10.

Theorie der homogenen Functionen dritten Grades von drei Veränderlichen.

(Von Herrn *S. Aronhold.*)

Der Verfasser dieser Abhandlung hatte die Absicht, ehe er die Theorie der homogenen Functionen dritter Ordnung von drei Veränderlichen der Oeffentlichkeit übergiebt, eine ganz allgemeine Theorie der homogenen Functionen auf Grund einer Schrift *), welche er der Königsberger Universität im Jahre 1851 überreicht hat, zu bearbeiten, allein Berufsgeschäfte, welche seine ganze Thätigkeit für die angewandte Mathematik in Anspruch nahmen, und noch fortdauern, hinderten ihn daran.

Um nun seinen Antheil an der Entwicklung der neueren Algebra nicht gänzlich aufzugeben, erlaubt sich der Verfasser seine Untersuchungen so vorzulegen, wie er sie in einer bereits ältern Bearbeitung besitzt, und wie sie im Grunde auch entstanden sind, und bittet um Entschuldigung wenn Weitläuftigkeiten dadurch entstehen mufsten, dafs der specielle Fall der allgemeinen Theorie vorangeht, und insbesondere, dafs eine allgemeine Theorie der Invarianten diesen Entwicklungen nicht vorausgehen konnte.

§. 1.

In den vorliegenden Untersuchungen werden folgende Bezeichnungen und Benennungen gebraucht werden:

Sind

$$x_1,\quad x_2,\quad x_3;\qquad u_1,\quad u_2,\quad u_3$$

zwei Systeme von ***ursprünglichen*** Variabeln und

$$X_1,\quad X_2,\quad X_3;\qquad U_1,\quad U_2,\quad U_3$$

zwei entsprechende Systeme von ***neuen*** Variabeln, welche in der gegenseitigen Beziehung stehen, dafs

$$(1.)\quad \begin{cases} x_1 = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 \\ x_2 = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 \\ x_3 = \gamma_1 X_1 + \gamma_2 X_2 + \gamma_3 X_3 \end{cases} \qquad (2.)\quad \begin{cases} U_1 = \alpha_1 u_1 + \beta_1 u_2 + \gamma_1 u_3 \\ U_2 = \alpha_2 u_1 + \beta_2 u_2 + \gamma_2 u_3 \\ U_3 = \alpha_3 u_1 + \beta_3 u_2 + \gamma_3 u_3 \end{cases}$$

*) „Ueber ein neues algebraisches Princip zur Behandlung der Transformationsprobleme homogener Functionen, vermittelst linearer Substitutionen".

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

ist, so soll 1) eine ***ursprüngliche Substitution*** und 2) die ***transponirte Substitution*** genannt werden.

Die Transposition eines linearen Substitutionssystems, welche darin besteht, dafs man einerseits die gleichvielten Horizontal- und Verticalreihen, andererseits die ursprünglichen und neuen Variabeln mit einander vertauscht, ist zuerst von ***Gaufs*** benutzt worden, nur schreibt derselbe beide Systeme mit ***denselben*** Variabeln, was für die vorliegenden Untersuchungen nicht zweckmäfsig sein würde.

Bezeichnet man die gemeinschaftliche Determinante beider Substitutionen durch:

$$r = \Sigma \pm \alpha_1 \beta_2 \gamma_3,$$

ferner durch

$$f(x_1, x_2, x_3) \quad \text{und} \quad f'(X_1, X_2, X_3)$$

zwei homogene Funktionen, welche durch die ursprüngliche Substitution in einander übergehen, so soll:

I) ***Invariante,*** diejenige Verbindung Δ aus den Coefficienten von f genannt werden, welche zu der entsprechenden aus den Coefficienten von f' gebildeten Δ' in der Beziehung

$$\Delta' = r^\lambda . \Delta$$

steht.

II) ***Covariante,*** diejenige Function φ der Coefficienten von f und der Variabeln x_1, x_2, x_3, welche, unter Anwendung der ***ursprünglichen*** Substitution (1.), zu der entsprechenden, aus den Coefficienten von f' und ihren Variabeln X_1, X_2, X_3 gebildeten Function φ' in der Beziehung

$$\varphi'(X_1, X_2, X_3) = r^\lambda . \varphi(x_1, x_2, x_3)$$

steht.

III) ***Zugehörige Form,*** diejenige Function Γ der Coefficienten von f und der Variabeln u_1, u_2, u_3, welche, unter Anwendung der ***transponirten*** Substitution (2.), zu der entsprechenden aus den Coefficienten von f' und den Variabeln U_1, U_2, U_3 gebildeten Function Γ' in der Beziehung

$$\Gamma'(U_1, U_2, U_3) = r^\lambda . \Gamma(u_1, u_2, u_3)$$

steht.

IV) ***Zwischenform,*** diejenige Function Θ der Coefficienten von f, welche gleichzeitig eine Function der Variabeln x_1, x_2, x_3 und u_1, u_2, u_3 ist, und unter Anwendung sowohl der ***ursprünglichen*** als der ***transponirten*** Substitution, zu der entsprechenden aus den Coefficienten von f' und den

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

beiderseitigen Variabeln X_1, X_2, X_3 und U_1, U_2, U_3 gebildeten Function Θ' in der Beziehung

$$\Theta'(U_1, U_2, U_3; X_1, X_2, X_3) = r^{\lambda}\Theta(u_1, u_2, u_3; x_1, x_2, x_3)$$

steht.

Die Benennungen (I) und (II) sind von Herrn *Sylvester* statt der älteren „Formendeterminante" und „Functionaldeterminante" in Vorschlag gebracht worden. Die Benennung (III) gebrauchte zuerst *Gaufs*. Die 4[te] Klasse ist bisher als eine besondere Klasse nicht beachtet worden. Die ganz besondere Wichtigkeit derselben wird aber aus dem Folgenden ersichtlich werden und ihre Bezeichnungsweise zweckmäfsig erscheinen, weil sie den Uebergang von (II) zu (III) bildet.

§. 2.

Die Betrachtung der vorstehenden 4 Functionenklassen mufs man sogleich auf ein System von homogenen Functionen ausdehnen, d. h. man mufs ein System gegebener homogener Functionen von denselben Variabeln voraussetzen, welche durch ein und dieselbe Substitution gleichzeitig in ein System entsprechender Functionen, der Reihe nach von denselben Ordnungen transformirt werden sollen, und die 4 Functionenklassen aus den gesammten Coefficienten des Systems herstellen. Ich will daher in diesem Falle die Invarianten, Covarianten, zugehörigen Formen und Zwischenformen, so oft Unterscheidungen nöthig werden, *simultane* Invarianten, Covarianten, zugehörige Formen und Zwischenformen nennen, so dafs die gewöhnlichen Determinanten simultane Invarianten für ein System *linearer* homogener Functionen sind und die erste Gattung bilden. Die nächste Gattung von Systemen erhält man, wenn man von den gegebenen homogenen Functionen nur *eine* die erste Ordnung überschreiten läfst, und der erste specielle Fall hiervon, nämlich die Zusammenstellung einer homogenen Function beliebiger Ordnung

$$f(x_1, x_2, x_3)$$

mit nur *einer* linearen

$$U = u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3,$$

in welcher u_1, u_2, u_3 die Coefficienten sind, giebt einen sehr einfachen und charakteristischen Uebergang der 4 Functionenklassen in einander. Es gilt nämlich der folgende Satz:

Jede simultane Invariante der beiden Functionen f und U ist eine zugehörige Form für f, und jede simultane Covariante von f und U ist eine Zwischenform für f.

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

Der Beweis ergiebt sich sofort, wenn man die ursprüngliche Substitution (§.1, 1) auf U anwendet, da dann, wie leicht ersichtlich ist, die Coefficienten der transformirten Form U' dieselben linearen Ausdrücke werden, welche die transponirte Substitution (§. 1, 2) bilden, d. h.

$$U' = U_1 X_1 + U_2 X_2 + U_3 X_3$$

wird. Bezeichnet man durch Γ eine simultane Invariante und durch Θ eine simultane Covariante für f und U, so genügen diese daher den Bedingungen:

$$\Gamma'(U_1, U_2, U_3) = r^\lambda \Gamma(u_1, u_2, u_3), \qquad \Theta'(U_1, U_2, U_3) = r^\lambda \Theta(u_1, u_2, u_3)$$

und werden dadurch respective zugehörige Form und Zwischenform für f.

Die Covarianten lassen sich aber auch als zugehörige Formen darstellen, wenn man beachtet, dafs, vermöge des Charakters der transponirten Substitution, die letztere durch nochmalige Transposition wieder die ursprüngliche Substitution wird, wenn man nur bei der zweiten Transposition wieder die ursprünglichen Variabeln gebraucht. Es folgt daher:

1) dafs die zugehörigen Formen der zugehörigen Formen Covarianten der ursprünglichen sind;

2) dafs die Covarianten der Covarianten Functionen derselben Art bleiben;

3) dafs die zugehörigen Formen der Covarianten und die Covarianten der zugehörigen Formen für die ursprüngliche Function zugehörige Formen sind;

4) dafs die Invarianten sowohl der Covarianten als der zugehörigen Formen zugleich Invarianten der ursprünglichen Formen sind;

5) dafs die lineare Function

$$U = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3$$

für alle homogenen Functionen derselben Variabeln gemeinschaftliche Zwischenform ist.

In Bezug auf (5.) wäre noch zu bemerken, dafs, weil

$$U' = U_1 X_1 + U_2 X_2 + U_3 X_3$$

vermöge (§. 1, 1) und (§. 1, 2) wird, $\lambda = 0$ d. h.

$$U' = r^0 . U$$

ist.

Ich setze nicht voraus, dafs die 4 Functionenklassen *ganze* Functionen sein müssen. Es wird im Gegentheil für rein algebraische Untersuchungen nothwendig, sowohl gebrochene als irrationale Functionen dieser Art zu unter-

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

suchen. Wenn man sich aber die Aufgabe stellt, die einfachsten derselben zu finden, aus welchen die übrigen sich zusammensetzen lassen, so wird man diese aus den rationalen und ganzen Functionen entnehmen müssen, für welche übrigens der Exponent λ in r^λ immer eine ganze positive Zahl sein mufs.

§. 3.

