitige Prismen mit ebenen Endflächen, welche zusammenhängende Ebenen bilden.

Man nehme nun irgendwo einen Punkt in dem Systeme der Prismen an und lege durch denselben eine Ebene senkrecht zu den Prismenaxen. Durch geeignete Schiebungen bringe man entsprechende Punkte in jedes der regelmässigen Sechsecke, in welche diese Ebene durch die Prismenflächen getheilt wird. Schliesslich führe man eine Reihe sechszähliger

Schraubungen um eine beliebige Prismenaxe aus; die Schiebungscomponente dieser Schraubungen ist die Länge eines Prismas. In Folge dieser Schraubungen gelangt ein entsprechender Punkt in jedes der hexagonalen Prismen, welche den Raum erfüllen.

Das so erhaltene Punktsystem wird offenbar ein Beispiel zu Typus 14 oder zu Typus 15 sein, je nachdem die angewandte Schraubung eine rechte oder eine linke ist*).

Die Typen 16 und 17 (44 und 45 nach Sohncke) entstehen bezw. aus den Typen 14 und 15, welche als Theilsystem angewandt werden, wenn aus 14, bezw. 15 zwei identische Systeme hergestellt werden mittels einer zweizähligen Drehung um eine Axe, welche mit einer Prismenaxe zusammenfällt, oder um eine zu dieser parallelen Axe, welche in der Mitte zwischen zwei nächsten Prismenaxen liegt.

Die Typen 18 und 19 (48 und 49 nach Sohncke) entstehen bezüglich aus den Typen 14 und 15, welche als Theilsystem angewendet werden, wenn aus 14 bezw. 15 zwei identische Systeme erzeugt werden mittels einer zweizähligen Drehung, welche das System der Prismenaxen zur Deckung bringt, während die Richtung dieser Axen umgekehrt wird.

Dies wird der Fall sein, wenn die zweizählige Axe senkrecht zur Prismenaxe durch zwei gegenüberliegende Prismenkanten oder senkrecht zu zwei gegenüberliegenden Prismenflächen geht. Das durch eine solche Drehung erhaltene, den Raum erfüllende Doppelsystem von Prismen besitzt offenbar die Deckungen der Typen 14 und 15.

Typus 20 (46 nach Sohncke) entsteht aus Typus 14 oder Typus 15, als Theilsystem angewendet, wenn drei identische Systeme des einen dieser Typen hergestellt werden durch zwei aufeinanderfolgende dreizählige Drehungen um eine Axe, welche mit einer der sechszähligen Axen des Theilsystems zusammenfällt, oder um eine Axe, welche parallel zu dieser in der Mitte dreier nächster sechszähliger Axen verläuft.

Die Typen 21 und 22 (50 und 51 nach Sohncke) entstehen bezüglich aus Typus 14 oder 15, als Theilsystem angewendet, wenn vier identische Systeme des geeigneten der beiden genannten Typen hergestellt werden durch aufeinanderfolgende Ausführung der zur Erzeugung der Typen 16 und 17 nöthigen zweizähligen Drehung und der zur Herstellung der Typen 18 und 19 erforderlichen zweizähligen Drehung.

Typus 23 (47 nach Sohncke) entsteht aus Typus 14 oder 15, als Theilsystem angewendet, wenn sechs identische Systeme eines dieser Typen

*) Es ist klar, dass erzeugende Punkte, welche in derselben Parallelen zur Prismenaxe liegen, alle identische Punktsysteme hervorbringen werden, wenn Schraubungen von der gleichen Windung angewandt werden.

hergestellt werden mittels auf einander folgender sechszähliger Drehungen um eine Axe, die mit einer der sechszähligen Axen des Theilsystems zusammenfällt.

Typus 24 (52 nach Sohncke) entsteht aus Typus 14 oder 15, als Theilsystem angewandt, wenn man mittels der zur Erzeugung des Typus 20 nöthigen dreizähligen Drehungen und der zur Entstehung der Typen 18 und 19 erforderlichen zweizähligen Drehung sechs identische Systeme des einen der beiden Typen herstellt.

Typus 25 (53 nach Sohncke) entsteht aus Typus 14 oder 15, als Theilsystem angewendet, wenn man nacheinander ausführt: die zur Herstellung des Typus 18 und 19 nöthige zweizählige Drehung und die zur Erzeugung des Typus 23 gebrauchte sechszählige Drehung. Dadurch werden 12 identische Systeme eines dieser Typen ineinander gestellt.

Jedem der 12 Sohncke'schen Systeme der hexagonalen Gruppe entsprechend, giebt es einen mindest-symmetrischen Typus homogener Structur ohne Symmetriecentren und Symmetrieebenen, welcher die gleichen Deckbewegungen wie das Sohncke'sche Punktsystem besitzt und in welchem daher jede Schaar homologer Punkte ein derartiges Punktsystem vorstellt.

Von diesen 12 Typen homogener Structur haben je sechs, deren Punktsysteme von den Typen 14, 15, 16, 17, 20 und 23 sind, die pyramidale Hemimorphie der Classe 18 in Sohncke's Verzeichniss der Krystallclassen*), und die übrigen sechs, deren Punktsysteme den Typen 18, 19, 21, 22, 24 und 25 angehören, die trapezoëdrische Hemiëdrie der Classe 10.

Es mag bemerkt werden, dass die Punktsysteme der Typen 20 und 23 (46 und 47 nach Sohncke), für sich betrachtet, eine höhere Symmetrie besitzen, als die oben erwähnten mindest-symmetrischen homogenen Structuren, welche dieselben enthalten; sie besitzen Symmetrieebenen, welche die Punktebenen schneiden und haben die Symmetrie der Classe 11 in Sohncke's Verzeichniss.

Die tetragonale Systemgruppe.

Die 16 Sohncke'schen Systeme, welche tetragonale Symmetrie besitzen, d. s. jene unter IVA und IVB seiner Uebersichtstabelle, bestehen je aus einer endlichen Anzahl mit einander identischer Systeme entweder von dem Muster, welches von Sohncke als System 26 bezeichnet wird, oder von jenem als System 27 bezeichneten, und jedes der 16 Systeme besitzt die Axen und Deckbewegungen der Systeme, aus welchen es aufgebaut ist.

Genauer:

Die Typen 26 und 27 = System 26 und 27 von Sohncke.

*) Siehe diese Zeitschr. **20**, 463.

Typus 28 (System 28) entsteht durch die Ineinanderstellung zweier mit einander identischer Systeme entweder des Typus 26 oder des Typus 27; die Axen und Deckbewegungen der Theilsysteme gehören überdies in jedem Falle dem zusammengesetzten System an.

Typus 29 (System 29) besteht ebenfalls aus zwei solchen Systemen einer der Typen, welche mit dem zusammengesetzten System in derselben Beziehung stehen.

Typus 30 und 31 (System 32 und 33) bestehen aus zwei solchen Systemen bezw. vom Muster der Typen 26 und 27.

Typus 32 und 33 (System 38 und 39) bestehen ebenso bezw. aus zwei identischen Systemen dieser selben beiden Systeme.

Typus 34 (System 30) besteht aus vier identischen Systemen eines der zwei Typen.

Typus 35 (System 34) besteht gleichfalls aus vier solchen identischen Systemen.

Typus 36 (System 35) besteht auch aus vier.

Typus 37 (System 40) ebenfalls aus vier.

Typus 38 (System 31) ist aus acht solchen identischen Systemen zusammengesetzt.

Typus 39 (System 36) desgleichen aus acht.

Typus 40 (System 41) desgleichen aus acht.

Typus 41 (System 37) besteht aus 16 solchen identischen Systemen.

Wie schon gesagt, sind in jedem Falle die Axen und Deckbewegungen aller identischer Theilsysteme dem zusammengesetzten System eigenthümlich.

Diese Sätze können in fast gleicher Weise bewiesen werden, wie jene für die regulären Systemgruppen.

Um die Typen 26 und 27 (26 und 27 nach Sohncke) zu erhalten, theile man den Raum in gleiche quadratische Prismen durch die Schaaren paralleler Ebenen, welche gegenseitig auf einander senkrecht stehen. Die Prismenaxen können nun als vierzählige Schraubenaxen betrachtet werden, deren Schiebungscomponente ein ganzes Vielfaches der Prismenlänge ist.

Man nehme nun irgendwo in dem Prismensystem einen Punkt an und lege durch denselben eine Ebene parallel zu den Endflächen der Prismen. Durch geeignete Schiebungen bringe man entsprechende Punkte symmetrisch in die Hälfte der Quadrate des Quadratsystems, in welches diese Ebene durch die Prismenflächen getheilt wird, und schliesslich führe man eine Reihenfolge von Bewegungen der vierzähligen Schraubung aus um eine der erwähnten vierzähligen Axen, indem man die Schiebungscomponente gleich der doppelten Prismenlänge macht.

Die Folge ist die Erzeugung entsprechender Punkte in einem von je vier der den Raum erfüllenden Prismen.

Das so erhaltene Punktsystem wird offenbar ein Beispiel zu Typus 26 oder zu Typus 27 sein, je nachdem die angewandte Schraubung eine rechte oder linke ist.

Typus 28 (28 nach Sohncke) entsteht entweder aus Typus 26 oder aus Typus 27, als Theilsystem angewandt, wenn zwei identische Systeme eines dieser Typen hergestellt werden mittels einer zweizähligen Drehung um eine zu den Prismenaxen parallele Axe, so dass das Viertelsystem der Prismen, welches die Punkte eines Theilsystems enthält, mit dem transversal (seitlich) angrenzenden Viertelsystem zur Deckung gebracht wird.

Eine solche Axe wird die Mittellinie einer Prismenfläche sein, welche parallel zu den Prismenkanten läuft.

In dem so erhaltenen, zusammengesetzten System werden die Prismenkanten vierzählige Schraubenaxen.

Typus 29 (29 nach Sohncke) entsteht entweder aus Typus 26 oder Typus 27, als Theilsystem angewendet, wenn man mit Hülfe einer zweizähligen Drehung um eine der Prismenaxen zwei identische Systeme eines dieser Typen herstellt. Es fallen jetzt zwei Punkte in jedes Prisma des Viertelsystems der Prismen, welche die Punkte enthalten.

Die Typen 30 und 31 (32 und 33 nach Sohncke) werden beziehungsweise aus den Typen 26 und 27, als Theilsystem angewandt, abgeleitet, wenn zwei identische Systeme von dem geeigneten Typus der beiden zuletzt genannten hergestellt werden mittels einer zweizähligen Drehung um eine Axe, deren Richtung senkrecht zur Richtung der Prismenaxen steht, und welche so liegt, dass die Ausführung der Drehung die Axen der Prismen, welche die Punkte des Theilsystems enthalten, zur Deckung bringt, wobei jedoch die Richtung dieser Axen die entgegengesetzte wird.

Zu diesem Zweck muss die Axe der zweizähligen Drehung durch zwei gegenüberliegende Kanten eines Prismas gehen oder durch Parallele zu diesen, welche die Mittellinien zweier gegenüberliegender Prismenflächen bilden.

Das Doppelsystem der den Raum erfüllenden Prismen besitzt offenbar die Axen und Deckbewegungen der Typen 26 und 27.

Die Typen 32 und 33 (38 und 39 nach Sohncke) entstehen bezüglich aus den Typen 26 und 27, als Theilsystem angewandt, wenn man zwei identische Systeme vom betreffenden der genannten Typen herstellt mit Hülfe einer zweizähligen Drehung um eine Axe, deren Richtung senkrecht zur Richtung der Prismenaxen ist, und welche so liegt, dass die Ausführung der Drehung die Axen der Prismen, welche die Punkte des Theilsystems enthalten, in die Lagen bringt, welche ursprünglich die Axen jener Prismen einnahmen, welche seitlich an dieselben stossen, wobei jedoch die Richtung der Axen die entgegengesetzte wird.

Zu diesem Zweck muss die Axe der zweizähligen Drehung in einer Prismenfläche liegen.

Wie vorher besitzt das Doppelsystem der den Raum erfüllenden Prismen offenbar die Axen und Deckbewegungen der Typen 26 und 27.

Typus 34 (30 nach Sohncke) entsteht aus Typus 26 oder 27, als Theilsystem angewendet, wenn vier identische Systeme des einen oder anderen dieser Typen hergestellt werden mittels aufeinanderfolgender vierzähliger Drehungen um eine Axe, welche mit einer der Prismenaxen, d. h. mit einer Axe von irgend einer Art der vierzähligen Schraubungen des Theilsystems zusammenfällt.

Typus 35 (34 nach Sohncke) wird entweder aus Typus 26 oder aus Typus 27, als Theilsystem gebraucht, erzeugt, wenn vier identische Systeme eines dieser Typen hergestellt werden durch die aufeinanderfolgende Ausführung der zur Erzeugung des Typus 28 angewendeten zweizähligen Drehung und entweder der zur Herstellung der Typen 30 und 31 nöthigen zweizähligen Drehung oder der zur Erzeugung der Typen 32 und 33 gebrauchten zweizähligen Drehung.

Typus 36 (35 nach Sohncke) erhält man entweder aus Typus 26 oder aus Typus 27, als Theilsystem angewendet, wenn vier identische Systeme eines dieser Typen hergestellt werden durch die aufeinanderfolgende Ausführung der zur Erzeugung des Typus 29 angewandten zweizähligen Drehung und der zur Entstehung der Typen 30 und 31 nöthigen zweizähligen Drehung.

Typus 37 (40 nach Sohncke) entsteht entweder aus Typus 26 oder aus Typus 27, als Theilsystem angewandt, wenn vier identische Systeme des einen oder anderen dieser Typen hergestellt werden durch die successive Ausführung der zur Erzeugung des Typus 29 nöthigen zweizähligen Drehung und der zur Bildung der Typen 32 und 33 gebrauchten zweizähligen Drehung.

Typus 38 (31 nach Sohncke) entsteht entweder aus Typus 26 oder aus Typus 27, als Theilsystem gebraucht, wenn man acht identische Systeme eines dieser Typen dadurch herstellt, dass man nacheinander ausführt: die vierzähligen Drehungen, welche gebraucht wurden, um Typus 34 zu erzeugen, und eine zweizählige Schraubung um eine Axe, welche parallel zu den Prismenkanten läuft und die Mittellinie einer Prismenfläche bildet; die Schiebungscomponente dieser Schraubung ist die Länge eines Prismas.

