Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades.

(Von Herrn *E. B. Christoffel* in Zürich.)

1.

Führt man in den Differentialausdruck

$$F = \Sigma \omega_{ik} \partial x_i \partial x_k; \qquad i, k = 1, 2, \dots n,$$

in welchem die Coefficienten ω beliebige Functionen der von einander unabhängigen Variabeln $x_1, x_2, \dots x_n$ sind, statt der letztern ein System von einander unabhängiger Functionen der neuen Variabeln $x'_1, x'_2, \dots x'_n$ ein, so geht F in einen neuen Differentialausdruck

$$F' = \Sigma \omega'_{ik} \partial x'_i \partial x'_k$$

über, welcher dem ursprünglichen vermöge der ausgeführten Substitution gleich ist.

Sind umgekehrt die beiden Differentialausdrücke F und F' gegeben, so kann man sich die Frage vorlegen, welche Bedingungen erforderlich sind, damit der eine in den andern transformirt werden könne, und falls dies möglich ist, welche Substitutionen die verlangte Transformation leisten.

Wir bezeichnen für diese Untersuchung die Substitutionsdeterminante und die Determinanten von F und F' wie folgt:

$$\Sigma \pm \frac{\partial x_1}{\partial x'_1} \frac{\partial x_2}{\partial x'_2} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial x'_n} = r,$$

$$\Sigma \pm \omega_{11} \omega_{22} \cdots \omega_{nn} = E,$$

$$\Sigma \pm \omega'_{11} \omega'_{22} \cdots \omega'_{nn} = E'.$$

Dann findet, wie aus der algebraischen Invariantentheorie bekannt ist, eine und auch nur eine Transformationsbedingung

$$E' = r^2 E$$

statt, und diese würde auch für den vorliegenden Fall ausreichen, wenn die Coefficienten ω von F und die Elemente von r constant wären. Im gegenwärtigen Falle müssen jedoch noch andere Bedingungen erfüllt sein, da nicht jedes System linearer und homogener Functionen von $\partial x'_1, \partial x'_2, \dots \partial x'_n$, welches an Stelle von $\partial x_1, \partial x_2, \dots \partial x_n$ gesetzt F in F' überführt, die gestellte Aufgabe löst, sondern nur ein solches, welches den Integrabilitätsbedingungen genügt, damit die Ausdrücke für $\partial x_1, \partial x_2, \dots \partial x_n$ vollständige Differentiale werden.

Wenn allgemein F ein homogener Differentialausdruck von beliebiger, und F' von derselben Ordnung ist, so finden ebenso für die Transformation von F in F', weil für die Differentiale lineare Substitutionen gelten, zunächst die aus der algebraischen Invariantentheorie entspringenden Bedingungsgleichungen statt, und die zugehörigen Formen liefern, wenn die Ordnung von F grösser als 2 ist, im Allgemeinen völlig bestimmte Werthe für die Coefficienten in den Ausdrücken der ursprünglichen Differentiale durch die neu einzuführenden. Aber diese Coefficienten müssen noch den hinzugehörigen Integrabilitätsbedingungen unterworfen werden, wobei die Eigenschaft der zugehörigen Formen, unmittelbar nicht die directe, sondern die transponirte Substitution zu liefern, wesentlich in Betracht kommt (vergl. art. 10).

Vereinfachungen dieser Art finden für die homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades nicht statt, da sich für dieselben aus den algebraischen Bedingungen nur eine Invariante und eine zugehörige Form ergiebt. Ich werde daher im Folgenden die Hülfsmittel auseinandersetzen, mittelst deren dieser auf den verschiedensten Gebieten so wichtige Ausnahmefall sich erledigen lässt, und bemerke nur noch, dass über den Fall, wo $F = \partial x_1^2 + \partial x_2^2 + \partial x_3^2$ ist, ein ausführliches Werk von Herrn *Lamé* existirt (Théorie des coordonnées curvilignes), während die gegenwärtigen Untersuchungen ursprünglich durch die Ausdehnung des Problems der aufeinander abwickelbaren Flächen auf Gebiete von n Dimensionen veranlasst worden sind.

2.

Bei der Untersuchung der Bedingungen, welche für die Möglichkeit der Gleichung

$$(1.) \qquad \Sigma \omega_{ik} \partial x_i \partial x_k = \Sigma \omega'_{ik} \partial x'_i \partial x'_k$$

erforderlich sind und hinreichen, werde ich mich auf den Fall beschränken, wo die Determinanten E und E' dieser Differentialausdrücke nicht identisch gleich 0 sind. Die neuen Variabeln x' werden als die unabhängigen betrachtet und ihre Differentiale constant angenommen.

Ersetzt man nun jedes $\partial x'_i$ durch $\partial x'_i + \delta x'_i$ und bezeichnet die den Differentialen $\delta x'_i$ entsprechenden Zunahmen der ursprünglichen Variabeln x ebenfalls durch δx, so muss in (1.) allgemein ∂x durch $\partial x + \delta x$ ersetzt werden.

Führt man alsdann beiderseits die Quadrate und Producte aus, so ergibt sich nach Beseitigung übereinstimmender Theile

$$(2.)\qquad \Sigma\omega_{ik}\partial x_i\delta x_k = \Sigma\omega'_{ik}\partial x'_i\delta x'_k.$$

Vergleicht man hier die Coefficienten von $\partial x'_g$, so folgt

$$\sum_{ik}\omega_{ik}\frac{\partial x_i}{\partial x'_g}\delta x_k = \sum_k\omega'_{gk}\delta x'_k,$$

und hieraus

$$(3.)\qquad \delta x'_h = \sum_{gik}\omega_{ik}\frac{E'_{gh}}{E'}\frac{\partial x_i}{\partial x'_g}\delta x_k,$$

wo E'_{gh} in bekannter Weise die aus einer Aenderung von ω'_{gh} (nicht von ω'_{hg}) entspringende Unterdeterminante von E' bedeutet.

In der Gleichung (2.) lasse man nun jedes x' um sein Differential $\partial x'$, in (1.) dagegen um $\delta x'$ wachsen, wodurch die Differentiale zur Rechten nicht geändert werden; dann folgt:

$$\Sigma\omega_{ik}\partial^2 x_i\delta x_k+\Sigma\partial\omega_{ik}\partial x_i\delta x_k+\Sigma\omega_{ik}\partial x_i\partial\delta x_k = \Sigma\partial\omega'_{ik}\partial x'_i\delta x'_k,$$
$$\Sigma\delta\omega_{ik}\partial x_i\partial x_k+2\Sigma\omega_{ik}\partial x_i\delta\partial x_k = \Sigma\delta\omega'_{ik}\partial x'_i\partial x'_k.$$

Dividirt man die zweite Gleichung durch 2 und subtrahirt sie von der vorangehenden, so folgt

$$\Sigma\omega_{ik}\partial^2 x_i\delta x_k+\Sigma\partial\omega_{ik}\partial x_i\delta x_k-\tfrac{1}{2}\Sigma\delta\omega_{ik}\partial x_i\partial x_k$$
$$= \Sigma\partial\omega'_{ik}\partial x'_i\delta x'_k-\tfrac{1}{2}\Sigma\delta\omega'_{ik}\partial x'_i\partial x'_k.$$

Wird nun zur besseren Uebersicht

$$(4.)\qquad \tfrac{1}{2}\left[\frac{\partial\omega_{gk}}{\partial x_h}+\frac{\partial\omega_{hk}}{\partial x_g}-\frac{\partial\omega_{gh}}{\partial x_k}\right] = \begin{bmatrix}gh\\k\end{bmatrix}$$

gesetzt, woraus

$$(5.)\qquad \begin{bmatrix}hg\\k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}gh\\k\end{bmatrix}\quad\text{und}\quad \frac{\partial\omega_{hk}}{\partial x_g}=\begin{bmatrix}gh\\k\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}gk\\h\end{bmatrix}$$

folgt, und dieselbe Bezeichnung bei der transformirten Form benutzt, so ergiebt sich

$$(6.)\qquad \sum_{ik}\omega_{ik}\partial^2 x_i\delta x_k+\sum_{ikl}\begin{bmatrix}il\\k\end{bmatrix}\partial x_i\partial x_l\delta x_k = \sum_{\alpha\beta h}\begin{bmatrix}\alpha\beta\\h\end{bmatrix}'\partial x'_\alpha\partial x'_\beta\delta x'_h.$$

Hier ersetze man $\delta x'_h$ durch seinen Werth aus (3.), wodurch die rechte Seite in

$$\sum_{\alpha\beta h}\begin{bmatrix}\alpha\beta\\h\end{bmatrix}'\partial x'_\alpha\partial x'_\beta\sum_{gik}\omega_{ik}\frac{E'_{gh}}{E'}\frac{\partial x_i}{\partial x'_g}\delta x_k$$

übergeht. Durch Vergleichung der Coefficienten von δx_k folgt also

$$\sum_i\omega_{ik}\partial^2 x_i+\sum_{il}\begin{bmatrix}il\\k\end{bmatrix}\partial x_i\partial x_l = \sum_{gi\alpha\beta}\omega_{ik}\frac{\partial x_i}{\partial x'_g}\partial x'_\alpha\partial x'_\beta\sum_h\begin{bmatrix}\alpha\beta\\h\end{bmatrix}'\frac{E'_{gh}}{E'}.$$

Diese Gleichung multiplicire ich mit $\frac{E_{lk}}{E}$ und summire über die Werthe von k. Wird alsdann

$$(7.)\qquad \sum_k \begin{bmatrix} il \\ k \end{bmatrix} \frac{E_{rk}}{E} = \begin{Bmatrix} il \\ r \end{Bmatrix}$$

gesetzt, woraus

$$(8.)\qquad \begin{Bmatrix} li \\ r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} il \\ r \end{Bmatrix}$$

folgt, und die gleiche Bezeichnung bei der transformirten Form angewandt, so ergiebt sich

$$\partial^2 x_r + \sum_{il} \begin{Bmatrix} il \\ r \end{Bmatrix} \partial x_i \partial x_l = \sum_{\alpha\beta g} \begin{Bmatrix} \alpha\beta \\ g \end{Bmatrix}' \frac{\partial x_r}{\partial x'_g} \partial x'_\alpha \partial x'_\beta,$$

woraus offenbar auch rückwärts die Gleichung (6.) folgt, und es wird hiernach für alle Werthe von α, β und r:

$$(9.)\qquad \frac{\partial^2 x_r}{\partial x'_\alpha \partial x'_\beta} + \sum_{ik} \begin{Bmatrix} ik \\ r \end{Bmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial x'_\alpha} \frac{\partial x_k}{\partial x'_\beta} = \sum_\lambda \begin{Bmatrix} \alpha\beta \\ \lambda \end{Bmatrix}' \frac{\partial x_r}{\partial x'_\lambda}.$$

Diese Gleichung liefert $\frac{n(n+1)}{2}$ Gleichungen für jedes r, also im Ganzen ein System von $n\cdot\frac{n(n+1)}{2}$ simultanen partiellen Differentialgleichungen zur Bestimmung der gesuchten Substitution. Sind dieselben befriedigt, so sind selbstverständlich die Integrabilitätsbedingungen für die linearen Ausdrücke der ursprünglichen durch die neuen Differentiale erfüllt.