Es seien

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = \Sigma a_{\varkappa\lambda} x_\varkappa x_\lambda$$
$$f_2(x_1, x_2, x_3) = \Sigma b_{\varkappa\lambda} x_\varkappa x_\lambda$$
$$f_3(x_1, x_2, x_3) = \Sigma c_{\varkappa\lambda} x_\varkappa x_\lambda$$

drei homogene Functionen der zweiten Ordnung von den Variabeln x_1, x_2, x_3, und

$$a_{\varkappa\lambda} = a_{\lambda\varkappa}, \qquad b_{\varkappa\lambda} = b_{\lambda\varkappa}, \qquad c_{\varkappa\lambda} = c_{\lambda\varkappa},$$

so kann man, wie bekannt, für jede Function einzeln eine Invariante und eine zugehörige Form bilden, nämlich z. B. für die erste die Determinante:

$$(1.) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Sigma \pm a_{11} a_{22} a_{33}$$

als Invariante, und

$$(2.) \qquad \Gamma = \left\{ \begin{array}{l} (a_{22} a_{33} - a_{23}^2) u_1^2 + (a_{33} a_{11} - a_{13}^2) u_2^2 + (a_{11} a_{22} - a_{12}^2) u_3^2 \\ + 2(a_{12} a_{13} - a_{11} a_{23}) u_2 u_3 + 2(a_{12} a_{23} - a_{22} a_{13}) u_1 u_3 \\ \qquad\qquad\qquad + 2(a_{13} a_{23} - a_{12} a_{33}) u_1 u_2 \end{array} \right\}$$

als zugehörige Form, und zwar ist letztere in Bezug auf die Variabeln von der zweiten Ordnung und ihre Coefficienten sind die partiellen Determinanten des Systems (1.).

Wir werden aber in der Folge auch die *simultanen* Invarianten und zugehörigen Formen für alle drei Functionen f_1, f_2, f_3 gebrauchen, und wollen daher alle, sowohl die vorstehenden (1.) und (2.) als die simultanen, aus einer einzigen Quelle ableiten, welche einerseits für alle Functionen gerader Ordnung benutzt werden kann und andrerseits einen Algorithmus liefert, der zur Ausführung einer Reihe von Darstellungen für die homogenen Functionen der dritten Ordnung unentbehrlich ist.

Theorem I.

Wenn man das Quadrat der Determinante

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

$$(3.)\quad \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \Sigma \pm u_1 v_2 w_3$$

bildet, in welcher die Elemente willkürliche Gröfsen sind, und statt der Potenzen und Producte zweiter Ordnung:

$$u_\varkappa u_\lambda, \qquad v_\varkappa v_\lambda, \qquad w_\varkappa w_\lambda$$

die entsprechenden Coefficienten:

$$a_{\varkappa\lambda}, \qquad b_{\varkappa\lambda}, \qquad c_{\varkappa\lambda}$$

der drei homogenen Functionen f_1, f_2, f_3 substituirt, so erhält man eine Verbindung:

$$(a,\ b,\ c),$$

welche eine simultane Invariante der drei homogenen Functionen zweiter Ordnung ist.

Beweis.

Bezeichnet man die transformirten Formen von f_1, f_2, f_3 durch:

$$\begin{aligned} f_1'(X_1, X_2, X_3) &= \Sigma a'_{\varkappa\lambda} X_\varkappa X_\lambda \\ f_2'(X_1, X_2, X_3) &= \Sigma b'_{\varkappa\lambda} X_\varkappa X_\lambda \\ f_3'(X_1, X_2, X_3) &= \Sigma c'_{\varkappa\lambda} X_\varkappa X_\lambda \end{aligned}$$

so kann man zu den Coefficienten

$$a'_{\varkappa\lambda}, \qquad b'_{\varkappa\lambda}, \qquad c'_{\varkappa\lambda}$$

dadurch gelangen, dafs man zuerst die drei linearen Functionen

$$(4.)\quad \begin{cases} u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 \\ v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 \\ w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 \end{cases}$$

durch die ursprüngliche Substitution transformirt, die erhaltenen transformirten Formen quadrirt und dann in denselben die symbolische Substitution

$$(\alpha.)\qquad u_\varkappa u_\lambda = a_{\varkappa\lambda}, \qquad v_\varkappa v_\lambda = b_{\varkappa\lambda}, \qquad w_\varkappa w_\lambda = c_{\varkappa\lambda}$$

ausführt. Nimmt man an, dafs die transformirten Formen von (4.) die folgenden sind:

$$(5.)\quad \begin{cases} U_1 X_1 + U_2 X_2 + U_3 X_3 \\ V_1 X_1 + V_2 X_2 + V_3 X_3 \\ W_1 X_1 + W_2 X_2 + W_3 X_3, \end{cases}$$

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

so werden mit (α.) auch die symbolischen Gleichungen

$$(\beta.)\qquad U_\varkappa U_\lambda = a'_{\varkappa\lambda}, \qquad V_\varkappa V_\lambda = b'_{\varkappa\lambda}, \qquad W_\varkappa W_\lambda = c'_{\varkappa\lambda}$$

gelten. Nach einem bekannten Determinantensatz ist aber

$$\Sigma \pm U_1 V_2 W_3 = r . \Sigma \pm u_1 v_2 w_3,$$

also auch

$$(\Sigma \pm U_1 V_2 W_3)^2 = r^2 . (\Sigma \pm u_1 v_2 w_3)^2;$$

substituirt man rechts die Werthe (α.), links die Werthe (β.), so entsteht daher in Folge der Definition der Verbindung (a, b, c):

$$(6.)\qquad (a', b', c') = r^2 (a, b, c) \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Ich gehe nun zuvörderst zur Bildung von (a, b, c) über, welches auf den oben erwähnten Algorithmus führt. Es ist

$$(\Sigma \pm u_1 v_2 w_3)^2 = \{u_1(v_2 w_3 - v_3 w_2) + u_2(v_3 w_1 - v_1 w_3) + u_3(v_1 w_2 - v_2 w_1)\}^2$$

und mit Anwendung von (α.):

$$\begin{aligned}(v_2 w_3 - v_3 w_2)^2 &= v_2^2 w_3^2 + v_3^2 w_2^2 - 2 v_2 v_3 w_2 w_3 \\ &= b_{22} c_{33} + b_{33} c_{22} - 2 b_{23} c_{23} \\ (v_2 w_3 - v_3 w_2)(v_3 w_1 - v_1 w_3) &= v_2 v_3 w_1 w_3 + v_1 v_3 w_2 w_3 - v_3^2 w_1 w_2 - w_3^2 v_1 v_2 \\ &= b_{23} c_{13} + b_{13} c_{23} - b_{33} c_{12} - c_{33} b_{12}.\end{aligned}$$

Da sich die übrigen Potenzen und Producte durch Vertauschung der Indices ergeben, so kann man zunächst das Resultat der Substitution (α.) für die Potenzen und Producte $v_\varkappa v_\lambda$, $w_\varkappa w_\lambda$ allein angeben. Bezeichnet man dasselbe durch:

$$(7.)\qquad \Sigma u_\varkappa u_\lambda (b, c)^{\varkappa\lambda},$$

so ist vollständig:

$$(8.)\quad \begin{cases} (b, c)^{11} = (v_2 w_3 - v_3 w_2)^2 = b_{22} c_{33} + b_{33} c_{22} - 2 b_{23} c_{23} \\ (b, c)^{22} = (v_3 w_1 - v_1 w_3)^2 = b_{33} c_{11} + b_{11} c_{33} - 2 b_{13} c_{13} \\ (b, c)^{33} = (v_1 w_2 - v_2 w_1)^2 = b_{11} c_{22} + b_{22} c_{11} - 2 b_{12} c_{12} \\ (b, c)^{23} = (v_2 w_3 - v_3 w_2)(v_3 w_1 - v_1 w_3) = b_{12} c_{13} + b_{13} c_{12} - b_{11} c_{23} - b_{23} c_{11} \\ (b, c)^{13} = (v_2 w_3 - v_3 w_2)(v_1 w_2 - v_2 w_1) = b_{23} c_{12} + b_{12} c_{23} - b_{22} c_{13} - b_{13} c_{22} \\ (b, c)^{12} = (v_3 w_1 - v_1 w_3)(v_1 w_2 - v_2 w_1) = b_{13} c_{23} + b_{23} c_{13} - b_{33} c_{12} - b_{12} c_{33} \end{cases}$$

und dieses ist das in der Folge häufig zu benutzende System. Setzt man demnach noch $u_\varkappa u_\lambda = a_{\varkappa\lambda}$, so folgt aus (7.):

$$(9.)\qquad (a, b, c) = \Sigma a_{\varkappa\lambda} (b, c)^{\varkappa\lambda}$$

in vollständig ausgerechneter Form.

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

Die Invariante (a, b, c) ist aber in Bezug auf die 3 Systeme $a_{\varkappa\lambda}$, $b_{\varkappa\lambda}$, $c_{\varkappa\lambda}$ symmetrisch; denn die Determinante (3.) selbst, aus welcher sie entstanden ist, bleibt bis auf das Vorzeichen unverändert, wenn man die Systeme $u_\varkappa$, $v_\varkappa$, $w_\varkappa$ mit einander vertauscht, und ihr ***Quadrat*** läfst auch das Vorzeichen ungeändert. Es ist also

$$(10.)\quad \begin{cases} \Sigma a_{\varkappa\lambda}(b,c)^{\varkappa\lambda} = \Sigma b_{\varkappa\lambda}(a,c)^{\varkappa\lambda} = \Sigma c_{\varkappa\lambda}(a,b)^{\varkappa\lambda} = \\ \Sigma a_{\varkappa\lambda}(c,b)^{\varkappa\lambda} = \Sigma b_{\varkappa\lambda}(c,a)^{\varkappa\lambda} = \Sigma c_{\varkappa\lambda}(b,a)^{\varkappa\lambda}, \end{cases}$$

weil wegen (8.) auch die partiellen Invarianten $(b, c)^{\varkappa\lambda}$ durch Vertauschung der Systeme $b_{\varkappa\lambda}$ und $c_{\varkappa\lambda}$ sich nicht ändern. Durch Specialisirung, indem man von den Systemen $a_{\varkappa\lambda}$, $b_{\varkappa\lambda}$, $c_{\varkappa\lambda}$ entweder je zwei oder alle drei einander gleich setzt, erhält man hiernach ***10 von einander verschiedene Invarianten,*** nämlich:

$$(11.)\quad \begin{cases} \text{drei wie } (a,a,a) = \Sigma a_{\varkappa\lambda}(a,a)^{\varkappa\lambda} \\ \text{sechs wie } (a,b,b) = \Sigma a_{\varkappa\lambda}(b,b)^{\varkappa\lambda} = \Sigma b_{\varkappa\lambda}(a,b)^{\varkappa\lambda} \\ \text{und eine } (a,b,c) = \Sigma a_{\varkappa\lambda}(b,c)^{\varkappa\lambda}. \end{cases}$$