Typus 39 (36 nach Sohncke) bildet man entweder aus Typus 26 oder aus Typus 27, als Theilsystem gebraucht, wenn acht identische Systeme irgend eines dieser Typen dadurch hergestellt werden, dass man nach einander die zur Entstehung des Typus 34 gebrauchten vierzähligen Drehungen und die zur Erzeugung der Typen 30 und 31 angewandte zweizählige Drehung ausführt.

Typus 40 (41 nach Sohncke) entsteht entweder aus Typus 26 oder aus Typus 27 als Theilsystem, wenn acht identische Systeme des einen oder anderen dieser Typen dadurch hergestellt werden, dass man nach einander die zur Bildung des Typus 34 nöthigen vierzähligen Drehungen und die zur Erzeugung der Typen 32 und 33 erforderliche zweizählige Drehung ausführt.

Typus 41 (37 nach Sohncke) entsteht entweder aus Typus 26 oder aus Typus 27, als Theilsystem angewendet, wenn man 16 identische Systeme eines dieser Typen dadurch herstellt, dass man nach einander die vierzähligen Drehungen und die zweizählige Schraubung, welche den Typus 38 ergeben, und die zur Erzeugung der Typen 30 und 31 nöthige zweizählige Drehung ausführt.

Jedem der 16 Sohncke'schen Systeme der tetragonalen Gruppe entsprechend giebt es einen mindest-symmetrischen Typus homogener Structur ohne Symmetriecentren und Symmetrieebenen, der die gleichen Deckbewegungen wie das Sohncke'sche System besitzt, und in welchem daher jede Schaar gleichartiger Punkte ein solches Punktsystem bestimmt.

Von diesen 16 Typen homogener Structur haben sechs, nämlich jene, deren Punktsysteme den Typen 26, 27, 28, 29, 34 und 38 angehören, die pyramidale Hemimorphie der Classe 27 in Sohncke's Verzeichniss der Krystallclassen *), und die übrigen zehn, deren Punktsysteme beziehungsweise vom Typus 30, 31, 32, 33, 35, 36, 37, 39, 40 und 41 sind, die trapezoëdrische Hemiëdrie der Classe 22.

Es mag bemerkt werden, dass die Punktsysteme der Typen 29, 34 und 38 (29, 30 und 31 nach Sohncke), für sich betrachtet, eine höhere Symmetrie als die eben erwähnten mindest-symmetrischen homogenen Structuren besitzen, welche dieselben enthalten. Sie haben Symmetrieebenen, welche die Ebenen der Punkte schneiden und besitzen die Symmetrie der Classe 23.

Die trigonale Systemgruppe.

Die elf Sohncke'schen Systeme, welche trigonale Symmetrie haben, d. h. jene unter III A und III B seiner Uebersichtstabelle, bestehen je aus einer endlichen Anzahl mit einander identischer Systeme entweder nach dem Muster, welches Sohncke als System 15 bezeichnet oder nach dem als 16 bezeichneten, und jedes der 11 Systeme besitzt die Axen und Deckbewegungen des Systems, aus welchem es gebildet ist.

Bestimmter:

Die Typen 42 und 43 = System 15 und 16 nach Sohncke.

Typ. 44 und 45 (System 19 und 20) entstehen aus der Ineinanderstellung zweier mit einander identischer Systeme, im ersten Fall nach dem Muster

*) Diese Zeitschr. **20**, 466.

des Systems 15, im zweiten Fall vom System 16, wobei die Axen und Deckbewegungen der Systemcomponenten dem zusammengesetzten System eigen sind.

Typus 46 und 47 (System 23 und 24) bestehen ebenfalls bezüglich aus zwei identischen Systemen derselben Typen.

Typus 48 (System 17) besteht aus drei identischen Systemen eines der beiden Typen.

Typus 49 (System 21) besteht aus sechs solchen identischen Systemen.

Typus 50 (System 25) ebenfalls aus sechs.

Typus 51 (System 18) ist aus neun solchen identischen Systemen zusammengesetzt.

Typ. 52 (System 22) besteht aus achtzehn solchen identischen Systemen.

Wie gesagt, besitzt in jedem Fall das zusammengesetzte System die Axen und Deckbewegungen aller identischer Theilsysteme.

Diese Sätze können fast auf dieselbe Weise wie die früheren bewiesen werden.

Um die Typen 42 und 43 (15 und 16 nach Sohncke) zu erhalten, theile man den Raum in gleiche, regelmässige, sechsseitige Prismen wie im Falle der hexagonalen Systemgruppe.

Die Prismenaxen können nun als dreizählige Schraubenaxen angesehen werden, deren Schiebungscomponente ein ganzes Vielfaches der Prismenlänge ist.

Man nehme nun irgendwo einen Punkt im Prismensystem an und lege durch denselben eine Ebene senkrecht zu den Prismenaxen. Mittels geeigneter Schiebungen bringe man homologe Punkte in eines von je dreien der Sechsecke, in welche diese Ebene von den Prismenkanten getheilt wird; dabei wähle man jene, welche mit dem, den ursprünglichen Punkt enthaltenden Sechseck ein symmetrisches System bilden (siehe Fig. 12). Schliesslich führe man zwei Bewegungen einer dreizähligen Schraubung um eine der Prismenaxen aus, indem man die Schiebungscomponente dieser Schraubung gleich der dreifachen Prismenlänge macht.

Dadurch werden entsprechende Punkte in eines von je neun der Prismen gebracht, welche den Raum erfüllen.

Das so erhaltene Punktsystem ist ein Beispiel zu Typus 42 oder zu Typus 43, je nachdem die angewandte Schraubung rechts oder links gewunden ist.

Die Typen 44 und 45 (19 und 20 nach Sohncke) entstehen beziehungsweise aus Typus 42 und 43, als Theilsystem, wenn zwei identische Systeme des betreffenden der beiden genannten Typen hergestellt werden durch eine zweizählige Drehung, deren Axe die Axe eines beliebigen Prismas schneidet und auf einer Fläche desselben senkrecht steht. Diese Drehung bringt die Axen der das Theilsystem enthaltenden Prismen zur Deckung, ändert aber ihre Richtung in die entgegengesetzte um.

Das durch diese Drehung erhaltene Doppelsystem der den Raum erfüllenden Prismen besitzt offenbar die Axen und Deckbewegungen der Typen 42 und 43.

Die Typen 46 und 47 (23 und 24 nach Sohncke) lassen sich bezw. aus den Typen 42 und 43 herstellen, welche als Theilsystem angewendet werden, wenn zwei identische Systeme des betreffenden der beiden genannten Typen hergestellt werden mittels einer zweizähligen Drehung, deren Axe die Axe eines beliebigen Prismas und eine Kante desselben rechtwinklig schneidet.

Diese Drehung bringt die sämmtlichen Axen der das Theilsystem enthaltenden Prismen zur Deckung, verwandelt aber ihre Richtung in die entgegengesetzte und verwechselt die verschiedenen Arten derselben.

Auch in diesem Falle besitzt das Doppelsystem der den Raum erfüllenden Prismen, welches man durch diese Drehung erhält, die Axen und Deckbewegungen der Typen 42 und 43.

Typus 48 (17 nach Sohncke) entsteht entweder aus Typus 42 oder aus Typus 43, als Theilsystem angewendet, wenn drei identische Systeme eines dieser Typen hergestellt werden mittels aufeinander folgender dreizähliger Drehungen um eine Axe, die mit einer Prismenaxe zusammenfällt, d. h. mit einer Axe einer der Arten dreizähliger Schraubenaxen des Theilsystems.

Typus 49 (21 nach Sohncke) entsteht entweder aus Typus 42 oder Typus 43, als Theilsystem angewendet, wenn sechs identische Systeme des einen oder anderen der beiden Typen dadurch hergestellt werden, dass man nach einander die zur Erzeugung der Typen 44 und 45 angewandte zweizählige Drehung und die zur Herstellung des Typus 48 nothwendigen dreizähligen Drehungen ausführt.

Typus 50 (25 nach Sohncke) entsteht entweder aus Typus 42 oder Typus 43, als Theilsystem gebraucht, wenn sechs identische Systeme eines dieser Typen dadurch hergestellt werden, dass man nach einander die zweizählige Drehung, welche zur Bildung der Typen 46 und 47 angewandt wurde, und die dreizähligen Drehungen, welche zur Erzeugung des Typus 48 erforderlich waren, ausführt.

Typus 51 (18 nach Sohncke) entsteht entweder aus Typus 42 oder aus Typus 43, als Theilsystem angewandt, wenn neun identische Systeme eines dieser Typen dadurch hergestellt werden, dass man nach einander ausführt: die zur Erzeugung des Typus 48 nöthigen dreizähligen Drehungen und zwei Bewegungen einer dreizähligen Schraubung, deren Schiebungscomponente die Prismenlänge ist, um eine Axe, welche mit einer beliebigen Prismenkante zusammenfällt. Es entsteht der gleiche Typus, ob nun eine Rechts- oder eine Linksschraubung angewendet wird.

In diesem Falle wird das System der Prismen nach jeder Bewegung zur Deckung gebracht und die Punkte werden in jedes dritte Prisma gelegt.

Typus 52 (22 nach Sohncke) entsteht entweder aus Typus 42 oder aus Typus 43, als Theilsystem angewandt, wenn 18 identische Systeme eines dieser Typen dadurch gebildet werden, dass man nach einander ausführt: die zweizähligen Drehungen, welche die Typen 44 und 45 erzeugen, und die dreizähligen Drehungen und dreizähligen Schraubungen, welche zur Erzeugung des Typus 51 angewendet wurden.

Jedem der elf Sohncke'schen Systeme der trigonalen Gruppe entsprechend giebt es einen mindest-symmetrischen Typus homogener Structur ohne Symmetriecentren und Symmetrieebenen, welcher die gleichen Deckbewegungen wie das Sohncke'sche System besitzt und in welchem daher jede Schaar homologer Punkte ein solches Punktsystem bestimmt.

Von diesen elf Typen homogener Structur haben vier, nämlich jene, deren Punktsysteme vom Typus 42, 43, 48 und 51 sind, die hemimorphe Tetartoëdrie der Classe 20 in Sohncke's Verzeichniss der Krystallclassen *), und die anderen sieben, deren Punktsysteme den Typen 44, 45, 46, 47, 49, 50 und 52 angehören, die trapezoëdrische Tetartoëdrie der Classe 15.

Es mag bemerkt werden, dass ein Punktsystem vom Typus 48 (17 nach Sohncke), für sich betrachtet, eine höhere Symmetrie hat, als jenes der dasselbe enthaltenden, mindest-symmetrischen, homogenen Structur. Es besitzt Symmetrieebenen, welche die Punktebenen schneiden, und hat die Symmetrie der Classe 16.

Die rhombische Systemgruppe.

Die neun Sohncke'schen Systeme, welche rhombische Symmetrie haben, d. s. jene unter II B **) seiner Uebersichtstabelle, bestehen je aus einer endlichen Anzahl mit einander identischer Systeme nach dem Muster eines speciellen Falles von Sohncke's System 3, und jedes der neun Systeme besitzt die Axen und Deckbewegungen der Systeme, aus welchen es besteht.

Genauer:

Typus 53 (6 nach Sohncke) entsteht aus der Ineinanderstellung zweier mit einander identischer Systeme jenes speciellen Falles von Sohncke's System 3, in welchem die Theilraumgitter rechtwinklig sind.

*) Diese Zeitschr. **20**, 463.

**) Wie früher erwähnt, sind System 9 und 13 nach Sohncke vom gleichen Typus.

Typus 54 (System 14 nach Sohncke) besteht gleichfalls aus zwei solchen identischen Systemen.

T. 55 (12 nach Sohncke) besteht ebenfalls aus zwei.

- 56 (5 n. Sohncke)
- 57 (9 - -) besteht aus vier solchen identischen Systemen.
- 58 (11 - -
- 59 (7 - -
- 60 (10 - -) besteht aus acht solchen identischen Systemen.
- 61 (8 - - besteht aus sechszehn solchen Systemen.

Wie gesagt, besitzt in jedem Falle das zusammengesetzte System die Axen und Deckbewegungen aller identischer Theilsysteme.

Diese Sätze können in fast gleicher Weise wie die früheren bewiesen werden.

Um den erwähnten speciellen Fall des Systems 3 zu erhalten, in welchem die Theilraumgitter der Punkte rechtwinklig sind, theile man den Raum in gleiche congruente Parallelepipeda, indem man drei Schaaren äquidistanter paralleler Ebenen legt, welche auf einander senkrecht stehen; die Entfernung der Ebenen jeder Schaar ist verschieden.

Man nehme nun irgendwo in dem Systeme einen Punkt an und lege durch denselben eine Ebene parallel zu den Ebenen einer der drei Schaaren. Mittelst passender Schiebungen bringe man homologe Punkte in eines von je vier der Rechtecke, in welche jene Ebene von den beiden anderen Ebenenschaaren getheilt wird; dabei wähle man jene, welche mit dem den ursprünglichen Punkt enthaltenden Rechtecke ein symmetrisches System bilden. Schliesslich führe man eine zweizählige Schraubung um eine beliebige der Parallelepipedaxen aus, welche senkrecht auf der zuletzt gelegten Ebene stehen, indem man die Schiebungscomponente dieser Schraubung gleich der doppelten Länge eines Parallelepipeds, gemessen in der Richtung der Axe der Schraubung, macht.

Dadurch werden entsprechende Punkte in eines von je acht der den Raum erfüllenden Parallelepipeda gebracht.

Das so erhaltene Punktsystem ist ein Beispiel zum verlangten speciellen Falle des Systems 3.

Typus 53 (6 nach Sohncke) entsteht aus diesem speciellen Falle des Systems 3, als Theilsystem angewendet, wenn zwei identische Theilsysteme von diesem Typus hergestellt werden durch eine zweizählige Drehung um eine Axe senkrecht zu den Axen des Theilsystems, welche so liegt, dass die Ausführung der Drehung jede Art der Axen dieses Systems zur Deckung bringt, während sie die Richtung derselben umkehrt. Zu diesem Zweck muss die neue Axe mitten zwischen benachbarten Ebenen der einen der zwei Schaaren paralleler Ebenen liegen, welche parallel zu den Axen des Theilsystems sind.