Diese Gleichungen vereinfachen sich sehr beträchtlich, wenn alle Coefficienten ω der ursprünglichen Form constant sind, indem in diesem Falle, aber wegen (7.) und (5.) auch nur unter dieser Voraussetzung, alle Ausdrücke $\begin{Bmatrix} ik \\ r \end{Bmatrix}$ verschwinden. Man erhält alsdann für jede ursprüngliche Variable ein System von linearen partiellen Differentialgleichungen, und für alle Variabeln das nämliche System. Das gleiche Resultat hat Herr *Lamé* für den von ihm behandelten oben erwähnten Fall gefunden.

3.

Wenn es nicht möglich ist, die ursprünglichen Variabeln x als Functionen der neuen x' so zu bestimmen, dass die Gleichungen (9.) befriedigt werden, so ist die Transformation von F in F' unmöglich, da diese Gleichungen sich mit Nothwendigkeit ergeben, wenn die Möglichkeit dieser Transformation vorausgesetzt wird.

Sind dagegen die Gleichungen (9.) auf irgend eine Weise erfüllt, so wirft sich die Frage auf, in wie weit sie zum Rückschlusse auf die Gleichung (1.), d. h. auf die Formel $F=F'$ berechtigen. Um dies zu untersuchen, führe man die vorausgesetzte Lösung der Gleichungen (9.) in F ein, woraus

$$F=\Sigma\omega''_{ik}\partial x'_i\partial x'_k=F''$$

folgen möge. Dann handelt es sich darum, welche Beziehungen zwischen den entsprechenden Coefficienten von F'' und F' stattfinden.

Nun sind die Gleichungen (9.) nichts anderes als eine identische Umformung der Gleichung (6.), aus welcher sie selbst folgen, und welche sie auch rückwärts nach sich ziehen. Geht man aber, statt von $F=F'$, jetzt von $F=F''$ aus, so liefert die Rechnung des art. 2 statt des Ausdrucks, welcher dort auf der rechten Seite von (6.) steht, den neuen Ausdruck

$$\sum_{\alpha\beta h}\begin{bmatrix}\alpha\beta\\ h\end{bmatrix}''\partial x'_\alpha\partial x'_\beta\delta x'_h,$$

und dieser muss dem ursprünglichen gleich sein. Also ergiebt sich allgemein

$$\begin{bmatrix}\alpha\beta\\ h\end{bmatrix}''=\begin{bmatrix}\alpha\beta\\ h\end{bmatrix}',$$

woraus wegen (5.)

$$\frac{\partial\omega''_{hk}}{\partial x'_g}=\frac{\partial\omega'_{hk}}{\partial x'_g}$$

für alle Werthe von g, h, k folgt. Die entsprechenden Coefficienten von F'' und F' unterscheiden sich demnach nur um additive Constanten. Damit diese Constanten verschwinden, reicht es aus, dass irgend einmal $F''=F'$ werde, mit anderen Worten, dass die Lösung der Gleichungen (9.) den aus der Gleichung (1.) hervorgehenden Transformationsrelationen

$$(10.)\qquad \sum_{ik}\omega_{ik}\frac{\partial x_i}{\partial x'_\alpha}\frac{\partial x_k}{\partial x'_\beta}=\omega'_{\alpha\beta}$$

für irgend ein specielles Werthesystem der neuen Variabeln Genüge leiste. Wir haben also den Satz:

Wenn es möglich ist, die ursprünglichen Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ als Functionen der neuen Variabeln $x'_1, x'_2, \ldots x'_n$ so zu bestimmen, dass das Gleichungssystem (9.) befriedigt wird, und man unterwirft diese Functionen noch der Anfangsbedingung, dass sie nebst ihren ersten Derivirten für irgend ein specielles Werthesystem der neuen Variabeln den in der Gleichung $F=F'$ enthaltenen Transformationsrelationen Genüge leisten, so finden diese

Transformationsrelationen und mit ihnen die Gleichung $F = F'$ für alle Werthe der neuen Variabeln statt.

Daraus folgt, dass die in (1.) enthaltenen Transformationsrelationen durch die Gleichungen (9.) bis auf die ihnen zu entnehmende Anfangsbedingung überflüssig gemacht werden, sobald die letztern miteinander verträglich sind.

Das Gleichungssystem (9.) *enthält also, seine Möglichkeit vorausgesetzt, bis auf die erwähnte Anfangsbedingung die sämmtlichen für die Transformation von F in F' nothwendigen und ausreichenden Bedingungen, und ersetzt hiernach gleichzeitig die algebraischen aus* (1.) *hervorgehenden Transformationsrelationen und die hinzugehörigen Integrabilitätsbedingungen.*

4.

Für die Möglichkeit der Gleichungen (9.) sind neue Integrabilitätsbedingungen erforderlich, zu deren Herleitung wir jetzt übergehen. Um zugleich den Nachweis zu führen, dass diese die Gleichungen (9.) nicht rückwärts nach sich ziehen, betrachten wir statt der letztern das System, welches in einer der folgenden Gleichungen enthalten ist:

$$(9'.)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 x_r}{\partial x'_\alpha \partial x'_\beta} + \sum_{gh} \begin{Bmatrix} gh \\ r \end{Bmatrix} u^g_\alpha u^h_\beta &= \sum_\lambda \begin{Bmatrix} \alpha\beta \\ \lambda \end{Bmatrix}' u^r_\lambda + \begin{pmatrix} r \\ \alpha\beta \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial^2 x_r}{\partial x'_\alpha \partial x'_\gamma} + \sum_{gi} \begin{Bmatrix} gi \\ r \end{Bmatrix} u^g_\alpha u^i_\gamma &= \sum_\lambda \begin{Bmatrix} \alpha\gamma \\ \lambda \end{Bmatrix}' u^r_\lambda + \begin{pmatrix} r \\ \alpha\gamma \end{pmatrix}, \end{aligned}\right.$$

wo, wie im Folgenden allgemein, die ersten Derivirten

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_\alpha} = u^i_\alpha$$

gesetzt sind, während wir für die höhern Derivirten die gewöhnliche Bezeichnung beibehalten. Aus dem Vorstehenden wird also das System (9.) erhalten, indem man die Grössen $\begin{pmatrix} r \\ \alpha\beta \end{pmatrix}$ alle gleich 0 setzt.

Die in Rede stehenden Integrabilitätsbedingungen werden erhalten, wenn man die erste Gleichung (9'.) nach x'_γ, die zweite nach x'_β differentiirt und die Differenz bildet, wobei die dritte Derivirte von x_r wegfällt. Beachtet man, dass auch die Glieder, welche eine nach x'_β und x'_γ genommene zweite Derivirte enthalten, sich wegheben, so folgt:

7*

$$\sum_{ghi}\left[\frac{\partial\begin{Bmatrix}gh\\ r\end{Bmatrix}}{\partial x_i}-\frac{\partial\begin{Bmatrix}gi\\ r\end{Bmatrix}}{\partial x_h}\right]u^g_\alpha u^h_\beta u^i_\gamma+\sum_{ph}\begin{Bmatrix}ph\\ r\end{Bmatrix}\frac{\partial^2 x_p}{\partial x'_\alpha\partial x'_\gamma}u^h_\beta-\sum_{pi}\begin{Bmatrix}pi\\ r\end{Bmatrix}\frac{\partial^2 x_p}{\partial x'_\alpha\partial x'_\beta}u^i_\gamma$$
$$=\sum_\lambda\left[\frac{\partial\begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ \lambda\end{Bmatrix}'}{\partial x'_\gamma}-\frac{\partial\begin{Bmatrix}\alpha\gamma\\ \lambda\end{Bmatrix}'}{\partial x'_\beta}\right]u^r_\lambda+\sum_\lambda\begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ \lambda\end{Bmatrix}'\frac{\partial^2 x_r}{\partial x'_\lambda\partial x'_\gamma}-\sum_\lambda\begin{Bmatrix}\alpha\gamma\\ \lambda\end{Bmatrix}'\frac{\partial^2 x_r}{\partial x'_\lambda\partial x'_\beta}$$
$$+\frac{\partial\begin{pmatrix}r\\ \alpha\beta\end{pmatrix}}{\partial x'_\gamma}-\frac{\partial\begin{pmatrix}r\\ \alpha\gamma\end{pmatrix}}{\partial x'_\beta}.$$

Daraus geht zunächst hervor, dass die Integrabilitätsbedingungen für das System (9'.) genau die nämlichen sein werden wie für die ursprünglichen Gleichungen (9.), sobald die Grössen $\begin{pmatrix}r\\ \alpha\beta\end{pmatrix}$ dem folgenden Gleichungssystem Genüge leisten

$$(11.)\quad\begin{cases}\displaystyle\sum_{ph}\begin{Bmatrix}ph\\ r\end{Bmatrix}\begin{pmatrix}p\\ \alpha\gamma\end{pmatrix}u^h_\beta-\sum_{pi}\begin{Bmatrix}pi\\ r\end{Bmatrix}\begin{pmatrix}p\\ \alpha\beta\end{pmatrix}u^i_\gamma\\ \displaystyle=\sum_\lambda\begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ \lambda\end{Bmatrix}'\begin{pmatrix}r\\ \lambda\gamma\end{pmatrix}-\sum_\lambda\begin{Bmatrix}\alpha\gamma\\ \lambda\end{Bmatrix}'\begin{pmatrix}r\\ \lambda\beta\end{pmatrix}+\frac{\partial\begin{pmatrix}r\\ \alpha\beta\end{pmatrix}}{\partial x'_\gamma}-\frac{\partial\begin{pmatrix}r\\ \alpha\gamma\end{pmatrix}}{\partial x'_\beta},\end{cases}$$

welches sich leicht in eine symmetrische Form setzen lässt.