Die speciellste derselben

$$(a,a,a) = \Sigma a_{\varkappa\lambda}(a,a)^{\varkappa\lambda}$$

ist aber nichts anderes, als die bekannte Invariante Δ (1.) der homogenen Function zweiten Grades von drei Veränderlichen, jedoch multiplicirt mit dem Factor 6, denn setzt man in (8.):

$$b_{\varkappa\lambda} = a_{\varkappa\lambda}, \qquad c_{\varkappa\lambda} = a_{\varkappa\lambda},$$

so entsteht:

$$(a,a)^{11} = 2(a_{22}a_{33} - a_{23}^2)$$
$$(a,a)^{23} = 2(a_{13}a_{12} - a_{23}a_{11})$$
$$\text{u. s. w.,}$$

welche Ausdrücke die doppelten partiellen Determinanten des Systems (1.) sind. Man hat daher, wie bekannt:

$$\Delta = \tfrac{1}{2}(a_{11}(a,a)^{11} + a_{12}(a,a)^{12} + a_{13}(a,a)^{13})$$
$$\Delta = \tfrac{1}{2}(a_{12}(a,a)^{12} + a_{22}(a,a)^{22} + a_{23}(a,a)^{23})$$
$$\Delta = \tfrac{1}{2}(a_{13}(a,a)^{13} + a_{23}(a,a)^{23} + a_{33}(a,a)^{33}),$$

also durch Addition:

$$(12.)\quad 6\Delta = \Sigma a_{\varkappa\lambda}(a,a)^{\varkappa\lambda} = (a,a,a).$$

Die vorstehende Definition giebt ferner auch die unter (2.) bezeichnete zu-

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

gehörige Form, nämlich:

$$(13.) \qquad \Gamma = \tfrac{1}{2}\Sigma u_\varkappa u_\lambda (a, a)^{\varkappa\lambda}$$

und überdies *drei simultane zugehörige Formen* wie

$$\Sigma u_\varkappa u_\lambda (a, b)^{\varkappa\lambda},$$

welche den Gleichungen (10.) nämlich:

$$(14.) \quad \begin{cases} \Sigma u_\varkappa u_\lambda (a, b)^{\varkappa\lambda} = \Sigma u_\varkappa u_\lambda (b, a)^{\varkappa\lambda} = \Sigma a_{\varkappa\lambda} (uu, b)^{\varkappa\lambda} \\ = \Sigma a_{\varkappa\lambda} (b, uu)^{\varkappa\lambda} = \Sigma b_{\varkappa\lambda} (a, uu)^{\varkappa\lambda} = \Sigma b_{\varkappa\lambda} (uu, a)^{\varkappa\lambda} \end{cases}$$

genügen.

Der Beweis hierfür folgt aus der §. 2 entwickelten Eigenschaft der zugehörigen Formen, da

$$(15.) \qquad \Sigma U_\varkappa U_\lambda (a', b')^{\varkappa\lambda} = r^2 . \Sigma u_\varkappa u_\lambda (a, b)^{\varkappa\lambda}$$

ist.

§. 4.

Mit Hülfe der vorstehenden 10 Invarianten und 6 zugehörigen Formen, kann man fast alle Fragen beantworten, welche die Theorie der ternären quadratischen Formen algebraisch darbietet, andrerseits bilden sie die Basis für die cubischen Formen, und nur insofern werde ich sie hier weiter benutzen. Ehe ich jedoch darauf eingehe, ist es wesentlich die Frage zu beantworten, wie weit die vorstehende Theorie verallgemeinert werden kann. In der That kann man sie wörtlich auf homogene Functionen von beliebig vielen Variabeln und beliebiger Ordnung übertragen, indem man statt der Determinante (§. 3, 3) eine Determinante mit ebensovielen Elementen zu Grunde legt, als das Quadrat der Anzahl der Veränderlichen beträgt, und diese auf eine Potenz erhebt, welche der Ordnung der homogenen Function gleich ist; indessen ist hier ein wesentlicher Unterschied zwischen den Functionen gerader und ungerader Ordnung zu machen, man erhält zwar in beiden Fällen simultane Invarianten, will man aber daraus eine Invariante für eine *einzelne* Function ableiten, wie im Vorstehenden

$$\Delta = \tfrac{1}{6}\Sigma (a, a)^{\varkappa\lambda} a_{\varkappa\lambda},$$

so findet man, dafs durch Gleichsetzung der einzelnen Coefficientensysteme, wie $a_{\varkappa\lambda} = b_{\varkappa\lambda} = c_{\varkappa\lambda}$, jedesmal identisch Null entsteht, wenn die gegebene homogene Function von *ungerader* Ordnung ist, weil die simultanen Invarianten aus *ungeraden* Potenzen der Determinante entstehen, also *alternirend* sind, sobald die gegebene homogene Function von ungerader Ordnung ist; es

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

wird demnach schon für die cubischen Formen von 3 Veränderlichen ein anderer Angriffspunkt nothwendig, den wir sogleich darlegen werden. Wenn man eine homogene Function ungerader Ordnung in das Quadrat erhebt und für diese als Function *gerader* Ordnung die vorstehend definirte Invariante bildet, so erhält man zwar auch für die ursprüngliche Function eine Invariante, indessen ist diese nicht immer die einfachste, wie schon die folgende Theorie zeigen wird.

Von den ersten Grundformen der homogenen Functionen dritter Ordnung.

§. 5.

Es sei

$$(1.)\qquad f(x_1, x_2, x_3) = \Sigma a_{\varkappa\lambda\mu} x_\varkappa x_\lambda x_\mu$$

eine gegebene homogene Function der dritten Ordnung, und

$$a_{\varkappa\lambda\mu} = a_{\varkappa\mu\lambda} = a_{\mu\varkappa\lambda} = a_{\mu\lambda\varkappa} = a_{\lambda\varkappa\mu} = a_{\lambda\mu\varkappa},$$

also alle Coefficienten, welche zwei gleiche Indices haben mit dem Factor 3, und a_{123} mit dem Factor 6 versehen, sobald man die Summation (1.) ausführt.

Theorem 2.

Bezeichnet man durch:

$$(2.)\qquad \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix}$$

ein unvollständiges System von Elementen, welches die 4 Determinanten

$$(3.)\qquad \begin{cases} A = \Sigma \pm v_1 w_2 p_3, \quad B = -\Sigma \pm u_1 w_2 p_3, \quad C = \Sigma \pm u_1 v_2 p_3, \\ \qquad\qquad D = -\Sigma \pm u_1 v_2 w_3 \end{cases}$$

liefert, so erhält man eine Invariante von f, wenn man das Produkt

$$A.B.C.D$$

der vier in (2.) enthaltenen Determinanten bildet, welches in Bezug auf jedes der 4 Systeme von der dritten Ordnung ist, und statt der Potenzen und Produkte dritter Ordnung:

$$u_\varkappa u_\lambda u_\mu, \qquad v_\varkappa v_\lambda v_\mu, \qquad w_\varkappa w_\lambda w_\mu, \qquad p_\varkappa p_\lambda p_\mu$$

überall die entsprechenden Coefficienten

$$a_{\varkappa\lambda\mu}$$

der homogenen Function f setzt.

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

Die entstehende Function, welche ich durch $6S$ bezeichnen will, weil sie, wie nachher ersichtlich ist, den Factor 6 erhält, ist offenbar in Bezug auf die Gröfsen $a_{\varkappa\lambda\mu}$ homogen und von der 4[ten] Ordnung, und soll genauer *die erste Invariante* genannt werden.

Das Product $ABCD$ ist eine *symmetrische* Verbindung der 4 Systeme, denn wenn auch jede Determinante einzeln das Zeichen bei der Vertauschung wechselt, so wird das Produkt $A.B.C.D$ doch aus einer geraden Anzahl Zeichenwechsel bestehen, mithin nicht alternirend sein; durch die angegebene Substitution kann in Folge dessen nicht Null entstehen. Bezeichnet man durch

$$(4.)\quad f'(X_1, X_2, X_3) = \Sigma a'_{\varkappa\lambda\mu} X_\varkappa X_\lambda X_\mu$$

die transformirte Form von f, und bildet aus den Coefficienten dieselbe Invariante S', so ist sofort ersichtlich, dafs

$$(5.)\quad S' = r^4.S$$

ist, denn wenn man wie §. 3 (4.) die vier linearen Functionen:

$$\begin{array}{l} u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 \\ v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 \\ w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 \\ p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 \end{array}$$

gleichzeitig transformirt, und die neuen Formen durch

$$\begin{array}{l} U_1X_1 + U_2X_2 + U_3X_3 \\ V_1X_1 + V_2X_2 + V_3X_3 \\ W_1X_1 + W_2X_2 + W_3X_3 \\ P_1X_1 + P_2X_2 + P_3X_3 \end{array}$$

bezeichnet, ihre Determinanten durch

$$A',\quad B',\quad C',\quad D',$$

so hat man

$$A' = r.A,\quad B' = r.B,\quad C' = r.C,\quad D' = r.D,$$

also

$$(6.)\quad A'.B'.C'.D' = r^4.ABCD.$$

Setzt man aber wie in §. 3:

$$a_{\varkappa\lambda\mu} = u_\varkappa u_\lambda u_\mu,$$

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

so geht f' über in

$$(U_1X_1+U_2X_2+U_3X_3)^3,$$

und Aehnliches gilt für die 3 andern Systeme; hieraus folgt durch dieselbe Schlufsweise wie dort, dafs

$$U_\varkappa U_\lambda U_\mu = a'_{\varkappa\lambda\mu}, \quad V_\varkappa V_\lambda V_\mu = a'_{\varkappa\lambda\mu}, \quad W_\varkappa W_\lambda W_\mu = a'_{\varkappa\lambda\mu}, \quad P_\varkappa P_\lambda P_\mu = a'_{\varkappa\lambda\mu}$$

gesetzt werden mufs, und daher (6.) in

$$6S' = 6.r^4 S$$

übergeht, w. z. b. w.

§. 6.

Ich will jetzt die Invariante S vollständig darstellen, d. h. die Multiplication der 4 Determinanten A, B, C, D ausführen. Wollte man hiezu den gewöhnlichen Weg einschlagen, so würde das Resultat nach complicirten Rechnungen in ganz aufgelöster Form erhalten werden, welche weiteren Operationen hinderlich ist. Mit Hülfe der §. 3 definirten Verbindungen und Operationen wird die Rechnung sehr einfach und das Resultat sehr übersichtlich.

Man bemerke, dafs die Invariante der quadratischen Formen §. 3 (9.)

$$(a, b, c) = \Sigma a_{\varkappa\lambda}(b, c)^{\varkappa\lambda}$$

durch die Substitution

$$a_{\varkappa\lambda} = u_\varkappa u_\lambda, \qquad b_{\varkappa\lambda} = v_\varkappa v_\lambda, \qquad c_{\varkappa\lambda} = w_\varkappa w_\lambda$$

in

$$(\Sigma \pm u_1 v_2 w_3)^2$$

übergeht, daher ist umgekehrt identisch:

$$(1.) \qquad (\Sigma \pm u_1 v_2 w_3)^2 = \Sigma w_\varkappa w_\lambda (uu, vv)^{\varkappa\lambda},$$

wo die Bezeichnung

$$(uu, vv)^{\varkappa\lambda}$$

der Bezeichnung §. 3 (8.)

$$(a, b)^{\varkappa\lambda}$$

entspricht. Auf ähnliche Weise läfst sich aber auch das Produkt

$$2\Sigma \pm u_1 v_2 w_3 \Sigma \pm u_1 v_2 p_3$$

darstellen, indem dasselbe aus (1.) hervorgeht, wenn man diese Gleichung in Bezug auf w_1, w_2, w_3 total differentiirt und statt der Incremente die entsprechenden p_1, p_2, p_3 substituirt, daher folgt

$$(2.) \qquad 2\Sigma \pm u_1 v_2 w_3 \Sigma \pm u_1 v_2 p_3 = \Sigma (w_\varkappa p_\lambda + w_\lambda p_\varkappa)(uu, vv)^{\varkappa\lambda}.$$

(Die Summe ist wie immer über *alle* Werthe 1, 2, 3 für $\varkappa$, λ auszudehnen.)