Das durch diese Drehung erhaltene Doppelsystem von Parallelepipeden, welche den Raum erfüllen, besitzt die Axen und Deckbewegungen des Theilsystems.

Typus 54 (14 nach Sohncke) entsteht aus demselben Theilsystem wie Typus 53, wenn man zwei identische Theilsysteme dadurch herstellt, dass man eine zweizählige Schraubung um eine zur Axe dieses Systems senkrechte Axe ausführt, welche Axe in einer Ebene der einen oder anderen der beiden zu diesen Axen parallelen Ebenenschaaren liegt. Die Schiebungscomponente der Schraubung ist die Länge eines Parallelepipeds, gemessen in der Richtung der Axe der Schraubung.

Wie im letzten Falle besitzt das durch diese Schraubung erhaltene Doppelsystem der den Raum erfüllenden Parallelepipeda die Axen und Deckbewegungen des Theilsystems.

Typus 55 (12 nach Sohncke) wird ebenfalls aus demselben Theilsystem erzeugt, wenn zwei identische Theilsysteme hergestellt werden durch Anwendung einer der zweizähligen Schraubenaxen, welche zur Erzeugung des Typus 54 gebraucht wurden, als Drehungs-, statt als Schraubenaxe.

Dieselbe Bemerkung, wie die im Falle der Typen 53 und 54 gemachte, gilt auch für das erhaltene Doppelsystem der Parallelepipeda.

Typus 56 (5 nach Sohncke) entsteht aus demselben Theilsystem, wenn vier identische Theilsysteme dadurch hergestellt werden, dass man nach einander ausführt: eine zweizählige Drehung, wie sie zur Erzeugung des Typus 53 angewandt wurde, und eine zweizählige Drehung um eine Axe, welche durch den Mittelpunkt eines beliebigen Parallelepipeds in der Richtung der Axen des Theilsystems gezogen ist.

Typus 57 (9 nach Sohncke) entsteht aus dem gleichen Theilsystem, wenn vier identische Theilsysteme dadurch hergestellt werden, dass man nacheinander ausführt: eine zweizählige Drehung, wie die zur Herstellung des Typus 53 gebrauchte, und eine zweizählige Schraubung um eine in einer Parallelepipedkante gelegene Axe, welche die Richtung der Axen des Theilsystems hat. Die Schiebungscomponente der Schraubung ist die Länge eines Parallelepipeds. Auch eine zur Richtung der Axen des Theilsystems senkrechte Schraubung, welche diese Axen in Lagen bringt, die mitten zwischen ihren ursprünglichen Lagen sich befinden, wird den gleichen Erfolg haben.

Typus 58 (11 nach Sohncke) entsteht aus dem nämlichen Theilsystem, wenn man vier identische Theilsysteme dadurch herstellt, dass man nacheinander ausführt: eine zweizählige Drehung, wie sie zur Erzeugung des Typus 53 nöthig war, und eine zweizählige Drehung um eine der zur Bildung des Typus 57 gebrauchten Schraubenaxen.

Typus 59 (7 nach Sohncke) entsteht aus demselben Theilsystem, wenn acht identische Theilsysteme dadurch hergestellt werden, dass man nacheinander ausführt: die beiden Arten zweizähliger Drehungen, welche Typus 56 erzeugten und eine Bewegung, welche ein Parallelepiped, das einen Punkt des erzeugenden Systems enthält, an die Stelle eines der Parallelepipeda bringt, welche mit demselben eine einzige Kante gemeinsam haben, z. B. eine zweizählige Drehung um eine seiner Kanten als Axe. Oder man kann die acht Theilsysteme erzeugen, wenn man entweder die Bewegungen, welche Typus 57 erzeugten, oder jene, welche Typus 58 ergaben, nach einander ausführt und hierauf noch eine zweizählige Drehung um eine Axe des Theilsystems bewerkstelligt.

Typus 60 (10 nach Sohncke) entsteht aus dem gleichen Theilsysteme, wenn acht identische Theilsysteme dadurch hergestellt werden, dass man nach einander folgende Bewegungen ausführt: die zwei Arten zweizähliger Drehungen, welche zur Erzeugung des Typus 56 angewendet wurden, und eine solche Bewegung, welche ein Parallelepiped, das einen Punkt des Theilsystems enthält, an den Ort eines der Parallelepipeda bringt, welche mit demselben eine einzige Ecke gemein haben. Dies kann geschehen entweder durch eine geeignete Schiebung oder durch eine zweizählige Schraubung.

Typus 61 (8 nach Sohncke) entsteht aus demselben Theilsysteme, wenn sechzehn identische Theilsysteme dadurch hergestellt werden, dass man nach einander folgende Bewegungen ausführt: die zwei Arten zweizähliger Drehungen, welche zur Bildung des Typus 56 nöthig waren, und zwei solche Bewegungen, welche ein Parallelepiped, das einen Punkt des erzeugenden Theilsystems enthält, an den ursprünglichen Ort zweier der Parallelepipeda bringen, welche zwei rechtwinklig zusammenstossende Kanten mit demselben gemein haben; z. B. zwei aufeinander folgende zweizählige Drehungen um irgend zwei seiner Kanten, die nicht zu einander parallel sind, als Axen.

Zu jedem der neun Sohncke'schen Systeme der rhombischen Gruppe giebt es einen entsprechend mindest-symmetrischen Typus homogener Structur ohne Symmetriecentren und Symmetrieebenen, welcher dieselben Deckbewegungen wie das Sohncke'sche Punktsystem besitzt, und in welchem daher jede Schaar homologer Punkte ein solches Punktsystem ergiebt.

Diese neun Typen homogener Structur haben die Hemiëdrie der Classe 7 in Sohncke's Verzeichniss der Krystallclassen*).

Die rechtwinklig-rhomboidisch-prismatische Systemgruppe.

Die drei Sohncke'schen Systeme, welche durch diese Art der Symmetrie charakterisirt sind, d. s. jene unter IIA seiner Uebersichtstabelle, bestehen

*) Diese Zeitschr. **20**, 459.

je aus einer endlichen Anzahl mit einander identischer Systeme nach dem Muster von Sohncke's System 3, und jedes der drei Systeme besitzt die Axen und Deckbewegungen der Systeme, aus welchen es besteht.

Bestimmter ausgedrückt:

Typus 62 = Sohncke's System 3.

Typus 63 (System 2) entsteht aus der Ineinanderstellung von zwei mit einander identischen Systemen nach dem Muster des Typus 62.

Typus 64 (System 4) besteht aus vier solchen identischen Systemen.

Um Typus 62 (3 nach Sohncke) zu erhalten, theile man den Raum in rhomboidische Prismen, indem man drei Schaaren paralleler, äquidistanter Ebenen legt, von denen die eine Schaar die beiden anderen rechtwinklig schneidet.

Man nehme nun irgendwo in diesem Prismensysteme einen Punkt an und lege durch denselben eine Ebene parallel zu der Schaar von Ebenen, welche auf den beiden anderen Schaaren senkrecht steht. Durch passende Schiebungen bringe man homologe Punkte in eines von je vier der Parallelogramme, in welche diese Ebene durch die beiden Ebenenschaaren, welche dieselbe rechtwinklig schneiden, getheilt wird; dabei wähle man jene, welche mit dem Parallelogramm, das den angenommenen Punkt enthält, zusammen ein symmetrisches System bilden. Schliesslich führe man eine zweizählige Schraubung aus um eine Axe eines der Prismen des Systems, indem man die Schiebungscomponente dieser Schraubung gleich der doppelten Länge eines Prismas macht.

Dadurch werden Punkte in eines von je acht Prismen gebracht.

Das so erhaltene Punktsystem ist ein Beispiel zu Typus 62.

Typus 63 (2 nach Sohncke) entsteht aus Typus 62, als Theilsystem angewendet, wenn zwei identische Theilsysteme von diesem Typus mittelst einer zweizähligen Drehung, welche eine beliebige Prismenaxe zur Axe hat, hergestellt werden.

Typus 64 (4 nach Sohncke) lässt sich aus Typus 62, als Theilsystem gebraucht, erzeugen, wenn vier identische Theilsysteme von diesem Typus durch die aufeinander folgende Ausführung folgender Bewegungen hergestellt werden: die zweizählige Drehung, welche zur Erzeugung des Typus 63 erforderlich war, und eine solche Bewegung, welche ein Prisma, das einen Punkt des Theilsystems enthält, an den ursprünglichen Ort eines der Prismen bringt, welche eine Kante einer der Prismenendflächen mit ihm gemeinsam haben. Dies kann entweder durch eine geeignete Schiebung oder durch eine zweizählige Schraubung geschehen.

Zu jedem der drei Sohncke'schen Systeme der rechtwinklig-rhomboidisch-prismatischen Gruppe giebt es einen entsprechenden mindest-symmetrischen Typus homogener Structur, ohne Symmetriecentren und Symmetrieebenen, welcher dieselben Deckbewegungen wie das Sohncke'sche Punktsystem besitzt, und in welchem daher jede Schaar homologer Punkte ein solches Punksystem ergiebt.

Diese drei Typen homogener Structur haben die Hemimorphie der Classe 5 in Sohncke's Verzeichniss der Krystallclassen.

Es mag bemerkt werden, dass alle drei Punktsysteme, für sich allein genommen, eine höhere Symmetrie haben als die sie enthaltenden mindest-symmetrischen homogenen Structuren; sie besitzen Symmetrieebenen, welche die Punktebenen schneiden, und haben die Symmetrie der Classe 3.

Die asymmetrische Systemgruppe.

Nur ein einziges System von Sohncke gehört hierher:

Typus 65 = System 1 nach Sohncke.

Diesem Punktsysteme entsprechend haben wir einen mindest-symmetrischen Typus homogener Structur, ohne Symmetriecentren und Symmetrieebenen, welcher dieselben Deckschiebungen wie das Punktsystem besitzt, und in welchem daher jede Schaar homologer Punkte ein solches Punktsystem bestimmt.

Dieser Typus homogener Structur hat die Hemimorphie der Classe 2 in Sohncke's Verzeichniss der Krystallclassen.

Es mag bemerkt werden, dass das Punktsystem, für sich betrachtet, eine höhere Symmetrie hat als die mindest-symmetrischen, dasselbe enthaltenden homogenen Structuren; es besitzt Symmetriecentren und hat die Symmetrie der Classe 1 in Sohncke's Verzeichniss.

Das Obige vervollständigt den Beweis des Satzes, dass jedes der 65 Sohncke'schen Systeme aus einer endlichen Anzahl des einen oder anderen von zehn Fundamentalsystemen besteht.

Wenn die Sohncke'schen Systeme nach ihren Deckbewegungen in Classen eingetheilt werden, bilden sie, wie wir gesehen, sieben Gruppen; man sieht also, dass alle möglichen homogenen Structuren in diese sieben Classen zerfallen werden, da auch sie durch diese Deckbewegungen charakterisirt sind, nämlich in:

1. Die kubische oder reguläre Gruppe.
2. Die hexagonale Gruppe.
3. Die tetragonale Gruppe.
4. Die trigonale Gruppe.
5. Die rhombische Gruppe.
6. Die rechtwinklig-rhomboidisch-prismatische Gruppe.
7. Die asymmetrische Gruppe.

Das Problem der Eintheilung einer homogenen Structur in gleiche Raumeinheiten ist offenbar ein unbestimmtes, aber die Bedingungen, welchen eine Einheit einer solchen Eintheilung genügen muss, sind augenscheinlich drei und nur drei, das heisst so lange die Structur neben ihrer

Eintheilung nicht auch die Eigenschaft besitzt, mit ihrem eigenen Spiegelbilde*) identisch zu sein.

1. Eine Raumeinheit ist stetig.

2. Sie enthält alle Punktgattungen, d. h. jede Art eines Standpunktes, von welchem aus die Structur betrachtet werden kann.

3. Alle Punkte in ihr sind verschieden, d. h. stehen in anderer Beziehung zur ganzen Structur.

Irgend ein Theil der homogenen Structur, welcher diesen drei Bedingungen genügt, ist eine geometrische Raumeinheit.

Wenn eine Einheit bestimmt ist, wird man die Orte der homologen Einheiten finden, indem man auf dieselbe die Deckbewegungen der Structur anwendet.

Da in jeder Drehaxe sich gleichartige Punkte vereinigen, so ist aus dem eben Gesagten klar, dass, von welcher Art auch die Eintheilung sein mag, eine Raumeinheit eine Drehaxe von jeder der in der Structur vorhandenen Arten besitzen muss und zwar in ihren Grenzflächen liegend; dass ferner kein Theil einer Drehaxe in die Raumeinheit eindringen kann, sondern längs der Grenzen derselben verlaufen muss; dass ferner zwei homologe Grenztheile, welche verschiedenen Raumeinheiten angehören, in jeder zweizähligen Axe zusammentreffen müssen, ebenso drei in jeder dreizähligen, vier in jeder vierzähligen und sechs in jeder sechszähligen Axe**).

Um dies zu illustriren, ist der Schnitt einer möglichen Raumeintheilung einer homogenen Structur ohne Symmetriecentren und Symmetrieaxen beigefügt (Fig. 13), deren homologe Punkte Punktsysteme vom Typus 48 (17 nach Sohncke) bestimmen. Die Schnittebene steht beliebig senkrecht auf den dreizähligen Axen. Die Schnittpunkte der drei Arten dreizähliger Axen sind mit A, B, C bezeichnet.

II. Homogene Structuren, welche mit ihren eigenen Spiegelbildern identisch sind.

Viele homogene Structuren besitzen eine gewisse Symmetrieeigenschaft ausser der oben definirten Eigenschaft der Homogenität. Sie sind, wenn sie als unbegrenzt gedacht werden, mit ihren eigenen Spiegelbildern identisch***).

Der Kugelhaufen, welcher bereits als Beispiel einer homogenen Struc-

---

*) S. S. 3. Vergl. E. von Fedorow in dieser Zeitschr. **20**, 62.

