Beweis, dass jede Covariante und Invariante einer binären Form eine ganze Function mit numerischen Coefficienten einer endlichen Anzahl solcher Formen ist.

(Von Herrn *Gordan* in Giessen.)

Im 146sten Bande der Philosophical Transactions pag. 101 hat Herr *Cayley* sich mit der Frage beschäftigt, ob alle aus einer binären Form entstehenden Covarianten und Invarianten als ganze Functionen einer begrenzten Anzahl von Formen mit numerischen Coefficienten darstellbar seien; er hat gezeigt, dass bei Formen zweiten, dritten und vierten Grades sich alles in der verlangten Weise ausdrücken lässt. Im Folgenden gebe ich für binäre Formen n^{ten} Grades ein endliches System von Covarianten und Invarianten an, von denen ich zeige, dass und wie alle aus der Form abgeleitete Formen sich als ganze rationale Functionen derselben mit numerischen Coefficienten darstellen lassen. Dieses für den allgemeinen Fall gegebene System ist immer zu gross und lässt sich in jedem besonderen Falle reduciren; für Formen fünften und sechsten Grades habe ich auch diese Reduction ausgeführt und ein möglichst kleines System von Grundformen geliefert. Bezeichnet man durch f eine gegebene binäre Form n^{ten} Grades, dann werde ich im Folgenden ein System von Formen ϑ aufstellen, welche die folgenden beiden Eigenschaften besitzen:

I. Die Anzahl der ϑ ist endlich.

II. Jede Covariante und Invariante J von f, oder wie ich mich kurz ausdrücken will, jede Form J von f ist eine ganze Function der Formen ϑ mit numerischen Coefficienten.

Ich werde eine ganze Function mit numerischen Coefficienten durch F bezeichnen, so dass ich zu zeigen habe, wie jede Form in der Gestalt $J=F(\vartheta)$ darstellbar ist. Dabei setze ich immer voraus, dass für Formen der niederen Ordnungen solche Systeme aufgestellt seien.

§. 1.

Entstehung symbolischer Formen.

Bezeichnet man die gegebene Form f symbolisch durch

$$(a_1 x_1 + a_2 x_2)^n = (b_1 x_1 + b_2 x_2) \ldots = a_x^n = b_x^n,$$

so hat Herr *Clebsch* im 59sten Bande dieses Journals bewiesen, dass jede aus f entstehende Form eine lineare Function mit numerischen Coefficienten von „symbolischen Producten“:

$$P = a_x^\alpha b_x^\beta \ldots (ab)^{\alpha_1} (ac)^{\beta_1} \ldots$$

ist, in denen das Symbol (ab) die Determinante

$$(ab) = a_1 b_2 - b_1 a_2$$

bedeutet.

Die Summe der Exponenten von a_x, b_x, ... nenne ich den Grad von P, ihren Grad in den Coefficienten oder, was dasselbe ist, die Anzahl der Buchstaben a, b, c, ..., die in P vorkommen, die Ordnung von P.

Ich stelle mir vorerst die Frage, in welcher Weise man die Formen P aus Formen niederer Ordnung ϑ entstehen lassen kann. Zu dem Ende lasse ich in P den (symbolischen) Factor a_x^α weg und ersetze dann den Buchstaben a der Art durch x, dass a_2 in x_1, a_1 in $-x_2$ übergeht, mithin (ba), (ca), ... in b_x, c_x, ... Die Form, die ich in dieser Weise erhalte, will ich durch ϑ bezeichnen. Umgekehrt erzeuge ich P aus ϑ dadurch, dass ich eine Anzahl Male etwa k Male die Symbole b_x, c_x, ... durch (ba), (ca), ... ersetze und das Resultat mit a_x^{n-k} multiplicire. Ich werde dieses Verfahren so bezeichnen: „Die Form P entsteht aus der Form ϑ durch Anwendung der k^{ten} Combination mit f.“

Durch Anwendung der 0^{ten} Combination von ϑ mit f entsteht das Product $f\vartheta$. Alle symbolischen Producte P von der m^{ten} Ordnung entstehen aus symbolischen Producten von der $(m-1)^{\text{ten}}$ Ordnung durch Combination mit f.

Es sei φ irgend eine Covariante von f, welcher ich, wenn ihr Grad μ ist, stets die Form geben will:

$$\varphi = (\varphi_1 x_1 + \varphi_2 x_2)^\mu = \varphi_x^\mu.$$

Ersetze ich in einem symbolischen Producte ϑ dann $\varkappa$ Male x in der oben beschriebenen Weise durch das Symbol φ und multiplicire ich danach mit $\varphi_x^{\mu-\varkappa}$, so erhalte ich eine Form Φ, von der ich sage: *„Die Form Φ entsteht aus ϑ mittelst der $\varkappa^{\text{ten}}$ Combination mit φ.“* In diesem symbolischen Producte Φ kommt ausser den in ϑ vorkommenden Symbolen noch das Symbol φ vor, sie ist eine lineare homogene Function der Coefficienten von φ, oder wie ich sagen will: *„Die Form Φ enthält das Symbol φ linear.“*

Enthält eine Form ϑ ein Symbol φ, so enthalten es alle aus ϑ entstehenden Formen (symbolische Producte). —

Im Folgenden werde ich insbesondere das bekannte Verfahren benutzen, welches dazu dient, aus zwei bekannten Covarianten von f, etwa φ und ψ, die ich symbolisch durch φ_x^μ und ψ_x^ν bezeichne, die einfachsten neuen Covarianten und Invarianten zu bilden, nämlich die Formen:

$$(\varphi\psi)^0 = \varphi.\psi,$$
$$(\varphi\psi)^1 = \varphi_x^{\mu-1}\psi_x^{\nu-1}(\varphi\psi),$$
$$(\varphi\psi)^2 = \varphi_x^{\mu-2}\psi_x^{\nu-2}(\varphi\psi)^2,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Von diesen Formen will ich sagen, „*sie seien durch die* 0^{te}, 1^{te}, 2^{te},... *Uebereinanderschiebung von φ und ψ entstanden.* Ich werde in den folgenden Paragraphen nachweisen, *dass alle Formen von f lineare Functionen mit numerischen Coefficienten von Formen sind, die mittelst wiederholter Uebereinanderschiebung aus f entstehen.*

§. 2.

Beweis, dass alle Covarianten und Invarianten durch wiederholte Uebereinanderschiebungen entstehen.

Es sei ϑ irgend ein symbolisches Product:

$$\text{(I.)} \qquad \vartheta = \vartheta_x^\mu = a_x^\alpha b_x^\beta r_x^\varrho s_x^\sigma \ldots (ab)(ar)(cs)\ldots,$$

das irgend welche Symbole enthält, sei es die Symbole a, b, c, aus denen sich die Coefficienten von f zusammensetzen, sei es die Symbole r, s..., aus denen sich die Coefficienten der entsprechenden Covarianten r, s... zusammensetzen lassen. Dann kann ich aus ϑ eine Form θ dadurch bilden, dass ich im symbolischen Ausdrucke (I.) irgend $\varkappa$ der Factoren a_x, b_x..., r_x, s_x... durch a_y, b_y ... r_y, s_y ersetze; diese Form θ enthält dann zwei Reihen von Veränderlichen x_1, x_2 und y_1, y_2. Die Differenz: $\theta - \vartheta_x^{\mu-\varkappa}\vartheta_y^\varkappa$ verschwindet zugleich mit der Determinante: $y_1x_2 - x_1y_2$, die ich durch (yx) bezeichnen will, hat also diese Determinante als Factor. Nennt man den andern Factor θ_1, so erhält man die Indentität:

$$\text{(II}^a\text{.)} \qquad \theta = \vartheta_x^{\mu-\varkappa}\vartheta_y^\varkappa + (yx)\theta_1.$$

Die Form θ_1 ist eine Form vom $(\varkappa-1)^{\text{ten}}$ Grade in den Veränderlichen y, vom $(\mu-\varkappa-1)^{\text{ten}}$ Grade in den Veränderlichen x; setzt man in θ_1:

$y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, so erhält man eine Form $\vartheta_1 = {\vartheta_1}_x^{\mu-2}$ vom $(\mu-2)^{\text{ten}}$ Grade, welche dieselben symbolischen Buchstaben wie ϑ enthält. Die Differenz: $\theta_1 - {\vartheta_1}_x^{\mu-\varkappa-1}\,{\vartheta_1}_y^{\varkappa-1}$ verschwindet zugleich mit der Determinante (yx), enthält sie daher als Factor, so dass man setzen kann:

$$(\mathrm{II}^b.)\qquad \theta_1 = {\vartheta_1}_x^{\mu-\varkappa-1}\,{\vartheta_1}_y^{\varkappa-1} + (yx)\,\theta_2,$$

wo θ_2 vom $(\varkappa-2)^{\text{ten}}$ Grade in den y, vom $(\mu-\varkappa-2)^{\text{ten}}$ Grade in den x ist. Für $y = x$ gehe nun θ_2 in die Form $\vartheta_2 = {\vartheta_2}_x^{\mu-2}$ über, u. s. w. Man kann sich dann eine Reihe von Gleichungen wie die Formeln $(\mathrm{II}^a.)$ und $(\mathrm{II}^b.)$ bilden, sie seien:

$$\begin{aligned}
\theta_2 &= {\vartheta_2}_x^{\mu-\varkappa-2}\,{\vartheta_2}_y^{\varkappa-2} + (yx)\,\theta_3,\\
\theta_3 &= {\vartheta_3}_x^{\mu-\varkappa-3}\,{\vartheta_3}_y^{\varkappa-3} + (yx)\,\theta_4,\\
\theta_4 &= {\vartheta_4}_x^{\mu-\varkappa-4}\,{\vartheta_4}_y^{\varkappa-4} + (yx)\,\theta_5,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Die darin auftretenden Formen ϑ, ϑ_1, ϑ_2 ... haben die Grade μ, $\mu-2$, $\mu-4$, $\mu-6$ .... Durch Combination unserer Formeln erhält man die Gleichung:

$$(\mathrm{III.})\quad \theta = \vartheta_x^{\mu-\varkappa}\vartheta_y^{\varkappa} + {\vartheta_1}_x^{\mu-\varkappa-1}{\vartheta_1}_y^{\varkappa-1}(yx) + {\vartheta_2}_x^{\mu-\varkappa-2}{\vartheta_2}_y^{\varkappa-2}(yx)^2 + {\vartheta_3}_x^{\mu-\varkappa-3}{\vartheta_3}_y^{\varkappa-3}(yx)^3 \ldots;$$

die darin auftretenden Formen ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 enthalten dieselben Symbole, wie ϑ.

Ersetzt man in θ die Veränderlichen y der Art durch das Symbol φ einer Covariante $\varphi = \varphi_x^{\mu}$, dass y_1 in φ_2, y_2 in $-\varphi_1$ übergeht, mithin a_y, b_y, ... in $(a\varphi)$, $(b\varphi)$ ..., und multiplicirt man dann mit $\varphi_x^{\mu-\varkappa}$, so erhält man eine Form Φ, die aus ϑ durch die $\varkappa^{\text{te}}$ Combination mit φ entsteht. Wendet man dasselbe Verfahren auch auf die übrigen Glieder der Formel (III.) an, so ergiebt sich die Indentität:

$$\Phi = \vartheta_x^{\mu-\varkappa}\varphi_x^{\nu-\varkappa}(\vartheta\varphi)^{\varkappa} + {\vartheta_1}_x^{\mu-\varkappa-1}\varphi_x^{\nu-\varkappa+1}(\vartheta_1\varphi)^{\varkappa-1} + {\vartheta_2}_x^{\mu-\varkappa-2}\varphi_x^{\nu-\varkappa+2}(\vartheta_2\varphi)^{\varkappa-2}\ldots,$$

oder in anderer Schreibweise:

$$(\mathrm{IV.})\qquad \Phi = (\vartheta\varphi)^{\varkappa} + (\vartheta_1\varphi)^{\varkappa-1} + (\vartheta_2\varphi)^{\varkappa-2}\ldots.$$

Die verschiedenen Glieder dieser Formel enthalten sämmtlich dieselben Buchstaben.

Hieran knüpfen sich folgende später zu verwerthende Bemerkungen.