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

Es ist aber

$$D = -\Sigma \pm u_1 v_2 w_3, \qquad C = \Sigma \pm u_1 v_2 p_3,$$

also

$$(3.) \qquad 2CD = -\Sigma (w_\varkappa p_\lambda + p_\varkappa w_\lambda)(uu, vv)^{\varkappa\lambda},$$

ferner ebenso

$$2AB = -\Sigma (u_\varrho v_\sigma + u_\sigma v_\varrho)(ww, pp)^{\varrho\sigma},$$

wenn für ϱ, σ dasselbe gilt, was vorher für $\varkappa$, λ. Daher hat man

$$(4.) \qquad 4ABCD = \Sigma\Sigma (w_\varkappa p_\lambda + w_\lambda p_\varkappa)(ww, pp)^{\varrho\sigma}(u_\varrho v_\sigma + u_\sigma v_\varrho)(uu, vv)^{\varkappa\lambda}$$

und in dieser Form stellt sich das Produkt so geordnet dar, dafs man unverzüglich die Substitution der $a_{\varkappa\lambda\mu}$ ausführen kann.

Hierbei bemerke man ein für alle Mal, dafs die Coefficienten von f drei Gruppen bilden, je nachdem sie in einer bestimmten der partiellen Ableitungen:

$$(5.) \quad \begin{cases} \frac{1}{3}\frac{df}{dx_1} = a_{111}x_1^2 + a_{122}x_2^2 + a_{133}x_3^2 + 2a_{123}x_2x_3 + 2a_{113}x_1x_3 + 2a_{112}x_1x_2 \\ \frac{1}{3}\frac{df}{dx_2} = a_{211}x_1^2 + a_{222}x_2^2 + a_{233}x_3^2 + 2a_{223}x_2x_3 + 2a_{213}x_1x_3 + 2a_{212}x_1x_2 \\ \frac{1}{3}\frac{df}{dx_3} = a_{311}x_1^2 + a_{322}x_2^2 + a_{333}x_3^2 + 2a_{323}x_2x_3 + 2a_{313}x_1x_3 + 2a_{312}x_1x_2 \end{cases}$$

vorkommen; die partielle Ableitung nach x_ϱ hat nämlich alle Coefficienten, welche den festen Index ϱ besitzen, während die übrigen alle Combinationen der Zahlen 1, 2, 3 zu je zweien eingehen. Denkt man sich nun die 3 homogenen Functionen zweiten Grades §. 3 f_1, f_2, f_3 durch die vorstehenden (5.) der Reihe nach ersetzt, so wird man die Operationen, welche dort §. 3 (8.) durch

$$(b, c)^{\varkappa\lambda}$$

angedeutet sind, hier

$$(a_2, a_3)^{\varkappa\lambda}$$

schreiben müssen, und

$$\Sigma a_{\varkappa\lambda}(a, a)^{\varkappa\lambda}, \qquad \Sigma a_{\varkappa\lambda}(b, b)^{\varkappa\lambda}, \qquad \Sigma a_{\varkappa\lambda}(b, c)^{\varkappa\lambda}$$

respective ersetzen müssen durch:

$$\Sigma a_{1\varkappa\lambda}(a_1, a_1)^{\varkappa\lambda}, \qquad \Sigma a_{1\varkappa\lambda}(a_2, a_2)^{\varkappa\lambda}, \qquad \Sigma a_{1\varkappa\lambda}(a_2, a_3)^{\varkappa\lambda},$$

wobei beiläufig bemerkt sein mag, dafs diese Verbindungen für die homogene Function dritter Ordnung keine Invarianten sind aber eine später zu entwickelnde bestimmte Bedeutung haben. Die obige Bezeichnung vorausgesetzt, läfst sich nun leicht einsehen, dafs durch die angegebene symbolische Substitution

$$(6.) \quad \begin{cases} (u_\varrho v_\sigma + u_\sigma v_\varrho)(uu, vv)^{\varkappa\lambda} = 2(a_\varrho, a_\sigma)^{\varkappa\lambda} \\ (w_\varkappa p_\lambda + w_\lambda p_\varkappa)(ww, pp)^{\varrho\sigma} = 2(a_\varkappa, a_\lambda)^{\varrho\sigma} \end{cases}$$

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

wird. In der That ist z. B.

$$\begin{aligned}(u_\varrho v_\sigma + u_\sigma v_\varrho)(uu, vv)^{11} &= (u_\varrho v_\sigma + u_\sigma v_\varrho)(u_3^2 v_2^2 + u_2^2 v_3^2 - 2u_2 v_2 u_3 v_3) \\ &= u_\varrho u_3^2 . v_\sigma v_2^2 + u_\varrho u_2^2 . v_\sigma v_3^2 - 2u_\varrho u_2 u_3 . v_\sigma v_2 v_3 \\ &\quad + u_\sigma u_3^2 . v_\varrho v_2^2 + u_\sigma u_2^2 . v_\varrho v_3^2 - 2u_\sigma u_2 u_3 . v_\varrho v_2 v_3 \\ &= a_{\varrho 33} a_{\sigma 22} + a_{\varrho 22} a_{\sigma 33} - 2a_{\varrho 23} a_{\sigma 23} \\ &\quad + a_{\sigma 33} a_{\varrho 22} + a_{\sigma 22} a_{\varrho 33} - 2a_{\sigma 23} a_{\varrho 23} \\ &= (a_\varrho a_\sigma)^{11} + (a_\sigma a_\varrho)^{11} = 2(a_\varrho a_\sigma)^{11}.\end{aligned}$$

Wendet man daher (6.) auf (4.) an, so ergiebt sich

$$4ABCD = 4\Sigma\Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda}(a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho\sigma}$$

oder nach Forthebung des Zahlenfactors 4, wenn man $ABCD = 6S$ setzt und eine der Summationen ausführt:

$$(7.) \qquad 6S = \begin{cases} \Sigma(a_1 a_1)^{\varkappa\lambda}(a_\varkappa a_\lambda)^{11} + \Sigma(a_2 a_2)^{\varkappa\lambda}(a_\varkappa a_\lambda)^{22} + \Sigma(a_3 a_3)^{\varkappa\lambda}(a_\varkappa a_\lambda)^{33} + \\ 2\Sigma(a_2 a_3)^{\varkappa\lambda}(a_\varkappa a_\lambda)^{23} + 2\Sigma(a_1 a_3)^{\varkappa\lambda}(a_\varkappa a_\lambda)^{13} + 2\Sigma(a_1 a_2)^{\varkappa\lambda}(a_\varkappa a_\lambda)^{12}, \end{cases}$$

und es ist somit ein gesetzmäfsiges Resultat für die explicite Bildungsweise von S gegeben.

Eine genauere Untersuchung der 6 Summen auf der rechten Seite von (7.) zeigt aber, *dafs sie sämmtlich einander gleich sind, und dafs also viel einfacher*

$$(8.) \qquad \begin{cases} S = \Sigma(a_1 a_1)^{\varkappa\lambda}(a_\varkappa a_\lambda)^{11} = \Sigma(a_2 a_2)^{\varkappa\lambda}(a_\varkappa a_\lambda)^{22} = \Sigma(a_3 a_3)^{\varkappa\lambda}(a_\varkappa a_\lambda)^{33} \\ \quad = 2\Sigma(a_2 a_3)^{\varkappa\lambda}(a_\varkappa a_\lambda)^{23} = 2\Sigma(a_1 a_3)^{\varkappa\lambda}(a_\varkappa a_\lambda)^{13} = 2\Sigma(a_1 a_2)^{\varkappa\lambda}(a_\varkappa a_\lambda)^{12} \end{cases}$$

ist, und überdies:

$$(9.) \qquad \Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda}(a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho_1\sigma_1} = 0$$

so oft ϱ, σ *von* ϱ_1, σ_1 *verschieden sind.*

Diese Sätze, welche Fundamentaleigenschaften der betrachteten Verbindungen darstellen, sollen im Folgenden entwickelt werden, nachdem wir einen Determinantensatz bewiesen haben, auf welchem sie beruhen.

§. 7.

Wenn man durch

$$u, \quad v, \quad w, \quad p$$

die 4 linearen Functionen

$$(1.) \qquad \begin{cases} u = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 \\ v = v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 \\ w = w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 \\ p = p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 \end{cases}$$

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

bezeichnet, deren 4 Determinanten die oben eingeführten

$$A = \Sigma \pm v_1 w_2 p_3, \qquad B = -\Sigma \pm u_1 w_2 p_3,$$
$$C = \Sigma \pm u_1 v_2 p_3, \qquad D = -\Sigma \pm u_1 v_2 w_3$$

sind, so läfst sich das Produkt

$$ABCD,$$

nachdem man es mit dem Quadrate einer beliebigen linearen Function

$$\vartheta = \vartheta_1 x_1 + \vartheta_2 x_2 + \vartheta_3 x_3$$

multiplicirt hat, immer wie folgt darstellen:

$$(2.)\quad \begin{cases} -ABCD(\vartheta_1 x_1 + \vartheta_2 x_2 + \vartheta_3 x_3)^2 = \\ ABwp(\Sigma \pm \vartheta_1 u_2 v_3)^2 + BCpu(\Sigma \pm \vartheta_1 v_2 w_3)^2 + ACvp(\Sigma \pm \vartheta_1 u_2 w_3)^2 \\ + ADvw(\Sigma \pm \vartheta_1 u_2 p_3)^2 + BDuw(\Sigma \pm \vartheta_1 v_2 p_3)^2 + CDuv(\Sigma \pm \vartheta_1 w_2 p_3)^2. \end{cases}$$

Die 6 Quadrate sind die 6 Determinanten, welche die Verbindung von ϑ mit je zwei der linearen Functionen (1.) liefert.