Ich setze nun voraus, dass diese Bedingung für alle Werthe von r, α, β und γ erfüllt ist. Werden alsdann in der vorangehenden Gleichung für die zweiten Derivirten ihre Werthe aus (9'.) eingesetzt, so folgt:

$$\sum_{ghi}\left[\frac{\partial\begin{Bmatrix}gh\\ r\end{Bmatrix}}{\partial x_i}-\frac{\partial\begin{Bmatrix}gi\\ r\end{Bmatrix}}{\partial x_h}\right]u^g_\alpha u^h_\beta u^i_\gamma$$
$$+\sum_{ph}\begin{Bmatrix}ph\\ r\end{Bmatrix}u^h_\beta\Big(\sum_\lambda\begin{Bmatrix}\alpha\gamma\\ \lambda\end{Bmatrix}'u^p_\lambda-\sum_{gi}\begin{Bmatrix}gi\\ p\end{Bmatrix}u^g_\alpha u^i_\gamma\Big)-\sum_{pi}\begin{Bmatrix}pi\\ r\end{Bmatrix}u^i_\gamma\Big(\sum_\lambda\begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ \lambda\end{Bmatrix}'u^p_\lambda-\sum_{gh}\begin{Bmatrix}gh\\ p\end{Bmatrix}u^g_\alpha u^h_\beta\Big)$$
$$=\sum_\lambda\left[\frac{\partial\begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ \lambda\end{Bmatrix}'}{\partial x'_\gamma}-\frac{\partial\begin{Bmatrix}\alpha\gamma\\ \lambda\end{Bmatrix}'}{\partial x'_\beta}\right]u^r_\lambda$$
$$+\sum_\lambda\begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ \lambda\end{Bmatrix}'\Big(\sum_\mu\begin{Bmatrix}\gamma\lambda\\ \mu\end{Bmatrix}'u^r_\mu-\sum_{pi}\begin{Bmatrix}pi\\ r\end{Bmatrix}u^p_\lambda u^i_\gamma\Big)-\sum_\lambda\begin{Bmatrix}\alpha\gamma\\ \lambda\end{Bmatrix}'\Big(\sum_\mu\begin{Bmatrix}\beta\lambda\\ \mu\end{Bmatrix}'u^r_\mu-\sum_{ph}\begin{Bmatrix}ph\\ r\end{Bmatrix}u^p_\lambda u^h_\beta\Big).$$

Hier heben sich alle Glieder weg, in denen das Product aus zwei Derivirten u vorkommt; vereinigt man die übrigen Glieder, indem man rechts λ mit μ vertauscht, so folgt:

$$(12.)\quad\begin{cases}\displaystyle\sum_{ghi}\left(\frac{\partial\begin{Bmatrix}gh\\ r\end{Bmatrix}}{\partial x_i}-\frac{\partial\begin{Bmatrix}gi\\ r\end{Bmatrix}}{\partial x_h}+\sum_p\left[\begin{Bmatrix}gh\\ p\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}pi\\ r\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}gi\\ p\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}ph\\ r\end{Bmatrix}\right]\right)u^g_\alpha u^h_\beta u^i_\gamma\\ \displaystyle=\sum_\lambda\left(\frac{\partial\begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ \lambda\end{Bmatrix}'}{\partial x'_\gamma}-\frac{\partial\begin{Bmatrix}\alpha\gamma\\ \lambda\end{Bmatrix}'}{\partial x'_\beta}+\sum_\mu\left[\begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ \mu\end{Bmatrix}'\begin{Bmatrix}\mu\gamma\\ \lambda\end{Bmatrix}'-\begin{Bmatrix}\alpha\gamma\\ \mu\end{Bmatrix}'\begin{Bmatrix}\mu\beta\\ \lambda\end{Bmatrix}'\right]\right)u^r_\lambda.\end{cases}$$

Wir haben also das folgende Resultat.

Das Gleichungssystem, welches aus (12.) *hervorgeht, wenn für r, α, β und γ alle Werthe von* 1 *bis n eingesetzt werden, enthält alle für die Möglichkeit des Systems* (9.) *erforderlichen Integrabilitätsbedingungen. Aber es kann die Gleichungen* (9.) *nicht ersetzen, indem aus ihm rückwärts nicht diese, sondern die allgemeinern Gleichungen* (9′.) *folgen, in denen die unabhängigen Glieder* $\binom{r}{\alpha\beta}$ *dem Gleichungssystem* (11.) *Genüge leisten.*

5.

Die Gleichungen (12.) müssen für die weitere Untersuchung durch ein anderes, gleichbedeutendes System ersetzt werden. Ich multiplicire für diesen Zweck mit $\omega_{rk}u_\delta^k$ und summire über alle Werthe von k und r. Es ist klar, dass die hieraus folgenden Gleichungen auch wieder zum System (12.) zurückführen, wenn man, nachdem die eben bezeichnete Summation wirklich ausgeführt ist, mit $\frac{\partial x'_\delta}{\partial x_l}\cdot\frac{E_{\varrho l}}{E}$ multiplicirt, hierauf zuerst nach δ, dann nach l summirt und zuletzt $\varrho = r$ setzt.

Bei der angegebenen Operation geht die Gleichung (12.), da wegen (10.)

$$\sum_{rk}\omega_{rk}u_\lambda^r u_\delta^k = \omega'_{\lambda\delta}$$

ist, zunächst in

$$\sum_{ghik}u_\alpha^g u_\beta^h u_\gamma^i u_\delta^k \sum_r \omega_{rk}\left(\frac{\partial\begin{Bmatrix}gh\\r\end{Bmatrix}}{\partial x_i}-\frac{\partial\begin{Bmatrix}gi\\r\end{Bmatrix}}{\partial x_h}+\sum_p\left[\begin{Bmatrix}gh\\p\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}pi\\r\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}gi\\p\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}ph\\r\end{Bmatrix}\right]\right)$$
$$=\sum_\lambda\omega'_{\lambda\delta}\left(\frac{\partial\begin{Bmatrix}\alpha\beta\\\lambda\end{Bmatrix}'}{\partial x'_\gamma}-\frac{\partial\begin{Bmatrix}\alpha\gamma\\\lambda\end{Bmatrix}'}{\partial x'_\beta}+\sum_\mu\left[\begin{Bmatrix}\alpha\beta\\\mu\end{Bmatrix}'\begin{Bmatrix}\mu\gamma\\\lambda\end{Bmatrix}'-\begin{Bmatrix}\alpha\gamma\\\mu\end{Bmatrix}'\begin{Bmatrix}\mu\beta\\\lambda\end{Bmatrix}'\right]\right)$$

über, so dass die noch rückständigen Reductionen für beide Seiten der Gleichung die nämlichen sind. Nun ist nach Gleichung (7.)

$$\sum_r\omega_{rk}\begin{Bmatrix}gh\\r\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}gh\\k\end{bmatrix},$$

also wird die auf der linken Seite nach r genommene Summe

$$=\frac{\partial\begin{bmatrix}gh\\k\end{bmatrix}}{\partial x_i}-\sum_p\begin{Bmatrix}gh\\p\end{Bmatrix}\frac{\partial\omega_{pk}}{\partial x_i}-\frac{\partial\begin{bmatrix}gi\\k\end{bmatrix}}{\partial x_h}+\sum_p\begin{Bmatrix}gi\\p\end{Bmatrix}\frac{\partial\omega_{pk}}{\partial x_h}+\sum_p\left(\begin{Bmatrix}gh\\p\end{Bmatrix}\begin{bmatrix}pi\\k\end{bmatrix}-\begin{Bmatrix}gi\\p\end{Bmatrix}\begin{bmatrix}ph\\k\end{bmatrix}\right),$$

wenn in den beiden Summen, welche Derivirten von ω enthalten, p statt r gesetzt wird. Ferner ist nach (5.)

$$\frac{\partial \omega_{pk}}{\partial x_i} = \begin{bmatrix} ip \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ik \\ p \end{bmatrix}, \qquad \frac{\partial \omega_{pk}}{\partial x_h} = \begin{bmatrix} hp \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} hk \\ p \end{bmatrix},$$

also

$$\begin{bmatrix} pi \\ k \end{bmatrix} - \frac{\partial \omega_{pk}}{\partial x_i} = -\begin{bmatrix} ik \\ p \end{bmatrix}, \qquad \frac{\partial \omega_{pk}}{\partial x_h} - \begin{bmatrix} ph \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} hk \\ p \end{bmatrix},$$

und die in Rede stehende Summe wird

$$= \frac{\partial \begin{bmatrix} gh \\ k \end{bmatrix}}{\partial x_i} - \frac{\partial \begin{bmatrix} gi \\ k \end{bmatrix}}{\partial x_h} + \sum_p \left(\begin{Bmatrix} gi \\ p \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} hk \\ p \end{bmatrix} - \begin{Bmatrix} gh \\ p \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} ik \\ p \end{bmatrix} \right).$$

Diesen Ausdruck bezeichne ich von hier ab durch $(gkhi)$, so dass, wenn die Grössen $\begin{Bmatrix} gi \\ p \end{Bmatrix}$, $\begin{Bmatrix} gh \\ p \end{Bmatrix}$ mittelst der Gleichungen (7.) weggeschafft werden,

$$(13.) \qquad (gkhi) = \frac{\partial \begin{bmatrix} gh \\ k \end{bmatrix}}{\partial x_i} - \frac{\partial \begin{bmatrix} gi \\ k \end{bmatrix}}{\partial x_h} + \sum_{\alpha\beta} \frac{E_{\alpha\beta}}{E} \left(\begin{bmatrix} gi \\ \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} hk \\ \beta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} gh \\ \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ik \\ \beta \end{bmatrix} \right),$$

oder wenn man die Derivirten ausführt,

$$(14.) \qquad \begin{cases} (gkhi) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \omega_{gi}}{\partial x_h \partial x_k} + \frac{\partial^2 \omega_{hk}}{\partial x_g \partial x_i} - \frac{\partial^2 \omega_{gh}}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial^2 \omega_{ik}}{\partial x_g \partial x_h} \right) \\ \qquad + \sum_{\alpha\beta} \frac{E_{\alpha\beta}}{E} \left(\begin{bmatrix} gi \\ \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} hk \\ \beta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} gh \\ \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ik \\ \beta \end{bmatrix} \right) \end{cases}$$

wird. In Folge dieser Bezeichnung, welche wir auch für die transformirte Form benutzen, nehmen die Integrabilitätsbedingungen (12.) die folgende Gestalt an:

$$(15.) \qquad (\alpha\delta\beta\gamma)' = \sum_{ghik} (gkhi) u_\alpha^g u_\beta^h u_\gamma^i u_\delta^k.$$

Für dieses System von Gleichungen gilt das nämliche Resultat wie für die Gleichungen (12.), dass sie das vollständige System aller zu (9.) gehörigen Integrabilitätsbedingungen bilden, aber nicht die Gleichungen (9.), sondern das allgemeinere System (9'.) unter Voraussetzung der Relationen (11.) nach sich ziehen, also die zu (1.) gehörigen Integrabilitätsbedingungen nicht ersetzen.