Enthält eine Form Φ das Symbol φ und den Factor $\varphi_x^{\nu-r}$, so kann man sie in die Form bringen:

$$\Phi = \Sigma_i (\vartheta_i \varphi)^{\nu-i},$$

worin die ϑ Formen bedeuten, welche alle symbolischen Buchstaben von Φ ausser φ enthalten. —

Bezeichne ich eine Form, die eines der Symbole: $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ enthält, oder eine Summe solcher Formen durch: $P_\varphi = p_x^\mu$, so ist jede das Symbol p enthaltende Form ebenfalls eine Form P_φ. — Ist ϑ ein Product von Covarianten: $\vartheta = m_1 m_2 m_3 \ldots$, und ist der Grad s von m_1 gleich oder grösser als $\varkappa$, so existirt eine Identität der Form:

$$\text{(VI.)} \qquad (\vartheta\varphi)^\varkappa = (m_1\varphi)^\varkappa m_2 m_3 \cdots + (\vartheta_1\varphi)^{\varkappa-1} + (\vartheta_2\varphi)^{\varkappa-2} \ldots .$$

Ist dieser Grad s jedoch kleiner als $\varkappa$ (das selbstverständlich kleiner oder gleich ν ist), so giebt es eine Relation der Form:

$$\text{(VII.)} \qquad (\vartheta\varphi)^\varkappa = ((m_1\varphi)^s, m_2 m_3 \ldots)^{\varkappa-s} + (\vartheta_1\varphi)^{\varkappa-1} + \cdots$$

Hat ϑ die Form:

$$\vartheta = (\varphi\psi)^\varkappa = \varphi_x^{\mu-\varkappa} \psi_x^{\nu-\varkappa} (\varphi\psi)^\varkappa,$$

und ist $\chi = \chi_x^s$ irgend eine Covariante von f, dann existirt eine Relation der Form:

$$\varphi_x^{\mu-\varkappa-\lambda_1} \psi_x^{\nu-\varkappa-\lambda_2} (\varphi\psi)^\varkappa \chi_x^{s-\lambda_1-\lambda_2} (\varphi\chi)^{\lambda_1} (\psi\chi)^{\lambda_2} = (\vartheta\chi)^{\lambda_1+\lambda_2} + (\vartheta_1\chi)^{\lambda_1+\lambda_2-1} + (\vartheta_2\chi)^{\lambda_1+\lambda_2-2} \ldots$$

Die in derselben auftretenden Formen ϑ enthalten nur die Symbole φ und ψ und haben die Grade: $\mu+\nu-2\varkappa$, $\mu+\nu-2\varkappa-2$, $\mu+\nu-2\varkappa-4, \ldots$; sie sind daher:

$$\vartheta_i = c_i (\varphi\psi)^{\varkappa+i},$$

so dass man hat:

$$\text{(VIII.)} \quad \begin{cases} \varphi_x^{\mu-\varkappa-\lambda_1} \psi_x^{\nu-\varkappa-\lambda_2} (\varphi\psi)^\varkappa \chi_x^{s-\lambda_1-\lambda_2} (\varphi\chi)^{\lambda_1} (\psi\chi)^{\lambda_2} \\ = ((\varphi\psi)^\varkappa, \chi)^{\lambda_1+\lambda_2} + c_1((\varphi\psi)^{\varkappa+1}, \chi)^{\lambda_1+\lambda_2-1} + c_2((\varphi\psi)^{\varkappa+2}, \chi)^{\lambda_1+\lambda_2-2} \ldots, \end{cases}$$

worin die c numerische Constanten bedeuten. —

Ersetzt man in Gleichung (IV.) die Form φ durch f, so erhält man die Gleichung:

$$\text{(IX.)} \qquad \Phi = (\vartheta f)^\varkappa + (\vartheta_1 f)^{\varkappa-1} + (\vartheta_2 f)^{\varkappa-2} \ldots,$$

worin Φ eine Form bedeutet, die aus der Form ϑ durch die $\varkappa^{\text{te}}$ Combination mit f entseht. Ist ϑ ein symbolisches Product $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, so ist Φ ein symbolisches Product der m^{ten} Ordnung. Man sieht aus dieser Formel, *dass alle symbolischen Producte m^{ter} Ordnung und daher auch alle Formen dieser Ordnung lineare Functionen mit numerischen Coefficienten von Formen sind, die mittelst Uebereinanderschiebung von Formen $(m-1)^{ter}$ Ordnung mit f gebildet sind.*

Die Formen zweiter Ordnung sind daher lineare Combinationen von Formen S_2, die durch Uebereinanderschiebung von f mit sich selbst gebildet sind. Die Formen dritter Ordnung sind lineare Combinationen von Formen S_3, die mittelst Uebereinanderschiebung von den Formen S_2 mit f gebildet sind u. s. w., so dass die Richtigkeit des am Ende des §. 1 behaupteten Satzes erhellt: *Jede Form von f ist eine lineare Function mit numerischen Coefficienten von Formen, die durch wiederholte Uebereinanderschiebung aus f entstanden sind.*

§. 3.

Bildung der Formen durch Uebereinanderschiebung.

Ich gehe nun dazu über, die durch Uebereinanderschiebung entstehenden Formen zu bilden, und beginne mit den Formen zweiter Ordnung; dieselben ordne ich folgendermassen: $(ff)^0$, $(ff)'$, $(ff)^2$, ... $(ff)^n$ und bezeichne sie in *dieser Reihenfolge* durch: k_{21}, k_{22}, k_{23}, ...

Die Formen dritter Ordnung ordne ich in ähnlicher Weise:

$$\begin{array}{ccccc}
(k_{21}f)^0 & (k_{22}f)^0 & (k_{23}f)^0 & (k_{24}f)^0 & \dots \\
(k_{21}f)^1 & (k_{22}f)^1 & (k_{23}f)^1 & (k_{24}f)^1 & \dots \\
(k_{21}f)^2 & (k_{22}f)^2 & (k_{23}f)^2 & (k_{24}f)^2 & \dots \\
(k_{21}f)^3 & (k_{22}f)^3 & (k_{23}f)^3 & (k_{24}f)^3 & \dots
\end{array}$$

und bezeichne sie in dieser Reihenfolge durch k_{31}, k_{32}, k_{33}, ...; in derselben Ordnung bilde ich Formen vierter, fünfter, sechster, ... Ordnung. Die in dieser Anordnung vor einer Form $k_{i\varkappa}$ stehenden Formen will ich ihre *früheren Formen* nennen und alle diejenigen Formen k weglassen, welche lineare Combinationen mit numerischen Coefficienten früherer Formen k sind. Die übrig bleibenden Formen bezeichne ich in der obigen Reihenfolge durch T, sie haben folgende Eigenschaften:

I. Es existirt zwischen ihnen keine lineare Relation mit numerischen Coefficienten.

II. Jede Covariante und Invariante J von f kann (aber nur auf eine Weise) in die Form gebracht werden:

$$(X.)\qquad J = c_1 T_1 + c_2 T_2 + c_3 T_3 \dots,$$

worin die c numerisch sind. In dieser Formel werde ich die Glieder so ordnen, dass T_2 eine frühere Form als T_1, T_3 eine frühere Form als T_2, ... ist.

Es seien $(Tf)^\varkappa$ und $(T'f)^\varkappa$ zwei Formen T von derselben Ordnung; ist dann $\varkappa > \varkappa'$, so ist $(Tf)^{\varkappa'}$ eine frühere Form als $(Tf)^\varkappa$; das Nämliche findet statt, wenn $\varkappa' = \varkappa$ ist und T' eine frühere Form als T ist.

Ist eine Form P keine Form T, so ist die Form $(Pf)^\varkappa$ ebenfalls keine Form T, und umgekehrt: ist eine Form $(Pf)^\varkappa$ eine Form T, so ist es auch die Form P.

Nach §. 2. kann jede Form Φ, welche das Symbol φ und den Factor $\varphi_x^{\nu-\varkappa}$ enthält, in der folgenden Weise dargestellt werden:

$$\Phi = \Sigma_s (\vartheta_s, \varphi)^{\varkappa-s}.$$

Ersetzt man hierin nach Formel (X.) die Formen ϑ durch ihre Ausdrücke in den T, so erhält man für Φ einen Ausdruck der Form: $\Phi = \Sigma_{st} c_t (T_{st}, \varphi)^{\varkappa-s}$, worin die c numerisch sind.

Hat Φ den Factor $a_x^{n-\varkappa}$, so ist es eine lineare Function der Form $\Phi = \Sigma c (T, f)^{\varkappa-s}$, wobei die c numerisch sind und $s \geqq 0$ ist. —

Die Formen T zweiter Ordnung von f sind, da $(ff)^\varkappa$ für ein ungrades $\varkappa$ verschwindet, die Formen:

$$(ff)^0, \quad (ff)^2, \quad (ff)^4, \quad \ldots$$

oder in symbolischer Form:

$$a_x^n b_x^n, \quad a_x^{n-2} b_x^{n-2} (ab)^2, \quad a_x^{n-4} b_x^{n-4} (ab)^4, \quad \ldots .$$

Ist die Zahl n durch 4 theilbar, dann ist die Form $a_x^{\frac{1}{2}n} b_x^{\frac{1}{2}n} (ab)^{\frac{1}{2}n}$ vom Grade n, sonst giebt es keine Form zweiter Ordnung vom Grade n. — Diejenigen Formen zweiter Ordnung, deren Grad kleiner oder gleich n ist, will ich nun durch: χ_1, χ_2, χ_3, χ_4, ... bezeichnen und diese Formen so anordnen, dass der Grad von χ_1 grösser ist als der Grad von χ_2, dass der Grad von χ_2 grösser ist als der Grad von χ_3, und so fort. Im Falle, wo n durch 4 theilbar ist, hat dann χ_1 den Grad n, χ_2 den Grad $n-4$ ..., endlich $\chi_{\frac{1}{4}n+1}$ den Grad 0; in dem Falle, wo n nicht durch 4 theilbar ist, ist der Grad einer jeden Form χ kleiner als n.

Jede eines der Symbole χ enthaltende Form sowie jede Summe solcher Formen werde ich von jetzt an durch P_χ bezeichnen. —

Ist φ irgend eine Form und $\varkappa \geqq \frac{1}{2}n$, so ist die Form:

$$P = a_x^{n-r-\varkappa} b_x^{n-s-\varkappa} \varphi_x^{\mu-r-s} (ab)^\varkappa (a\varphi)^r (b\varphi)^s$$

eine lineare Function mit numerischen Coefficienten von den Formen:

$$(\chi_1, \varphi)^{\alpha_1}, \quad (\chi_2, \varphi)^{\alpha_2}, \quad \ldots .$$

Denn da die Form P aus der Form $(ff)^\varkappa = a_x^{n-\varkappa} b_x^{n-\varkappa} (ab)^\varkappa$ mittelst der $(r+s)^{\text{ten}}$ Combination mit φ entsteht, so existirt eine Gleichung der Form (s. §. 2, F. (VIII.)):

$$\text{(XI.)} \qquad P = \{(ff)^\varkappa, \varphi\}^{r+s} + c_1 \{(ff)^{\varkappa+1}, \varphi\}^{r+s-1} + c_2 \{(ff)^{\varkappa+2}, \varphi\}^{r+s-2} \ldots,$$

wo die c numerisch sind; da nun die Formen $(ff)^{\varkappa+s}$ (da $\varkappa \geqq \frac{1}{2}n$) entweder den Werth Null haben oder Formen χ sind, so ist die Behauptung erwiesen.

§. 4.

Eigenschaften der Formen T.

Jedes symbolische Product P, dessen Grad grösser als n ist, und welches die Factoren hat:

erstens: Das symbolische Product $b_x c_x d_x e_x \ldots$,

zweitens: b_x^r, wobei $r > \frac{1}{2}n$ ist,

sowie jedes Aggregat solcher Formen nenne ich eine Form W:

$$\text{(XII.)} \qquad W = W_x^\mu = b_x^r c_x^{\alpha_1} d_x^{\alpha_2} \ldots (bc)(bd)(cd) \ldots = b_x^r c_x^{\alpha_1} d_x^{\alpha_2} e_x^{\alpha_3} \ldots S.$$

Die Formen T der zweiten Ordnung sind dann entweder Formen W oder Formen χ. — —

Setzt man (§. 3. Formel (X.)):

$$\text{(XIII.)} \qquad W = c_1 T_1 + c_2 T_2 + c_3 T_3 \ldots,$$

so ist die Form $(T_1 f)^\varkappa$ entweder keine Form T oder eine lineare Function (mit numerischen Coefficienten) von früheren Formen T und Formen W.

Beweis.

Bezeichne ich eine solche lineare Function früherer Formen als $(T_1 f)^\varkappa$ durch Q_1, Q_2, Q_3, ..., allgemein Q, so will ich nachweisen, dass $(T_1 f)^\varkappa$ unter der Voraussetzung, dass es eine Form T ist, auch eine Form $Q + W$ ist. Aus der Formel (XIII.) ergiebt sich die Identität:

$$(Wf)^\varkappa = c_1 (T_1 f)^\varkappa + c_2 (T_2 f)^\varkappa + c_3 (T_3 f)^\varkappa \ldots,$$

welche, da die Formen $(T_2 f)^\varkappa$, $(T_3 f)^\varkappa$, $(T_4 f)^\varkappa$ frühere Formen als $(T_1 f)^\varkappa$ sind, mithin ihre Summe eine Form Q ist, in der folgenden Weise geschrieben werden kann:

$$\text{(XIV.)} \qquad (Wf)^\varkappa = c_1 (T_1 f)^\varkappa + Q_1.$$

Ich unterscheide nun drei Fälle, je nachdem:

erstens: $\varkappa > \mu - r$,

zweitens: $\mu - r \geqq \varkappa > n - r$,

drittens: $\varkappa \leqq n - r$,

und will in den ersten beiden Fällen zeigen, dass $(T_1 f)^\varkappa$ keine Form T ist, im letzten, dass $(T_1 f)^\varkappa$ eine Form $Q + W$ ist.