Da die Gröfsen ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3, x_1, x_2, x_3 in dieser Gleichung ganz beliebig sind, so erhält man aus (2.) ebensoviele Sätze, welche sich auf das unvollständige System

$$\begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{matrix}$$

beziehen, als Potenzen und Produkte der genannten Gröfsen auf beiden Seiten von (2.) sich vorfinden, indem man die Coefficienten gleicher Potenzen und Produkte einander gleich setzt. Z. B.

$$\begin{aligned} ABCD &= w_1 p_1 (\overline{u_2 v_3})^2 AB + u_1 p_1 (\overline{v_2 w_3})^2 BC + v_1 p_1 (\overline{u_2 w_3})^2 AC \\ &\quad + v_1 w_1 (\overline{u_2 p_3})^2 AD + u_1 w_1 (\overline{v_2 p_3})^2 BD + u_1 v_1 (\overline{w_2 p_3})^2 CD \\ 0 &= w_2 p_2 (\overline{u_2 v_3})^2 AB + u_2 p_2 (\overline{v_2 w_3})^2 BC + v_2 p_2 (\overline{u_2 w_3})^2 AC \\ &\quad + v_2 w_2 (\overline{u_2 p_3})^2 AD + u_2 w_2 (\overline{v_2 p_3})^2 BD + u_2 v_2 (\overline{w_2 p_3})^2 CD, \end{aligned}$$

wo der Kürze halber $\overline{u_2 v_3} = u_2 v_3 - u_3 v_2$ u. s. w. gesetzt ist.

Der Beweis des Satzes (2.) ist sehr einfach. Man bestimme nämlich vier Gröfsen ξ, η, ζ, λ so, dafs sie den Gleichungen

$$(3.)\quad \begin{cases} \xi u_1 + \eta v_1 + \zeta w_1 + \lambda p_1 = \vartheta_1 \\ \xi u_2 + \eta v_2 + \zeta w_2 + \lambda p_2 = \vartheta_2 \\ \xi u_3 + \eta v_3 + \zeta w_3 + \lambda p_3 = \vartheta_3 \end{cases}$$

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

Genüge leisten, was auf unendlich viele Arten geschehen kann, dann ist durch Auflösung von (3.) nach diesen Gröfsen, indem man immer je zwei eliminirt:

$$(4.)\quad \begin{cases} \xi B-\eta A = \Sigma\pm\vartheta_1 w_2 p_3; & \xi C-\zeta A = \Sigma\pm\vartheta_1 v_2 p_3 \\ \xi D-\lambda A = \Sigma\pm\vartheta_1 v_2 w_3; & \eta C-\zeta B = \Sigma\pm\vartheta_1 u_2 p_3 \\ \eta D-\lambda B = \Sigma\pm\vartheta_1 u_2 w_3; & \zeta D-\lambda C = \Sigma\pm\vartheta_1 u_2 v_3; \end{cases}$$

substituirt man diese Ausdrücke der Determinanten $\Sigma\pm\vartheta_1 w_2 p_3$ u. s. w. in die rechte Seite von (2.), so geht sie über in

$$\begin{aligned} &ABwp(\zeta D-\lambda C)^2+BCup(\xi D-\lambda A)^2+ACvp(\eta D-\lambda B)^2 \\ &+ADvw(\eta C-\zeta B)^2+BDuw(\xi C-\zeta A)^2+CDuv(\xi B-\eta A)^2, \end{aligned}$$

was sich nach einem bekannten Determinantensatz in

$$(5.)\quad ABCD\left\{(Au+Bv+Cw+Dp)\left(\frac{\xi^2 u}{A}+\frac{\eta^2 v}{B}+\frac{\zeta^2 w}{C}+\frac{\lambda^2 p}{D}\right) - (\xi u+\eta v+\zeta w+\lambda p)^2\right\}^2$$

verwandeln läfst. Es ist aber wegen (1.)

$$Au+Bv+Cw+Dp = 0$$

und wegen (3.) mit Berücksichtigung von (1.)

$$\xi u+\eta v+\zeta w+\lambda p = \vartheta_1 x_1+\vartheta_2 x_2+\vartheta_3 x_3,$$

also geht (5.) über in

$$-ABCD(\vartheta_1 x_1+\vartheta_2 x_2+\vartheta_3 x_3)^2,$$

was zu beweisen war.

§. 8.

Wenn man in der Gleichung (2.) des vorigen §. die Substitution

$$u_\varkappa u_\lambda u_\mu = a_{\varkappa\lambda\mu},\quad v_\varkappa v_\lambda v_\mu = a_{\varkappa\lambda\mu},\quad w_\varkappa w_\lambda w_\mu = a_{\varkappa\lambda\mu},\quad p_\varkappa p_\lambda p_\mu = a_{\varkappa\lambda\mu}$$

auf beiden Seiten ausführt, so geht die linke Seite definitionsmäfsig in

$$-6S(\vartheta_1 x_1+\vartheta_2 x_2+\vartheta_3 x_3)^2$$

über, und von der rechten Seite übersieht man sogleich, dafs sämmtliche 6 Glieder einander gleich werden, weil jedes Glied aus dem andern durch blofse Vertauschung der 4 Systeme $u_\varkappa$, $v_\varkappa$, $w_\varkappa$, $p_\varkappa$ hervorgeht, und für jedes System *dieselben* Constanten $a_{\varkappa\lambda\mu}$ substituirt werden; es reicht also die Uebertragung eines z. B. des letzten Gliedes hin, dieses ist

$$uvCD(\Sigma\pm\vartheta_1 w_2 p_3)^2.$$

Nun hat man

$$(\Sigma\pm\vartheta_1 w_2 p_3)^2 = \Sigma\vartheta_\varrho\vartheta_\sigma(ww,pp)^{\varrho\sigma}\quad (\text{§. 6 (1.)}),$$

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

ferner

$$2CD = -\Sigma(w_\varkappa p_\lambda + w_\lambda p_\varkappa)(uu, vv)^{\varkappa\lambda} \quad (\S. 6\ (3.)),$$

also

$$2CD(\Sigma \pm \vartheta_1 w_2 p_3)^2 = -\Sigma\Sigma(w_\varkappa p_\lambda + w_\lambda p_\varkappa)(ww, pp)^{\varrho\sigma}\vartheta_\varrho\vartheta_\sigma(uu, vv)^{\varkappa\lambda},$$

aber wegen der zweiten Gleichung §. 6 (6.) und nach Fortlassung des Factors 2

$$CD(\Sigma \pm \vartheta_1 w_2 p_3)^2 = -\Sigma\Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho\sigma}\vartheta_\varrho\vartheta_\sigma(uu, vv)^{\varkappa\lambda}$$

und wenn man der Kürze halber

$$(1.)\qquad \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho\sigma}\vartheta_\varrho\vartheta_\sigma = \Theta_{\varkappa\lambda}$$

setzt:

$$CD(\Sigma \pm \vartheta_1 w_2 p_3)^2 = -\Sigma\Theta_{\varkappa\lambda}(uu, vv)^{\varkappa\lambda}.$$

Diese Gleichung mufs auf beiden Seiten mit

$$u.v = (u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3)(v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3) = \tfrac{1}{2}\Sigma(u_\varrho v_\sigma + u_\sigma v_\varrho)\, x_\varrho x_\sigma$$

multiplicirt werden, aber wegen §. 6 (6.) ist

$$(u_\varrho v_\sigma + u_\sigma v_\varrho)(uu, vv)^{\varkappa\lambda} = 2(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda},$$

also

$$\begin{aligned} uvCD(\Sigma \pm \vartheta_1 w_2 p_3)^2 &= -\tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma\Theta_{\varkappa\lambda}(uu, vv)^{\varkappa\lambda}(u_\varrho v_\sigma + u_\sigma v_\varrho)\, x_\varrho x_\sigma \\ &= -\Sigma\Sigma\Theta_{\varkappa\lambda}(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda} x_\varrho x_\sigma. \end{aligned}$$

Die übrigen 5 Summen §. 7 (2.) geben dasselbe, daher hat man

$$-6S(\vartheta_1 x_1 + \vartheta_2 x_2 + \vartheta_3 x_3)^2 = -6\Sigma\Sigma\Theta_{\varkappa\lambda}(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda} x_\varrho x\ ,$$

also

$$(2.)\qquad S(\vartheta_1 x_1 + \vartheta_2 x_2 + \vartheta_3 x_3)^2 = \Sigma\Sigma\Theta_{\varkappa\lambda}(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda} x_\varrho x_\sigma.$$

Diese höchst merkwürdige identische Gleichung liefert nun die am Ende von §. 6 aufgestellten Sätze.

In der That giebt die Vergleichung des Coefficienten von $x_\varrho x_\sigma$ auf beiden Seiten von (2.) das Resultat:

$$(3.)\qquad S.\vartheta_\varrho\vartheta_\sigma = \Sigma\Theta_{\varkappa\lambda}(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda}$$

und wenn man jetzt den Werth (1.) von $\Theta_{\varkappa\lambda}$ substituirt:

$$\begin{aligned} S.\vartheta_\varrho\vartheta_\sigma = \Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda}\{&(a_\varkappa a_\lambda)^{11}\vartheta_1^2 + (a_\varkappa a_\lambda)^{22}\vartheta_2^2 + (a_\varkappa a_\lambda)^{33}\vartheta_3^2 \\ &+ 2(a_\varkappa a_\lambda)^{23}\vartheta_2\vartheta_3 + 2(a_\varkappa a_\lambda)^{13}\vartheta_1\vartheta_3 + 2(a_\varkappa a_\lambda)^{12}\vartheta_1\vartheta_2\}. \end{aligned}$$

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

Diese Gleichung mufs für jeden Werth der willkührlichen Gröfsen ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 gelten, mithin mufs der Coefficient von $\vartheta_\varrho\vartheta_\sigma$ auf der rechten Seite $= S$, die Coefficienten der übrigen Potenzen und Produkte dieser Gröfsen aber müssen $=0$ sein. Es sind daher die Relationen:

$$(4.)\qquad 0 = \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho_1\sigma_1}(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda},$$

so oft ϱ_1, σ_1 von ϱ, σ verschieden sind, und

$$(5.)\qquad S = 2\Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho\sigma}(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda} = \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho\varrho}(a_\varrho a_\varrho)^{\varkappa\lambda},$$

wo im ersten Gliede der rechten Seite ϱ nicht $=\sigma$ ist, vollständig erwiesen.

Aus den Relationen (4.) und (5.) ergiebt sich aber die Auflösung des folgenden merkwürdigen Systems von Gleichungen des ersten Grades:

Theorem 3.