**) Vergl. Krystallsysteme und Krystallstructur von H. Schönflies 1891, S. 573. Wenn die Raumeintheilung an der neuen, auf S. 3 erwähnten Eigenschaft theilnimmt, und die eingetheilte Structur mit ihrem eigenen Spiegelbild identisch sein soll, so wird offenbar die Raumeintheilung eine höhere Symmetrie haben. Siehe S. 59.

***) Vergl. Krystallsysteme und Krystallstructur S. 9.

tur*) angeführt worden, ist ein Beispiel für die Existenz dieser neuen Eigenschaft.

Man wird, wie gesagt, finden, dass dies die einzige Eigenschaft ist, deren Besitz den Grad der Symmetrie einer homogenen Structur steigert; sie erhöht ihn über jenen ihrer Sohncke'schen Punktsysteme.

Es ist klar, dass in irgend einer homogenen mit dieser Eigenschaft begabten Structur jeder Punkt in der Structur einen anderen, ihm entsprechenden Punkt hat, so dass der Anblick der Structur als Ganzes von dem einen Punkte aus zu dem Anblicke vom anderen aus dieselbe Beziehung zeigt, wie sie zwischen der rechten und linken Hand besteht, wofern nicht thatsächlich die Lage des Punktes eine solche ist, dass das von ihm aus erhaltene Bild der Structur mit seinem eigenen Spiegelbilde identisch ist.

Wenn so in dem erwähnten Kugelhaufen ein Punkt auf's Geradewohl angenommen wird, sei es in einer beliebigen Kugel oder in dem Raume zwischen den Kugeln, und durch denselben eine Senkrechte auf eine der Symmetrieebenen der Structur gefällt wird, so entspricht der Punkt auf dieser Senkrechten, welcher die gleiche Entfernung von der Symmetrieebene hat wie der gewählte Punkt, diesem letzteren in der beschriebenen Weise.

Oder wenn in einem Systeme, welches aus gleichen Kugeln besteht, welche mit ihren Mittelpunkten in den Punkten irgend eines Raumgitters liegen, ein Punkt beliebig angenommen und durch denselben und einen Kugelmittelpunkt eine Gerade gezogen wird, so entspricht der Punkt dieser Geraden, welcher auf der einen Seite in der gleichen Entfernung vom Centrum liegt, wie der angenommene Punkt auf der anderen Seite, dem angenommenen Punkte in dieser Weise.

Punkte in derselben Structur, welche so mit einander verwandt sind, werden enantiomorph-ähnliche Punkte genannt werden.

Wenn eine homogene Structur mit ihrem eigenen Spiegelbilde identisch ist, und folglich, wie eben gezeigt, enantiomorph-ähnliche Punkte enthält, so ist klar, dass im Allgemeinen zu jedem regelmässigen unendlichen Punktsysteme, welches durch genau homologe Punkte in der Structur bestimmt wird**), ein ihm entsprechendes anderes, mit ihm enantiomorphes System gehört, welches aus Punkten besteht, die den Punkten des ersteren Systems enantiomorph-ähnlich sind. Die einzige Ausnahme bilden die Punktsysteme, welche eine solche Symmetrie besitzen, dass sie mit ihren Spiegelbildern identisch sind***).

*) Siehe S. 2.

**) Siehe Anmerkung *) auf S. 1.

***) Die Formen vieler Krystalle sind identisch mit ihren eigenen Spiegelbildern, und wo dies der Fall ist, werden die Krystalle, wenn sie, wie gewöhnlich angenommen, Wenn eine homogene Structur in Form und Zusammensetzung mit ihrem eigenen Spiegelbilde identisch ist, so ist klar, dass jede Combination, welche aus irgend einem, durch alle genau gleichartigen Punkte der Structur bestimmten Punktsysteme einer bestimmten Art und dem ihm enantiomorphen Punktsysteme besteht, mit dem Spiegelbilde dieser Combination identisch sein wird.

Ferner kann leicht bewiesen werden, dass die zwei enantiomorphen Systeme Deckbewegungen gemein haben werden, welche einen beliebigen Punkt eines Systems an die Stelle eines beliebigen anderen Punktes desselben Systems zu bringen vermögen.

Denn die Deckbewegungen, welche nöthig sind, um dies in jedem der zwei Systeme zu erreichen, müssen der homogenen, sie enthaltenden Structur angehören, und wenn eine dem einen Systeme wesentliche Deckbewegung nicht auch dem anderen eigen wäre, so würde die Ausführung dieser Bewegung auf Punkte stossen, welche den Punkten des letzteren Systems gleich, aber nicht darin enthalten sind. Und da die Punkte beider Systeme einander Punkt für Punkt entsprechen, so würde dies eine gleiche Erweiterung des anderen Systems in sich begreifen.

Dies widerspricht jedoch unserer Definition, dass das gegebene System aus allen genau gleichen Punkten der Structur von einer gewissen Art besteht.

Die Combination zweier enantiomorpher Sohncke'schen Systeme, welche gemeinschaftliche Deckbewegungen besitzen, ist, wie wir gesehen,

---

homogene Structuren sind, jene enantiomorphen Sohncke'schen Punktsysteme enthalten.

Hieraus kann folgender interessante Schluss betreffs der Krystalle gezogen werden:

Wenn das Sohncke'sche Punktsystem, dessen Punkte Schwerpunkte einer gewissen Atom- oder Molekülart in solch' einem Krystalle bezeichnen, nicht mit seinem eigenen Spiegelbilde identisch ist, so wird ein ihm enantiomorphes Punktsystem die Orte der zu diesen Atomen oder Molekülen enantiomorphen Atome oder Moleküle markiren, und wenn Form und Eigenschaften der letzteren derart sind, dass sie mit ihren eigenen Spiegelbildern identisch sind, so werden die zwei enantiomorphen Punktsysteme beide die Lagen derselben Atom- oder Molekülart markiren.

Es ist wichtig zu bemerken, dass diese Fähigkeit der gleichen Atom- oder Molekülart, Orte zu besetzen, welche nicht genau gleichartig, sondern nur enantiomorph-ähnlich sind, mit der von Bravais und Anderen angenommenen Ansicht übereinstimmt, dass die Stabilität der Lage der kleinsten Theile der Krystalle dem Gleichgewichte der von diesen Elementen herrührenden Anziehungs- und Abstossungskräfte zuzuschreiben ist.

Denn das Spiegelbild eines beliebigen Systems von Kräften im statischen Gleichgewichte um einen Punkt liefert offenbar ein zweites System derselben Kräfte um einen Punkt, welche ebenfalls im Gleichgewichte sind.

Vergleiche mit diesen Schlüssen die Vorstellungen von Schönflies bezüglich der Natur der Krystallmolekeln (s. Krystallsysteme und Krystallstructur, S. 239, 240 u. 616).

eine Combination, wie sie in homogenen Structuren vorhanden ist, die mit ihren eigenen Spiegelbildern identisch sind. Eine solche Combination bildet ein »doppeltes System« des Herrn von Fedorow, und sowohl Schönflies als Fedorow haben die verschiedenen Wege angegeben, wie doppelte Systeme aus den verschiedenen Sohncke'schen Punktsystemen aufgebaut werden können*).

Bezüglich einer erschöpfenden Behandlung dieses Problems wird der Leser auf die Werke dieser beiden Schriftsteller verwiesen; die verschiedenen doppelten Systeme werden jedoch hier aufgezählt werden, und wir werden versuchen, die Beziehungen zwischen diesen Systemen und den homogenen Structuren, in welche sie gehören, zu beleuchten. Es wird festgestellt werden, in welche der 32 Abtheilungen der Krystallformen jeder Typus eines doppelten Systems und der entsprechende Typus homogener Structur gehört.

Es ist klar, dass das System der Deckbewegungen, welche zwei in einer homogenen Structur vorhandenen enantiomorphen Punktsystemen gemein sind, mit seinem eigenen Spiegelbilde identisch sein muss, und dass also kein Sohncke'sches System, dessen System von Deckbewegungen diese Eigenschaft nicht besitzt, mit seinem Spiegelbilde zu einem doppelten Systeme combinirt werden kann, d. h. zu einer Combination zweier enantiomorpher Punktsysteme, wie sie in einer homogenen Structur vorkommen kann.

Wir werden ein doppeltes System aus irgend einem der Sohncke-schen Systeme erhalten, dessen System von Deckbewegungen die eben erwähnte Eigenschaft hat, wenn wir dieses System und das ihm enantiomorphe System in solcher Weise ineinander stellen, dass gleiche Deckbewegungen der zwei Systeme zusammenfallen.

Was die Wege anlangt, auf welchen dies geschehen kann, so sieht man leicht, dass, obgleich in allen Fällen die beiden Systeme Deckbewegungen gemeinschaftlich haben, entsprechende Richtungen, d. h. Richtungen, welche in den zwei so ineinander gestellten Systemen enantiomorph-gleich sind, nicht alle übereinstimmen, so dass, wenn wir die Theile des einen Systems durch geeignete Bezeichnung unterscheiden und die entsprechenden Theile des anderen Systems in gleicher Weise bezeichnen, die Orientirung einer Schiebungsrichtung oder einer Axe im einen Systeme zuweilen die gleiche, zuweilen die entgegengesetzte Orientirung ist, wie die einer entsprechenden Linie des anderen Systems.

Es giebt drei Arten relativer Orientirung von Paaren enantiomor-

*) Vergl. »Zusammenstellung der krystallographischen Resultate des Hrn. Schönflies und der meinigen« von E. von Fedorow in St. Petersburg, diese Zeitschr. **20**, besonders S. 39 und 40.

pher Punktsysteme, welche gemeinschaftliche Deckbewegungen besitzen, nämlich:

a) Die beiden Systeme sind in einigen Fällen in jeder Richtung entgegengesetzt orientirt, so dass jede Schiebungsrichtung oder Axe im einen Systeme die umgekehrte Orientirung hat wie jene einer beliebigen ihr entsprechenden Linie im anderen Systeme.

b) Die beiden Systeme sind in einigen Fällen entgegengesetzt orientirt in Bezug auf Ebenen von gewisser Richtung, so dass die beiden von zwei beliebigen entsprechenden Punkten auf eine gewisse Ebene (Symmetrieebene), welche diese Richtung hat, gefällten Lothe gleich sind, und diese Lothe entweder immer in derselben Geraden liegen oder eine constante Entfernung in constanter Richtung haben, so dass eine gewisse längs dieser Ebene ausgeführte Schiebung der einen Schaar von Lothen, welche aus den Punkten des einen Systems gezogen sind, sie alle genau entgegengesetzt zu den entsprechenden Lothen bringt, welche von den entsprechenden Punkten des enantiomorphen Systems gefällt sind*).

c) Die beiden Systeme sind in einigen wenigen Fällen in einer Richtung entgegengesetzt und in Richtungen, die auf dieser senkrecht stehen, rechtwinklig zu einander orientirt. Dies kann nur da vorkommen, wo das Schnittpunktnetz der Axenschaar quadratisch ist.

In einigen doppelten Systemen ist die Beziehung zwischen den sie zusammensetzenden einfachen Systemen eine solche, dass ihre relative Orientirung entweder als vom Typus a) oder vom Typus b) angesehen werden kann, d. h. sie besitzen sowohl Symmetriecentren als Symmetrieebenen. Wenn dies der Fall ist, so liegt auf der Hand, dass das gegebene System einer Deckbewegung fähig sein muss, welche, indem sie seine Orientirung in der zur ungeänderten Symmetrieebene senkrechten Richtung verlässt, die Orientirung in allen zur Symmetrieebene parallelen Richtungen umkehrt; mit anderen Worten, dasselbe muss entweder zweizählige oder vierzählige oder sechszählige Axen senkrecht zu seinen Symmetrieebenen besitzen.

Und umgekehrt: in allen doppelten Systemen, welche Axen von einer dieser drei Arten enthalten, haben die Paare der einfachen Systeme, wenn sie eine relative Orientirung des ersten dieser zwei Typen haben, gleichzeitig die relative Orientirung des zweiten.

Wenn man die verschiedenen Wege feststellt, auf welchen enantio-

---

*) Der Ausdruck »Symmetrieebenen« ist deshalb hier gebraucht, um das auszudrücken, was Schönflies als »Gleitflächen« oder »Ebenen gleitender Symmetrie« bezeichnet. Der Grund hierfür ist der Umstand, dass die Wirkung der Existenz der letzteren auf die allgemeine Symmetrie, d. h. auf die Symmetrie, welche in die oben erwähnten 32 Classen unterschieden wird, jene der Symmetrieebenen ist, und ferner, dass das Wort »Gleitflächen« schon in einer anderen Beziehung gebraucht wird. Bezüglich einer Definition der Symmetrieebene siehe S. 50.

morphe Sohncke'sche Punktsysteme ineinander gestellt werden können, so dass sie doppelte Systeme bilden, muss Folgendes in Bezug auf enantiomorphe Systeme im Allgemeinen bemerkt werden:

Das Spiegelbild einer Schiebung ist eine gleiche Schiebung.

Das einer Drehung ist eine gleiche Drehung.

Das einer zweizähligen Schraubung ist eine gleiche Schraubung.

Das einer vierzähligen Schraubung ist eine vierzählige Schraubung von entgegengesetzter Windung.

Das einer sechszähligen Schraubung eine Schraubung von entgegengesetzter Windung.

1. Doppelte Systeme, welche Symmetriecentren besitzen, und die Typen homogener Structuren, in welchen sie vorhanden sind.

Wir nehmen zuerst die Art der relativen Orientirung, welche mit a) bezeichnet ist, und machen folgende allgemein gültige Anmerkungen.

Wenn alle Punkte eines beliebigen Sohncke'schen Systems mit irgend einem Punkte im Raume verbunden werden, und jede Verbindungslinie um ihre eigene Länge über diesen Punkt hinaus verlängert wird, so bilden die so erhaltenen Punkte ein Punktsystem, welches dem gegebenen enantiomorph ist. Und die Orientirung des letzteren Systems ist immer dieselbe, welche Lage auch der Punkt haben mag, mit welchem die Punkte des gegebenen Systems verbunden werden, und sie ist derjenigen des gegebenen Systems in jeder Richtung entgegengesetzt. Auch ist die so erhaltene Combination, welche aus den beiden Sohncke'schen Punktsystemen besteht, immer identisch mit ihrem eigenen Spiegelbilde.