Erster Fall:

$$\varkappa > \mu - r.$$

Die Form

$$R = a_x^{n-\varkappa} b_x^{\mu-\varkappa} (ba)^{\varkappa-\mu-r} (ca)^{\alpha_1} (da)^{\alpha_2} \ldots S$$

entsteht aus W durch die $\varkappa^{\text{te}}$ Combination mit f, mithin existirt eine Identität der Form (§. 3):

$$(Wf)^{\varkappa}-R = b_1(T'f)^{\varkappa-1}+b_2(T''f)^{\varkappa-2}\ldots,$$

in welcher die Glieder der rechten Seite sämmtlich frühere Formen als $(T_1 f)$ sind. Man kann daher setzen:

$$(Wf)^{\varkappa}-R = Q_2$$

und hat dann nach Formel (XIV.):

$$R+Q_2 = c_1(T_1 f)^{\varkappa}+Q_1.$$

Die Form R hat nun den Factor $b_x^{\mu-\varkappa} = b_x^{n-(n+\varkappa-\mu)}$, ist also nach §. 3 ein Aggregat von Formen $(Tf)^{n+\varkappa-\mu-s}$; da hier $n+\varkappa-\mu-s < \varkappa$ ist, so sind alle diese Formen frühere Formen als $(T_1 f)^{\varkappa}$, ihre Summe R ist daher eine Form Q, etwa Q_3, so dass

$$Q_3+Q_2 = c_1(T_1 f)^{\varkappa}+Q_1$$

ist, und mithin $(T_1 f)^{\varkappa}$ keine Form T ist.

Zweiter Fall:

$$\mu-r \geqq \varkappa > n-r.$$

Hier untersuche ich die Form:

$$R = a_x^{n-\varkappa} b_x^{r}(ca)^{\alpha_1}(da)^{\alpha_2}\ldots S;$$

sie entsteht aus W durch die $\varkappa^{\text{te}}$ Combination mit f. Die Differenz $(Wf)^{\varkappa}-R$ ist (nach §. 3) daher eine Form Q, etwa Q_2, so dass nach Formel (XIV.)

$$c_1(T_1 f)^{\varkappa}+Q_1-R = Q_2$$

ist. Die Form R hat nun aber den Factor b_x^r, sie ist daher ein Aggregat von Formen $(Tf)^{n-r-s}$, also, da n. V. $n-r<\varkappa$ ist, eine Form Q, etwa Q_3, so dass wieder $(T_1 f)^{\varkappa}$ eine Summe von Formen Q, also keine Form T ist.

Dritter Fall:

$$\varkappa \leqq n-r, \quad \text{also (da } r > \tfrac{1}{2}n), \quad \varkappa < r.$$

Die Form

$$R = a_x^{n-\varkappa} b_x^{r-\varkappa}(ba)^k c_x^{\alpha_1} d_x^{\alpha_2}\ldots S$$

entsteht aus W durch die $\varkappa^{\text{te}}$ Combination mit f; die Differenz $(Wf)^{\varkappa}-R$ ist eine Form Q, etwa Q_2, so dass (Formel (XIV.))

$$c_1(T_1 f)^{\varkappa} = R+Q_1+Q_2$$

ist. Die Form R ist nun aber eine Form W, etwa W', da ihr Grad

$$n-\varkappa+r-\varkappa+\mu-r = n+\mu-2\varkappa \geqq n+\mu-2(n-r) = \mu+2r-n > \mu > n$$

ist, und sie die Factoren besitzt:

$$a_x b_x c_x d_x\ldots \quad \text{und} \quad a_x^{n-k} \quad (\text{wobei } n-\varkappa \geqq r > \tfrac{1}{2}n).$$

Man sieht daher, dass $(T_1 f)^{\varkappa}$ in die Form $W+Q$ gebracht werden kann, und hat also den Satz:

Ist eine Form T durch Formen W und frühere Formen darstellbar, so hat jede Form $(Tf)^x$, welche eine Form T ist, ebenfalls diese Eigenschaft.

Hieran knüpft sich weiter der Satz:

Jede Form T, welche keins der Symbole χ enthält, ist durch eine Form W und frühere Formen ausdrückbar.

Ferner:

Jede Form T ist eine lineare Function mit numerischen Coefficienten von Formen W und Formen, die eines der Symbole χ_1, χ_2, ... enthalten; es ist:

$$T = W+P_\chi,$$

oder was dasselbe ist (vgl. Formel (X.)):

Jede Form J von f kann in die Form gebracht werden:

$$\text{(XV.)} \qquad J = W+P_\chi.$$

§. 5.

System der Formen ϑ.

Ich werde jetzt dazu übergehen, ein vollständig bestimmtes endliches System von Covarianten und Invarianten der Form f aufzustellen, durch welches sich alle zu f gehörigen Formen T ausdrücken lassen. Und zwar soll zuerst die Bildung des Systems angegeben werden; sodann soll bewiesen werden, dass das erhaltene System aus einer endlichen Anzahl von Formen besteht und endlich, dass alle Formen von f sich durch die Formen des Systems darstellen lassen. Das aufzustellende System ist übrigens nicht das kleinste, welches denkbar ist, vielmehr sind viele Formen des Systems noch als ganze Functionen anderer darstellbar, aber für die vorliegende Betrachtung genügt es nachzuweisen, dass überhaupt ein endliches System solcher Formen existirt. —

Es sei die Form:

$$f' = a'^{n-1}_x = b'^{n-1}_x \dots$$

eine beliebige Form des $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades; man kann dann aus jedem symbolischen Producte, das die Symbole a', b', ... enthält, ein analoges Product für die Form f dadurch herleiten, dass man erst die oberen Indices weglässt und dann mit dem Producte $a_x b_x c_x \dots$ multiplicirt. Umgekehrt kann man aus jedem den Factor $a_x b_x c_x \dots$ enthaltenden, symbolischen Producte von f ein symbolisches Product für die Form f' dadurch ableiten, dass man erstens diesen Factor weglässt und dann den Buchstaben a, b, c obere Indices anfügt.

Nenne ich nun die Formen V des zu f' gehörigen als bekannt vorausgesetzten Systems:

$$A'_1, \quad A'_2, \quad A'_3, \quad \ldots,$$

so entsprechen diesen Formen in obiger Weise Covarianten von f, welche ich durch

$$A_1, \quad A_2, \quad A_3, \quad \ldots$$

bezeichnen und specielle Formen von f nennen will. Da nach Annahme die Anzahl der A' endlich ist, so ist es auch die Anzahl der A; da ferner jede Covariante und Invariante der Form f' eine ganze Function mit numerischen Coefficienten der Formen A' ist, so ist auch jede den Factor $a_x b_x c_x \ldots$ enthaltende Form von f eine ganze Function mit numerischen Coefficienten der A. Hieraus folgt unmittelbar:

Die Formen W sind Functionen $F(A)$, und jede Covariante und Invariante J von f kann (nach §. 4 Formel (XV.)) in die Form gebracht werden:

$$\text{(XVI.)} \qquad J = F(A) + P_\chi.$$

Ich theile die Formen V, welche ich zu bilden im Begriff bin, ein in specielle Formen A und in Formen, welche den Formen $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \ldots$ adjungirt sind. Hierbei nenne ich diejenigen Formen V der Form χ_i adjungirt, welche das Symbol χ_i enthalten, aber keines der Symbole $\chi_{i+1}, \chi_{i+2}, \ldots$. Die Formen V will ich so anordnen, dass:

erstens: f und die speciellen Formen,
zweitens: χ_1 und die χ_1 adjungirten Formen,
drittens: χ_2 und die χ_2 adjungirten Formen

und so fort kommen. Die bei *dieser Anordnung* vor der Form χ_i stehenden Formen nenne ich die *vorstehenden* Formen von χ_i und bezeichne sie durch ϱ. — Die χ_i adjungirten Formen theile ich in folgende Classen:

I. eigentlich adjungirte Formen erster Art,
II. eigentlich adjungirte Formen zweiter Art,
III. Formen der ersten Gruppe von χ_i,
IV. uneigentlich adjungirte Formen;

doch der Art, dass, wie oben bemerkt wurde, ein und dieselbe Form in mehreren Classen erscheinen darf. — Jetzt will ich jede dieser Formengattungen für sich erklären.

I. Eigentlich adjungirte Formen erster Art.

Hierbei sind zwei Fälle zu unterscheiden:

Erster Fall. Der Grad von χ_i ist n.

Dieser Fall tritt nur bei der Form χ_1 ein, und bei dieser Form auch nur dann, wenn die Zahl n durch 4 theilbar ist; ich nenne dann alle speciellen Formen und alle Formen zweiter Ordnung im System der Form χ_1, als Formen von f angesehen, χ_1 *eigentlich adjungirte Formen erster Art;* ihre Anzahl ist endlich.

Zweiter Fall. Der Grad von χ_i ist kleiner als n.

In diesem Falle nenne ich alle Formen V des Systems der Form χ_i, als Formen von f angesehen, χ_i *eigentlich adjungirte Formen erster Art.* Ihre Anzahl ist endlich, man kann durch sie alle Covarianten und Invarianten von χ_i darstellen als ganze Functionen mit numerischen Coefficienten.

II. Eigentlich adjungirte Formen zweiter Art.

Um zu denselben zu gelangen, gehe ich von den Formen erster Art und ihren Producten aus, ich will sie durch σ bezeichnen. Ist dann ϱ eine χ_i vorstehende Form, so bilde ich die Formen $(\varrho\sigma)^{\varkappa}$. Diejenigen unter denselben, für welche σ ein Product ist, das einen Factor (resp. ein Product mehrerer Factoren) von höherem Grade als χ_i enthält, lasse ich hierbei weg; die übrigbleibenden nenne ich χ_i *eigentlich adjungirte Formen zweiter Art.*

III. Formen der ersten Gruppe von χ_i.

Diejenigen χ_i eigentlich adjungirten Formen, deren Grad kleiner ist als der Grad von χ_i, bezeichne ich durch $\chi_{i1}, \chi_{i2}, \ldots$, allgemein $\chi_{i\varkappa}$ und nenne sie Formen der ersten Gruppe von χ_i.

IV. Uneigentlich adjungirte Formen.

Die χ_i adjungirten Formen V, welche eines der Symbole $\chi_{i1}, \chi_{i2}, \ldots$ enthalten, nenne ich χ_i *uneigentlich adjungirt.* — Diejenigen unter ihnen, welche das Symbol $\chi_{i\varkappa}$ enthalten, aber keines der Symbole $\chi_{i,\varkappa+1}, \chi_{i,\varkappa+2}, \ldots$ nenne ich $\chi_{i\varkappa}$ adjungirt. Es kann vorkommen, dass dieselbe Form V zu gleicher Zeit χ_i eigentlich und uneigentlich adjungirt ist, dann rechne ich sie doppelt. —

Was nun die Anordnung der zu χ_i adjungirten Formen betrifft, so mache ich darüber folgende Festsetzung:

erstens: die χ_i eigentlich adjungirten Formen, deren Grad grösser oder gleich dem Grad von χ_i ist; ich nenne sie $F(\chi_i)$,

zweitens: χ_{i1} und die χ_{i1} adjungirten Formen,

drittens: χ_{i2} und die χ_{i2} adjungirten Formen,

und so fort.

Die $\chi_{i\varkappa}$ vorstehenden Formen sind dann:

erstens: die χ_i vorstehenden Formen,

zweitens: χ_i und die $F(\chi_i)$,

drittens: $\chi_{i1}, \chi_{i2}, \dots \chi_{i,\varkappa-1}$ und die denselben adjungirten Formen.

Alle $\chi_{i\varkappa}$ adjungirten Formen enthalten das Symbol $\chi_{i\varkappa}$, aber keines der Symbole $\chi_{i,\varkappa+1}, \chi_{i,\varkappa+2}, \dots \chi_{i+1}, \chi_{i+2}, \dots$. Ich theile sie in derselben Weise ein, wie die χ_i adjungirten Formen; ihre Formen der ersten Gruppe bezeichne ich durch $\chi_{i,\varkappa,1}, \chi_{i,\varkappa,2}, \dots$, allgemein $\chi_{i,\varkappa,\lambda}$, und nenne sie Formen der zweiten Gruppe von χ_i. In dieser Weise fahre ich fort und bilde mir von diesen Formen der zweiten Gruppe ihre Formen der ersten Gruppe, die ich durch $\chi_{i\varkappa\lambda,1}, \chi_{i\varkappa\lambda,2}, \dots$ bezeichne und Formen der dritten Gruppe von χ_i nenne. Ebenso fortfahrend gelange ich nach und nach zu Formen der vierten, fünften, ... Gruppe von Formen von stets niederen Graden. Alle diese Covarianten $\chi_{i\varkappa\lambda\dots}$ bezeichne ich nun durch $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots$, so dass man also jetzt die Formen V in folgende Classen theilen kann:

erstens: f und die Formen A,

zweitens: ψ_1 und die ψ_1 eigentlich adjungirten Formen,

drittens: ψ_2 und die ψ_2 eigentlich adjungirten Formen,

und so weiter. Hierbei sind alle diejenigen Formen V zu ψ_i eigentlich adjungirt, welche das Symbol ψ_i enthalten, aber keines der Symbole $\psi_{i+1}, \psi_{i+2}, \dots$; und die ψ_i vorstehenden Formen die folgenden:

erstens: f und die Formen A,

zweitens: die Formen $\psi_1, \psi_2, \dots \psi_{i-1}$ mit den ihnen eigentlich adjungirten Formen.