Wenn

$$\Theta_{11},\quad \Theta_{22},\quad \Theta_{33},\quad \Theta_{23},\quad \Theta_{13},\quad \Theta_{12}$$

ganz beliebige Gröfsen bedeuten, so bilden die folgenden Gleichungen mit den Unbekannten

$$U_{11},\quad U_{22},\quad U_{33},\quad U_{23},\quad U_{13},\quad U_{12}$$

ein derartiges System:

$$(6.)\begin{cases}\Theta_{11}=(a_1a_1)^{11}U_{11}+(a_1a_1)^{22}U_{22}+(a_1a_1)^{33}U_{33}+2(a_1a_1)^{23}U_{23}+2(a_1a_1)^{13}U_{13}+2(a_1a_1)^{12}U_{12}\\ \Theta_{22}=(a_2a_2)^{11}U_{11}+(a_2a_2)^{22}U_{22}+(a_2a_2)^{33}U_{33}+2(a_2a_2)^{23}U_{23}+2(a_2a_2)^{13}U_{13}+2(a_2a_2)^{12}U_{12}\\ \Theta_{33}=(a_3a_3)^{11}U_{11}+(a_3a_3)^{22}U_{22}+(a_3a_3)^{33}U_{33}+2(a_3a_3)^{23}U_{23}+2(a_3a_3)^{13}U_{13}+2(a_3a_3)^{12}U_{12}\\ \Theta_{23}=(a_2a_3)^{11}U_{11}+(a_2a_3)^{22}U_{22}+(a_2a_3)^{33}U_{33}+2(a_2a_3)^{23}U_{23}+2(a_2a_3)^{13}U_{13}+2(a_2a_3)^{12}U_{12}\\ \Theta_{13}=(a_1a_3)^{11}U_{11}+(a_1a_3)^{22}U_{22}+(a_1a_3)^{33}U_{33}+2(a_1a_3)^{23}U_{23}+2(a_1a_3)^{13}U_{13}+2(a_1a_3)^{12}U_{12}\\ \Theta_{12}=(a_1a_2)^{11}U_{11}+(a_1a_2)^{22}U_{22}+(a_1a_2)^{33}U_{33}+2(a_1a_2)^{23}U_{23}+2(a_1a_2)^{13}U_{13}+2(a_1a_2)^{12}U_{12},\end{cases}$$

dafs sich dessen Auflösungen durch das System:

$$(7.)\ S.U_{\varrho\sigma}=(a_\varrho a_\sigma)^{11}\Theta_{11}+(a_\varrho a_\sigma)^{22}\Theta_{22}+(a_\varrho a_\sigma)^{33}\Theta_{33}+2(a_\varrho a_\sigma)^{23}\Theta_{23}+2(a_\varrho a_\sigma)^{13}\Theta_{13}+2(a_\varrho a_\sigma)^{12}\Theta_{12}$$

darstellen lassen, in welchem die Coefficienten wörtlich und genau in derselben Reihenfolge mit denen des ursprünglichen Systems übereinstimmen.

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

Der Beweis ergiebt sich auf der Stelle, wenn man die Gleichungen (6.) der Reihe nach mit

$$(a_\varrho a_\sigma)^{11}; \quad (a_\varrho a_\sigma)^{22}, \quad (a_\varrho a_\sigma)^{33}, \quad (a_\varrho a_\sigma)^{23}, \quad (a_\varrho a_\sigma)^{13}, \quad (a_\varrho a_\sigma)^{12}$$

multiplicirt und alle addirt, indem dann wegen (4.) alle Coefficienten von U_{11}, U_{22} u. s. w. in der Summe verschwinden, mit Ausnahme des Coefficienten von $U_{\varrho\sigma}$, welcher wegen (5.) $= S$ ist.

Die gewöhnliche Auflösung des Systems (6.) würde die Coefficienten der Auflösung statt von der 2^{ten} wie (7.) von der 10^{ten} Ordnung geben, und die Determinante von der 12^{ten} Ordnung, sie würde also die Gleichungen (7.) mit einem sich forthebenden Factor von der 8^{ten} Ordnung liefern. Da diese Determinante, wie später gezeigt wird $= S^3$ ist, so ist der angegebene Factor $= S^2$.

Die Allgemeinheit, in welcher das vorstehende Theorem 3. bewiesen ist, läfst die Gültigkeit desselben auch dann noch erkennen, wenn man das System (6.) transponirt, d. h. die gleichvielten Horizontal- und Verticalzeilen mit einander vertauscht, obwohl dieselben einander nicht gleich sind. Substituirt man alsdann statt der 6 Unbekannten die Potenzen und Produkte:

$$x_1^2, \quad x_2^2, \quad x_3^2, \quad x_2 x_3, \quad x_1 x_3, \quad x_1 x_2$$

und statt der Gröfsen auf der linken Seite die Potenzen und Produkte:

$$y_1^2, \quad y_2^2, \quad y_3^2, \quad y_2 y_3, \quad y_1 y_3, \quad y_1 y_2$$

und läfst überdies diese Variabeln den Gleichungen:

$$\Delta f(x_1, x_2, x_3) = 0, \qquad \Delta f(y_1, y_2, y_3) = 0$$

genügen, wo Δf die hier in der Folge zu entwickelnde Functionaldeterminante des Herrn ***Hesse*** ist, so wird das Theorem der Ausdruck des bekannten Satzes von den conjugirten Punkten einer Curve dritter Ordnung, und man gelangt so zu einem bereits in dieser speciellen Fassung von Herrn ***Hesse****) gegebenem Resultat.

Obwohl die explicite Darstellung der 36 Coefficienten $(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda}$ zu allgemeinen Entwicklungen nicht erforderlich ist, so will ich dieselbe dennoch hier geben, indem ich den Algorithmus §. 3 (8.) dazu benutze. Sie ist folgende:

*) S. dieses Journal Bd. 36, S. 164.

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

(8).

	$(aa)^{11}$	$(aa)^{23}$
$(a_1 a_1)$	$2(a_{122}a_{133} - a_{123}^2)$	$2(a_{112}a_{113} - a_{111}a_{123})$
$(a_2 a_2)$	$2(a_{222}a_{233} - a_{223}^2)$	$2(a_{122}a_{123} - a_{112}a_{223})$
$(a_3 a_3)$	$2(a_{223}a_{333} - a_{233}^2)$	$2(a_{123}a_{133} - a_{113}a_{233})$
$(a_2 a_3)$	$a_{222}a_{333} - a_{233}a_{223}$	$a_{122}a_{133} + a_{123}^2 - a_{112}a_{233} - a_{113}a_{223}$
$(a_1 a_3)$	$a_{122}a_{333} + a_{223}a_{133} - 2a_{123}a_{233}$	$a_{112}a_{133} - a_{111}a_{233}$
$(a_1 a_2)$	$a_{122}a_{233} + a_{133}a_{222} - 2a_{123}a_{223}$	$a_{122}a_{113} - a_{111}a_{223}$
	$(aa)^{22}$	$(aa)^{13}$
$(a_1 a_1)$	$2(a_{111}a_{133} - a_{113}^2)$	$2(a_{112}a_{123} - a_{122}a_{113})$
$(a_2 a_2)$	$2(a_{112}a_{233} - a_{123}^2)$	$2(a_{122}a_{223} - a_{123}a_{222})$
$(a_3 a_3)$	$2(a_{113}a_{333} - a_{133}^2)$	$2(a_{123}a_{233} - a_{133}a_{223})$
$(a_2 a_3)$	$a_{112}a_{333} + a_{113}a_{233} - 2a_{123}a_{133}$	$a_{122}a_{233} - a_{133}a_{222}$
$(a_1 a_3)$	$a_{111}a_{333} - a_{113}a_{133}$	$a_{112}a_{233} + a_{123}^2 - a_{113}a_{223} - a_{133}a_{122}$
$(a_1 a_2)$	$a_{111}a_{233} + a_{112}a_{133} - 2a_{113}a_{123}$	$a_{112}a_{223} - a_{113}a_{222}$
	$(aa)^{33}$	$(aa)^{12}$
$(a_1 a_1)$	$2(a_{111}a_{122} - a_{112}^2)$	$2(a_{113}a_{123} - a_{112}a_{133})$
$(a_2 a_2)$	$2(a_{112}a_{222} - a_{122}^2)$	$2(a_{123}a_{223} - a_{122}a_{233})$
$(a_3 a_3)$	$2(a_{113}a_{223} - a_{123}^2)$	$2(a_{133}a_{233} - a_{123}a_{333})$
$(a_2 a_3)$	$a_{112}a_{223} + a_{113}a_{222} - 2a_{122}a_{123}$	$a_{133}a_{223} - a_{122}a_{333}$
$(a_1 a_3)$	$a_{111}a_{223} + a_{113}a_{122} - 2a_{112}a_{123}$	$a_{113}a_{233} - a_{112}a_{333}$
$(a_1 a_2)$	$a_{111}a_{222} - a_{112}a_{122}$	$a_{113}a_{223} + a_{123}^2 - a_{112}a_{233} - a_{122}a_{133}$.

Setzt man

$$S = \Sigma (a_1 a_1)^{\varkappa\lambda} (a_\varkappa a_\lambda)^{11},$$

so wird daher vermittelst dieser Tafel:

$$\begin{aligned} S = 4\{ & (a_{122}a_{133} - a_{123}^2)^2 + (a_{222}a_{233} - a_{223}^2)(a_{111}a_{133} - a_{113}^2) \\ & + (a_{223}a_{333} - a_{233}^2)(a_{111}a_{122} - a_{112}^2) + (a_{222}a_{333} - a_{223}a_{233})(a_{112}a_{113} - a_{111}a_{123}) \\ & + (a_{122}a_{333} + a_{223}a_{133} - 2a_{123}a_{233})(a_{112}a_{123} - a_{113}a_{122}) \\ & + (a_{122}a_{233} + a_{133}a_{222} - 2a_{123}a_{223})(a_{113}a_{123} - a_{112}a_{133})\}. \end{aligned}$$

Da man mit der eingeführten Bezeichnung operiren kann, so ist es nicht zweckmäfsig die Verbindungen zweiter Ordnung noch durch Auflösung der Parenthesen zu zerstören; in der That geht alsdann der vorstehende nach

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

einem einfachen Gesetz gebildete Ausdruck in den sehr complicirten über:

$$(9.)\quad \tfrac{1}{4}S = a_{123}^4 - 2a_{123}^2(a_{122}a_{133} + a_{113}a_{223} + a_{112}a_{233}) + a_{123}(3a_{113}a_{122}a_{233} + 3a_{112}a_{133}a_{223}$$
$$+ a_{112}a_{122}a_{333} + a_{113}a_{133}a_{222} + a_{223}a_{233}a_{111} - a_{111}a_{222}a_{333}) + a_{122}^2a_{133}^2 + a_{113}^2a_{223}^2 + a_{112}^2a_{233}^2$$
$$- a_{111}a_{133}a_{223}^2 - a_{111}a_{122}a_{233}^2 - a_{222}a_{112}a_{133}^2 - a_{222}a_{233}a_{113}^2 - a_{333}a_{113}a_{122}^2 - a_{333}a_{223}a_{112}^2$$
$$+ a_{111}a_{222}a_{133}a_{233} + a_{111}a_{333}a_{122}a_{223} + a_{222}a_{333}a_{112}a_{113} - a_{112}a_{122}a_{133}a_{233}$$
$$- a_{223}a_{233}a_{112}a_{113} - a_{113}a_{133}a_{223}a_{122},$$

mit welchem nicht eher Operationen ausgeführt werden können, als bis man ihn wieder rückwärts in die gesetzmäfsige Form gebracht hat.*) Dafs die Invariante S immer den Factor 4 erhält, ist a priori ersichtlich, weil die $(a_\varrho a_\varrho)^{\varkappa\lambda}$ mit gleichen unteren Indices den Factor 2 haben. Die Unterdrückung des Factors 4 bei der Bezeichnung ist jedoch nicht zweckmäfsig, weil man dann bei andern davon abhängigen Formen Zahlenfactoren einführen müfste, die dadurch vermieden sind.