Damit jedoch zwei so erhaltene enantiomorphe Systeme eine solche Combination bilden können, wie sie in irgend einer homogenen Structur vorkommen kann, müssen sie, wie wir gesehen, gemeinschaftliche Deckbewegungen haben oder mit anderen Worten, sie müssen ein doppeltes System von Fedorow bilden. Und wenn sie in einer homogenen Structur vorkommen, so ist klar, da die Beziehung der zwei Systeme zur Structur enantiomorph sein muss, dass der Punkt, durch welchen die Linien gezogen sind, ein Symmetriecentrum nicht nur der zwei Systeme, sondern auch der homogenen Structur, in welcher sie zu finden sind, und ein Symmetriecentrum ihres Systems von Axen und Deckbewegungen sein wird*).

Die folgende Tabelle zeigt, welche verschiedenen Typen doppelter Systeme im Besitze von Symmetriecentren aus den Sohncke'schen Punktsystemen ableitbar sind, und giebt in jedem Falle die Lage des Symmetrie-

*) Diese Symmetriecentren entsprechen den »centres de symmétrie« von Bravais (siehe Journal de l'Ecole Polytechnique, cahier XXXIII, p. 92, 94. Paris 1850). Vergl. Fedorow, diese Zeitschr. 1892, 20, 28.

centrums des doppelten Systems bezüglich der Axen oder der Raumeintheilung an, welche in dieser Abhandlung angewandt wurde, um das Sohncke'sche Punktsystem zu erhalten, von welchem es hergeleitet ist.

Um in irgend einem Falle das doppelte System zu erhalten, verbinde man alle Punkte des gegebenen Sohncke'schen Systems mit dem angegebenen Symmetriecentrum, und verlängere jede Verbindungslinie um ihre eigene Länge über das Centrum hinaus; die dadurch erreichten Punkte bilden ein dem gegebenen Sohncke'schen Systeme enantiomorphes Punktsystem und das aus den beiden Sohncke'schen Systemen zusammengesetzte System ist das doppelte System.

Oder man kann dasselbe doppelte System folgendermassen erhalten:

Man verbinde einen beliebigen Punkt des gegebenen Systems mit dem ihm zunächst gelegenen Symmetriecentrum und verlängere die Verbindungslinie um ihre eigene Länge. Indem man nun den so gefundenen Punkt als erzeugenden Punkt gebraucht, führe man die Deckbewegungen des gegebenen Systems aus. Das so erhaltene System ist dem gegebenen enantiomorph, und beide Systeme zusammen bilden das doppelte System.

Tabelle 1 der doppelten Systeme mit Symmetriecentren.

Nr.	Einfaches Sohncke'sches System, aus welchem das doppelte System abgeleitet ist	Lage eines Symmetriecentrums des doppelten Systems
		Kubische Gruppe.
$1a_1$	Typus 1 (58 nach Sohncke)	In einer der Würfelecken oder einem der Würfelmittelpunkte der Raumtheilung*).
$2a_1$	2 (57 n. Sohncke)	Ebenso.
	3 u. 4 (65 u. 66 nach Sohncke)	In diesem Falle ist kein doppeltes System ableitbar.
$5a_1$	5 (62 n. Sohncke)	In einer der Würfelecken oder einem der Würfelmittelpunkte der einen oder anderen Raumtheilung**).
$6a_1$	6 (55 n. Sohncke)	Ebenso.
$6a_2$	-	Auf einer dreizähligen Axe mitten zwischen Mittelpunkt und Ecke eines Würfels der Eintheilungen.
$7a_1$	7 (54 n. Sohncke)	Wie in Typus $5a_1$.
$7a_2$	-	Wie in Typus $6a_2$.
$8a_1$	8 (60 n. Sohncke)	In einer Würfelecke der einen Raumtheilung***).
$8a_2$	-	In einem Würfelmittelpunkte derselben Raumtheilung.

*) Siehe S. 7.

**) Siehe S. 7 und 11.

***) Die Würfelecken der einen Raumtheilung sind natürlich die Würfelcentren der anderen Raumtheilung.

Nr.	Einfaches Sohncke'sches System, aus welchem das doppelte System abgeleitet ist	Lage eines Symmetriecentrums des doppelten Systems
$9a_1$	Typus 9 (63 n. Sohncke)	Auf einer dreizähligen Axe, wo sie von einer zweizähligen Axe geschnitten wird.
$9a_2$	-	Auf einer dreizähligen Axe mitten zwischen zwei aufeinander folgenden Symmetriecentren des Typus $9a_1$.
$10a_1$	10 (56 n. Sohncke)	In einer Würfelecke oder einem Würfelmittelpunkte oder auf einer dreizähligen Axe mitten zwischen Mittelpunkt und Ecke eines beliebigen Würfels.
$11a_1$	11 (64 n. Sohncke)	Wie in Typus $5a_1$.
$11a_2$	-	- - - $6a_2$.
$12a_1$	12 (59 n. Sohncke)	- - - $5a_1$.
$12a_2$	-	- - - $6a_2$.
$13a_1$	13 (61 n. Sohncke)	- - - $10a_1$.

Hexagonale Gruppe.

Die Typen 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21 und 22 (42, 43, 44, 45, 48, 49, 50 und 51 nach Sohncke) liefern kein doppeltes System.

$20a_1$	Typ. 20 (46 n. Sohncke)	Irgendwo auf einer sechszähligen Axe.
$23a_1$	23 (47 n. Sohncke)	Irgendwo auf einer sechszähligen Axe.
$24a_1$	24 (52 n. Sohncke)	Auf einer sechszähligen Axe in ihrem Schnittpunkte mit einer zweizähligen Axe.
$24a_2$	-	Auf einer sechszähligen Axe mitten zwischen zwei aufeinander folgenden Symmetriecentren des Typus $24a_1$.
$25a_1$	25 (53 n. Sohncke)	Wie in Typus $24a_1$.
$25a_2$	-	- - - $24a_2$.

Tetragonale Gruppe.

Die Typen 26 und 27 (26 und 27 nach Sohncke) liefern kein doppeltes System.

$28a_1$	Typ. 28 (28 n. Sohncke)	Irgendwo auf einer Geraden, welche mitten zwischen zwei nächsten vierzähligen Axen von entgegengesetzter Windung verläuft.
$29a_1$	29 (29 n. Sohncke)	Irgendwo auf einer vierzähligen Axe.
$29a_2$	-	Irgendwo auf einer Geraden, die mitten zwischen zwei nächsten vierzähligen Axen verschiedener Gattungen gezogen ist.

Die Typen 30, 31, 32 und 33 (32, 33, 38 und 39 nach Sohncke) liefern kein doppeltes System.

$34a_1$	Typ. 34 (30 n. Sohncke)	Irgendwo auf einer vierzähligen Axe.
$34a_2$	-	Wie in Typus $29a_2$.
$35a_1$	35 (34 n. Sohncke)	Auf einer mitten zwischen zwei nächsten vierzähligen Axen von entgegengesetzten Windungen gezogenen Geraden in einem Punkte, wo sie eine zweizählige Axe schneidet.
$35a_2$	-	Auf derselben Geraden mitten zwischen zwei nächsten Symmetriecentren des Typus $35a_1$.

Nr.	Einfaches Sohncke'sches System, aus welchem das doppelte System abgeleitet ist	Lage eines Symmetriecentrums des doppelten Systems
36 a_1	Typus 36 (35 n. Sohncke)	Auf einer vierzähligen Axe in ihrem Schnittpunkte mit einer der zweizähligen Axen, welche vierzählige Axen verschiedener Arten schneidet.
36 a_2	-	Auf einer vierzähligen Axe mitten zwischen zwei nächsten Symmetriecentren des Typus 36 a_1.
36 a_3	-	Auf einer Geraden, welche mitten zwischen zwei nächsten vierzähligen Axen verschiedener Arten verläuft, in einem Punkte, wo sie eine zweizählige Axe schneidet.
36 a_4	-	Auf derselben Geraden mitten zwischen zwei nächsten Symmetriecentren des Typus 36 a_3.
37 a_1	37 (40 n. Sohncke)	Auf einer vierzähligen Axe, wo sie eine Querebene trifft, die zweizählige Axen enthält.
37 a_2	-	Auf einer vierzähligen Axe mitten zwischen zwei nächsten Symmetriecentren des Typus 37 a_1.
37 a_3	-	Auf einer Geraden, welche mitten zwischen zwei nächsten vierzähligen Axen von entgegengesetzter Orientirung verläuft, in einem Punkte, wo sie eine zweizählige Axe schneidet.
37 a_4	-	Auf derselben Geraden mitten zwischen zwei nächsten Symmetriecentren des Typus 37 a_3.
38 a_1	38 (31 n. Sohncke)	Irgendwo auf einer vierzähligen Drehaxe.
39 a_1	39 (36 n. Sohncke)	Wie in Typus 36 a_1.
39 a_2	-	- - - 36 a_2.
39 a_3	-	- - - 36 a_3.
39 a_4	-	- - - 36 a_4.
40 a_1	40 (41 n. Sohncke)	- - - 37 a_1.
40 a_2	-	- - - 37 a_2.
40 a_3	-	- - - 37 a_3.
40 a_4	-	- - - 37 a_4.
41 a_1	41 (37 n. Sohncke)	Auf einer vierzähligen Axe in ihrem Schnittpunkte mit einer zweizähligen Axe.
41 a_2	-	Auf einer vierzähligen Axe mitten zwischen zwei nächsten Symmetriecentren des Typus 41 a_1.

Trigonale Gruppe.

Die Typen 42, 43, 44, 45, 46 und 47 (15, 16, 19, 20, 23 und 24 nach Sohncke) liefern kein doppeltes System.

48 a_1	Typ. 48 (17 n. Sohncke)	Irgendwo auf einer dreizähligen Axe irgend einer der drei Arten.
49 a_1	49 (21 n. Sohncke)	Auf einer dreizähligen Axe in ihrem Schnittpunkte mit einer zweizähligen Axe.
49 a_2	-	Auf einer dreizähligen Axe mitten zwischen zwei nächsten Symmetriecentren des Typus 49 a_1.
50 a_1	50 (25 n. Sohncke)	Wie in Typus 49 a_1.
50 a_2	-	- - - 49 a_2.

Nr.	Einfaches Sohncke'sches System, aus welchem das doppelte System abgeleitet ist	Lage eines Symmetriecentrums des doppelten Systems
51 a_1	Typus 51 (18 n. Sohncke)	Irgendwo auf einer dreizähligen Drehaxe.
52 a_1	52 (22 n. Sohncke)	Auf einer dreizähligen Drehaxe in ihrem Schnittpunkte mit einer zweizähligen Axe.
52 a_2	-	Auf einer dreizähligen Drehaxe mitten zwischen zwei nächsten Symmetriecentren des Typ. 52 a_1.

Rhombische Gruppe.

Nr.	Einfaches Sohncke'sches System, aus welchem das doppelte System abgeleitet ist	Lage eines Symmetriecentrums des doppelten Systems
53 a_1	Typ. 53 (6 nach Sohncke)	Auf einer zweizähligen Schraubenaxe irgend einer Art in ihrem Schnittpunkte mit einer auf ihr senkrechten zweizähligen Drehaxe.
53 a_2	-	Auf einer Linie, welche mitten zwischen zwei nächsten zweizähligen Schraubenaxen verschiedener Arten gezogen ist, im Schnittpunkte mit einer auf ihr senkrechten Axe.
53 a_3	-	Auf derselben Linie mitten zwischen zwei nächsten Symmetriecentren des Typus 53 a_2.
53 a_4	-	Auf einer Geraden, welche mitten zwischen zwei Schraubenaxen von verschiedenen Arten verläuft, welche einander diagonal nächstbenachbart sind, im Schnittpunkte dieser Geraden mit einer auf ihr senkrechten Ebene, welche zweizählige Axen enthält.
54 a_1	54 (14 n. Sohncke)	Ein Punkt mitten zwischen zwei nächstbenachbarten Axen in allen drei zu einander senkrechten Richtungen.
54 a_2	-	Auf einer Axe in ihrem Schnittpunkte mit einer auf ihr senkrechten Ebene, welche andere Axen enthält.
55 a_1	55 (12 n. Sohncke)	Der Schnittpunkt zweier Schraubenaxen.
55 a_2	-	Auf einer Schraubenaxe mitten zwischen zwei aufeinander folgenden Symmetriecentren von 55 a_1.
55 a_3	-	Auf einer Drehaxe in einer zu ihr senkrechten Ebene, welche Schraubenaxen enthält.
55 a_4	-	Auf einer Drehaxe mitten zwischen Symmetriecentren des Typus 55 a_3.
55 a_5	-	So gelegen, dass es gleichzeitig mitten zwischen Symmetriecentren des Typus 55 a_2 und auch zwischen jenen von 55 a_4 sich befindet.
55 a_6	-	So gelegen, dass es gleichzeitig mitten zwischen Symmetriecentren des Typus 55 a_1 und auch zwischen jenen von 55 a_5 sich befindet.
56 a_1	56 (5 nach Sohncke)	Der Schnittpunkt dreier Drehaxen.
56 a_2	-	Auf einer Drehaxe mitten zwischen zwei aufeinander folgenden Symmetriecentren von 56 a_1.
56 a_3	-	Im Mittelpunkte eines der Parallelepipeda, welche von den Drehaxen umsäumt werden.