Sämmtliche Formen V lassen sich in Bezug auf ψ_i folgendermassen eintheilen:

erstens: die ψ_i vorstehenden Formen, die ich durch ϱ bezeichne;

zweitens: die ψ_i eigentlich adjungirten Formen $F(\psi_i)$, deren Grad grösser oder gleich dem von ψ_i ist;

drittens: die Formen der ersten Gruppe von ψ_i; sie gehören unter die Formen $\psi_{i+1}, \psi_{i+2}, \dots$;

viertens: die eines der Symbole $\psi_{i+1}, \psi_{i+2}, \dots$ enthaltenden Formen.

§. 6.

Endlichkeit des Systems der V.

Nachdem auf diese Weise die Bildung der Formen V und ihre Anordnung festgestellt ist, werde ich beweisen, dass die Zahl derselben eine endliche ist. —

Dass die Zahl der speciellen Formen und der einer Form ψ_i eigentlich adjungirten Formen erster Art endlich ist, folgt von selbst aus dem Umstande, dass alle Formen ψ mit Ausnahme von ψ_1 in dem Falle, wo die Zahl n durch 4 theilbar ist, von niederem als dem n^{ten} Grade sind. Diese ψ_i eigentlich adjungirten Formen erster Art seien C_1, C_2, C_3, ...; es ist dann auch die Zahl derjenigen ihrer Producte R, deren Grad kleiner ist als eine gegebene Zahl p, eine endliche. — Bezeichnet man nämlich die Grade der Formen C_1, C_2, C_3, ... durch g_1, g_2, g_3, ..., so hat der Grad μ des Productes R die Form:

$$\mu = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \cdots, \quad \text{falls} \quad R = C_1^{\alpha_1} C_2^{\alpha_2} C_3^{\alpha_3} \ldots .$$

Um nun die Producte R zu erhalten, deren Grad kleiner als p ist, muss man für die α alle ganzzahligen Werthsysteme setzen, die der Ungleichheit genügen: $\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \cdots + < p$. Die Anzahl dieser Werthsysteme ist kleiner als:

$$\left(\frac{p}{g_1}+1\right)\left(\frac{p}{g_2}+1\right)\left(\frac{p}{g_3}+1\right)\cdots,$$

also endlich. —

Hieraus folgt zugleich, dass die Anzahl derjenigen Producte R der C, deren sämmtliche Faktoren einen Grad haben, welcher kleiner ist, als eine gegebene Zahl μ, endlich bleibt, denn ihr Grad ist kleiner als 2μ. —

Ist ferner σ eine Form C oder ein (eben beschriebenes) Product der C, dessen Faktoren kleiner sind als der Grad einer Form ϱ, so ist die Anzahl der Formen $(\varrho\sigma)^\varkappa$ endlich.

Ist also die Anzahl der ψ_i vorstehenden Formen ϱ endlich, so ist es auch die Anzahl der ψ_i eigentlich adjungirten Formen zweiter Art $(\varrho\sigma)^\varkappa$, mithin die Anzahl aller ψ_i eigentlich adjungirten Formen sowie die Zahl der unter ihnen vorkommenden Formen der ersten Gruppe von ψ_i; ich nenne dieselbe ψ_{i1}, ψ_{i2}, ... Nun sieht man leicht folgenden Satz ein:

Ist die Anzahl der einer Form ψ_i vorstehenden Formen ϱ endlich, so ist auch die Anzahl aller ψ_i adjungirten Formen (sowohl der eigentlich wie der uneigentlich adjungirten) eine endliche.

In der That, ist der Grad von ψ_i gleich 0, so besitzt ψ_i keine adjungirten Formen; der Satz ist also richtig. Somit kann ich die Annahme machen, der Satz sei für alle Formen erwiesen, deren Grad kleiner ist als der von ψ_i. Die ψ_i adjungirten Formen sind nun entweder Formen $F(\psi_i)$ (vgl. Ende des §. 5), oder $\psi_{i\varkappa}$, oder einer dieser Formen $\psi_{i1}, \psi_{i2}, \psi_{i3} \ldots$ adjungirt. Die Anzahl der Formen $F(\psi_i)$ und $\psi_{i\varkappa}$ ist aber, wie wir oben gesehen haben, endlich; ferner ist, da die Grade der Formen $\psi_{i1}, \psi_{i2}, \ldots$ kleiner als der Grad von ψ_i sind, die Anzahl der einer Form $\psi_{i\varkappa}$ adjungirten Formen nach Annahme endlich, folglich ist auch die Anzahl der ψ_i adjungirten Formen endlich.

Dieser Satz gilt auch für die Formen χ_i, da dieselben unter den Formen ψ_i vorkommen. Hieraus folgt nun weiter:

Die Anzahl der einer Form χ_i vorstehenden Formen ist endlich.

Die Form f nämlich und die Formen A sind die χ_1 vorstehenden Formen, ihre Anzahl ist endlich. Ich nehme also den Satz für die Formen $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \ldots \chi_{i-1}$ als erwiesen an; da alsdann die Anzahl der χ_{i-1} vorstehenden Formen endlich ist, so ist es auch die der χ_{i-1} adjungirten Formen, mithin sämmtlicher χ_i vorstehenden Formen.

Zugleich sieht man, dass die Anzahl der einer Form χ_i adjungirten Formen endlich ist.

Die Formen V sind nun entweder specielle Formen A, oder einer der Formen $\chi_1, \chi_2, \ldots$ adjungirt, ihre Anzahl ist also endlich. Unter ihnen kommen die Formen $\psi_1, \psi_2, \ldots$ vor; ihre Anzahl ist daher ebenfalls endlich; ich bezeichne sie durch ν, so dass die Formen $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_\nu$ sämmtliche Formen ψ sind.

Bemerken wir dabei Folgendes:

Ist erstens ϱ eine der Form ψ_i vorstehende Form V, und ist der Grad der Form $(\varrho\psi_i)^\varkappa$ kleiner als der Grad von ψ_i, dann ist $(\varrho\psi_i)^\varkappa$ eine der Formen $\psi_{i+1}, \psi_{i+2}, \ldots$. Ist hingegen zweitens ϱ eine ψ_ν vorstehende Form, und ist der Grad der Form $(\varrho\psi_\nu)^\varkappa$ kleiner als der Grad von ψ_ν, dann ist $(\varrho\psi_\nu)^\varkappa = 0$.

§. 7.

Reduction einer gewissen Classe von Formen.

Ehe ich nun zum Beweise übergehe, dass *alle* Formen von f ganze Functionen mit numerischen Coefficienten der Formen V sind, will ich einige hierbei nothwendige Hülfssätze ableiten; vorzüglich werde ich von einer gewissen Classe von Formen zeigen, dass sie die verlangte Eigenschaft besitzen. Ich wende mich zunächst zu dem Falle, wo die Zahl n durch 4 theilbar ist, wo es also eine Form: $\psi_1 = \chi_1 = a_x^{\frac{1}{2}n} b_x^{\frac{1}{2}n} (ab)^{\frac{1}{2}n} = \psi$ giebt, deren Grad n ist. (In allen übrigen Fällen sind die Grade der Formen ψ kleiner als n.)

Nenne ich nun jede eines der Symbole ψ_2, ψ_3, ψ_4, ... enthaltende Form sowie jedes Aggregat solcher Formen eine Form R, so behaupte ich, *dass die Form* $K = (\psi f)^{\frac{1}{2}n} = a_x^{\frac{1}{2}n} \psi_x^{\frac{1}{2}n} (a\psi)^{\frac{1}{2}n}$ *eine Form* R *sei.*

Beweis.

Die Formen:

$$Q_1 = a_x^{\frac{1}{2}n-1} b_x c_x^{\frac{1}{2}n} (ac)(bc)^{\frac{1}{2}n-1} (ab)^{\frac{1}{2}n},$$
$$Q_2 = a_x^{\frac{1}{2}n-2} b_x^2 c_x^{\frac{1}{2}n} (ac)^2 (bc)^{\frac{1}{2}n-2} (ab)^{\frac{1}{2}n}$$

entstehen aus der Form ψ mittelst der $\frac{1}{2}n^{\text{ten}}$ Combination mit f; es existiren daher zwei Relationen der Form (§. 3 Formel (11.))

$$K - Q_1 = \sum_1^{\frac{1}{2}n}{}_i\, c_i (\chi_i, f)^{\frac{1}{2}n-2i},$$
$$K - Q_2 = \sum_1^{\frac{1}{2}n}{}_i\, d_i (\chi_i, f)^{\frac{1}{2}n-2i}.$$

Die rechten Seiten dieser Identitäten sind Formen R, ich nenne sie R_1 und R_2, es ist dann:

$$(1.) \qquad \begin{cases} K = Q_1 + R_1, \\ K = Q_2 + R_2. \end{cases}$$

Um mir eine weitere Relation zu bilden, gehe ich von der Identität aus:

$$\begin{aligned} 2Q_1 &= a_x^{\frac{1}{2}n-1} b_x c_x^{\frac{1}{2}n-1} (ac)\,(bc)^{\frac{1}{2}n-1} (ab)^{\frac{1}{2}n-1} \{c_x (ab) + a_x (bc)\} \\ &= a_x^{\frac{1}{2}n-1} b_x^2 c_x^{\frac{1}{2}n-1} (ac)^2 (bc)^{\frac{1}{2}n-1} (ab)^{\frac{1}{2}n-1}; \end{aligned}$$

mithin ist:

$$\begin{aligned} 4Q_1 &= a_x^2 b_x^2 c_x^{\frac{1}{2}n-1} (ac)^2 (bc)^2 (ab)^{\frac{1}{2}n-1} \{a_x^{\frac{1}{2}n-3} (bc)^{\frac{1}{2}n-3} - b_x^{\frac{1}{2}n-3} (ac)^{\frac{1}{2}n-3}\} \\ &= -a_x^2 b_x^2 c_x^{\frac{1}{2}n-1} (ac)^2 (bc)^2 (ab)^{\frac{1}{2}n-1} \{\{a_x (bc) + c_x (ab)\}^{\frac{1}{2}n-3} - a_x^{\frac{1}{2}n-3} (bc)^{\frac{1}{2}n-3}\} \\ &= -\sum_1^{\frac{1}{2}n-3}{}_i \binom{\frac{1}{2}n-3}{i} a_x^{\frac{1}{2}n-i-1} b_x^2 c_x^{\frac{1}{2}n-1+i} (bc)^{\frac{1}{2}n-i-1} (ca)^2 (ab)^{\frac{1}{2}n-1+i}. \end{aligned}$$

Das erste Glied der rechten Seite hat den Werth $(\frac{1}{2}n-3)Q_2$; die übrigen Glieder enthalten den Factor $(bc)^{\frac{1}{2}n+1}$ und sind also nach §. 3 Formel (XI.) Formen R. Wir wollen ihre Summe durch R_3 bezeichnen; es ist dann:

$$4Q_1 = (\tfrac{1}{2}n-3)\,Q_2 + R_3$$

und nach den Formeln (1.):

$$4(K - R_1) = (\tfrac{1}{2}n-3)(K - R_2) + R_3$$

und daher:

$$K = \frac{\frac{1}{2}n-3}{\frac{1}{2}n+1}R_2 - \frac{4}{\frac{1}{2}n+1}R_1 - \frac{R_3}{\frac{1}{2}n+1},$$

eine Form R.

Die Form $D = b_x^{\frac{1}{2}n}\psi_x^{\frac{1}{2}n}(ab)^{\frac{1}{2}n}(a\psi)^{\frac{1}{2}n}$ entsteht nun aus den beiden Formen: $K = a_x^{\frac{1}{2}n} b_x^{\frac{1}{2}n}(ab)^{\frac{1}{2}n}$ und $\psi = a_x^{\frac{1}{2}n} b_x^{\frac{1}{2}n}(ab)^{\frac{1}{2}n}$ durch die $\frac{1}{2}n^{\text{te}}$ Combination mit den Formen f und ψ, sie genügt also den Relationen:

$$D-(K,f)^{\frac{1}{2}n} = c_1((f\psi)^{\frac{1}{2}n+1},f)^{\frac{1}{2}n-1}+c_2((f\psi)^{\frac{1}{2}n+2},f)^{\frac{1}{2}n-2}\dots \quad (\text{§. 2 Formel (VIII.)}),$$

$$D-(\psi,\psi)^{\frac{1}{2}n} = d_1(\chi_2,\psi)^{\frac{1}{2}n-2}+d_2(\chi_3,\psi)^{\frac{1}{2}n-4}+d_3(\chi_4,\psi)^{\frac{1}{2}n-6}\dots \quad (\text{§. 3 Formel (XI.)}),$$

worin die c und d numerisch sind. Da die Formen $(f,\psi)^{\frac{1}{2}n+1}$ von niederem Grade als ψ sind, so sind es Formen der ersten Gruppe von ψ_1, gehören also zu den Formen $\psi_2, \psi_3, \dots$. Hieraus folgt, dass die Glieder der rechten Seite in beiden Relationen Formen R sind; da das Nämliche für die Form $(Kf)^{\frac{1}{2}n}$ gilt, *so ist auch* $(\psi,\psi)^{\frac{1}{2}n}$, *das wir symbolisch durch* r_x^n *bezeichnen, eine Form R (sowie jede das Symbol r_1 enthaltende Form)* (vgl. §. 2).