Ich will nun noch ein System von sehr einfachen Relationen entwickeln, welche zwischen den 36 Verbindungen zweiter Ordnung bestehen.

Wenn man die Bedeutung der Bezeichnungsweise §. 6 (1.):

$$\Sigma(uu, vv)^{\varkappa\lambda} w_\varkappa w_\lambda = (\Sigma \pm u_1 v_2 w_3)^2$$

berücksichtigt, so ergiebt sich sofort, dafs

$$(uu, vv)^{11} = (\overline{u_2 v_3})^2;\ (uu, vv)^{22} = (\overline{u_2 v_3})(\overline{u_3 v_1});\ (uu, vv)^{33} = (\overline{u_2 v_3})(\overline{u_1 v_2})$$
$$(uu, vv)^{23} = (\overline{u_1 v_3})(\overline{u_1 v_2});\ (uu, vv)^{13} = (\overline{u_1 v_2})(\overline{u_2 v_3});\ (uu, vv)^{12} = (\overline{u_1 v_3})(\overline{u_2 v_3})$$

ist, wo der Kürze halber $\overline{u_2 v_3}$ u. s. w. die partiellen Determinanten $u_2 v_3 - u_3 v_2$ u. s. w. bedeuten.

Es werden daher die Gröfsen

$$(uu, vv)^{1\varrho}, \qquad (uu, vv)^{2\varrho}, \qquad (uu, vv)^{3\varrho}$$

mit einem gemeinschaftlichen Factor μ versehen sein, der selbst eine der partiellen Determinanten ist, so dafs sie sich respective in

$$\mu(\overline{u_2 v_3}), \qquad \mu(\overline{u_3 v_1}), \qquad \mu(\overline{u_2 v_2})$$

verwandeln lassen.

---

*) In meiner Abhandlung, Bd. 39, S. 152 dieses Journals, wo die obige Darstellung von S gegeben ist, habe ich die letzte Auflösung (9.) der Parenthesen nicht abdrucken lassen. Hierdurch scheint Herr *Cayley* zu der irrthümlichen Bemerkung in Phil. Transactions vol. 146, pag. 641 veranlafst worden zu sein, nach welcher *zuerst* Herr *Salmon* die entwickelten Ausdrücke gegeben haben soll. Herr *Salmon* hat sie in der That in einem spätern Bande dieses Journals (Bd. 42, S. 274) gegeben, aber mit Bezug auf meine Abhandlung.

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

Bildet man nun die Summe der Produkte

(10.) $(uu, vv)^{1\varrho}(u_\sigma v_1 + u_1 v_\sigma) + (uu, vv)^{2\varrho}(u_\sigma v_2 + u_2 v_\sigma) + (uu, vv)^{3\varrho}(u_\sigma v_3 + u_3 v_\sigma)$,

so ist das Resultat:

$$\mu\{u_\sigma \Sigma \pm u_1 v_2 v_3 + v_\sigma \Sigma \pm u_1 u_2 v_3\} = 0,$$

weil die Determinanten mit zwei gleichen Verticalzeilen verschwinden.

Es ist nun wegen §. 6 (6.)

$$(uu, vv)^{m\varrho}(u_\sigma v_m + u_m v_\sigma) = 2(a_\sigma a_m)^{m\varrho},$$

wenn man die Substitutionen

$$u_\varkappa u_\lambda u_\mu = a_{\varkappa\lambda\mu}, \qquad v_\varkappa v_\lambda v_\mu = a_{\varkappa\lambda\mu}$$

ausführt, daher giebt die Summe (10.) den folgenden Satz:

Wenn man statt ϱ, σ allmälig alle Zahlen 1, 2, 3 *setzt, so entstehen zwischen den 36 Verbindungen $(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda}$ die folgenden 9 Gleichungen:*

$$(11.) \qquad (a_\sigma a_1)^{\varrho 1} + (a_\sigma a_2)^{\varrho 2} + (a_\sigma a_3)^{\varrho 3} = 0,$$

und überdies, wenn man je 3 geeignete addirt:

$$(12.) \qquad \Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{\varrho\sigma} = 0.$$

§. 9.

Es bleibt schliefslich noch eine Eigenschaft der 36 Verbindungen $(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda}$ nachzuweisen, welche ihnen eine selbsständige Stellung in der Theorie anweist, nämlich, dafs sie die Coefficienten einer ***Zwischenform*** §. 1. IV sind.

Theorem 4.

Wenn man das Quadrat der Determinante:

$$\Sigma \pm u_1 v_2 w_3 = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

mit den beiden linearen Funktionen

$$v = v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3, \qquad w = w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3$$

multiplicirt, also

$$v . w . (\Sigma \pm u_1 v_2 w_3)^2$$

bildet, und dann die Substitution

$$v_\varkappa v_\lambda v_\mu = a_{\varkappa\lambda\mu}, \qquad w_\varkappa w_\lambda w_\mu = a_{\varkappa\lambda\mu}$$

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

ausführt, so entsteht eine Funktion Θ der Veränderlichen x_1, x_2, x_3, u_1, u_2, u_3, welche in Bezug auf beide Systeme von der 2^{ten} Ordnung, und Zwischenform von f ist.

Es soll in der Folge Θ *die erste Zwischenform* genannt werden. Der Beweis ergiebt sich unmittelbar wie bei frühern Darstellungen §. 3 aus der Gleichung:

$$(\Sigma\pm U_1V_2W_3)^2(V_1X_1+V_2X_2+V_3X_3)(W_1X_1+W_2X_2+W_3X_3)$$
$$= r^2.(\Sigma\pm u_1v_2w_3)^2(v_1x_1+v_2x_2+v_3x_3)(w_1x_1+w_2x_2+w_3x_3)$$

mit Berücksichtigung von §. 3 (4.), (5.).

Zur expliciten Darstellung von Θ bemerke man, dafs

$$(v_1x_1+v_2x_2+v_3x_3)(w_1x_1+w_2x_2+w_3x_3) = \tfrac{1}{2}\Sigma(v_\varrho w_\sigma+v_\sigma w_\varrho)x_\varrho x_\sigma$$

ist, und

$$(\Sigma\pm u_1v_2w_3)^2 = \Sigma u_\varkappa u_\lambda(vv, ww)^{\varkappa\lambda} \quad (§. 6\ (1.)),$$

mithin durch Multiplication beider Gleichungen:

$$(1.)\qquad (\Sigma\pm u_1v_2w_3)^2(v_1x_1+v_2x_2+v_3x_3)(w_1x_1+w_2x_2+w_3x_3)$$
$$= \tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma(v_\varrho w_\sigma+v_\sigma w_\varrho)(vv, ww)^{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda x_\varrho x_\sigma.$$

Da nun nach §. 6 (6.):

$$(v_\varrho w_\sigma+v_\sigma w_\varrho)(vv, ww)^{\varkappa\lambda} = 2(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda}$$

ist, so folgt:

$$(2.)\qquad \Theta(u_1, u_2, u_3; x_1, x_2, x_3) = \Sigma\Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda x_\varrho x_\sigma.$$

Die Gleichung (2.) zeigt, dafs die Zwischenform Θ eine homogene Function zweiter Ordnung ist, und zwar sowohl der Variabeln x_1, x_2, x_3, als der Variabeln u_1, u_2, u_3, als auch in Bezug auf die Coefficienten von f, endlich, dafs ihre Coefficienten die 36 Fundamentalverbindungen zweiter Ordnung in der Tabelle von §. 8 sind. Obige symbolische Gleichung verwandelt sich aber wegen (2.) in:

$$(3.)\qquad \begin{cases}\Sigma\Sigma(a'_\varrho a'_\sigma)U_\varkappa U_\lambda X_\varrho X_\sigma = r^2.\Sigma\Sigma(a_\varrho a_\sigma)u_\varkappa u_\lambda x_\varrho x_\sigma \\ \text{oder} \qquad\qquad \Theta' = r^2.\Theta.\end{cases}$$

Ich will nun eine zweite Bildungsweise der Function Θ angeben, welche sich vorzüglich zu ihrer Darstellung für specielle Formen von f eignet, und dadurch auch umgekehrt die Berechnung der Tabelle §. 8 leicht giebt.

Man bezeichne zu diesem Ende die 6 partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von f

$$\tfrac{1}{6}\frac{d^2f}{dx_1^2},\quad \tfrac{1}{6}\frac{d^2f}{dx_2^2},\quad \tfrac{1}{6}\frac{d^2f}{dx_3^2},\quad \tfrac{1}{6}\frac{d^2f}{dx_2dx_3},\quad \tfrac{1}{6}\frac{d^2f}{dx_1dx_3},\quad \tfrac{1}{6}\frac{d^2f}{dx_1dx_2}$$

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

respective durch:

$$(4.)\quad A_{11},\quad A_{22},\quad A_{33},\quad A_{23},\quad A_{13},\quad A_{12},$$

so dafs

$$(5.)\quad A_{\varkappa\lambda} = a_{1\varkappa\lambda}x_1 + a_{2\varkappa\lambda}x_2 + a_{3\varkappa\lambda}x_3$$

ist, wie man sich sofort durch Differentiation überzeugt, und betrachte die Gröfsen $A_{\varkappa\lambda}$ als Coefficienten einer homogenen Function zweiten Grades, alsdann gilt der Satz:

Wenn man die zugehörige Form Γ §. 3 (2.) der homogenen Function zweiten Grades bildet, deren Coefficienten die Gröfsen $A_{\varkappa\lambda}$ sind, so entsteht die Zwischenform Θ dividirt durch 2, d. h. es ist mit der Bezeichnungsweise von §. 3 (13.):

$$(6.)\quad \Theta = \Sigma u_\varkappa u_\lambda (A, A)^{\varkappa\lambda}.$$

Beweis.