Nr.	Einfaches Sohncke'sches System, aus welchem das doppelte System abgeleitet ist	Lage eines Symmetriecentrums des doppelten Systems
56 a_4	Typus 56 (5 nach Sohncke)	So gelegen, dass es gleichzeitig mitten zwischen Symmetriecentren von 56 a_2 und zwischen jenen von 56 a_3 sich befindet.
57 a_1	57 (9 n. Sohncke)	Der Schnittpunkt einer Schrauben- und einer Drehaxe.
57 a_2	-	Auf einer Linie mitten zwischen zwei nächsten Schraubenaxen von verschiedenen Arten, in ihrem Schnittpunkte mit einer Drehaxe.
58 a_1	58 (11 n. Sohncke)	Der Schnittpunkt einer Schrauben- und einer Drehaxe.
58 a_2	-	Wie in Typus 57 a_2.
59 a_1	59 (7 nach Sohncke)	Der Schnittpunkt dreier Drehaxen.
59 a_2	-	Auf einer zweizähligen Axe senkrecht zur Ebene von Sohncke's Fig. 7, Taf. 1 mitten zwischen zwei aufeinander folgenden Symmetriecentren des Typus 59 a_1.
59 a_3	-	Auf einer Geraden mitten zwischen zwei der letztgenannten Axen, im Schnittpunkte derselben mit einer auf ihnen senkrechten zweizähligen Axe.
59 a_4	-	Auf der gleichen Geraden mitten zwischen zwei aufeinander folgenden Symmetriecentren des Typus 59 a_3.
60 a_1	60 (10 n. Sohncke)	Der Schnittpunkt dreier Drehaxen.
60 a_2	-	Auf einer zweizähligen Drehaxe mitten zwischen zwei benachbarten Schnittpunkten von zweizähligen Axen verschiedener Art mit derselben.
61 a_1	61 (8 n. Sohncke)	Der Schnittpunkt dreier Drehaxen.
61 a_2	-	Im Halbirungspunkte einer Geraden, welche diagonal zwei nächste Symmetriecentren vom Typus 61 a_1 von verschiedener Art verbindet.

Rechtwinklig-rhomboidisch-prismatische Gruppe.

62 a_1	Typ. 62 (3 nach Sohncke)	Irgendwo auf einer beliebigen Axe.
62 a_2	-	Irgendwo auf einer Geraden mitten zwischen aufeinander folgenden Axen verschiedener Art.
63 a_1	63 (2 n. Sohncke)	Wie in Typus 62 a_1.
63 a_2	-	- - - 62 a_2.
64 a_1	64 (4 n. Sohncke)	Irgendwo auf einer beliebigen Dreh- oder Schraubenaxe.
64 a_2	-	Irgendwo auf einer Geraden mitten zwischen aufeinander folgenden Drehaxen verschiedener Art.

Asymmetrische Gruppe.

65 a_1	65 (1 n. Sohncke)	Ein beliebiger Punkt im Raume.

Jedem solchen Typus eines doppelten Systems entsprechend giebt es einen Typus homogener Structur, welcher mit seinem eigenen Spiegelbilde identisch ist, dessen enantiomorphe Punktsysteme unendlich viele doppelte Systeme von diesem Typus bilden und welcher sowohl Symmetriecentren als Deckbewegungen mit diesen doppelten Systemen gemein hat.

Von den 17 so erhaltenen Typen homogener Structur der kubischen Gruppe mit Symmetriecentren zeigen sieben, nämlich jene, deren Punktsysteme von den Typen 1, 2, 6, 7 und 10 sind, die dodekaëdrische Hemiëdrie der Classe 31 in Sohncke's Verzeichniss der Krystallclassen, und die übrigen zehn die Holoëdrie der Classe 28 *).

Von den sechs Typen homogener Structur der hexagonalen Gruppe mit Symmetriecentren stellen jene zwei, deren Punktsysteme den Typen 20 und 23 angehören, die bipyramidale Hemiëdrie der Classe 11 in Sohncke's Verzeichniss dar und die übrigen vier die Holoëdrie der Classe 9.

Von den 26 Typen der tetragonalen Gruppe zeigen jene sechs, deren Punktsysteme den Typen 28, 29, 34 und 38 angehören, die bipyramidale Hemiëdrie der Classe 23, die übrigen 20 die Holoëdrie der Classe 21 in Sohncke's Verzeichniss.

Von den acht Typen der trigonalen Gruppe zeigen zwei, nämlich jene, deren Punktsysteme den Typen 48 und 51 angehören, die rhomboëdrische Tetartoëdrie der Classe 14, die übrigen sechs die skalenoëdrische Hemiëdrie der Classe 12.

Alle 28 Typen der rhombischen Gruppe zeigen die Holoëdrie der Classe 6.

Alle sechs Typen der rechtwinklig-rhomboidisch-prismatischen Gruppe zeigen die Holoëdrie der Classe 3.

Der einzige asymmetrische Typus mit Symmetriecentren hat die Holoëdrie der Classe 1.

Diese sämmtlichen 92 Typen homogener Structur, welche Symmetriecentren enthalten, zeigen holomorphe Symmetrie, alle anderen Typen homogener Structur sind hemimorph **).

Hinsichtlich aller Gruppen wird, wie oben festgestellt wurde ***), eine homogene Structur oder ein doppeltes System, welche sowohl Symmetriecentren als auch zweizählige, vierzählige oder sechszählige Axen besitzt, Symmetrieebenen †) haben rechtwinklig zu diesen Axen.

---

*) Siehe diese Zeitschr. **20**, 59 u. 60 und **20**, 467 u. 466.

**) Bezüglich einer Definition der Hemimorphie siehe Groth's Physikalische Krystallographie, S. 228.

***) Siehe S. 42.

†) Dieser Ausdruck ist hier im erweiterten Sinne gebraucht; s. Anmerk. *) S. 42.

2. Doppelte Systeme, welche Symmetrieebenen, aber keine Symmetriecentren besitzen, und die Typen homogener Structuren, in welchen sie vorkommen.

Bezüglich der doppelten Systeme und homogenen Structuren, deren entsprechende einfache Systeme die als b) bezeichnete relative Orientirung, nicht aber die als a)*) bezeichnete haben, ist Folgendes allgemein gültig:

Die Symmetrieebenen, welche die so charakterisirten Systeme und Structuren besitzen, können folgendermassen definirt werden:

Eine Symmetrieebene ist eine Ebene, welche eine homogene Structur so theilt, dass der Theil der Structur, welcher auf der einen Seite der Ebene liegt, dem auf der anderen Seite enantiomorph ist, während gleichzeitig der Winkel, welchen irgend eine lineare oder ebene Richtung **) der Structur mit irgend einer ihr enantiomorph-ähnlichen Richtung einschliesst, in allen Fällen von der Richtung der Symmetrieebene***) halbirt wird.

Denn nach dieser Definition können enantiomorph-ähnliche Punkte auf entgegengesetzten Seiten der Symmetriecentren einander entweder direct entgegengesetzt sein oder es auch nicht sein. Und wenn sie es nicht sind, und wenn von einem beliebigen Punkte in der Structur und ebenso von dem ihm entsprechenden enantiomorph-ähnlichen Punkte auf der entgegengesetzten Seite der Symmetrieebene Senkrechte auf die letztere gefällt und ihre Fusspunkte vereinigt werden, so sind die beiden Lothe einander gleich und die Verbindungslinie hat dieselbe Länge und Richtung, wo auch immer der gewählte Punkt in der Structur liegen mag. Und daher haben die enantiomorphen Systeme die mit b) bezeichnete relative Orientirung.

Was ferner die Art der Schiebung der auf der einen Seite der Symmetrieebene liegenden halben Structur betrifft, welche enantiomorph-ähnliche Punkte einander gegenüberstellen soll, wenn sie sich nicht schon gegenüberstehen, so bemerken wir Folgendes:

Das Spiegelbild einer Schiebung ist eine gleiche Schiebung. Wenn also eine gewisse Schiebung einen Punkt auf der einen Seite der Ebene an einen Ort bringt, so dass er dem ihm enantiomorph-ähnlichen Punkte auf der anderen Seite gegenüber liegt, so wird eine gleiche Schiebung der letzteren in der gleichen Richtung ihn einem entsprechenden Punkte gegenüber bringen. Beide Schiebungen zusammen müssen daher eine Schiebung

---

*) Siehe S. 42.

**) Z. B. eine Punktebene irgend eines Punktsystems der Structur.

***) Siehe Anmerk. *) S. 42. Vergl. Physikalische Krystallographie von P. Groth 1885, S. 214 und Naumann-Zirkel, Elemente der Mineralogie 1885, S. 11.

Dieselbe Definition gilt für Symmetrieebenen von Structuren, welche auch Symmetriecentren besitzen.

der homogenen Structur ausmachen. Mit anderen Worten: Die Schiebung, welche nöthig ist, ein einfaches System dem anderen, auf der anderen Seite der Symmetrieebene gelegenen, gegenüber zu stellen, ist immer die Hälfte einer Schiebung der homogenen Structur.

Die folgende Tabelle giebt an, welche verschiedenen Typen doppelter Systeme, die Symmetrieebenen, aber nicht Symmetriecentren besitzen, von den Sohncke'schen Punktsystemen ableitbar sind, und sie giebt in jedem Falle die Lage einer Symmetrieebene des doppelten Systems in Bezug auf die Axen an, und in Fällen, wo enantiomorph-ähnliche Punkte nicht entgegengesetzt sind, zeigt sie die Schiebung, welche ein einfaches System erfahren müsste, um entsprechende Punkte der beiden einfachen Systeme auf beiden Seiten der Symmetrieebene einander gegenüber zu stellen.

Um in irgend einem Falle das doppelte System zu erhalten, fälle man von jedem Punkte des gegebenen Sohncke'schen Systems eine Senkrechte auf die Symmetrieebene, und verlängere sie, bis die Länge derselben nach der anderen Seite der Symmetrieebene gleich der Länge auf der ersten Seite ist.

Wenn die enantiomorph-ähnlichen Punkte einander gegenüberliegen auf beiden Seiten der Symmetrieebene, so bilden die dadurch erlangten Punkte ein dem gegebenen Systeme enantiomorphes System mit den gleichen Deckbewegungen, und beide Systeme zusammen werden das doppelte System bilden.

Wenn jedoch eine Schiebung des einen einfachen Systems nothwendig ist, um die enantiomorph-ähnlichen Punkte einander gegenüber zu stellen, dann müssen die Theile der Senkrechten, welche über die Symmetrieebene hinaus verlängert sind, dieser Schiebung unterworfen werden.

Wenn dies geschehen, werden die Endpunkte der verschobenen Senkrechten die Lagen der Punkte des dem gegebenen Systeme enantiomorphen Systems bezeichnen, und beide Systeme zusammen werden das doppelte System bilden.

Oder es kann, wie früher, das doppelte System erhalten werden, indem man zuerst einen einzigen Punkt des enantiomorphen Systems bestimmt und dann die Lagen der anderen Punkte dadurch ermittelt, dass man die Deckbewegungen des gegebenen Sohncke'schen Systems dem einzigen zuerst erhaltenen Punkte ertheilt, den man als erzeugenden Punkt gebraucht.

Tabelle 2 der doppelten Systeme mit Symmetrieebenen, aber ohne Symmetriecentren.

Nr.	Einfaches Sohncke'sches System, von welchem das doppelte System abgeleitet ist	Lage einer Symmetrieebene des doppelten Systems	Schiebung, wenn eine erforderlich ist, die enantiomorphen Systeme auf beiden Seiten der Symmetrieebene einander gegenüberzustellen *)
	Kubische Gruppe.		
	Typus 1 (58 nach Sohncke) liefert kein doppeltes System ausser jenem in Tabelle 1.		
$2b_1$	Typus 2 (57 n. Sohncke)	Senkrecht auf einer Würfelfläche und eine dreizählige Axe enthaltend.	Eine halbe Schiebung längs der dreizähligen Axe.
	Die Typen 3 und 4 (65 und 66 nach Sohncke) liefern kein doppeltes System.		
	Typus 5 (62 nach Sohncke) liefert kein doppeltes System ausser jenem in Tab. 1.		
$6b_1$	Typus 6 (55 n. Sohncke)	Senkrecht auf einer Würfelfläche und eine dreizählige Axe enthaltend.	Keine.
$6b_2$	-	-	Eine halbe Schiebung längs dieser Axe.
$7b_1$	- 7 (54 n. Sohncke)	-	Keine.
$7b_2$	-	-	Eine halbe Schiebung längs dieser Axe.
	Die Typen 8, 9, 11, 12 und 13 (60, 63, 64, 59 und 61 nach Sohncke) liefern kein doppeltes System ausser jenen in Tab. 1.		
$10b_1$	Typ. 10 (56 n. Sohncke)	Senkrecht auf einer Würfelfläche und eine dreizählige Axe enthaltend.	Keine.
	Hexagonale Gruppe.		
	Die Typen 14, 15, 16, 17, 18 und 19 (42, 43, 44, 45, 48 und 49 nach Sohncke) liefern kein doppeltes System.		
$20b_1$	Typ. 20 (46 n. Sohncke)	So gelegt, dass sie nächste sechszählige Axen	Keine.
		oder übernächste Axen enthält.	Eine halbe Schiebung längs der sechszähligen Axen.
$20b_2$	-	So gelegt, dass sie nächste sechszählige Axen enthält	Eine halbe Schiebung längs dieser Axen.
		oder übernächste Axen.	Keine.
	Die Typen 21 und 22 (50 und 51 nach Sohncke) liefern kein doppeltes System.		
$23b_1$	Typ. 23 (47 n. Sohncke)	Durch nächste sechszählige Axen gelegt.	Keine.
$23b_2$	-	-	Eine halbe Schiebung längs dieser Axen.
	Die Typen 24 und 25 (52 und 53 naach Sohncke) liefern kein doppeltes System ausser jenen in Tabelle 1.		

*) Diese Schiebungen sind in allen Fällen in Termen der Schiebungen des gegebenen Sohncke'schen Systems gegeben (siehe S. 50).

Nr.	Einfaches Sohncke'sches System, von welchem das doppelte System abgeleitet ist	Lage einer Symmetrieebene des doppelten Systems	Schiebung, wenn eine erforderlich ist, die enantiomorphen Systeme auf beiden Seiten der Symmetrieebene einander gegenüberzustellen

Tetragonale Gruppe.

Die Typen 26 und 27 (26 und 27 nach Sohncke) liefern kein doppeltes System.

$28\,b_1$	Typ. 28 (28 n. Sohncke)	Mitten zwischen zwei nächsten vierzähligen Axen von entgegengesetzter Windung und senkrecht auf der Ebene derselben.	Keine.
$28\,b_2$	-	-	Eine halbe Schiebung längs einer vierzähligen Axe.
$29\,b_1$	- 29 (29 n. Sohncke)	Durch nächste vierzählige Axen der zwei Arten gelegt.	Keine.
$29\,b_2$	-	-	Eine halbe Schiebung längs einer vierzähligen Axe.
$29\,b_3$	-	Mitten zwischen nächsten Symmetrieebenen von $29\,b_1$ hindurchgehend.	Keine.
$29\,b_4$	-	-	Eine halbe Schiebung längs einer vierzähligen Axe.