Hieran knüpfen sich folgende Schlüsse:

Die Formen zweiter Ordnung im System der Form ψ, deren Grad n nicht übersteigt, bezeichne ich durch: $r_1, r_2, r_3, \dots$; sie sind nach §. 5 ψ eigentlich adjungirt. Da der Grad der Formen $r_2, r_3, r_4, \dots$ kleiner als der von ψ ist, so gehören sie der ersten Gruppe von ψ_1 an, gehören also zu den Formen $\psi_2, \psi_3, \psi_4, \dots$. Man sieht hieraus, dass jede Form, die eines der Symbole $r_2, r_3, \dots$ enthält, eine Form R ist; das Nämliche gilt für die das Symbol r_1 enthaltenden Formen, wie oben gezeigt wurde, *so dass jede Form, die eines der Symbole r enthält, eine Form R ist.*

Dem Satze, dass jede Form J von f (nach §. 5 Formel (XVI.)) in die Form $J = F(A)+P_\chi$ gebracht werden kann, entspricht nun im System der Form ψ der Satz:

Jede Covariante und Invariante ϑ von ψ kann die Form annehmen: $\vartheta = F(K)+P_r$, wobei die K die speciellen Formen von ψ, also ψ eigentlich adjungirte Formen erster Art bedeuten.

P_r ist hier ein Aggregat von Formen, die die Symbole r enthalten, also eine Form R. Bezeichnet man endlich die $\chi_1 = \psi_1$ eigentlich adjungirten Formen und ihre Producte durch $H_1, H_2, \dots$, so erhält man die Relation:

$$\text{(XVII.)} \qquad \vartheta = \Sigma_i c_i H_i + R,$$

in der die c numerisch sind. — —

Ist ϑ irgend eine Covariante oder Invariante von ψ_1, ϱ eine ψ_1 vorstehende Form V, so ist die Form $(\vartheta\varrho)^\varkappa$ gleich einem Ausdrucke:

$$\text{(XVIII.)} \qquad (\vartheta\varrho)^\varkappa = F(V)+R,$$

worin $F(V)$ wieder eine ganze Function der V mit numerischen Coefficienten bedeutet.

Um dies zu beweisen, gehe ich von dem Ausdrucke aus $(\vartheta,\varrho)^0 = \vartheta.\varrho$. Nach vorigem Satze ist $\vartheta.\varrho = \Sigma c_i H_i \varrho + \varrho R$, was die verlangte Form hat. Ich darf daher die Annahme machen, dass der Satz für alle Formen: $(\vartheta\varrho)^0$, $(\vartheta\varrho)^1$, $(\vartheta\varrho)^2$, ... $(\vartheta\varrho)^{\varkappa-1}$ bewiesen sei, und will ihn vorerst für eine Form $(H\varrho)^\varkappa$ erweisen, worin H eine ψ_1 eigentlich adjungirte Form erster Art oder ein Product solcher Formen bedeutet.

Im ersteren Falle, sowie in dem Falle, wo H ein Product ist, dessen Factoren von niederem Grade als ϱ sind, ist $(H\varrho)^\varkappa$ eine ψ_1 eigentlich adjungirte Form zweiter Art, also eine Form V. Ist hingegen $H = \varphi_1\varphi_2\varphi_3\dots$ gleich einem Producte von Formen, dessen einer Factor, etwa φ_1, einen Grad hat, der nicht kleiner ist als der Grad von ϱ, dann findet eine Identität statt (§. 2 Formel (VI.)):

$$(H\varrho)^\varkappa - (\varphi_1\varrho)^\varkappa\varphi_2\varphi_3\cdots = (\vartheta_1\varrho)^{\varkappa-1} + (\vartheta_2\varrho)^{\varkappa-2}\cdots.$$

Die Form $(\varphi_1\varrho)^\varkappa$ ist, wie oben gezeigt wurde, falls φ_1 eine Form V oder ein Product σ ist, eine Form V; ist hingegen $\varphi_1 = \varphi_{11}\varphi_{12}\varphi_{13}\dots$ ein Product von Formen, dessen einer Factor, etwa φ_{11}, einen Grad hat, der nicht kleiner als der Grad von ϱ ist, dann ersetze ich in unserer Relation φ_1 durch φ_{11} und mache dann dieselben Betrachtungen. Die Glieder auf der rechten Seite haben nach Annahme die behauptete Form, mithin kann auch $(H\varrho)^\varkappa$ in die Form gebracht werden: $F(V)+R$.

Um nun $(\vartheta\varrho)^\varkappa$ zu untersuchen, gehe ich von der Formel (XVII.) aus, welche lautet: $\vartheta = \Sigma cH+R$. Aus ihr geht die Relation hervor:

$$(\vartheta\varrho)^\varkappa = \Sigma c(H\varrho)^\varkappa + (R\varrho)^\varkappa,$$

in welcher die Glieder $(H\varrho)^\varkappa$ die Form $F(V)+R$ annehmen können und $(R\varrho)^\varkappa$ eine Form R ist. Somit ist unsere Behauptung bewiesen. Hat also ein symbolisches Product Φ die Eigenschaft, ausser den Symbolen ψ_1 nur *ein* Symbol ϱ zu besitzen, so ist es nach §. 2 Formel (IV.) ein Aggregat von Formen $(\vartheta\varrho)^\varkappa$ und kann daher die Form annehmen:

$$\text{(XIX.)} \qquad \Phi = F(V)+R.$$

Viel einfacher gestaltet sich die Untersuchung für die Formen ψ_i, deren Grad kleiner als n ist. In dem Falle, wo die Zahl n durch 4 theilbar ist, sind dies die Formen $\psi_2, \psi_3, \ldots$; sonst alle Formen $\psi_1, \psi_2, \ldots$. Die Formen V im System einer solchen Form ψ_i sind, als Formen von f aufgefasst, die zu ψ_i eigentlich adjungirten Formen erster Art; ich bezeichne wieder diese Formen und ihre Producte durch H, so dass jede Covariante und Invariante von ψ_i in die Form ΣcH gebracht werden kann, wo die c numerisch sind.

Bezeichne ich nun wieder jede Form, die eines der Symbole $\psi_{i+1}, \psi_{i+2}, \ldots$ enthält, sowie jedes Aggregat solcher Formen durch R und die ψ_i vorstehenden Formen durch ϱ, so kann jede Form $(\vartheta\varrho)^\varkappa$ in die Form $F(V)+R$ gebracht werden. Der Beweis kann in derselben Weise wie oben geführt werden. Hat also ein symbolisches Product Φ die Eigenschaft, ausser den Symbolen ψ_i nur ein Symbol ϱ zu besitzen, so kann es die Form annehmen:

$$(\mathrm{XX}^a.)\qquad \Phi = F(V)+R.$$

Für ψ_ν hat jede Form R den Werth Null; es ist dann also:

$$(\mathrm{XX}^b.)\qquad \Phi = F(V).$$

Man sieht nun leicht den Satz ein:

Jede Covariante und Invariante der Form $(V\psi_i)^\varkappa$ kann die Form annehmen:

$$(\mathrm{XXI}^a.)\qquad (V\psi_i)^\varkappa = F(V)+R.$$

Zum Beweise unterscheide ich drei Fälle (vgl. Ende des §. 5):

erstens: V enthält nur die Symbole ψ_i.

Hier hat $(V\psi_i)^\varkappa$ ebenfalls nur die Symbole ψ_i, ist also eine Covariante oder Invariante von ψ_i, hat also, wie oben gezeigt wurde, die Form $F(V)+R$.

zweitens: V ist eine Form ϱ oder ψ_i eigentlich adjungirt der zweiten Art.

Es enthält dann $(V\psi_i)^\varkappa$ ausser den Symbolen ψ_i nur ein Symbol ϱ, hat also nach den Formeln (XIX.) und (XX.) die gesuchte Form.

drittens: V enthält eines der Symbole $\psi_{i+1}, \psi_{i+2} \ldots$

In diesem Falle enthält $(V\psi_i)^\varkappa$ dieses Symbol ebenfalls, ist also eine Form R.

Für ψ_ν geht unser Satz in die Form über:

$$(\mathrm{XXI}^b.)\qquad (V\psi_\nu)^\varkappa = F(V).$$

§. 8.

Beweis, dass jede Covariante und Invariante von f eine ganze Function $F(V)$ der Formen V mit numerischen Coefficienten sei.

Der zu beweisende Satz gilt für die Formen erster und zweiter Ordnung; ich kann mithin die Annahme machen, dass er für Formen dritter, vierter, fünfter, ... $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung gelte, und will ihn dann für die Form Φ der m^{ten} Ordnung erweisen. Zu dem Ende will ich einige Hülfssätze aufstellen, aus denen leicht das gesuchte Resultat folgen wird. Ist die Form $H=\varphi_1\varphi_2\ldots$ ein Product von Formen V, und $(H\psi_i)^\varkappa$ eine Form m^{ter} Ordnung, so existirt eine Gleichung der Form:

$$\text{(XXII.)} \qquad (H\psi_i)^\varkappa = F(V)+R,$$

wo R eine Form, die eines der Symbole $\psi_{i+1}, \psi_{i+2}, \ldots$ enthält, oder ein Aggregat solcher Formen bedeutet.

Beweis.

Die Form $(H\psi_i)^0=H\psi_i$ ist eine Function $F(V)$, mithin kann ich die Annahme machen, der Satz gelte für die Formen: $(H\psi_i)^1, (H\psi_i)^2, \ldots (H\psi_i)^{\varkappa-1}$; er gilt dann auch für alle Formen $(\vartheta\psi_i)^0, (\vartheta\psi_i)^1, \ldots (\vartheta\psi_i)^{\varkappa-1}$ von der m^{ten} Ordnung, da in denselben die Formen ϑ von niederer als der m^{ten} Ordnung sind und daher nach unserer früheren Annahme ganze Functionen $F(V)=\Sigma cH$ sind. — Ich unterscheide nun vier Fälle (vgl. Ende des §. 5):

erstens: Der Grad von φ_1 ist grösser oder gleich $\varkappa$.

Nach §. 2 Formel (VI.) gilt hier die Identität:

$$(H\psi)^\varkappa-(\varphi_1\psi_i)^\varkappa\varphi_2\varphi_3\ldots = \Sigma(\vartheta_s,\psi_i)^{\varkappa-s}.$$

Die Glieder der rechten Seite haben nach Annahme die Form $F(V)+R$; die Form $(\varphi_1\psi_i)^\varkappa$ jedoch nach den Formeln (XXI.).

zweitens: φ_1 ist eine Form ϱ, deren Grad μ kleiner als $\varkappa$, also auch kleiner ist als der Grad von ψ_i.

Nach §. 2 Formel (VII.) ist dann:

$$(H\psi)^\varkappa-((\varphi_1\psi_i)^\mu,\varphi_2\varphi_3\ldots)^{\varkappa-\mu} = \Sigma(\vartheta_s,\psi_i)^{\varkappa-s}.$$

Die Glieder der rechten Seite haben nach Annahme die Form $F(V)+R$; die Form $(\varphi_1\psi_i)^\mu=(\varrho\psi_i)^\mu$ ist von niederem Grade als ψ_i, also eine der Formen $\psi_{i+1}, \psi_{i+2}, \ldots$ der ersten Gruppe von ψ_i, daher ist $((\varphi_1\psi_i)^\varkappa, \varphi_2\varphi_3\ldots)$ eine Form R und der Satz gültig.

drittens: φ_1 ist eine Form der ersten Gruppe von ψ_i.

Es ist dann φ_1 eine der Formen $\psi_{i+1}, \psi_{i+2}, \ldots$, also $(H\psi_i)^\varkappa$ eine Form R.

viertens: φ_1 enthält eines der Symbole $\psi_{i+1}, \psi_{i+2}, \ldots$.

Es ist dann $(H\psi_i)^\varkappa$ eine Form R. —

Man erkennt sofort, dass jede Form m^{ter} Ordnung $(\vartheta\psi_i)^\varkappa$, da sie ein Aggregat von Formen $(H\psi_i)^\varkappa$ ist, in die Form gebracht werden kann:

$$(\vartheta\psi_i)^\varkappa = F(V)+R,$$

und also auch jede Form Φ, die das Symbol ψ_i enthält, der Gleichung genügt:

$$(\text{XXIII.}) \qquad \Phi = F(V)+R,$$

da sie nach §. 2 Formel (IV.) eine Summe von Formen $(\vartheta\psi_i)^x$ ist. —

Da für ψ_ν kein R existirt, so sieht man, dass jede das Symbol ψ_ν enthaltende Form eine Function $F(V)$ ist; dasselbe gilt nach Formel (XXIII.) für die Formen, welche die Symbole $\psi_{\nu-1}$, $\psi_{\nu-2}$, $\psi_{\nu-3}$, ... enthalten. Hierhin gehören auch die Formen P_χ. Somit ist überhaupt nachgewiesen, dass jede Covariante und Invariante J von f von der m^{ten} Ordnung, da sie nach §. 5 Formel (XVI.) der Identität: $\Phi=F(A)+P_\chi$ genügt, eine Function $F(V)$ ist.

§. 9.

Formen fünften Grades.