Die Coefficienten im vorstehenden Formelnsystem haben folgende Eigenschaften. Vertauscht man in (13.) i mit h, so folgt

$$(16^a.) \qquad (gkih) = -(gkhi).$$

Vertauscht man in (14.) g mit k, so folgt

$$(16^b.) \qquad (kghi) = -(gkhi).$$

Vertauscht man in (14.) g mit i und zugleich k mit h, so ändert sich auf der rechten Seite wegen $E_{\beta\alpha} = E_{\alpha\beta}$ nichts, und es folgt

$$(ihkg) = (gkhi)$$

oder

$$(16^c.) \quad (higk) = (gkhi).$$

Endlich erhält man ohne Weiteres

$$(16^d.) \quad (gkhi)+(ghik)+(gikh) = 0,$$

wobei zu bemerken ist, dass diese vier Formeln auf eine der vorangehenden zurückführen, sobald sich unter den Zahlen $ghik$ zwei gleiche befinden.

Mittelst dieser vier Formeln lässt sich die Anzahl der in (15.) enthaltenen und wesentlich voneinander verschiedenen Relationen leicht bestimmen.

Zunächst sind wegen (a.) und (b.) alle Fälle auszuschliessen, wo $\alpha=\delta$ oder $\beta=\gamma$ ist, sowie diejenigen, welche durch Vertauschung von α mit δ oder von β mit γ folgen. Für $\alpha\delta$ sowie für $\beta\gamma$ sind demnach nur Combinationen ohne Wiederholung der Zahlen $1, 2, \dots n$ zu nehmen, deren Anzahl gleich $\frac{n(n-1)}{2} = n_2$ ist.

Jetzt zerfallen die Ausdrücke $(\alpha\delta\beta\gamma)'$ in drei Gruppen, die erste von n_2 Ausdrücken, welche der Voraussetzung $\alpha\delta=\beta\gamma$ entsprechen, die zweite von $\frac{n_2(n_2-1)}{2}$ Ausdrücken, in denen $\alpha\delta$ nicht gleich $\beta\gamma$ ist, während die dritte Gruppe von gleichviel Ausdrücken, welche sich aus der zweiten durch Vertauschung von $\alpha\delta$ mit $\beta\gamma$ ergiebt, wegen (c.) auszuschliessen ist. Also erhalten wir wegen (a.), (b.) und (c.) nur $\frac{n_2(n_2+1)}{2}$ Ausdrücke $(\alpha\delta\beta\gamma)'$.

Da aber jede Gruppe $\alpha\delta\beta\gamma$, in welcher keine Zahl mehr als einmal vorkommt, eine Gleichung (d.) liefert, so lassen sich im Ganzen

$$n_4 = \tfrac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)$$

von den eben erwähnten Ausdrücken durch andere darstellen, und es bleiben nur

$$\frac{n_2(n_2+1)}{2} - n_4 = \frac{n^2(n^2-1)}{12}$$

von einander wesentlich verschiedene Ausdrücke $(\alpha\delta\beta\gamma)'$ übrig; dies ist demnach die Anzahl der Gleichungen (15.), soweit sie nicht auseinander folgen.

Die Anzahl der Gleichungen (10.) ist $\frac{n(n+1)}{2}$; addirt man dies zur vorstehenden Zahl, so erhält man

$$\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n^2(n^2-1)}{12} = n^2+n+\frac{(n+2)(n+1)n(n-3)}{12},$$

und es ist demnach für $n=2$ die Anzahl der Gleichungen (10.) und (15.) kleiner als die Anzahl n^2+n der in ihnen vorkommenden Unbekannten, nämlich der ursprünglichen Variabeln und ihrer ersten Derivirten, für $n=3$ ist sie dieser gleich und für $n>3$ ist sie grösser als die letztere.

6.

Ebenso wie die Gleichungen (10.) als Transformationsrelationen zur Gleichung (1.) oder (2.) gehören, so sind auch die Gleichungen (15.), wie aus ihrer Form hervorgeht, die Transformationsrelationen zu einer Form vierter Ordnung. Bevor wir zur Herstellung dieser Form übergehen, werden wir nachweisen, wie man allgemein aus den zu irgend einer Form gehörigen Transformationsrelationen mittelst der Gleichungen (9.) zu den Transformationsrelationen für eine neue Form gelangen kann, deren Ordnung um Eins grösser ist wie die Ordnung der ursprünglichen Form.

Sei

$$G_\mu = \sum_{i_1 \dots i_\mu} (i_1 i_2 \dots i_\mu) \underset{1}{\partial x_{i_1}} \underset{2}{\partial x_{i_2}} \dots \underset{\mu}{\partial x_{i_\mu}}$$

eine aus den Coefficienten von F abgeleitete und in den Differentialen $\underset{1}{\partial x}$, $\underset{2}{\partial x}, \dots \underset{\mu}{\partial x}$ μ-fach lineare Form, G'_μ ihre transformirte, mithin allgemein

$$(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\mu)' = \sum_{i_1 \dots i_\mu} (i_1 i_2 \dots i_\mu) u^{i_1}_{\alpha_1} u^{i_2}_{\alpha_2} \dots u^{i_\mu}_{\alpha_\mu},$$

wo wie bisher

$$u^i_\alpha = \frac{\partial x_i}{\partial x'_\alpha}$$

zu setzen ist. Differentiirt man nun nach x'_α, so folgt

$$\frac{\partial (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\mu)'}{\partial x'_\alpha} = \sum_{i \dots i_\mu} \frac{\partial (i_1 i_2 \dots i_\mu)}{\partial x_i} u^i_\alpha u^{i_1}_{\alpha_1} \dots u^{i_\mu}_{\alpha_\mu} + P,$$

$$\begin{aligned} P = & \sum_{\lambda i_2 \dots i_\mu} (\lambda i_2 \dots i_\mu) \frac{\partial^2 x_\lambda}{\partial x'_\alpha \partial x'_{\alpha_1}} u^{i_2}_{\alpha_2} \dots u^{i_\mu}_{\alpha_\mu} \\ & + \sum_{i_1 \lambda \dots i_\mu} (i_1 \lambda \dots i_\mu) u^{i_1}_{\alpha_1} \frac{\partial^2 x_\lambda}{\partial x'_\alpha \partial x'_{\alpha_2}} \cdots u^{i_\mu}_{\alpha_\mu} + \cdots. \end{aligned}$$

Setzt man nun in P für die zweiten Derivirten ihre Werthe

$$\frac{\partial^2 x_\lambda}{\partial x'_\alpha \partial x'_{\alpha_s}} = \sum_r \begin{Bmatrix} \alpha \alpha_s \\ r \end{Bmatrix}' u^\lambda_r - \sum_{i i_s} \begin{Bmatrix} i i_s \\ \lambda \end{Bmatrix} u^i_\alpha u^{i_s}_{\alpha_s}$$

ein, so erhält man für P eine Differenz $U - V$, wo

$$\begin{aligned} U = & \sum_r \begin{Bmatrix} \alpha \alpha_1 \\ r \end{Bmatrix}' \sum_{\lambda i_2 \dots i_\mu} (\lambda i_2 \dots i_\mu) u^\lambda_r u^{i_2}_{\alpha_2} \dots u^{i_\mu}_{\alpha_\mu} \\ & + \sum_r \begin{Bmatrix} \alpha \alpha_2 \\ r \end{Bmatrix}' \sum_{i_1 \lambda \dots i_\mu} (i_1 \lambda \dots i_\mu) u^{i_1}_{\alpha_1} u^\lambda_r \dots u^{i_\mu}_{\alpha_\mu} + \cdots \\ = & \sum_r \left[\begin{Bmatrix} \alpha \alpha_1 \\ r \end{Bmatrix}' (r \alpha_2 \dots \alpha_\mu)' + \begin{Bmatrix} \alpha \alpha_2 \\ r \end{Bmatrix}' (\alpha_1 r \dots \alpha_\mu)' + \cdots \right] \end{aligned}$$

und

$$V = \sum_{i \dots i_\mu} u^i_\alpha u^{i_1}_{\alpha_1} \dots u^{i_\mu}_{\alpha_\mu} \sum_\lambda \left[\begin{Bmatrix} i i_1 \\ \lambda \end{Bmatrix} (\lambda i_2 \dots i_\mu) + \begin{Bmatrix} i i_2 \\ \lambda \end{Bmatrix} (i_1 \lambda \dots i_\mu) + \cdots \right]$$

ist. Führt man den hierdurch bestimmten Werth von P ein, und bringt U auf die linke Seite der Gleichung, während auf der rechten alles unter ein Summenzeichen gebracht wird, so ergiebt sich folgendes Resultat:

Unter der Voraussetzung, dass alle Integrabilitätsbedingungen erfüllt sind, erhält man aus jedem vollständigen System von Transformationsrelationen μ^{ter} Ordnung

$$(17^a.)\qquad (\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\mu)' = \sum_{i_1\ldots i_\mu}(i_1 i_2\ldots i_\mu)\, u^{i_1}_{\alpha_1} u^{i_2}_{\alpha_2}\ldots u^{i_\mu}_{\alpha_\mu}$$

ein neues vollständiges System von Transformationsrelationen $(\mu+1)^{ter}$ Ordnung

$$(17^b.)\qquad (\alpha\alpha_1\ldots\alpha_\mu)' = \sum_{i\ldots i_\mu}(ii_1\ldots i_\mu)\, u^{i}_{\alpha} u^{i_1}_{\alpha_1}\ldots u^{i_\mu}_{\alpha_\mu},$$

wenn man

$$(17^c.)\qquad (ii_1\ldots i_\mu) = \frac{\partial(i_1 i_2\ldots i_\mu)}{\partial x_i} - \sum_\lambda\left[\left\{\begin{matrix} ii_1 \\ \lambda \end{matrix}\right\}(\lambda i_2\ldots i_\mu) + \left\{\begin{matrix} ii_2 \\ \lambda \end{matrix}\right\}(i_1\lambda\ldots i_\mu) + \cdots\right]$$

setzt und diese Bezeichnung auch für die transformirte Form benutzt.

Mittelst dieses Satzes kann man aus einer Gleichung $G_\mu = G'_\mu$ eine Reihe ähnlicher Gleichungen $G_{\mu+1} = G'_{\mu+1}$, $G_{\mu+2} = G'_{\mu+2}$, u. s. w. ableiten, bis man auf identische Relationen oder solche kommt, die aus früheren zusammengesetzt sind.