Die Typen 30, 31, 32 und 33 (32, 33, 38 und 39 nach Sohncke) liefern kein doppeltes System.

$34\,b_1$	Typ. 34 (30 n. Sohncke)	Wie im Falle des Typus $29\,b_1$.	
$34\,b_2$	-	- $29\,b_2$.	
$34\,b_3$	-	- $29\,b_3$.	
$34\,b_4$	-	- $29\,b_4$.	

Die Typen 35, 36, 37, 39, 40 und 41 (34, 35, 40, 36, 41 und 37 nach Sohncke) liefern keine doppelten Systeme ausser jenen in Tabelle 1.

$38\,b_1$	Typ. 38 (31 n. Sohncke)	Durch nächste vierzählige Axen gelegt.	Keine.
$38\,b_2$	-	-	Eine halbe Schiebung längs einer vierzähligen Axe.

Die Typen 53, 54 und 55 (6, 14 und 12 nach Sohncke), welche so specialisirt sind, dass die Axen in einer Richtung eine tetragonale Anordnung haben, liefern keine doppelten Systeme ausser jenen in Tabelle 1.

$56\,\beta_1$	Typ. 56 (5 n. Sohncke) so specialisirt	So gelegen, dass sie Axen der tetragonal angegeordneten Schaar enthält, und die übrigen zwei Schaaren auf einander senkrechter Axen unter Winkeln von 45^0 schneidet.	Keine.

Nr.	Einfaches Sohncke'sches System, von welchem das doppelte System abgeleitet ist	Lage einer Symmetrieebene des doppelten Systems	Schiebung, wenn eine erforderlich ist, die enantiomorphen Systeme auf beiden Seiten der Symmetrieebene einander gegenüberzustellen
$56\beta_2$	Typus 56 (5 n. Sohncke) so specialisirt	So gelegen, dass sie Axen der tetragonal etc. wie vorher.	Eine halbe Schiebung längs der tetragonal angeordneten Axen.
$56\beta_3$	-	-	Eine halbe transverse Schiebung längs der Symmetrieebene.
$56\beta_4$	-	-	Die Resultirende der letzten zwei Schiebungen.

Die Typen 57 und 58 (9 und 11 nach Sohncke) liefern, so specialisirt, kein doppeltes System ausser jenen in Tabelle 1.

$59\beta_1$	Typ. 59 (7 n. Sohncke) so specialisirt; die tetragonal angeordneten Axen sind die horizontal. Axen in Sohncke's Figur.	So gelegen, dass sie Axen der tetragonal angeordneten Schaar enthält und die Axen der beiden anderen Richtungen unter Winkeln von 45^0 schneidet.	Keine.
$59\beta_2$	-	-	$\frac{1}{2}$ Schiebung längs der tetragonal angeordneten Axen.
$59\beta_3$	-	Mitten zwischen zwei aufeinander folgenden Ebenen von verschiedener Art der letzten Angabe.	$\frac{1}{2}$ Schiebung längs einer Querrichtung parallel zur Symmetrieebene.
$59\beta_4$	-	-	Die Resultirende der letzten zwei Schiebungen.
$60\beta_1$	- 60 (10 n. Sohncke) so specialisirt	Wie in Typus $59\beta_1$.	Keine.
$60\beta_2$	-	-	$\frac{1}{2}$ Schiebung längs der tetragonal angeordneten Axen.
$61\beta_1$	- 61 (8 n. Sohncke) so specialisirt	-	Keine.
$61\beta_2$	-	-	Wie im Typus $60\beta_2$.

Trigonale Gruppe.

Die Typen 42, 43, 44, 45, 46 und 47 (15, 16, 19, 20, 23 und 24 nach Sohncke) liefern kein doppeltes System.

$48b_1$	Typ. 48 (17 n. Sohncke)	Durch nächste dreizählige Axen derselben Art gelegt.	Keine.
$48b_2$	-	-	$\frac{1}{2}$ Schiebung längs einer dreizähl. Axe.

Nr.	Einfaches Sohncke'sches System, von welchem das doppelte System abgeleitet ist	Lage einer Symmetrieebene des doppelten Systems	Schiebung, wenn eine erforderlich ist, die enantiomorphen Systeme auf beiden Seiten der Symmetrieebene einander gegenüberzustellen
$48\,b_3$	Typus 48 (17 n. Sohncke)	Durch übernächste gleiche Axen gelegt.	Keine.
$48\,b_4$	-	-	Wie in Typus $48\,b_2$.
$48\,b_5$	-	Senkrecht zu den dreizähligen Axen.	Keine.
$49\,b_1$	- 49 (21 n. Sohncke)	Senkrecht zu dreizähligen Axen und zweizählige Axen enthaltend.	Keine.
$49\,b_2$	-	Senkrecht zu dreizähligen Axen und mitten zwischen zweizähligen Axen verschiedener Art gelegen.	Keine.
$50\,b_1$	- 50 (25 n. Sohncke)	Wie in $49\,b_1$.	Keine.
$50\,b_2$	-	- - $49\,b_2$.	Keine.
$51\,b_1$	- 51 (18 n. Sohncke)	Durch nächste dreizählige Drehaxen gelegt.	Keine.
$51\,b_2$	-	-	$\frac{1}{2}$ Schiebung längs einer dreizähligen Axe.

Typus 52 (22 nach Sohncke) liefert kein doppeltes System ausser jenen in Tabelle 1.

Rhombische Gruppe.

$56\,B_1$	Typ. 63 (2 n. Sohncke) so specialisirt, dass seine Axen wie in Typus 56 (5 n. Sohncke) liegen.	Durch nächste Axen gelegt.	Keine.
$56\,B_2$	-	-	$\frac{1}{2}$ Schiebung längs der Axen.
$56\,B_3$	-	Mitten zwischen zwei aufeinander folgende, zuletzt beschriebene Ebenen verschiedener Art.	Keine.
$56\,B_4$	-	-	$\frac{1}{2}$ Schiebung längs der Axen.
$56\,B_5$	-	-	$\frac{1}{2}$ Querschiebung längs der Symmetrieebene.
$56\,B_6$	-	-	Die Resultirende der zwei zuletzt genannten.
$59\,B_1$	Typus 63 (2 n. Sohncke) so specialisirt, dass seine Axen wie die transversen, horizontalen Axen in Typus 59 (7 n. Sohncke) liegen.	Wie in $56\,B_1$ gelegt, so dass sie die Axen des einen oder des anderen der beiden vorhandenen Axenpaare enthält.	Keine.

Nr.	Einfaches Sohncke'sches System, von welchem das doppelte System abgeleitet ist	Lage einer Symmetrieebene des doppelten Systems	Schiebung, wenn eine erforderlich ist, die enantiomorphen Systeme auf beiden Seiten der Symmetrieebene einander gegenüberzustellen
59 B_2	Typus 63 (2 n. Sohncke) etc. wie vorher.	Wie in 56 B_1 gelegt etc. wie vorher.	$\frac{1}{2}$ Schiebung längs der Axen.
53 B_1	Typus 62 (3 n. Sohncke) so specialisirt, dass seine Axen wie die des Typ. 53 (6 n. Sohncke) liegen.	Wie in 56 B_1.	Keine.
53 B_2	-	Wie in 56 B_3.	Keine.
53 B_3	-	-	$\frac{1}{2}$ Schiebung längs der Axen.
53 B_4	-	-	$\frac{1}{2}$ Querschiebung längs der Symmetrieebene.
57 B_1	Typus 62 (3 n. Sohncke) so specialisirt, dass seine Axen wie jene des Typ. 57 (9 n. Sohncke) liegen.	Wie in 56 B_1.	Keine.
58 B_1	Typus 62 (3 n. Sohncke) so specialisirt, dass seine Axen wie jene der Typen 58 oder 60 (11 oder 10 n. Sohncke) liegen*).	Durch nächste Drehaxen gelegt.	Keine.
58 B_2	-	-	$\frac{1}{2}$ Schiebung längs der Axe.
58 B_3	-	-	$\frac{1}{2}$ Querschiebung längs der Symmetrieebene.
59 B_3	Typus 64 (4 n. Sohncke) so specialisirt, dass seine Axen wie die zur Ebene von Sohncke's Zeichnung des Typus 59 (7 n. Sohncke) senkrechten Axen liegen.	Horizontal gelegt in Sohncke's Fig. 7 und nächste Drehaxen enthaltend.	Keine.
59 B_4	-	-	$\frac{1}{2}$ Schiebung längs der Axen.
59 B_5	-	-	$\frac{1}{2}$ Querschiebung längs der Symmetrieebene.
59 B_6	-	-	Die Resultirende der zwei zuletzt genannten.

*) Die relative Lage von Axen, welche die gleiche Richtung haben, ist identisch in diesen zwei Systemen.

Nr.	Einfaches Sohncke'sches System, von welchem das doppelte System abgeleitet ist	Lage einer Symmetrieebene des doppelten Systems	Schiebung, wenn eine erforderlich ist, die enantiomorphen Systeme auf beiden Seiten der Symmetrieebene einander gegenüberzustellen
64 B_1	Typus 64 (4 n. Sohncke) so specialisirt, dass seine Axen wie die Axen in einer Richtung in Typus 61 (8 n. Sohncke) angeordnet sind.	Durch zwei nächste Dreh- und Schraubenaxen gelegt.	Keine.
	Rechtwinklig-rhomboidisch-prismatische Gruppe.		
65 B_1	Typus 65 (1 n. Sohncke) so specialisirt, dass die Maschen rechtwinklige Prismen sind.	Senkrecht zu den Axen dieser Prismen.	Keine.
65 B_2	-	-	$\frac{1}{2}$ Schiebung längs der Symmetrieebene.
65 B_3	Typus 65 (1 n. Sohncke) so specialisirt, dass eine von einer Ecke eines Elementarparallelepipeds auf die gegenüber liegende Fläche gefällte Senkrechte entweder eine Seite oder eine Flächendiagonale halbirt.	Parallel zu den so charakterisirten Flächen.	Keine.
65 B_4	-	-	$\frac{1}{2}$ Schiebung längs der Symmetrieebene.

Jedem hier aufgeführten Typus eines doppelten Systems entsprechend giebt es einen Typus homogener Structur, welcher mit seinem eigenen Spiegelbilde identisch ist, dessen enantiomorphe Punktsysteme unendlich viel doppelte Systeme von diesem Typus bilden, und welcher Symmetrieebenen sowohl, als Deckbewegungen, nicht aber Symmetriecentren mit diesen doppelten Systemen gemein hat.

Die sechs Typen homogener Structur der kubischen Gruppe, deren doppelten Systeme in Tabelle 2 zu finden sind, zeigen die tetraëdrische Hemiëdrie der Classe 30 in Sohncke's Verzeichniss der Krystallclassen*).

Die vier Typen homogener Structur der hexagonalen Gruppe zeigen die Hemimorphie der Vollflächigkeit der Classe 17.

Die zwölf Typen homogener Structur der tetragonalen Gruppe, deren

*) Siehe diese Zeitschr. **20**, 59 und **20**, 467.

gleiche Punkte Sohncke'sche Systeme bestimmen, die zu dieser Gruppe gehören, stellen die Hemimorphie der Classe 26 *) dar. Jene zwölf, deren gleiche Punkte specialisirte Sohncke'sche Systeme der rhombischen Gruppe ausmachen, zeigen die skalenoëdrische Hemiëdrie der Classe 24.

Von den elf Typen homogener Structur der trigonalen Gruppe zeigt die als $48b_5$ bezeichnete die bipyramidale Tetartoëdrie der Classe 16; sechs, nämlich die mit $48b_1$, $48b_2$, $48b_3$, $48b_4$, $51b_1$ und $51b_2$ bezeichneten, die Tetartomorphie der Classe 19, und jene vier, welche $49b_1$, $49b_2$, $50b_1$ und $50b_2$ heissen, die trigonotype Hemiëdrie der Classe 13*).

Die 21**) Typen homogener Structur der rhombischen Gruppe zeigen die Hemimorphie der Classe 8 in Sohncke's Verzeichniss***).

Die vier Typen homogener Structur der rechtwinklig-rhomboidisch-prismatischen Gruppe zeigen die Hemiëdrie der Classe 4.

3. Doppelte Systeme, deren enantiomorphe Punktsysteme rechtwinklig gegen einander orientirt sind, und welche weder Symmetriecentren, noch Symmetrieebenen besitzen, und die Typen homogener Structur, in denen sie vorkommen.

Was die doppelten Systeme und homogenen Structuren betrifft, deren sie zusammensetzende einfache Systeme die mit c) bezeichnete relative Orientirung, nicht aber die mit a) oder die mit b) bezeichnete, haben†), so müssen dieselben, wie gesagt, immer ein quadratisches Schnittpunktnetz einer Axengruppe haben. Sie enthalten Ebenen, welche sie in zwei enantiomorphe Hälften theilen, deren eine um 90° um eine zu diesen Ebenen senkrechte Axe gedreht werden muss, damit enantiomorph-ähnliche Punkte direct einander gegenüber zu liegen kommen.

Die folgende Tabelle zeigt, welche verschiedenen Typen doppelter Systeme, die weder Symmetriecentren noch Symmetrieebenen††) besitzen, von den Sohncke'schen Punktsystemen herleitbar sind, und giebt in jedem Falle die Lage einer Ebene an, welche das doppelte System in zwei enantiomorphe Hälften theilt, und die Lage einer Axe, um

---

*) Es mag bemerkt werden, dass die aus den Typen 29, 34 und 38 (29, 30 und 31 nach Sohncke) abgeleiteten doppelten Systeme und ebenso die vom Typus 48 (17 nach Sohncke) hergeleiteten für sich genommen eine höhere Symmetrie haben, als die sie enthaltenden mindest-symmetrischen homogenen Structuren; es zeigen die ersteren die Vollflächigkeit der Classe 21, die letzteren die trigonotype Hemiëdrie der Classe 13.