Indem ich nun zu der Bildung eines Systems von Grundformen für die Formen fünfter und sechster Ordnung übergehe, werde ich nicht den in der allgemeinen Betrachtung verfolgten Weg durchmachen, sondern ein System von Grundformen U aufstellen und zeigen, dass alle Formen T als ganze Functionen derselben mit numerischen Coefficienten ausdrückbar seien. Für $n=5$ besteht das System der Fundamentalformen U aus folgenden 23 Formen:
$f=a_x^5$; $\varphi=(ff)^2$; $i=(ff)^4$; $j=(fi)^2$; $\alpha=(ji)^2$; $p=(\varphi i)^2$; $\tau=(pi)^2$; $\gamma=(\tau\alpha)$; $(f\varphi)$; (fp); $(f\tau)$; $(j\tau)$; (fi); (φi); (ji); (pi); (τi);

$$(i\alpha); \quad (i\gamma); \quad (ii)^2; \quad [i\alpha]^2; \quad (i\tau)^2; \quad (i\alpha)(i\gamma).$$

Aus den bekannten Fundamentalformen einer Form vierter Ordnung $f'=a_x'^4$ entstehen dadurch, dass man nach Weglassung der Indices mit dem Producte $a_xb_xc_x\ldots$ multiplicirt, die folgenden Covarianten von f:

$$f; \quad \varphi; \quad (f\varphi); \quad i; \quad a_xb_xc_x(ab)^2(ac)^2(bc)^2.$$

Die vier ersten dieser Formen sind Formen U, die letzte kann leicht in die Form j transformirt werden, ist also auch eine Form U; demnach ist jede den Factor $a_xb_xc_x\ldots$ habende Covariante von f eine Function $F(U)$, mithin auch jede Form W. Man kann daher jede Form J von f in der Gestalt schreiben (§. 4 Formel (XV.)):

$$J = F(U)+P_\chi,$$

oder da hier i die einzige Form χ ist,

$$(\text{XXIV.}) \qquad J = F(U)+P_i.$$

Ich will nun beweisen, dass jede Form m^{ter} Ordnung J von f eine Function $F(U)$ ist, und mache dabei die Annahme, dass dieser Satz für die Formen erster, zweiter, dritter, ... $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung erwiesen sei. Zuerst werde ich ihn für einige specielle Formen J beweisen und dann erst den allgemeinen Beweis antreten. —

Betrachten wir zuerst diejenigen Formen m^{ter} Ordnung, welche durch Uebereinanderschiebung von i mit Formen $(m-2)^{\text{ter}}$ Ordnung entstanden sind. Ich beginne mit:

$$J = ((f\varphi), i).$$

Man hat dann, da die Form $i_x a_x^3 \varphi_x^5 (ai)(a\varphi)$ aus $(f\varphi)$ durch die erste Combination mit φ entsteht (§. 2 Formel (VIII.)):

$$J = i_x a_x^3 \varphi_x^5 (ai)(a\varphi) + ci(f\varphi)^2.$$

Wendet man auf diese Formel die Identität:

$$2i_x \varphi_x (ai)(a\varphi) = i_x^2 (a\varphi)^2 + \varphi_x^2 (ai)^2 - a_x^2 (\varphi i)^2$$

an, so erhält man die Gleichung:

$$J = \tfrac{1}{2}(\varphi j - fp) + Ci(f\varphi)^2,$$

also ist J eine Function $F(U)$ nach Annahme. — In derselben Weise lassen sich die Formen $((fp), i)$, $((f\tau), i)$, $((j\tau), i)$, $((fi), i)$, $((\varphi i), i)$, $((ji), i)$, $((pi), i)$, $((\tau i), i)$ als ganze Functionen niederer Ordnung, also als Functionen $F(U)$ darstellen.

Die Formen $((i\alpha), i)$ und $((i\gamma), i)$ haben die Werthe $\frac{1}{2}\alpha(ii)^2$ und $\frac{1}{2}\gamma(ii)^2$, sind also Functionen $F(U)$, so dass wir den Satz haben:

Jede Form der m^{ten} Ordnung, welche die Gestalt (Ui) hat, ist eine Function $F(U)$.

Ist ferner $H = \varphi_1 \varphi_2 \ldots$ ein Product von Formen U, so ist (§. 2 F. (VI.))

$$(Hi) = (\varphi_1 i)\varphi_2 \varphi_3 \cdots + i\vartheta$$

eine Function $F(U)$ (da ϑ von der $(m-2)^{\text{ten}}$ Ordnung, also nach Annahme eine Function $F(U)$ ist). *Wenn also J eine erste Uebereinanderschiebung von i mit einer Form $(m-2)^{ter}$ Ordnung ist, so ist es durch die U ausdrückbar.*

Jetzt wende ich mich zu den Formen, die durch die zweite Uebereinanderschiebung von i mit einer Form $(m-2)^{\text{ter}}$ Ordnung entstehen, und beginne mit der Form:

$$((f\varphi), i)^2 = J.$$

Nach §. 2 Formel (VIII.) ist:

$$J = a_x^4 \varphi_x^3 (a\varphi)(\varphi i)^2 + \sum_1^2{}_s (\vartheta_s, i)^{2-s}$$

$$= (fp) + \sum_1^2{}_s (\vartheta_s, i)^{2-s}.$$

Da sowohl (fp) eine Form U ist, als auch, wie eben gezeigt wurde, jede Form (ϑ, i) eine ganze Function der U ist, so ist auch $((f\varphi), i)^2$ eine Function $F(U)$. Ebenso führt man den Beweis für die Formen: $((fp), i)^2$, $((f\tau), i)^2$, $((j\tau), i)^2$, $((fi), i)^2$, $((\varphi i), i)^2$, $((ji), i)^2$, $((pi), i)^2$. — Die Form $((\tau i), i)^2$ hat den Werth Null. *Jede Form also, welche durch die zweite Uebereinanderschiebung von i mit einer Form U entsteht, ist durch Formen niederer Ordnung, also auch durch Formen U ausdrückbar.*

Ich gehe nun zu der Betrachtung der Formen über, welche durch die zweite Uebereinanderschiebung von i mit einem Producte H von Formen U entstehen, und beginne mit denjenigen Formen, in denen H das Product zweier linearen Formen U ist.

Die Form: $J = ((i\alpha)\alpha, i)^2$, welche ich zuerst betrachten will, hat den Werth $(ii')(i\alpha)(i'\alpha) = 0$; ebenso die Form $((i\gamma)\gamma, i)^2$. In ähnlicher Weise erhält man unmittelbar für die Formen $(Hi)^2$, wenn H gleich α^2, $\alpha\gamma$, $(i\alpha)\gamma$, $(i\alpha)(i\alpha)$, $(i\gamma)\alpha$, $(i\alpha)(i\gamma)$, $(i\gamma)(i\gamma)$ ist, die Werthe: $[i\alpha]^2$, $[i\alpha][i\gamma]$, $\frac{1}{2}(ii)^2(\alpha\gamma)$, $\frac{1}{2}(ii)^2[i\alpha]^2$, $\frac{1}{2}(ii)^2(\gamma\alpha)$, $\frac{1}{2}(ii)^2[i\alpha][i\gamma]$, $\frac{1}{2}(ii')^2[i\gamma]^2$, so dass in diesen Fällen $(Hi)^2$ eine Function von Formen U und niederer Ordnung ist, also nach Annahme eine Function $F(U)$. Um $[i\gamma]^2$ zu betrachten, gehe ich von der Gleichung aus:

$$\gamma^2 = (\tau\alpha)(\tau\alpha) = \tau_x\tau'_x(\tau\alpha)(\tau'\alpha)$$

und benutze die Identität:

$$2\tau_x\tau'_x(\tau\alpha)(\tau'\alpha) = \tau_x^2(\tau'\alpha)^2 + \tau_x'^2(\tau\alpha)^2 - \alpha_x^2(\tau\tau')^2;$$

ich erhalte dann die Formel:

$$\gamma^2 = \tau(\tau\alpha)^2 - \tfrac{1}{2}\alpha^2(\tau\tau')^2, \quad \text{also} \quad [i\gamma]^2 = (i\tau)^2(\tau\alpha)^2 - \tfrac{1}{2}(i\alpha)^2(\tau\tau')^2,$$

also ist $[i\gamma]^2$ ebenfalls eine Function $F(V)$, *so dass die Form $(Hi)^2$ stets dann eine Function $F(V)$ ist, wenn H das Product zweier linearen Formen V ist.* —

Gehen wir nun zu dem allgemeinen Fall über, die Form $(Hi)^2$ zu untersuchen, wenn $H = \varphi_1\varphi_2\varphi_3\ldots$ irgend ein Product von Formen U ist. Hierbei unterscheide ich zwei Fälle, jenachdem ein Factor von H, etwa φ_1, eine nicht lineare Form U ist, oder alle Factoren von H linear sind. In dem letzteren Falle sei φ_1 das Product zweier linearen Formen U.

In beiden Fällen existirt nach §. 2 Formel (VI.) die Identität:

$$(Hi)^2 = (\varphi_1 i)^2\varphi_2\varphi_3\cdots + \sum_1^2{}_s(\vartheta_s, i)^{2-s},$$

woraus wir den Schluss ziehen, *dass, wenn H ein Product von Formen U ist, die Form $(Hi)^2$ eine Function $F(U)$ ist.*

Ferner: *Jede Form, welche durch die zweite Uebereinanderschiebung* *von i mit einer Form $(m-2)^{ter}$ Ordnung entsteht, ist durch Formen U und Formen niederer Ordnung ausdrückbar, also nach Voraussetzung durch Formen U.* Nach §. 2 Formel (IV.) ist aber jede Form P_i, welche das Symbol i enthält, in der Form

$$i\vartheta+(i\vartheta_1)+(i\vartheta_2)^2$$

ausdrückbar; *jede Form P_i ist daher durch Formen U ausdrückbar, also nach dem Früheren* (Formel (XXIV.)) *überhaupt jedes J;* was zu beweisen war.

§. 10.

Formen sechsten Grades.

Die Fundamentalformen U für $f=a_x^6$ sind folgende 26 Formen:

f, $\varphi=(ff)^2$, $k=(ff)^4$, $A=(ff)^6$, $t=(f\varphi)$, (fk), $(fk)^2$, $l=(fk)^4$, (φk), (fl), $\Delta=(kk)^2$, $i=(kk)^4$, $(f\Delta)$, (kl), $m=(kl)^2$, (fm), $(k\Delta)$, $j=(k\Delta)^4$, (km), $n=(km)^2$, $\varrho_1=(lm)$, (kn), $(mm)^2$, $\varrho_2=(ln)$, $\varrho_3=(mn)$, $(lm)(ln)(mn)$.

Knüpfen wir zuerst an die Form $k=\varkappa_x^4=a_x^2b_x^2(ab)^4$ einige vorbereitende Betrachtungen. Differentiirt man k, und ersetzt man die Incremente der Reihe nach durch die Variabeln y, z, r, so erhält man folgende Identitäten:

$$\varkappa_x^3\varkappa_y=a_x^2b_xb_y(ab)^4,$$

$$\varkappa_x^2\varkappa_y\varkappa_z=\tfrac{1}{3}a_xb_y(ab)^4\{2a_zb_x+b_za_x\}=\tfrac{1}{3}a_xb_y(ab)^4\{2(ab)(zx)+3b_za_x\}$$

$$=(ab)^4a_x^2b_yb_z-\tfrac{1}{3}A(yx)(zx),$$

$$\varkappa_x\varkappa_y\varkappa_z\varkappa_r=(ab)^4a_xa_rb_yb_z-\tfrac{1}{6}A\{(yr)(zx)+(zr)(yx)\}.$$

Jede Covariante und Invariante von f also, die den Factor $(ab)^4$ hat, kann in die Form $P_\varkappa+AR$ gebracht werden, wo $P_\varkappa$ einen das Symbol $\varkappa$ enthaltenden Ausdruck bedeutet (vgl. §. 2).

Die Formen W (vgl. §. 4) *können die Form $F(U)+P_\varkappa+AR$ annehmen.*

Beweis.

Die Formen W sind ganze Functionen derjenigen Covarianten A von f, welche den Fundamentalformen einer Form fünften Grades entsprechen. Alle diese Formen A ausser f, φ, t entsprechen nun Formen, die das Symbol i enthalten, und haben daher den Factor $(ab)^4$, können also die Form $P_\varkappa+AR$ annehmen.

Da nun nach §. 4 Formel (XV.) jede Form J von f in die Form $W+P_\chi$ gebracht werden kann, und die einzigen χ hier k und A sind, so kann J die Form annehmen:

$$\text{(XXV.)} \qquad J = F(U)+P_\varkappa+AR.$$

Um nun nachzuweisen, dass jede Form J durch Formen U ausdrückbar sei, werde ich wieder zunächst annehmen, dieser Satz sei für alle Formen erster, zweiter, dritter, ... $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung richtig, und ihn dann für Formen m^{ter} Ordnung nachweisen; zunächst aber insbesondere für einige specielle Formen J.