Der erste Fall tritt bei der Function F selbst ein. Nimmt man nämlich $(i_1 i_2) = \omega_{i_1 i_2}$, so wird

$$\begin{aligned}(ii_1 i_2) &= \frac{\partial\omega_{i_1 i_2}}{\partial x_i} - \sum_\lambda\left[\left\{\begin{matrix} ii_1 \\ \lambda \end{matrix}\right\}\omega_{\lambda i_2} + \left\{\begin{matrix} ii_2 \\ \lambda \end{matrix}\right\}\omega_{i_1\lambda}\right] \\ &= \frac{\partial\omega_{i_1 i_2}}{\partial x_i} - \left[\begin{matrix} ii_1 \\ i_2 \end{matrix}\right] - \left[\begin{matrix} ii_2 \\ i_1 \end{matrix}\right]\end{aligned}$$

nach einer in art. 5. benutzten Formel, und dies ist wegen Gleichung (5.) stets gleich Null.

7.

Wir gehen nun zur Darstellung derjenigen homogenen Form G_4 über, zu welcher die Gleichungen (15.) als Transformationsrelationen gehören. Dieselben lauten

$$(18.)\qquad (\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3)' = \sum_{i\ldots i_3}(ii_1 i_2 i_3)\frac{\partial x_i}{\partial x'_\alpha}\frac{\partial x_{i_1}}{\partial x'_{\alpha_1}}\frac{\partial x_{i_2}}{\partial x'_{\alpha_2}}\frac{\partial x_{i_3}}{\partial x'_{\alpha_3}},$$

und es ist wegen (16.)

$$(19.)\qquad \left\{\begin{aligned} &(ii_1 i_3 i_2) = -(ii_1 i_2 i_3),\quad (i_1 i i_2 i_3) = -(ii_1 i_2 i_3),\quad (i_2 i_3 i i_1) = (ii_1 i_2 i_3), \\ &\qquad (ii_1 i_2 i_3) + (ii_2 i_3 i_1) + (ii_3 i_1 i_2) = 0.\end{aligned}\right.$$

Wir multipliciren die Gleichung (18.) mit $\partial x'_\alpha \delta x'_{\alpha_1} Dx'_{\alpha_2} \varDelta x'_{\alpha_3}$, unter ∂, δ, D, $\varDelta$ verschiedene Differentiationszeichen verstanden, und setzen

$$\sum_{i \dots i_3} (i i_1 i_2 i_3)\, \partial x_i \delta x_{i_1} D x_{i_2} \varDelta x_{i_3} = G_4;$$

dann folgt aus (18.) durch Summation über alle Werthe der α

$$G'_4 = G_4.$$

Hier ist also G_4 eine quadrilineare Form der Variabelnsysteme ∂x, δx, Dx, $\varDelta x$, welche alle derselben linearen Substitution unterworfen sind. Aber diese Form ist wegen der Eigenschaften ihrer Coefficienten eine sehr specielle.

Vertauscht man i mit i_1, was nichts ändert, da beide die gleichen Werthe durchlaufen, und ersetzt dann $(i_1 i i_2 i_3)$ durch $-(i i_1 i_2 i_3)$, so folgt, dass G_4 nur sein Zeichen ändert, wenn ∂ mit δ vertauscht wird. Nimmt man für $i i_1$ nur die Combinationen ohne Wiederholung, so folgt

$$G_4 = \Sigma (i i_1 i_3 i_4)(\partial x_i \delta x_{i_1} - \partial x_{i_1} \delta x_i) D x_{i_3} \varDelta x_{i_4}.$$

Das Gleiche ergiebt sich für D und $\varDelta$, wenn i_3 und i_4 vertauscht werden, und es folgt

$$(20.) \qquad G_4 = {}'\Sigma (i i_1 i_2 i_3)(\partial x_i \delta x_{i_1} - \partial x_{i_1} \delta x_i)(D x_{i_2} \varDelta x_{i_3} - D x_{i_3} \varDelta x_{i_2}),$$

wenn der Accent am Summenzeichen bedeutet, dass sowohl für $i i_1$, als für $i_2 i_3$ nur die $\frac{n(n-1)}{2}$ Combinationen ohne Wiederholung der Zahlen $1, 2, \dots n$ gesetzt werden dürfen.

Vertauscht man nun i mit i_2, i_1 mit i_3 und wendet die Gleichung $(i_2 i_3 i i_1) = (i i_1 i_2 i_3)$ an, so folgt, dass G_4 ungeändert bleibt, wenn allgemein $\partial x_i \delta x_k - \partial x_k \delta x_i$ mit $D x_i \varDelta x_k - D x_k \varDelta x_i$ vertauscht wird. Gleichwohl darf man nicht $D = \partial$ und $\varDelta = \delta$ oder eines von beiden setzen, weil sonst die Coefficienten $(i i_1 i_2 i_3)$ und $(i_2 i_1 i i_3)$ oder, was dasselbe ist, $(i i_1 i_2 i_3)$ und $(i i_3 i_2 i_1)$ nicht mehr von einander getrennt bleiben, sondern zu ihrer Summe vereinigt werden, mithin aus $G_4 = G'_4$ nicht mehr alle Transformationsrelationen (18.) hervorgehen können.

Die letzteren ergeben sich auch aus den Formen

$$H_4 = \Sigma (i i_2 i_3 i_1)\, \partial x_i \delta x_{i_1} D x_{i_2} \varDelta x_{i_3} = \Sigma (i i_1 i_2 i_3)\, \partial x_i D x_{i_1} \varDelta x_{i_2} \delta x_{i_3},$$
$$J_4 = \Sigma (i i_3 i_1 i_2)\, \partial x_i \delta x_{i_1} D x_{i_2} \varDelta x_{i_3} = \Sigma (i i_1 i_2 i_3)\, \partial x_i \varDelta x_{i_1} \delta x_{i_2} D x_{i_3},$$

welche aus G_4 durch cyklische Vertauschung von δ, D und $\varDelta$ hervorgehen, und es ist wegen (19.) identisch

$$G_4 + H_4 + J_4 = 0.$$

8.

Ich setze nun voraus, man habe nach art. 6. aus den Coefficienten $(i_1 i_2 i_3 i_4)$ von G_4 neue Ausdrücke $(i i_1 i_2 i_3 i_4)$ abgeleitet und mittelst derselben eine in den Differentialen $\underset{1}{\partial x}, \underset{2}{\partial x}, \underset{3}{\partial x}, \underset{4}{\partial x}, \partial x$ fünffach lineare Form G_5 gebildet. Ebenso sei aus G_5 auf demselben Wege eine sechsfach lineare Form G_6, aus dieser eine siebenfach lineare G_7 abgeleitet worden, u. s. w., bis man auf Formen kommt, deren Coefficienten entweder verschwinden oder auf frühere Formen zurückführen. Dann ergiebt sich das Gleichungssystem

$$(A.) \qquad F = F', \quad G_4 = G_4', \quad G_5 = G_5', \quad \ldots,$$

und es geht aus dem Vorangehenden hervor, dass für die Möglichkeit der ersten von diesen Gleichungen die Möglichkeit aller übrigen erforderlich ist.

Damit aber die Gleichung $F = F'$ möglich sei, ist erforderlich und hinreichend, dass die entsprechenden Transformationsrelationen

$$(F.) \qquad (\alpha_1 \alpha_2)' = \sum_{i_1 i_2} (i_1 i_2) u_{\alpha_1}^{i_1} u_{\alpha_2}^{i_2}$$

für $(ik) = \omega_{ik}$, und zugleich die Integrabilitätsbedingungen

$$(B.) \qquad \frac{\partial u_\alpha^i}{\partial x_\beta'} = \frac{\partial u_\beta^i}{\partial x_\alpha'}$$

erfüllt sind. Denn wenn beide Gleichungssysteme erfüllt sind, so giebt es n Functionen $v_1, v_2, \ldots v_n$ der Beschaffenheit, dass die Gleichungen $(F.)$ durch die allgemeine Annahme

$$u_\alpha^i = \frac{\partial v_i}{\partial x_\alpha'}$$

befriedigt werden, und die Substitution $x_1 = v_1$, $x_2 = v_2$, $\ldots$ $x_n = v_n$ leistet dann die verlangte Transformation von F in F'.

Damit die Gleichung $G_4 = G_4'$ möglich sei, müssen die Transformationsrelationen

$$(G_4.) \qquad (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4)' = \sum_{i_1 \ldots i_4} (i_1 i_2 i_3 i_4) u_{\alpha_1}^{i_1} u_{\alpha_2}^{i_2} u_{\alpha_3}^{i_3} u_{\alpha_4}^{i_4}$$

und die Integrabilitätsbedingungen $(B.)$ erfüllt sein.

Ebenso müssen diese letztern neben den Transformationsrelationen

$$(G_5.) \qquad (\alpha \alpha_1 \ldots \alpha_4)' = \sum_{i \ldots i_4} (i i_1 \ldots i_4) u_\alpha^i u_{\alpha_1}^{i_1} \ldots u_{\alpha_4}^{i_4}$$

erfüllt sein, damit die Gleichung $G_5 = G_5'$ möglich sei, u. s. w.

Dies festgestellt, würde die Transformation von F in F' schon dann unmöglich sein, wenn die verschiedenen Systeme von Transformationsrelationen $(F.)$, $(G_4.)$, $(G_5.)$, $(G_6.)$, u. s. w. algebraisch nicht mit einander bestehen könnten, abgesehen von den nothwendig hinzuzufügenden Integrabilitätsbedingungen $(B.)$.

Ich setze daher, indem von den Gleichungen ($B.$) gänzlich Abstand genommen wird, voraus, die verschiedenen Systeme von Transformationsrelationen, deren Herleitung und Aufeinanderfolge oben festgestellt wurde, seien algebraisch erfüllt; dann handelt es sich darum, ob die Integrabilitätsbedingungen ($B.$), vermittelst deren aus $F = F'$ alle übrigen Gleichungen ($A.$) folgten, überflüssig sind oder nicht.

9.

Um diese Frage, welche der Kernpunkt des ganzen Transformationsproblems ist, zu erledigen, will ich zur Vermeidung überflüssiger Rechnungen die hier erforderlichen Schlüsse zunächst unter einer bestimmten Voraussetzung darlegen, welche keineswegs festgehalten werden soll, und dann erst zur Behandlung der Frage in derjenigen Form übergehen, in welcher sie gestellt werden muss.

Ich will also voraussetzen, 1) dass die Unbekannten x und u beispielsweise durch das Gleichungssystem ($G_4.$) vollständig und ohne Widerspruch bestimmt sind, und dass 2) diese Werthe der Unbekannten auch dem folgenden Gleichungssystem ($G_5.$) genügen.