) Fedorow zählt 22 Typen doppelter Systeme auf, aber der Verf. findet nur 21. Vergl. diese Zeitschr. **20, 49 und 50.

***) Die doppelten Systeme für sich besitzen die Symmetrie der Classe 6.

†) Siehe S. 42.

††) Dieses Wort ist im weiten Sinne gebraucht (s. Anmerk. S. 42).

welche die eine Hälfte um 90° gedreht werden muss, um entsprechende Punkte einander gegenüber zu stellen*).

Tabelle 3 der doppelten Systeme, welche weder Symmetriecentren noch Symmetrieebenen) besitzen.**

Nr.	Einfaches Sohncke'sches System, aus welchem das doppelte System abgeleitet ist	Lage einer Ebene, welche das System in enantiomorphe Hälften theilt	Lage einer Axe, um welche eine Hälfte um 90° gedreht werden muss, um der anderen gegenüberzuliegen
63 c (s. Fig. 14)	Typus 63 (2 n. Sohncke) so specialisirt, dass das Schnittpunktnetz der Axen quadratisch ist.	Senkrecht zu den Axen.	Eine der Axen des Sohncke-schen Systems.
64 c (s. Fig. 15)	Typus 64 (4 n. Sohncke) wie oben specialisirt.	Senkrecht zu den Axen.	Eine der Drehaxen des Sohncke'schen Systems.

Diese doppelten Systeme und die zwei Typen homogener Structur, in denen entsprechende Punkte solche doppelte Systeme bestimmen, gehören zum tetragonalen Systeme und zeigen die sphenoidische Tetartoëdrie der Classe 25 in Sohncke's Verzeichniss der Krystallclassen.

Es giebt keine anderen Typen homogener Structur irgend welcher Art ausser den oben angegebenen.

Mit Rücksicht auf die Raumeinheiten jener homogenen Structuren, welche mit ihren eigenen Spiegelbildern identisch sind, wird, wenn die Theilung des Raumes in Einheiten so ausgeführt wird, dass sie zu jedem der zwei einfachen Systeme jedes doppelten Systems, welches durch enantiomorph-ähnliche Punkte bestimmt wird, die gleiche Beziehung darbietet, — mit anderen Worten, wenn die Structur, nachdem die Raumtheilung hinzugekommen, nach wie vor mit ihrem eigenen Spiegelbilde identisch ist, — eine weitere Symmetrie der Raumtheilung dargestellt sein.

Denn damit die Raumtheilung mit den enantiomorphen einfachen Systemen in gleicher Beziehung stehen kann, muss sie offenbar die Symmetriecentren und Symmetrieebenen der Structur besitzen.

Um dies zu illustriren, sind drei Schnitte der möglichen Eintheilung dreier homogener, mit ihren Spiegelbildern identischer Structuren in Raumeinheiten beigegeben; alle drei sind vom Typus 48 (17 nach Sohncke) wie die früher abgebildete Eintheilung***).

Im ersten Schnitte (Fig. 16) hat die Structur Symmetriecentren auf

*) Vier doppelte Systeme in Tabelle 2, nämlich $56 B_1$, $59 B_1$, $60 B_1$ und $61 B_1$ besitzen ausser ihren Symmetrieebenen noch Ebenen mit dieser Eigenschaft.

**) Dieser Ausdruck ist im weiten Sinne der Anmerk. auf S. 42 gebraucht.

***) Siehe S. 37 und Fig. 13.

ihren dreizähligen Axen A, und der Schnitt ist senkrecht zu diesen Axen durch die Symmetriecentren geführt.

Im zweiten Schnitte (Fig. 17) hat die Structur Symmetrieebenen, welche benachbarte dreizählige Axen A enthalten, und die enantiomorph-ähnlichen Punkte liegen in Bezug auf diese Ebenen einander direct gegenüber.

Im dritten Schnitte (Fig. 18) hat die Structur Symmetrieebenen, deren jede dreizählige Axen aller drei Arten enthält, und die enantiomorph-ähnlichen Punkte liegen bezüglich dieser Symmetrieebenen einander direct gegenüber.

Diese Schnitte mögen mit dem Schnitte (Fig. 13) einer möglichen Eintheilung einer Structur verglichen werden, deren gleichartige Punkte auch Punktsysteme vom Typus 48 bilden, welche aber nicht auch die neue Eigenschaft besitzt, mit ihrem eigenen Spiegelbilde identisch zu sein.

III. Singuläre Punktsysteme.

Alle durch Schaaren gleichartiger Punkte in irgend einer gegebenen homogenen Structur bestimmten Punktsysteme sind nothwendiger Weise vom gleichen Typus, nämlich dem durch die Deckbewegungen der Structur charakterisirten; diese Deckbewegungen sind allen Punktsystemen gemeinschaftlich. Einige Punktsysteme jedoch bestehen aus weniger Punkten als andere, und die Lagen, welche die Punkte der so ausgezeichneten Systeme inne haben, sind symmetrischer als die von den Punkten der anderen Punktsysteme der Structur besetzten.

So nehme man irgend einen Punkt auf einer beliebigen m-zähligen Drehaxe einer homogenen Structur und führe die Deckbewegungen der Structur aus, so dass man das Punktsystem findet, welches die Lagen der diesem gewählten Punkte gleichartigen Punkte markirt. Es ist klar, dass das Zahlenverhältniss der Punkte dieses Systems zu denen eines Punktsystems derselben Structur, dessen Punkte keine speciellen Lagen einnehmen, im Allgemeinen $1 : m$ sein wird; mit anderen Worten: Jeder Punkt eines solchen Systems kann als das Erzeugniss der Vereinigung von m Punkten betrachtet werden, die gleichweit von irgend einer der gleichen m-zähligen Axen abstehen.

Wenn der gewählte Punkt im Schnittpunkte zweier Drehaxen liegt, einer m-zähligen und einer n-zähligen, so werden sich im Allgemeinen die Punkte des von ihm erzeugten Punktsystems, wenn die Deckbewegungen der Structur ausgeführt werden, zu den Punkten eines Punktsystems, welche keine speciellen Lagen einnehmen, verhalten wie $1 : mn$.

In gleicher Weise wird in den Fällen, wo der erzeugende Punkt der Schnittpunkt von drei Drehaxen, einer m-zähligen, einer n-zähligen und einer p-zähligen, und die Bewegung um e i n e Axe nicht die Resultirende aus den Bewegungen um die beiden anderen Axen ist, das Verhältniss $1 : mnp$ sein.

Da nun alle Punktsysteme einer homogenen Structur dasselbe System der Deckbewegungen gemein haben, so ist klar, dass für eines derselben, welches aus weniger Punkten als andere besteht, irgend eine Deckbewegung keine Aenderung in der Lage einiger Punkte dieses Punktsystems bewirken muss, während sie im Allgemeinen die Lagen aller Punkte des Punktsystems verändert. Und diese Deckbewegungen müssen Drehungen sein, denn eine Schraubung sowohl als eine Schiebung bewegen immer jeden Punkt in einer Structur, auf welche sie angewendet werden.

Folglich müssen die Punkte irgend eines Sohncke'schen Punktsystems, welches aus weniger Punkten besteht als die meisten Punktsysteme derselben homogenen Structur, auf Drehaxen der Structur liegen, vielleicht auch, wie in den oben erwähnten Fällen, in den Schnittpunkten zweier oder mehrerer Drehaxen.

Weiter sind die doppelten Systeme in einer homogenen Structur, die mit ihrem eigenen Spiegelbilde identisch ist, wie die sie zusammensetzenden einfachen Systeme alle von einem einzigen Typus, dessen Art jedoch sowohl durch die Lagen der Symmetriecentren oder Symmetrieebenen der Structur, als auch durch ihre Deckbewegungen bestimmt ist.

In einigen homogenen Structuren, welche diese hinzukommende Eigenschaft besitzen, kommen jedoch doppelte Systeme vor, die nur aus einem einzigen einfachen Systeme bestehen oder, bestimmter ausgedrückt: in welchen die zwei einfachen Systeme zusammengefallen sind. Diese doppelten Systeme besitzen infolge dieser Vereinigung offenbar halb so viel Punkte.

Die homogenen Structuren, welche singuläre Punktsysteme dieser Art enthalten, sind jene, welche Symmetriecentren haben und jene, welche die Art der Symmetrieebenen besitzen, auf deren beiden Seiten enantiomorph-ähnliche Punkte direct einander gegenüberliegen; ebenso jene, in welchen die enantiomorphen Punktsysteme rechtwinklig gegen einander orientirt sind*).

Einige homogene Structuren besitzen, wie wir gesehen, mehr als eine einzige der eben erwähnten Eigenschaften; aber wenn dies der Fall ist, tritt kein weiteres Zusammenfallen der Punkte ein ausser dem, welches der Besitz einer einzigen solchen Eigenschaft in sich schliesst.

Wenn Symmetriecentren vorhanden sind, so liegen dieselben zuweilen auf Drehaxen, zuweilen nicht. Wenn durch ein Symmetriecentrum keine Drehaxe geht, so verhält sich die Punktzahl des doppelten Systems, welches aus demselben entsteht, wenn man die Deckbewegungen der Structur aus-

*) Siehe S. 58.

führt, zu der eines anderen doppelten Systems, dessen Punkte keine specielle Lagen haben, wie 1 : 2. Wenn das erzeugende Symmetriecentrum auf einer m-zähligen Drehaxe und sonst auf keiner liegt, wird das Verhältniss 1 : $2m$ sein. Wenn es im Schnittpunkte einer m-zähligen und einer n-zähligen Drehaxe liegt, wird das Verhältniss 1 : $2mn$ sein u. s. w.

Symmetrieebenen begleiten zuweilen, wie wir gesehen, Symmetriecentren und sind zuweilen allein vorhanden. In jedem Falle wird die Symmetrieebene, wenn sie nur derart ist, dass auf ihren beiden Seiten die enantiomorph-ähnlichen Punkte einander direct gegenüberliegen, ganz aus singulären Punkten bestehen; mit anderen Worten: ein Punktsystem, welches aus einem in derselben gelegenen Punkte dadurch entsteht, dass man die Deckbewegungen der homogenen Structur ausführt, wird aus weniger Punkten bestehen als die doppelten Punktsysteme, deren Punkte keine speciellen Lagen in der Structur einnehmen.

Wenn der erzeugende Punkt in der Symmetrieebene nicht auf einer Drehaxe liegt, wird sich die Zahl der Punkte des erzeugten Systems zu der eines doppelten Systems der Structur, dessen Punkte keine speciellen Lagen haben, wie 1 : 2 verhalten. Wenn der erzeugende Punkt in der Symmetrieebene auf einer einzigen, m-zähligen Drehaxe liegt und auf keiner anderen weiter, wird das Verhältniss 1 : $2m$ sein; wenn er auf zwei Drehaxen, einer m-zähligen und einer n-zähligen, und sonst auf keiner anderen liegt, 1 : $2mn$ u. s. f.

In den oben beschriebenen zwei Typen homogener Structur, in welchen enantiomorphe Punktsysteme rechtwinklig gegen einander orientirt sind*), sind die Punkte, in welchen die quasi-tetragonalen Axen Ebenen schneiden, die mitten zwischen zwei nächsten Querebenen liegen, welche bezüglich Punkte von zwei enantiomorphen Punktsystemen enthalten, singuläre Punkte der hier betrachteten Art. Denn sie liegen auf zweizähligen Axen, auch sind sie Punkte des Zusammenfallens von enantiomorph-correspondirenden Punkten.

Folglich verhält sich die Zahl der Punkte der doppelten Systeme, zu denen sie gehören, zu jener der Punkte der doppelten Systeme der Structur, welche keine speciellen Lagen einnehmen, wie 1 : 4.

Die in dieser Abhandlung erhaltenen Resultate können folgendermassen zusammengefasst werden:

1. In irgend einer, oben definirten, homogenen Structur haben gleichartige Punkte eine symmetrische Anordnung von einem bestimmten, der Structur eigenthümlichen Typus.

2. Wenn alle Typen symmetrischer Anordnung, welche für die Theile homogener Structuren möglich sind, aufgesucht werden, so findet man in

*) Siehe S. 58.

jedem Falle, dass sie die Symmetrie der einen oder anderen der 32 geometrisch möglichen Classen der Krystallsymmetrie haben. Ein verhältnissmässig grosser Theil der Typen ist mit seinem eigenen Spiegelbilde identisch.

3. Diese Typen zerfallen ferner in sieben Gruppen; Typen derselben Gruppe sind durch gemeinschaftliche Eigenschaften mit einander verknüpft, welche den Typen der übrigen Gruppen nicht zukommen *).

4. Die Thatsache, dass die Krystalle fast alle, wenn nicht thatsächlich alle 32 geometrisch möglichen Arten der Symmetrie zeigen, ist ein gewichtiges Zeugniss dafür, dass die Krystalle homogene Structuren nach obiger Definition sind; dieselben sind theils mit ihren eigenen Spiegelbildern identisch, theils nicht. Sie ist jedoch kein Beweis für die Beschaffenheit der Atome oder Moleküle oder auch nur für deren Existenz.

5. Wenn jedoch die Existenz von Atomen als auf anderem Wege erwiesen angenommen werden kann, und in einem gegebenen Falle das Zahlenverhältniss der verschiedenen vorhandenen Atome bekannt ist, und wenn man weiter weiss, dass gleichartige Atome gleichartige Lagen in der Structur einnehmen, so ist einiges Licht auf die relative Anordnung der verschiedenen Atome geworfen durch die Lage der singulären Punktsysteme in den homogenen Structuren.

Ein weiterer Beweis dafür, dass Krystalle homogene Structuren nach obiger Definition der Homogenität sind, wird durch die Thatsache erbracht, dass die Tetartoëdrie der Krystallform gewöhnlich mit der Drehung der Polarisationsebene des Lichtes verbunden ist. Denn wenn wir die Punktsysteme jener homogenen Structuren prüfen, welche Tetartoëdrie zeigen, so sehen wir, dass die Punkte meistens eine deutlich spiralförmige Anordnung haben, und, wie wohlbekannt, ist eine spiralförmige Structur nöthig um die erwähnte optische Eigenschaft zu erklären.

Hillfield, Muswell Hill, London N.

*) Siehe S. 37.