Zuerst betrachte ich diejenigen Formen, die durch die erste Uebereinanderschiebung einer Form U mit k entstehen, und beginne mit:

$$J = ((f\varphi), k).$$

Es ist dann nach §. 2 Formel (VIII.), da die Form $a_x^4 \varphi_x^7 (a\varphi)(a\varkappa)\varkappa_x^3$ durch die erste Combination von $(f\varphi)$ mit k entsteht,

$$J = a_x^4 \varkappa_x^3 \varphi_x^7 (a\varphi)(a\varkappa) + ck(f\varphi)^2,$$

und wenn man die Identität:

$$2\varphi_x \varkappa_x (a\varphi)(a\varkappa) = \varphi_x^2 (a\varkappa)^2 - a_x^2 (\varphi\varkappa)^2 + \varkappa_x^2 (a\varphi)^2$$

anwendet:

$$J = \tfrac{1}{2}\varphi(fk)^2 - \tfrac{1}{2}f(\varphi k)^2 + ck(f\varphi)^2.$$

Die in diesem Ausdrucke von J vorkommenden Formen sind von niederer als der m^{ten} Ordnung; mithin lassen sie sich sowohl als auch J (nach Annahme) durch die Formen U ausdrücken.

In derselben Weise zeigt man, dass die Formen: $((\varphi k), k)$, $((fk), k)$, $((f\varDelta), k)$, $((fl), k)$, $((kl), k)$, $((fm), k)$, $((f\varDelta), k)$, $((km), k)$, $((kn), k)$, $((k\varDelta), k)$, (ϱ_1, k), (ϱ_2, k), (ϱ_3, k) sich als Functionen der U darstellen lassen. —

Für die Form

$$J = ((fk)^2, k)$$

erhält man (§. 2 Formel (VIII.)):

$$J = a_x^4 \varkappa_x (a\varkappa)^2 (\varkappa\varkappa')\varkappa_x'^3 + ck(fk)^3 = -\tfrac{1}{2} a_x^5 \varkappa_x \varkappa_x'^2 (a\varkappa)(\varkappa\varkappa')^2 + ck(fk)^3 = \tfrac{1}{2}(\varDelta f) + ck(fk)^3,$$

wodurch diese Form ebenfalls dargestellt ist. Aus diesen Betrachtungen ergiebt sich nun sofort, *dass jede Form (Uk) eine Function $F(U)$ ist.*

Ist ferner H ein Product der U, so ist (Hk) eine Function $F(U)$ (vgl. 2 Formel (VI.)). *Jede Form m^{ter} Ordnung, welche die Gestalt (ϑk) hat, ist eine Function $F(U)$* (da ϑ eine Form $(m-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, also nach Annahme eine Function $F(U) = \Sigma cH$ ist).

Ehe ich zu höheren Uebereinanderschiebungen mit k übergehe, will ich einige Folgerungen aus der (Annali di Matemat. pura ed applicata Ser. II. T. I. p. 53) gegebenen Relation:

$$(fk)^3 = 0$$

ziehen. Man erhält daraus die folgenden weiteren Formeln (§. 2 Formel (VI.)):

$$0 = (ab)\,a_x^2\,\varkappa_x\,b_x^5(a\varkappa)^3 + clf$$
$$= \tfrac{1}{2}(ab)a_x^2 b_x^2 \varkappa_x \{b_x^3(a\varkappa)^3 - a_x^3(b\varkappa)^3\} + clf,$$
$$clf = \tfrac{1}{2}(ab)^2 a_x^2 b_x^2 \varkappa_x^2 \{b_x^2(a\varkappa)^2 + a_x b_x (a\varkappa)(b\varkappa) + a_x^2(b\varkappa)^2\}$$
$$= \tfrac{1}{2}(ab)^2 a_x^2 b_x^2 \varkappa_x^2 \{3b_x^2(a\varkappa)^2 - \tfrac{1}{2}(ab)^2\varkappa_x^2\} = \tfrac{3}{2}a_x^2 b_x^4 \varkappa_x^2 (a\varkappa)^2(ab)^2 - \tfrac{1}{4}k^2.$$

Da die Form $a_x^2 b_x^4 \varkappa_x^2 (a\varkappa)^2(ab)^2$ aus der Form $\varphi = (ff)^2$ durch die zweite Combination mit k entsteht, so ist nach §. 3 Formel (XI.)

$$a_x^2 b_x^4 \varkappa_x^2 (a\varkappa)^2 (ab)^2 = (\varphi k)^2 + c_1 k^2,$$

und mithin hat die Form $(\varphi k)^2$ den Werth

$$(\varphi k)^2 = Clf + C_1 k^2,$$

ist also durch Formen U darstellbar.

Um die Form $((fk)^2, k)^2$ zu untersuchen, gehe ich ebenfalls von der Identität $(fk)^3 = 0$ aus; da die Form $a_x^3(\varkappa\varkappa')(a\varkappa)^3\varkappa_x'^3$ aus $(fk)^3$ durch die erste Combination mit k entsteht, so ist nach §. 2 Formel (VI.):

$$0 = a_x^3 \varkappa_x'^3 (a\varkappa)^3(\varkappa\varkappa') + ckl,$$

also:

$$-ckl = \tfrac{1}{2}a_x^3(\varkappa\varkappa')\{\varkappa_x'^3(a\varkappa)^3 - \varkappa_x^3(a\varkappa')^3\}$$
$$= -\tfrac{1}{2}a_x^4(\varkappa\varkappa')^2\{\varkappa_x'^2(a\varkappa)^2 + \varkappa_x\varkappa_x'(a\varkappa)(a\varkappa') + \varkappa_x^2(a\varkappa')^2\},$$
$$ckl = \tfrac{1}{2}a_x^4(\varkappa\varkappa')^2\{3\varkappa_x'^2(a\varkappa)^2 - (\varkappa\varkappa')^2 a_x^2\} = \tfrac{3}{2}a_x^4\varkappa_x'^2(a\varkappa)^2(\varkappa\varkappa')^2 - \tfrac{1}{2}if.$$

Die Form $a_x^4\varkappa_x'^2(a\varkappa)^2(\varkappa\varkappa')^2$ entsteht aus $(fk)^2$ durch die zweite Combination mit k, folglich ist nach §. 2 Formel (VI.):

$$a_x^4\varkappa_x'^2(a\varkappa)^2(\varkappa\varkappa')^2 = ((fk)^2, k)^2 + C_1((f\varkappa)^3, k)^2 + C_2 k (f\varkappa)^4,$$

und $((fk)^2, k)^2$ hat den Werth: $Ckl + C_1 if$, ist also eine ganze Function von den U.

Nachdem nunmehr gezeigt worden ist, dass die Formen $(\varphi k)^2$ und $((fk)^2, k)^2$ ganze Functionen $F(U)$ seien, gehe ich dazu über nachzuweisen, dass auch die übrigen Covarianten der Form $(Uk)^2$ diese Eigenschaft besitzen, und wende mich zuerst zu der Form $J = ((f\varphi), k)^2$.

Dieselbe lässt sich nach §. 2 Formel (VIII.) folgendermassen schreiben:

$$((f\varphi), k)^2 = a_x^5(a\varphi)\varphi_x^5(\varphi k)^2\varkappa_x^2 + \sum_1^2{}_s c_s((f\varphi)^{s+1}, k)^{2-s}.$$

Die Form $a_x^5(a\varphi)\varphi_x^5\varkappa_x^2(\varphi k)^2$ entsteht nun aus der Form $(\varphi k)^2$ durch die erste Combination mit f, hat also nach §. 2 Formel (VIII.) den Werth

$$a_x^5\varphi_x^5\varkappa_x^2(a\varphi)(\varphi k)^2 = ((\varphi k)^2, f) + cf(\varphi k)^3;$$

mithin ist:

$$(tk)^2 = ((\varphi k)^2, f) + cf(\varphi k)^3 + \sum_1^2{}_s c_s((f\varphi)^{s+1}, k)^{2-s};$$

da, wie oben gezeigt wurde, $(\varphi k)^2 = Clf + C_1 k^2$, so erhalten wir nach

§. 2 Formel (VI.) die Gleichung:

$$(tk)^2 = C_2(l, f)f + C_3 k(kf) + cf(\varphi k)^3 + \sum_1^2{}_s c_s((f\varphi)^{s+1}, k)^{2-s},$$

aus der wir folgern, dass $(tk)^2$ sich aus Formen niederer Ordnung und aus Formen, die aus der ersten Uebereinanderschiebung mit k entstehen, zusammensetzen lässt. —

Um zu zeigen, dass auch die Form $((\varphi k), k)^2$ eine ganze Function der U ist, benutze ich den Umstand, dass die Form $\varphi_x^5(\varphi\varkappa')^2\varkappa_x'^2(\varphi\varkappa)\varkappa_x^3$ aus den Formen (φk) und $(\varphi k)^2$ durch die zweite und die erste Uebereinanderschiebung mit k hervorgeht und daher die Werthe besitzt (§. 2 Formel (VIII.)):

$$\varphi_x^5(\varphi\varkappa')^2\varkappa_x'^2\varkappa_x^3(\varphi\varkappa)\begin{cases} = ((\varphi k), k)^2 + c_1((\varphi k)^2, k) + c_2 k(\varphi k)^3 \\ = ((\varphi k)^2, k) + c_3 k(\varphi k)^3. \end{cases}$$

Durch Gleichsetzung dieser beiden Werthe erhalten wir die Gleichung:

$$((\varphi k), k)^2 = C((\varphi k)^2, k) + C_1 k(\varphi k)^3,$$

aus der, wie oben gezeigt wurde, folgt, dass sich $((\varphi k), k)^2$ durch Formen U ausdrücken lässt. Mittelst desselben Verfahrens kann man beweisen, dass ebenfalls die Formen $((fk), k)^2$, $((lk), k)^2$, $((mk), k)^2$, $((nk), k)^2$, $((\varDelta k), k)^2$ ganze Functionen $F(U)$ seien. —

Da die Form k eine Form vierten Grades ist, so hat die Covariante $(\varDelta k)^2$ von k, wie bekannt, den Werth: $(\varDelta k)^2 = cik$; ich will diese Formel benutzen, um auch die Form $((\varDelta f), k)^2$ zu untersuchen. Zu dem Ende betrachte ich die Form $a_x^5\varDelta_x\varkappa_x^2(\varDelta a)(\varDelta k)^2$, welche aus den Formen $(\varDelta f)$ und $(\varDelta k)^2$ durch die zweite Combination mit k und durch die erste Combination mit f entsteht und daher die Werthe hat:

$$a_x^5\varDelta_x k_x^2(\varDelta a)(k\varDelta)^2\begin{cases} = ((\varDelta f), k)^2 + c((\varDelta f)^2, k) + c_1 k(\varDelta f)^3 \\ = ((\varDelta k)^2, f) + c_2 f(\varDelta k)^3 = c_3 i(kf). \end{cases}$$

Aus dieser Identität folgt unmittelbar, dass $((\varDelta f), k)^2$ sich durch die U ausdrücken lässt.

Die Form $((fl), k)^2$ hat, da die Form $a_x^4\varkappa_x^2(a\varkappa)(al)(lk)$ aus (fl) durch die zweite Combination mit k entsteht, den Werth (Formel (VIII.)):

$$((fl), k)^2 = a_x^4\varkappa_x^2(a\varkappa)(al)(l\varkappa) + c((fl)^2, k),$$

oder wenn man die Identität:

$$2a_x\varkappa_x(al)(l\varkappa) = l_x^2(a\varkappa)^2 - \varkappa_x^2(al)^2 - a_x^2(\varkappa l)^2$$

benutzt:

$$\begin{aligned} ((fl), k)^2 &= \tfrac{1}{2}l(fk)^2 + C((fl)^2, k) - \tfrac{1}{2}(f, (kl)^2) \\ &= \tfrac{1}{2}l(fk)^2 + C((fl)^2, k) - \tfrac{1}{2}(f, m), \end{aligned}$$

ist also durch U' darstellbar. Etwas verwickelter ist der Nachweis, dass auch die Form $((fm), k)^2$ eine Function $F(U)$ sei. Diese Form hat, da die Form $a_x^3 \varkappa_x^2 (a\varkappa)(am)(m\varkappa)$ aus (fn) durch die zweite Combination mit f entsteht, den Werth (Formel (VIII.)):

$$((fm), k)^2 = a_x^3 \varkappa_x^2 (a\varkappa)(am)(m\varkappa) + c((fm)^2, k),$$

oder da $m = \varkappa_x^2 (\varkappa l)^2$ ist:

$$\begin{aligned} ((fm), k)^2 &= a_x^3 \varkappa_x^2 (a\varkappa)(a\varkappa')(\varkappa'\varkappa)(\varkappa' l)^2 + c((fm)^2, k) \\ &= -a_x^3 \varkappa_x l_x (a\varkappa)(a\varkappa')(\varkappa\varkappa')^2(\varkappa' l) + c((fm)^2, k). \end{aligned}$$