Nimmt man nun von den Gleichungen ($G_4.$) die Derivirte nach x'_α, so folgt ein Gleichungssystem

$$(G'_4.)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)'}{\partial x'_\alpha} &= \sum_{i\ldots i_4} \frac{\partial(i_1 i_2 i_3 i_4)}{\partial x_i}\,\frac{\partial x_i}{\partial x'_\alpha}\, u^{i_1}_{\alpha_1}\ldots u^{i_4}_{\alpha_4} + \Pi,\\ \Pi &= \sum_{\lambda i_2 i_3 i_4} (\lambda i_2 i_3 i_4)\frac{\partial u^\lambda_{\alpha_1}}{\partial x'_\alpha}\, u^{i_2}_{\alpha_2} u^{i_3}_{\alpha_3} u^{i_4}_{\alpha_4}\\ &\quad + \sum_{i_1 \lambda i_3 i_4} (i_1 \lambda i_3 i_4)\, u^{i_1}_{\alpha_1} \frac{\partial u^\lambda_{\alpha_2}}{\partial x'_\alpha}\, u^{i_3}_{\alpha_3} u^{i_4}_{\alpha_4} + \cdots \end{aligned}\right.$$

In Bezug auf dieses System ist zunächst festzustellen, was aus unserer ersten Voraussetzung folgt, dass durch dasselbe die Werthe aller Derivirten

$$\frac{\partial x_i}{\partial x'_\alpha},\quad \frac{\partial u^\lambda_{\alpha_s}}{\partial x'_\alpha}$$

völlig bestimmt sind, d. h. dass das System ($G'_4.$) eine der Anzahl dieser Unbekannten gleiche Anzahl von Gleichungen enthält, welche in Bezug auf jene von einander unabhängig sind, und keine Gleichung dieses Systems mit andern im Widerspruche ist.

Setzt man nun

$$\frac{\partial x_i}{\partial x'_\alpha} - u^i_\alpha = \binom{i}{\alpha}$$

$$\frac{\partial u^\lambda_{\alpha_s}}{\partial x'_\alpha} + \sum_{ii_s} \begin{Bmatrix} ii_s \\ \lambda \end{Bmatrix} u^i_\alpha u^{i_s}_{\alpha_s} - \sum_r \begin{Bmatrix} \alpha\alpha_s \\ r \end{Bmatrix}' u^\lambda_r = \binom{\lambda}{\alpha\alpha_s},$$

so sind $\binom{i}{\alpha} = 0$, $\binom{\lambda}{\alpha\alpha_s} = 0$ die Gleichungen, mittelst deren in art. 6. aus den vorstehenden Gleichungen $(G'_4.)$ die soeben als die Unbekannten dieses Systems bezeichneten Derivirten weggeschafft wurden, wodurch jene in die Gleichungen $(G_5.)$ übergingen.

Schafft man statt dessen diese Derivirten aus den Gleichungen $(G'_4.)$ mittelst der vorstehenden Formeln weg, so erhält man auf der rechten Seite einen in den Grössen $\binom{i}{\alpha}$, $\binom{\lambda}{\alpha\alpha_s}$ linearen Theil U_4, der sich von der ursprünglichen rechten Seite von $(G'_4.)$ nur dadurch unterscheidet, dass $\frac{\partial x_i}{\partial x'_\alpha}$ durch $\binom{i}{\alpha}$, $\frac{\partial u^\lambda_{\alpha_s}}{\partial x'_\alpha}$ durch $\binom{\lambda}{\alpha\alpha_s}$ ersetzt ist. Die übrigen Glieder heben sich gegen die linke Seite weg, da wir voraussetzen, dass die Gleichungen $(G_5.)$ erfüllt sind. Folglich gehen die Gleichungen $(G'_4.)$ über in ein Gleichungssystem

$$U_4 = 0,$$

welches aus jenen erhalten wird, wenn die Unbekannten durch $\binom{i}{\alpha}$, $\binom{\lambda}{\alpha\alpha_s}$ ersetzt, und alle unabhängigen Glieder unterdrückt werden.

Dieses System enthält also ebenfalls eine der Anzahl der Unbekannten $\binom{i}{\alpha}$, $\binom{\lambda}{\alpha\alpha_s}$ gleiche Anzahl von Gleichungen, welche in Bezug auf jene von einander unabhängig sind. Folglich können diese Gleichungen nur dadurch befriedigt werden, dass man allgemein $\binom{i}{\alpha} = 0$, $\binom{\lambda}{\alpha\alpha_s} = 0$, also namentlich für jedes i und α

$$u^i_\alpha = \frac{\partial x_i}{\partial x'_\alpha}$$

setzt.

Wenn daher die Gleichungen $(G_4.)$ allein alle Unbekannten völlig bestimmen, und die ihnen genügenden Werthe derselben auch die aus $(G_4.)$ fliessenden Gleichungen $(G_5.)$ befriedigen, so sind alle Integrabilitätsbedingungen erfüllt, so dass bei diesen Voraussetzungen die Gleichungen $(B.)$ überflüssig werden.

10.

Es bedarf nach dem Vorhergehenden keiner neuen Rechnung, um einzusehen, dass diese Folgerungen auch noch stattfinden, wenn alle Unbekannten durch die Gleichungssysteme (G_p), (G_q), (G_r), ... ohne Widerspruch völlig bestimmt sind und zugleich den Gleichungen (G_{p+1}), (G_{q+1}), (G_{r+1}), ... Genüge leisten, welche sich aus diesen nach art. 6. ergeben. In der That folgt dann aus jedem System (G_s) mit Rücksicht auf (G_{s+1}) ein Gleichungssystem $U_s = 0$, und es muss sich dann unter der Schaar von Gleichungen

$$U_p = 0, \quad U_q = 0, \quad U_r = 0, \quad \ldots$$

eine Gruppe finden, welche ebenso viel Gleichungen enthält als Unbekannte vorhanden sind, und deren Determinante von Null verschieden ist.

Zu den Gleichungen, aus denen man die ursprünglichen Unbekannten x und u zu bestimmen hat, gehören in erster Linie die Transformationsrelationen $(F.)$ selbst; sie unterscheiden sich von den übrigen ausser ihnen zu verwendenden Gleichungssystemen, z. B. von den Gleichungen $(G_4.)$ dadurch, dass die aus ihnen nach art. 6. abzuleitenden Gleichungen identisch erfüllt sind, indem sich für $(i_1 i_2) = \omega_{i_1 i_2}$, $(i i_1 i_2) = 0$ ergab. Folglich erhalten wir den Lehrsatz:

Aus dem ursprünglichen Differentialausdrucke F leite man zunächst nach den artt. 5. und 7. die Form G_4 ab, und dann aus dieser nach art. 6. die Formenreihe G_5, G_6, u. s. w. Wenn alsdann durch die Transformationsrelationen, welche zu den Gleichungen

$$F = F', \quad G_4 = G_4', \quad G_5 = G_5', \quad \ldots \quad G_p = G_p'$$

gehören, die Werthe der Unbekannten x und u ohne Widerspruch völlig bestimmt sind, und die nämlichen Werthe der Unbekannten auch noch den Transformationsrelationen Genüge leisten, welche sich aus der nächstfolgenden Gleichung

$$G_{p+1} = G'_{p+1}$$

ergeben, so sind zugleich alle für die Transformation von F in F' erforderlichen Integrabilitätsbedingungen erfüllt, und es wird allgemein

$$u_\alpha^i = \frac{\partial x_i}{\partial x'_\alpha}.$$

Durch diesen Lehrsatz, welcher in allen Fällen, wo er Anwendung findet, die Frage nach den Integrabilitätsbedingungen überflüssig macht, wird für die Anwendungen der algebraischen Invariantentheorie ein neues und fruchtbares Gebiet eröffnet.

In der That kommt bei der Anwendung dieses Satzes der Umstand nicht mehr in Betracht, dass die Grössen $\partial x, \underset{1}{\partial x}, \ldots$ vollständige Differentiale bedeuten, sondern man hat $F, G_4, G_5, \ldots$ nur noch als algebraische homogene Formen mit den Variabelnsystemen $\partial x, \underset{1}{\partial x}, \ldots$ zu betrachten, unter der Voraussetzung, dass alle Variabelnsysteme der nämlichen linearen Substitution unterliegen.

Unter dieser Bedingung hat man nun, was aus rein algebraischen Gründen entschieden wird, die Reihe der aufeinanderfolgenden Formen $F, G_4, G_5, \ldots$ soweit fortzusetzen, bis sie n absolute Invarianten und ebensoviel zugehörige Formen Ψ_s liefern, von denen die ersten *in Bezug auf die Variabeln* x, die letztern überhaupt von einander unabhängig sind. Sodann hat man noch für die um ein Glied weiter fortgesetzte Formenreihe $F, G_4, G_5, \ldots$ ein vollständiges System von Invarianten $I, I_1, \ldots$ zu ermitteln, welche *in Bezug auf die Coefficienten dieser Formen* von einander unabhängig sind.

Dann besteht das System aller für die Möglichkeit der Transformation von F in F' erforderlichen und ausreichenden Bedingungen in den Gleichungen

$$I' = r^{\lambda} I, \quad I_1' = r^{\lambda_1} I_1, \; \ldots,$$

wo r die Substitutionsdeterminante ist, und die Exponenten λ constante Werthe haben.

Es ist angemessen, *diese Invarianten* $I, I_1, \ldots$ *der hinreichend weit, aber nicht weiter als nöthig fortgesetzten Formenreihe* $F, G_4, G_5, \ldots$ *auch als ein vollständiges System von Invarianten des Differentialausdruckes* F *zu bezeichnen.*

Seien $U_1, U_2, \ldots U_n$ die Variabeln in den ursprünglichen, $V_1, V_2, \ldots V_n$ dieselben in den transformirten zugehörigen Formen, so dass zur ursprünglichen Substitution

$$\partial x_i = \sum_{\alpha} u_{\alpha}^{i} \partial x_{\alpha}'$$

die transponirte

$$V_{\alpha} = \sum_{i} u_{\alpha}^{i} U_i$$

gehört. Sind unter dieser Voraussetzung die Gleichungen zwischen den zugehörigen Formen die folgenden

$$\Psi_s'(V_1, V_2, \ldots) = r^{\mu_s} \; \Psi_s(U_1, U_2, \ldots),$$

für $s = 1, 2, \ldots n$ und constante Werthe der μ, so folgen, wenn unter Ω eine beliebige Function der ursprünglichen Variabeln verstanden, und allgemein

$$U_i = \frac{\partial \Omega}{\partial x_i}$$

gesetzt wird, die Gleichungen

$$\Psi'_s\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x'_1}, \frac{\partial\Omega}{\partial x'_2}, \ldots\right) = r^{\mu_s}\,\Psi_s\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x_1}, \frac{\partial\Omega}{\partial x_2}, \ldots\right).$$

Solche, eine willkürliche Function Ω enthaltende Ausdrücke

$$\Psi_s\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x_1}, \frac{\partial\Omega}{\partial x_2}, \ldots\right)$$

müssen als zugehörige Formen des Differentialausdruckes F bezeichnet werden.