Die erste Form der rechten Seite entsteht nun durch die erste Combination mit l aus der Form $a_x^3 \varkappa_x \varkappa'_x (a\varkappa)(a\varkappa')(\varkappa\varkappa')^2$, welche letztere Form wieder durch die zweite Combination mit f aus $\varDelta$ entsteht, also den Werth hat (Formel (VIII.)):

$$(\varDelta f)^2 + cif,$$

oder da, wie oben gezeigt wurde, $(\varDelta f)^2 = Cif + C_1 kl$ ist, den Werth hat:

$$C_2 if + C_3 kl.$$

Aus diesen Betrachtungen kann man auf die Identität schliessen:

$$((fm), k)^2 = c((fm)^2, k) + c_1 i (fl) + c_2 l (kl),$$

welche zeigt, dass $((fm), k)^2$ eine Function $F(U)$ ist. — Die Form $(kn)^2$, die ich durch p bezeichnen will, hat den Werth:

$$p = im + 2jl,$$

(Ann. di Mat. pag. 58) ist also durch Formen U ausdrückbar; ebenso die drei Formen $(\varrho_i, k)^2$, welche die folgenden Werthe besitzen:

$$\begin{aligned} (\varrho_1 k)^2 &= -\varrho_2, \\ (\varrho_2 k)^2 &= -\varrho_3 + c\varrho_1 i, \\ (\varrho_3 k)^2 &= cj\varrho_1, \end{aligned}$$

so dass jede in der Form $(Uk)^2$ *enthaltene Covariante eine ganze Function der* U *ist.*

Ferner ist die Form $(Hk)^2$, *in der* H *ein Product von Formen* U *bedeutet, mittelst der Formel* (VI.) *durch die* U *darstellbar, sowie endlich jede Form, welche aus einer Form* $(m-2)^{ter}$ *Ordnung durch die zweite Uebereinanderschiebung mit* U *entsteht.*

Ich wende mich nun zu der Untersuchung derjenigen Formen, welche durch die dritte Uebereinanderschiebung mit k entstehen, und beginne mit der Betrachtung der Form $(\varphi k)^3$. — Da die Form $(a\varkappa)^3 a_x b_x^4 (ab)^2 \varkappa_x$ aus den Formen φ und $(fk)^3 = 0$ durch die dritte Combination mit k und durch die zweite Combination mit f entsteht, hat sie die beiden Werthe (Formel (VIII.)):

$$a_x b_x^4 \varkappa_x (ab)^2 (a\varkappa)^3 \begin{cases} = (\varphi k)^3 + \sum_1^3 {}_s c_s ((ff)^{s+2}, k)^{3-s} \\ = c(fl), \end{cases}$$

durch deren Gleichsetzung gezeigt werden kann, wie die Form $(\varphi k)^3$ durch die U ausdrückbar ist. — Ein ähnliches Verfahren lehrt uns die Formen: $(tk)^3$, $((f\Delta), k)^3$, $((fl), k)^3$, $((fm), k)^3$ durch die U ausdrücken.

Um die Form $((\varphi\varkappa), k)^3$ zu untersuchen, bemerke ich, dass die Form $\varphi_x^4 \varkappa_x^3 \varkappa'_x (\varphi\varkappa)(\varphi\varkappa')^3$ aus den Formen (φk) und $(\varphi k)^3$ durch die dritte und erste Combination mit k entsteht, mithin die Werthe hat (Formel (VIII.)):

$$\varphi_x^4 \varkappa_x^3 \varkappa'_x (\varphi\varkappa)(\varphi\varkappa')^3 \begin{cases} = ((\varphi k), k)^3 + \sum_1^3 {}_s c_s ((\varphi k)^{s+1}, k)^{3-s} \\ = ((\varphi k)^3, k) + ck\,(\varphi k)^4, \end{cases}$$

durch deren Gleichsetzung man sieht, dass die Form $((\varphi k), k)^3$ eine Function $F(U)$ ist. — In derselben Weise kann man zeigen, dass die Formen $((fk), k)^3$, $((fk)^2, k)^3$, $((k\Delta), k)^3$ durch die U dargestellt werden können.

Da endlich die Formen $((kl), k)^3$, $((km), k)^3$, $((kn), k)^3$ die Werthe haben:

$$((kl), k)^3 = cil + c_1 n,$$
$$((km), k)^3 = cim + c_1 jl,$$
$$((kn), k)^3 = cin + c_1 jm,$$

also ganze Functionen der U sind, *so kann jede Function, welche aus einer Form U durch die dritte Uebereinanderschiebung mit k entsteht, durch die Formen U dargestellt werden.*

Ich will nun dazu übergehen, auch diejenigen Formen $(Hk)^3$ zu untersuchen, in denen H ein Product von Formen U ist, und beginne mit dem Falle, wo H das Product zweier quadratischer Covarianten U ist. —

Sind σ und τ irgend zwei quadratische Formen, so ist (Formel (VIII.)):

$$(\sigma\tau, k)^3 = (\varkappa\sigma)^2 \varkappa_x \tau_x (\varkappa\tau) + c((\sigma\tau), k)^2$$
$$= \{\varkappa_x^2 (\varkappa\sigma)^2, \tau\} + c((\sigma\tau), k)^2;$$

ersetzt man in dieser Formel σ und τ durch irgend zwei der Formen: l, m, n, ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, so sieht man unmittelbar, dass der Ausdruck $\{\varkappa_x^2 (\varkappa\sigma)^2, \tau\}$ sich als Aggregat der Functionaldeterminanten dieser sechs quadratischen Formen, mithin auch als Aggregat dieser Formen selbst darstellen lässt. Da dann auch $((\sigma\tau), k)^2$, wie oben gezeigt wurde, eine Function $F(U)$ ist, ***so ist $(\sigma\tau, k)^3$ stets durch die Formen U ausdrückbar, wenn σ und τ zwei quadratische Covarianten U bedeuten.***

Aus der Formel (VI.) geht nun unmittelbar der Satz hervor:

Jede Form, die aus einem Product von Formen U durch die dritte Uebereinanderschiebung mit k entsteht, ist durch die Formen U ausdrückbar.

Ferner: *Jede Form, die aus einer Form* $(m-2)^{\text{ter}}$ *Ordnung durch die dritte Uebereinanderschiebung mit k entsteht, ist eine ganze Function der Formen U.*

Es bleibt uns nun noch die Untersuchung der Formen übrig, welche sich durch die vierte Uebereinanderschiebung mit k ableiten lassen. Ich beginne mit der Form $(\varphi k)^4$ und benutze den Umstand, dass die Form $b_x^4 (ab)^2 (a\varkappa)^4$ aus den Formen φ und l durch die vierte Combination mit k und durch die zweite Combination mit f entsteht, also die beiden Werthe hat (Formel (VIII.)):

$$b_x^4 (ab)^2 (a\varkappa)^4 \begin{cases} = (\varphi k)^4 + \sum_1^4 {}_s c_s \left((ff)^{s+2}, k\right)^{4-s}, \\ = (fl)^2. \end{cases}$$

Da die Form $(fl)^2$, wie in der oben erwähnten Abhandlung (Ann. di. Mat. Ser. II. T. I. pag. 60) gezeigt wurde, den Werth $\frac{2}{3}(\varDelta + Ak)$ hat, so ist nach obiger Identität $(\varphi k)^4$ eine ganze Function der Formen U. —

Um die Form $(tk)^4$ zu untersuchen, gehe ich von der Form

$$(\varphi k)^4 (a\varphi)\, a_x^5 \varphi_x^3 = \left((\varphi k)^4, f\right)$$

aus, welche aus t durch die vierte Combination mit k entsteht, also nach Formel (IV.) den Werth hat:

$$(\varphi k)^4 (a\varphi)\, a_x^5 \varphi_x^3 = (tk)^4 + \sum_1^4 {}_s (\vartheta_s, k)^{4-s}.$$

Nun haben wir eben gesehen, dass $(\varphi k)^4 = C\varDelta + C_1 Ak$ ist, also ist auch: $\left((\varphi k)^4, f\right) = C(\varDelta f) + CA(kf)$ und:

$$C(\varDelta f) + C_1 A(kf) = (tk)^4 + \sum_1^4 {}_s (\vartheta_s, k)^{4-s}.$$

Hieraus folgt, dass die Form $(tk)^4$ eine ganze Function der U ist. —

Ist die Form $\psi = \psi_x^\nu$ eine beliebige Covariante von f, so findet, da die Form $\psi_x^{\nu-2} (\psi\varkappa)(\psi\varkappa')(\varkappa\varkappa')^3 = 0$ aus der Form (ψk) durch die vierte Combination mit f entsteht, die Relation statt (Formel (IV.)):

$$\left((\psi k), k\right)^4 = \sum_1^4 {}_s (\vartheta_s, k)^{4-s}.$$

Ersetzt man in dieser Identität ψ der Reihe nach durch die Formen: φ, f, l, m, n, $\varDelta$, so sieht man, dass diejenigen Formen, welche durch die vierte Uebereinanderschiebung mit k aus den Formen: (φk), (fk), (lk), (mk), (nk), $(\varDelta k)$ entstehen, durch die Formen U ausgedrückt werden können.

Den Werth der Form $((fk)^2, k)^4$ finde ich durch die Bemerkung, dass die Form $(a\varkappa)^4(a\varkappa')^2\varkappa_x'^2 = (kl)^2 = m$ aus der Form $(fk)^2$ durch die vierte Combination mit k entsteht, also der Gleichung genügt:

$$m = ((fk)^2, k)^4 + \sum_1^4{}_s(\vartheta_s, k)^{4-s}.$$

In ähnlicher Weise finde ich für die Covarianten $((fl), k)^4$ und $((fm), k)^4$ die Ausdrücke:

$$((fl), k)^4 = \sum_1^4{}_s(\vartheta_s, k)^{4-s},$$

$$((fm), k)^4 = \varrho_1 + \sum_1^4{}_s(\vartheta_s, k)^4.$$

Aus diesen 3 Formeln folgere ich, dass diejenigen Formen, welche aus den Formen $(fk)^2$, (fm), (fl) durch die vierte Uebereinanderschiebung mit k entstehen, ganze Functionen der U sind.

Um die Form $((f\varDelta), k)^4$ zu untersuchen, benutze ich den Umstand, dass die Form $a_x^4(a\varDelta)(ak)(\varDelta k)^3$, welche aus $(f\varDelta)$ durch die vierte Combination mit k entsteht, zugleich aus der Form $(\varDelta k)^3 = 0$ durch die zweite Uebereinanderschiebung mit f entsteht, also verschwindet. Es ist daher die Form (Formel (IV.))

$$((f\varDelta), k)^4 = \sum_1^4{}_s(\vartheta_s, k)^{4-s}$$

eine ganze Function der U und somit allgemein *jede Form, die aus einer Form U durch die vierte Uebereinanderschiebung mit k entsteht, durch die Formen U ausdrückbar.*

Indem ich nun zu den Formen übergehe, welche aus *Producten H* der Formen U durch die vierte Uebereinanderschiebung mit k entstehen, beginne ich mit dem Falle, wo H das Product irgend zweier quadratischer Formen U ist, die ich σ und τ nennen will. Die Form:

$$(\sigma\tau, k)^4 = ((\sigma k)^2, \tau)^2$$

ist, da, wie oben gezeigt wurde, die Form $(\sigma k)^2$ stets aus den quadratischen Formen U linear zusammengesetzt werden kann, ein Aggregat von Invarianten $(\varrho\tau)^2$, welche aus zwei quadratischen Formen U durch die zweite Uebereinanderschiebung entstehen. Hieraus folgt, dass die Invarianten $(\sigma\tau, k)^4$, in denen σ und τ irgend zwei Formen U zweiten Grades bedeuten, durch simultane Invarianten der Formen l, m, n ausdrückbar sind. Diese simultanen Invarianten sind nun aber, wie bekannt, ganze Functionen der sieben Invarianten:

$$(ll)^2,\quad (lm)^2,\quad (ln)^2,\quad (mm)^2,\quad (mn)^2,\quad (nn)^2,\quad (lm)(ln)(mn),$$

welche, wie (Ann. di. mat. ser. II. t. I. pag. 54—64) nachgewiesen wurde, ganze Functionen der Invarianten U sind, mithin sind auch alle Formen $(\sigma\tau, k)^4$ ganze Functionen dieser Invarianten.

Ich bin jetzt im Stande nachzuweisen, *dass jede Form die durch die vierte Uebereinanderschiebung mit k aus einem Producte H von Formen U entsteht, durch die Formen U ausgedrückt werden kann.*

Ein jedes solches Product $H = \varphi_1\varphi_2\varphi_3\ldots$ nämlich hat einen Factor, etwa φ_1, der entweder eine Covariante U ist, deren Grad grösser oder gleich vier ist, oder der ein Product zweier quadratischer Covarianten U ist; es ist dann nach Formel (VI.) die Form

$$(Hk)^4 = (\varphi_1 k)^4 \varphi_2\varphi_3\cdots + \sum_1^4 {}_s (\vartheta_s, k)^{4-s},$$

also eine ganze Function der U.

Aus diesen Betrachtungen kann ich folgende Folgerungen ableiten:

Jede Form, die durch die vierte Uebereinanderschiebung mit k aus einer Form $(m-2)^{ter}$ *Ordnung entsteht, ist eine ganze Function der U.*

Da das Nämliche, wie oben bewiesen, für die Formen gilt, die durch die 0^{te}, 1^{ste}, 2^{te} und 3^{te} Uebereinanderschiebung mit k aus Formen $(n-2)^{ter}$ Ordnung entstehen, *so ist nach* §. 2 *Formel* (IV.) *jede Form* P_x, *die das Symbol k enthält, eine ganze Function der U; sowie nach* §. 10 *Formel* (XXV.) *jede Form* m^{ter} *Ordnung von f überhaupt.*

Giessen, den 8. Juni 1868.