Ebenso liefern die Covarianten des Systems F, G_4, G_5, ... n Gleichungen

$$\Phi'_s(\partial x'_1, \partial x'_2, \ldots) = r^{\nu_s}\,\Phi_s(\partial x_1, \partial x_2, \ldots),$$

und *die Differentialausdrücke*

$$\Phi_s(\partial x_1, \partial x_2, \ldots)$$

müssen als Covarianten des Differentialausdruckes F selbst bezeichnet werden.

11.

Um den Inhalt des im vorigen art. gefundenen Satzes genau festzustellen, muss hervorgehoben werden, dass die Bedingungen desselben nicht unter allen Umständen erfüllt werden können. Wenn es sich z. B. um die Frage handelt, ob zwei gegebene Oberflächen auf einander ohne Dehnung abgewickelt werden können, so hat man eine Gleichung $F = F'$ für $n = 2$ zu untersuchen. Wenn nun die Abwickelung einer Fläche auf die andere, also die vorstehende Gleichung möglich ist, so wird man aus den in den Gleichungen $F = F'$, $G_4 = G'_4$, $G_5 = G'_5, \ldots$ enthaltenen Transformationsrelationen, wie weit diese Reihe auch fortgesetzt werden mag, doch in denjenigen Fällen niemals bestimmte Werthe der x und u erhalten, wo die vorgelegten Flächen in sich selbst stetig verschoben werden können, weil in diesen Fällen die Transformationsrelationen, ohne Aenderungen der neuen Variabeln, stetige Aenderungen der ursprünglichen gestatten.

Es ist hiernach leicht, die Bedingungen für den allgemeinen Fall anzugeben, welcher der Verschiebbarkeit einer Fläche in sich selbst entspricht.

Das Grössengebiet der Variabeln x_1, x_2, ... x_n wird ein bei unveränderlichem F in sich verschiebbares genannt, wenn durch das Resultat der Transformation von F die anzuwendende Substitution nicht völlig bestimmt ist. Es ist klar, dass die sämmtlichen Bedingungen für das Stattfinden dieses Falles in identischen Gleichungen zwischen solchen Invarianten und zugehörigen Formen von F bestehen, welche unter den Voraussetzungen des vorigen art. von einander unabhängige Functionen der Variabeln x und u sind.

In diesem Falle werden die Integrabilitätsbedingungen nicht überflüssig, weil man allen Transformationsrelationen genügen kann, ohne die in art. 9. durch $\binom{i}{\alpha}$, $\binom{\lambda}{\alpha\alpha_s}$ bezeichneten Ausdrücke gleich 0 zu setzen.

Für alle übrigen Fälle gilt das schöne, und aus der Natur der Sache keineswegs a priori zu erwartende Resultat, dass alle für die Möglichkeit der Transformation von F in F' nothwendigen und ausreichenden Bedingungen sich als Gleichungen zwischen Invarianten darstellen lassen, wenn dieser Ausdruck zur Bezeichnung der gleichen Formverhältnisse wie in der Algebra angewandt wird, und dass auch bei dem hier behandelten Transformationsproblem zugehörige Formen und Covarianten genau in derselben Bedeutung, wenn auch aus ganz anderer Quelle auftreten, wie bei den analogen algebraischen Problemen.

12.

Als Beispiel zur vorangehenden Theorie behandle ich den Fall $n=3$, bei welchem sich merkwürdige Vereinfachungen darbieten.

Werden wie in Gleichung (20.) für $i_1 i_2$ ebenso wie für $k_1 k_2$ nur Combinationen ohne Wiederholung der Zahlen 123, also z. B. nur die Gruppen 23, 31, 12 genommen, so kann man die Transformationsrelationen (18.) von G_4 in die Form

$$(\beta_1\beta_2\gamma_1\gamma_2)' = {}'\Sigma(i_1 i_2 k_1 k_2)(u^{i_1}_{\beta_1} u^{i_2}_{\beta_2} - u^{i_1}_{\beta_2} u^{i_2}_{\beta_1})(u^{k_1}_{\gamma_1} u^{k_2}_{\gamma_2} - u^{k_1}_{\gamma_2} u^{k_2}_{\gamma_1})$$

setzen.

Ich bestimme nun vier Zahlen β, γ, i und k durch die Bedingung, dass $\beta\beta_1\beta_2$, $\gamma\gamma_1\gamma_2$, ii_1i_2 und kk_1k_2 positive Permutationen der Zahlen 123 werden, so dass also gleichzeitig z. B.

$$\begin{aligned} &\beta=1, \quad \beta_1=2, \quad \beta_2=3, \\ \text{oder} \quad &\beta=2, \quad \beta_1=3, \quad \beta_2=1, \\ \text{oder} \quad &\beta=3, \quad \beta_1=1, \quad \beta_2=2 \end{aligned}$$

wird. Man erkennt hieraus, dass auch umgekehrt durch den Werth von β sowohl β_1 als β_2 bestimmt ist.

Dies festgestellt, bezeichne ich die aus einer Aenderung von u^i_α hervorgehende Unterdeterminante von r durch r^i_α und setze, da $i_1 i_2$ sowie $k_1 k_2$ durch die Werthe von i und k völlig bestimmt sind,

$$(i_1 i_2 k_1 k_2) = A_{ik},$$

so dass nach (14.)

$$(a.)\quad \begin{cases} A_{11} = \frac{1}{2}\left(2\frac{\partial^2\omega_{23}}{\partial x_2\partial x_3} - \frac{\partial^2\omega_{22}}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2\omega_{33}}{\partial x_2^2}\right) + \sum_{\alpha\beta}\frac{E_{\alpha\beta}}{E}\left(\begin{bmatrix}23\\\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}23\\\beta\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}22\\\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}33\\\beta\end{bmatrix}\right) \\ A_{23} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\omega_{23}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\omega_{11}}{\partial x_2\partial x_3} - \frac{\partial^2\omega_{12}}{\partial x_1\partial x_3} - \frac{\partial^2\omega_{13}}{\partial x_1\partial x_2}\right) + \sum_{\alpha\beta}\frac{E_{\alpha\beta}}{E}\left(\begin{bmatrix}11\\\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}23\\\beta\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}12\\\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}13\\\beta\end{bmatrix}\right) \end{cases}$$

wird, woraus die übrigen durch cyklische Vertauschung von 123 folgen.

Dann nehmen die Transformationsrelationen von G_4 die einfache Form an:

$$(b.)\qquad A'_{\beta\gamma} = \sum_{ik} A_{ik} r^i_\beta r^k_\gamma.$$

In ähnlicher Weise lassen sich die zu $F = F'$ gehörigen Transformationsrelationen, wie z. B. aus der zugehörigen Form von F hervorgeht, durch die folgenden ersetzen:

$$(c.)\qquad E'_{\beta\gamma} = \sum_{ik} E_{ik} r^i_\beta r^k_\gamma.$$

Hierzu gehört die Bemerkung, dass wegen der Gleichungen (19.)

$$(d.)\qquad A_{ki} = A_{ik}$$

ist und, was später zur Anwendung kommt, A_{ik} sein Zeichen wechselt, wenn i_1 und i_2 oder k_1 und k_2 mit einander vertauscht werden.

Die Gleichungen (*b.*) und (*c.*) sind hiernach nichts anderes als die Transformationsrelationen für die simultane Ueberführung der ternären quadratischen Formen

$$\Gamma = \sum_{ik} A_{ik} X_i X_k,$$
$$\Phi = \sum_{ik} E_{ik} X_i X_k$$

in die folgenden

$$\Gamma' = \sum_{ik} A'_{ik} \Xi_i \Xi_k,$$
$$\Phi' = \sum_{ik} E'_{ik} \Xi_i \Xi_k$$

mittelst der linearen Substitution

$$(e.)\qquad X_i = \sum_\beta r^i_\beta \Xi_\beta,$$

deren Determinante

$$R = r^2$$

ist, und zu welcher die inverse Substitution

$$(e'.)\qquad \Xi_\beta = \sum_i \frac{1}{r} u^i_\beta X_i$$

gehört.

Es ist bekannt, dass dieses Transformationsproblem ein bestimmtes ist, indem vier simultane Invarianten und drei zugehörige Formen existiren, welche in Bezug auf die Variabeln der letztern und die Coefficienten von Γ, Φ von einander unabhängig sind. Daraus ergeben sich drei absolute Invarianten; wenn diese auch in Bezug auf die Variabeln x_1, x_2, x_3 von einander unabhängig sind, so ist es nach dem Lehrsatze des art. 10. für die gegenwärtige Untersuchung nur noch nöthig, zu F und G_4 die nächstfolgende Form G_5 abzuleiten. Nun ist nach art. 6.

$$(g i_1 i_2 k_1 k_2) = \frac{\partial (i_1 i_2 k_1 k_2)}{\partial x_g} - \sum_\lambda \Big[\begin{Bmatrix} g i_1 \\ \lambda \end{Bmatrix} (\lambda i_2 k_1 k_2) + \begin{Bmatrix} g i_2 \\ \lambda \end{Bmatrix} (i_1 \lambda k_1 k_2)$$
$$+ \begin{Bmatrix} g k_1 \\ \lambda \end{Bmatrix} (i_1 i_2 \lambda k_2) + \begin{Bmatrix} g k_2 \\ \lambda \end{Bmatrix} (i_1 i_2 k_1 \lambda) \Big].$$

In dieser Summe hat man im ersten Gliede für λ nur die Werthe i_1 und i zu nehmen, da $(i_2 i_2 k_1 k_2) = 0$ ist. Verfährt man ebenso bei den übrigen Gliedern, und vertauscht in den Fällen, wo $\lambda = i$ oder $= k$ gesetzt wird, diesen Index mit dem zugehörigen, so folgt zunächst

$$(g i_1 i_2 k_1 k_2) = \frac{\partial (i_1 i_2 k_1 k_2)}{\partial x_g} - (i_1 i_2 k_1 k_2) \Big[\begin{Bmatrix} g i_1 \\ i_1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} g i_2 \\ i_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} g k_1 \\ k_1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} g k_2 \\ k_2 \end{Bmatrix} \Big]$$
$$+ \begin{Bmatrix} g i_1 \\ i \end{Bmatrix} (i_2 i k_1 k_2) + \begin{Bmatrix} g i_2 \\ i \end{Bmatrix} (i i_1 k_1 k_2) + \begin{Bmatrix} g k_1 \\ k \end{Bmatrix} (i_1 i_2 k_2 k) + \begin{Bmatrix} g k_2 \\ k \end{Bmatrix} (i_1 i_2 k k_1).$$

Nun sind $i_1 i_2 i$, $i_2 i i_1$ und $k_1 k_2 k$, $k_2 k k_1$ zugleich mit $i i_1 i_2$ und $k k_1 k_2$ positive Permutationen von 123; also folgt, wenn rechts in der Klammer des Subtrahenden noch $\begin{Bmatrix} g i \\ i \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} g k \\ k \end{Bmatrix}$ addirt wird:

$$(g i_1 i_2 k_1 k_2) = \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_g} - 2 A_{ik} \sum_r \begin{Bmatrix} g r \\ r \end{Bmatrix}$$
$$+ \begin{Bmatrix} g i \\ i \end{Bmatrix} A_{ik} + \begin{Bmatrix} g i_1 \\ i \end{Bmatrix} A_{i_1 k} + \begin{Bmatrix} g i_2 \\ i \end{Bmatrix} A_{i_2 k} + \begin{Bmatrix} g k \\ k \end{Bmatrix} A_{ik} + \begin{Bmatrix} g k_1 \\ k \end{Bmatrix} A_{i k_1} + \begin{Bmatrix} g k_2 \\ k \end{Bmatrix} A_{i k_2}.$$

Diesen durch die Werthe g, i, k völlig bestimmten Ausdruck bezeichne ich durch A_{gik}, so dass

$$(g i_1 i_2 k_1 k_2) = A_{gik},$$

und nach der leicht herzuleitenden Formel

$$2 \sum_r \begin{Bmatrix} g r \\ r \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial x_g}$$

$$(f.) \qquad A_{gik} = \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_g} - \frac{A_{ik}}{E} \frac{\partial E}{\partial x_g} + \sum_\lambda \Big[\begin{Bmatrix} g \lambda \\ i \end{Bmatrix} A_{\lambda k} + \begin{Bmatrix} g \lambda \\ k \end{Bmatrix} A_{i \lambda} \Big]$$

wird. Dieser Ausdruck hat die Eigenschaft, ungeändert zu bleiben, wenn i mit k, dagegen sein Zeichen zu wechseln, wenn i_1 mit i_2 oder k_1 mit k_2 vertauscht wird. In Folge dessen lassen sich die zu $G_5 = G'_5$ gehörigen Transformationsrelationen

$$A'_{\alpha\beta\gamma} = \sum_{g i_1 i_2 k_1 k_2} A_{gik} u^g_\alpha u^{i_1}_{\beta_1} u^{i_2}_{\beta_2} u^{k_1}_{\gamma_1} u^{k_2}_{\gamma_2}$$

in die einfachere Form

$$(g.)\qquad A'_{\alpha\beta\gamma} = \sum_{gik} A_{gik}\, u^g_\alpha\, r^i_\beta\, r^k_\gamma$$

bringen und führen nun zu einem weitern merkwürdigen Resultate.

Sind nämlich für die zugehörigen Formen von Γ und Φ $U_1 U_2 U_3$ die ursprünglichen, $V_1 V_2 V_3$ die neuen Variabeln, so dass die entsprechende, zu $(e.)$ transponirte Substitution wird

$$(h.)\qquad V_\alpha = \sum_g r^g_\alpha\, U_g,$$

woraus durch Umkehrung

$$(h'.)\qquad U_g = \sum_\alpha \frac{1}{r}\, u^g_\alpha\, V_\alpha$$

folgt, so erhält man aus der Gleichung $(g.)$, indem man mit $V_\alpha \Xi_\beta \Xi_\gamma$ multiplicirt und nach α, β, γ summirt:

$$\sum_{\alpha\beta\gamma} A'_{\alpha\beta\gamma}\, V_\alpha\, \Xi_\beta\, \Xi_\gamma = r \sum_{gik} A_{gik}\, U_g\, X_i\, X_k.$$

Da aber $r = R^{\frac{1}{2}}$ eine Potenz der Substitutionsdeterminante ist, und in beiden Summen sowohl die Variabeln der ursprünglichen als auch die der zugehörigen Formen vorkommen, so müssen dieselben entsprechende simultane Zwischenformen sein, und wir können demnach den folgenden Lehrsatz aussprechen:

Um die für die Möglichkeit der Transformation eines ternären quadratischen Differentialausdruckes

$$F = \Sigma\, \omega_{ik}\, \partial x_i\, \partial x_k$$

in einen andern

$$F' = \Sigma\, \omega'_{ik}\, \partial x'_i\, \partial x'_k$$

erforderlichen und ausreichenden Bedingungen und, falls dieselben erfüllt sind, die Substitution zu erhalten, welche die verlangte Transformation leistet, bilde man mittelst der Coefficienten von F die drei algebraischen ternären Formen

$$\Gamma = \Sigma\, A_{ik}\, X_i\, X_k,$$
$$\Phi = \Sigma\, E_{ik}\, X_i\, X_k,$$
$$\Theta = \Sigma\, A_{gik}\, U_g\, X_i\, X_k,$$

und für F' in gleicher Weise die entsprechenden Formen Γ', Φ', Θ' mit den Variabeln Ξ und V an Stelle von X und U.

Dann sind die verlangten Bedingungen genau die nämlichen, welche erforderlich sind und hinreichen, damit durch eine directe Substitution

$$X_i = \sum_\alpha r^i_\alpha\, \Xi_\alpha$$

Γ in Γ', Φ in Φ' transformirt werde, und unter Voraussetzung der transponirten Substitution

$$V_\alpha = \sum_i r^i_\alpha U_i$$

gleichzeitig Θ und Θ' entsprechende Zwischenformen werden, welche der Gleichung

$$\Theta' = R^{\frac{1}{2}}\Theta$$

genügen.

Dieser Satz findet jedoch nur unter der Voraussetzung statt, dass die sechs absoluten zugehörigen Formen und Invarianten von Γ, Φ von einander unabhängige Functionen der Variabeln $x_1 x_2 x_3 U_1 U_2 U_3$ sind.

Ist diese Bedingung erfüllt, so erhält man aus den Gleichungen zwischen den ursprünglichen und transformirten Covarianten von Γ, Φ die Coefficienten $\frac{1}{r} u^i_\beta$ der inversen Substitution, also da r durch die Invarianten bestimmt ist, u^i_β selbst und zwar so, dass allgemein

$$u^i_\beta = \frac{\partial x_i}{\partial x'_\beta}$$

wird.

Ist sie nicht erfüllt, so folgt statt des vorstehenden Satzes das Resultat, dass das Grössengebiet der Variabeln $x_1 x_2 x_3$ ohne Aenderung von F stetig in sich verschoben werden kann.

Aus art. 10. folgt, dass unter den Voraussetzungen des vorstehenden Satzes alle für die Möglichkeit der Transformation von F in F' erforderlichen und ausreichenden Bedingungen sich mittelst der simultanen Invarianten dreier homogenen Formen F, G_4, G_5 und ihrer transformirten darstellen lassen. Dieses Resultat setzt ebenso wie der obige Satz voraus, dass bei der Elimination der Substitutionscoefficienten u^i_α oder r^i_α, aus welcher die in Rede stehenden algebraischen Grundformen hervorgehen, auf Integrabilitätsbedingungen zwischen denselben keinerlei Rücksicht genommen werde.

Nun ist oben gefordert, es sollen sich die Grössen A_{gik} durch die Coefficienten von Γ und Φ, und die Grössen A'_{gik} in der gleichen Weise durch die Coefficienten von Γ' und Φ' so ausdrücken lassen, dass 1) Θ eine simultane Zwischenform von Γ und Φ, 2) Θ' die nämliche simultane Zwischenform von Γ' und Φ', und 3) $\Theta' = R^{\frac{1}{2}}\Theta$ wird. Der Exponent von R zeigt, dass diesen Bedingungen nicht genügt werden kann, wenn die Grössen A_{gik} rationale Functionen der Grössen A_{ik}, E_{ik} sind. Andererseits lassen sich diese Bedingungen sicher befriedigen, wenn F' nicht willkürlich gegeben, sondern aus F durch irgend eine Substitution, z. B. die identische $x_i = x'_i$ abgeleitet worden ist. Also haben wir den Satz:

Man kann für jeden ternären quadratischen Differentialausdruck F die in den Gleichungen (f.) eingeführten Grössen A_{gik} als irrationale Functionen der Coefficienten von Γ und Φ so darstellen, dass Θ eine simultane Zwischenform von Γ und Φ wird, die zu ihrer transformirten in der Beziehung $\Theta' = R^{\frac{1}{3}}\Theta$ steht.

Fügt man zu dieser die Gleichungen $\Gamma' = \Gamma$, $\Phi' = \Phi$ und

$$\Sigma \pm r_1^1 r_2^2 r_3^3 = R,$$

so erhält man 31 Transformationsrelationen, aus denen sich, obgleich die Variabeln von Θ verschiedenen Substitutionen unterworfen sind, die 9 Substitutionscoefficienten r_α^i so eliminiren lassen, dass alle Eliminationsresultate die Invariantenform

$$I' = R^\lambda I$$

annehmen.

In dem Hauptfalle, wo durch das Resultat der Transformation von Γ und Φ die anzuwendende Substitution völlig bestimmt ist, gilt das Gleiche nothwendig auch von den drei Functionen Γ, Φ und Θ. Alsdann ist die Anzahl der von einander unabhängigen Invarianten 1) von Γ und Φ allein gleich 4, 2) von Γ, Φ und Θ zusammen gleich 22, also 3) die Anzahl derjenigen unter ihnen, welche nothwendig Coefficienten von Θ enthalten, gleich 18.

Nach der in art. 10. angewandten Ausdrucksweise hat also der Differentialausdruck F im gegenwärtigen Falle 22 Invarianten überhaupt und 21 absolute, ausserdem drei von einander unabhängige zugehörige Formen und ebenso viel Covarianten.

Ueber die beim vorigen Lehrsatze ausgeschlossenen Differentialausdrücke F, zu denen unter andern das Quadrat des Linienelementes im Raume von drei Dimensionen gehört, liegt eine Abhandlung aus dem Nachlasse *Riemanns* *) vor, zu welcher Herr *Dedekind* die dort unterdrückten analytischen Entwicklungen in Aussicht gestellt hat.

---

*) *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.* Abh. der Göttinger Ges. d. W. vom Jahre 1867, Band XIII.

3. Januar 1869.