Nach §. 3 (10.) kann man in (6.) $u_\varkappa u_\lambda$ mit $A_{\varkappa\lambda}$ vertauschen, also

$$\Sigma u_\varkappa u_\lambda (A, A)^{\varkappa\lambda} = \Sigma A_{\varkappa\lambda}(uu, A)^{\varkappa\lambda}$$

schreiben, und daher wegen (5.):

$$\Sigma u_\varkappa u_\lambda (A, A)^{\varkappa\lambda} = \Sigma\Sigma a_{\varrho\varkappa\lambda} x_\varrho (uu, A)^{\varkappa\lambda},$$

wo die zweite Summation über $\varrho = 1, 2, 3$ auszudehnen ist. Unter fortwährender Anwendung des Vertauschungssatzes §. 3 (10.) erhält man nun:

$$\Sigma a_{\varrho\varkappa\lambda}(uu, A)^{\varkappa\lambda} = \Sigma A_{\varkappa\lambda}(uu, a_\varrho)^{\varkappa\lambda} = \Sigma\Sigma a_{\sigma\varkappa\lambda} x_\sigma (uu, a_\varrho)^{\varkappa\lambda},$$

wo die zweite Summation sich auf (6.) bezieht, mithin durch Substitution:

$$\Sigma u_\varkappa u_\lambda (A, A)^{\varkappa\lambda} = \Sigma\Sigma a_{\sigma\varkappa\lambda}(a_\varrho, uu)^{\varkappa\lambda} x_\varrho x_\sigma = \Sigma\Sigma (a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda} u_\varkappa u_\lambda x_\varrho x_\sigma = \Theta,$$

w. z. b. w.

§. 10.

Zum Schlufs dieser Untersuchungen will ich das Vorstehende auf eine specielle Form als Beispiel anwenden und wähle hiezu die *Hesse*sche Form:

$$(1.)\quad f'(X_1, X_2, X_3) = a_1 X_1^3 + a_2 X_2^3 + a_3 X_3^3 + 6a_4 X_1 X_2 X_3 \;{}^{*)},$$

in welche sich die allgemeine transformiren läfst.

Man findet durch Differentiation:

$$(2.)\quad \begin{cases} A_{11} = a_1 X_1, & A_{22} = a_2 X_2, & A_{33} = a_3 X_3, \\ A_{23} = a_4 X_1, & A_{13} = a_4 X_2, & A_{12} = a_4 X_3, \end{cases}$$

*) Die *Hesse*sche Form setzt $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ voraus, was im Allgemeinen erlaubt ist, indessen ist es einerseits um die Homogeneität der Formen nicht zu zerstören zweckmäfsig, dafs man von dieser Vereinfachung absieht, andrerseits kann es nöthig sein, auch die Formen zu untersuchen, für welche einer der Coefficienten $a_1, a_2, a_3, = 0$ ist.

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

also:

$$(3.)\begin{cases}\Theta = \Sigma U_\varkappa U_\lambda (AA)^{\varkappa\lambda} \\ = 2\left\{\begin{array}{l} U_1^2(a_2a_3X_2X_3 - a_4^2X_1^2) + U_2^2(a_1a_3X_1X_3 - a_4^2X_2^2) + U_3^2(a_1a_2X_1X_2 - a_4^2X_3^2) \\ +2U_2U_3(a_4^2X_2X_3 - a_1a_4X_1^2) + 2U_1U_3(a_4^2X_1X_3 - a_2a_4X_2^2) + 2U_1U_2(a_4^2X_1X_2 - a_3a_4X_3^2)\end{array}\right\}\end{cases}$$

und daher die Tabelle in §. 8:

$$(4.)\quad\begin{cases}\begin{array}{cccccc} -2a_4^2 & 0 & 0 & -2a_1a_4 & 0 & 0 \\ 0 & -2a_4^2 & 0 & 0 & -2a_2a_4 & 0 \\ 0 & 0 & -2a_4^2 & 0 & 0 & -2a_3a_4 \\ a_2a_3 & 0 & 0 & a_4^2 & 0 & 0 \\ 0 & a_1a_3 & 0 & 0 & a_4^2 & 0 \\ 0 & 0 & a_1a_2 & 0 & 0 & a_4^2 \end{array}\end{cases}$$

Multiplicirt man die Glieder irgend einer Horizontalreihe mit den Gliedern der gleichvielten Verticalreihe, so findet man, wenn man beachtet, dafs die drei letzten Produkte in der S definirenden Summe doppelt vorkommen, sofort:

$$(5.)\qquad S' = 4(a_4^3 - a_1a_2a_3)a_4.$$

Es läfst sich beiläufig für das System (4.) die totale Determinante leicht bilden, weil zum gröfsten Theile ihre Elemente $=0$ sind, diese wird

$$8a_4^3(a_4^3 - a_1a_2a_3)^3,$$

d. h. bis auf einen Zahlenfactor $= S'^3$, wie in §. 8 behauptet ist; beachtet man noch, dafs

$$S'^3 = r^{12}.S^3$$

ist, so läfst sich schon hieraus die Richtigkeit der angegebenen Eigenschaft der ganzen Determinante für alle Fälle einsehen.

Wir werden das System (4.) in der Folge für alle anderen auf (1.) bezüglichen Darstellungen benutzen.

§. 11.

Theorem 5.

Wenn man in dem Produkte

$$(\Sigma \pm u_1v_2w_3)^2(u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3)(v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3)(w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3)$$

die Potenzen und Produkte dritter Ordnung

$$u_\varkappa u_\lambda u_\mu, \qquad v_\varkappa v_\lambda v_\mu, \qquad w_\varkappa w_\lambda w_\mu$$

durch die entsprechenden

$$a_{\varkappa\lambda\mu}$$

ersetzt, und die dadurch entstehende Function dritter Ordnung der Variabeln

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

x_1, x_2, x_3 *durch*

$$\Delta f(x_1, x_2, x_3)$$

bezeichnet, so ist Δf eine Covariante von f.

Wir wiederholen nicht mehr den bereits oft geführten Beweis, welcher darauf beruht, dafs

$$(\Sigma \pm U_1 V_2 W_3)^2 = r^2 (\Sigma \pm u_1 v_2 w_3)^2$$

ist, und zur Folge hat, dafs

$$(1.) \qquad \Delta' f(X_1, X_2, X_3) = r^2 . \Delta f(x_1, x_2, x_3)$$

wird.

Man gelangt aber zur sofortigen Bildung von Δf, welche wir die *erste Covariante* nennen wollen, wenn man beachtet, dafs die Function, welche im Theorem 4. die Zwischenform Θ definirt, sich nur durch den Factor $(u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3)$ von der vorliegenden unterscheidet, und dafs man also die Gleichung:

$$(2.) \qquad \Delta f = \Theta (u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3)$$

unter der Voraussetzung:

$$u_\varkappa u_\lambda u_\mu = a_{\varkappa\lambda\mu}$$

erhält. Mit Berücksichtigung von §. 9 (2.) ist also

$$\Delta f = \Sigma\Sigma (a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda} u_\varkappa u_\lambda x_\varrho x_\sigma (u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3),$$

mithin:

$$\Delta f = \Sigma\Sigma (a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda} x_\varrho x_\sigma (a_{1\varkappa\lambda} x_1 + a_{2\varkappa\lambda} x_2 + a_{3\varkappa\lambda} x_3) = \Sigma\Sigma (a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda} a_{\tau\varkappa\lambda} x_\varrho x_\sigma x_\tau,$$

wenn man sich der Kürze halber eines einfachen Summenzeichens bedient, um anzudeuten, dafs man die Summe über alle Werthe 1, 2, 3 für ϱ, σ, τ auszudehnen hat.

Setzt man also

$$(3.) \qquad \Delta f = \Sigma b_{\varrho\sigma\tau} x_\varrho x_\sigma x_\tau,$$

so ist

$$(4.) \qquad b_{\varrho\sigma\tau} = \Sigma (a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda} a_{\tau\varkappa\lambda}.$$

Da ferner nach der zweiten Darstellungsweise der Zwischenfunction Θ, §. 9 (6.)

$$\Delta f = \Sigma u_\varkappa u_\lambda (AA)^{\varkappa\lambda} (u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3)$$

ist, so folgt

$$\Delta f = \Sigma (AA)^{\varkappa\lambda} (a_{1\varkappa\lambda} x_1 + a_{2\varkappa\lambda} x_2 + a_{3\varkappa\lambda} x_3),$$

also wegen §. 9 (5.):

$$(5.) \qquad \Delta f = \Sigma (AA)^{\varkappa\lambda} A_{\varkappa\lambda}.$$

Nun ist nach §. 3 (12.)

$$\Sigma (AA)^{\varkappa\lambda} A_{\varkappa\lambda} = 6 \Sigma \pm A_{11} A_{22} A_{33}$$

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

und die $A_{\varkappa\lambda}$ bedeuten die zweiten partiellen Differentialquotienten dividirt durch 6, mithin ist:

$$(6.)\quad \tfrac{1}{6}\Delta f(x_1, x_2, x_3) = \begin{vmatrix} \frac{1}{6}\frac{d^2f}{dx_1^2}, & \frac{1}{6}\frac{d^2f}{dx_1dx_2}, & \frac{1}{6}\frac{d^2f}{dx_1dx_3} \\ \frac{1}{6}\frac{d^2f}{dx_2dx_1}, & \frac{1}{6}\frac{d^2f}{dx_2^2}, & \frac{1}{6}\frac{d^2f}{dx_2dx_3} \\ \frac{1}{6}\frac{d^2f}{dx_3dx_1}, & \frac{1}{6}\frac{d^2f}{dx_3dx_2}, & \frac{1}{6}\frac{d^2f}{dx_3^2} \end{vmatrix}.$$

Aus dieser Gleichung folgt, dafs die erste Covariante die zuerst von Herrn *Hesse* in seinen Untersuchungen über die homogenen Functionen dritter Ordnung benutzte *Functionaldeterminante* ist.

Andrerseits giebt die Gleichung (4.) die Coefficienten derselben in expliciter Form, und zwar sind dieselben die simultanen Invarianten der drei homogenen Functionen zweiten Grades

$$\tfrac{1}{3}\frac{df}{dx_1}, \quad \tfrac{1}{3}\frac{df}{dx_2}, \quad \tfrac{1}{3}\frac{df}{dx_3},$$

wie sich aus Vergleichung der §. 6 (5.) gegebenen Entwicklung dieser Differentialquotienten, mit der Darstellung der angegebenen Invarianten §. 3 leicht einsehen läfst.

Die schon häufig benutzte Vertauschung §. 3 (10.) der 6 verschiedenen Formen einer solchen Invariante führt hier zu der Identität

$$(6.)\qquad \Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda} a_{\tau\varkappa\lambda} = \Sigma(a_\varrho a_\tau)^{\varkappa\lambda} a_{\sigma\varkappa\lambda} = \text{u. s. w.},$$

d. h. wegen (3.) zu der für die Coefficienten von Δf geltenden Bedingung:

$$b_{\varrho\sigma\tau} = b_{\varrho\tau\sigma} = b_{\sigma\varrho\tau} = b_{\sigma\tau\varrho} = b_{\tau\varrho\sigma} = b_{\tau\sigma\varrho},$$

derjenigen entsprechend, die unter den Coefficienten von f besteht. Demnach haben in

$$\Delta f = \Sigma b_{\varrho\sigma\tau} x_\varrho x_\sigma x_\tau$$

alle Coefficienten mit zwei gleichen Indices den Factor 3, und b_{123} den Factor 6. Aufserdem ist einleuchtend, dafs diese Coefficienten homogene Functionen der dritten Ordnung der $a_{\varkappa\lambda\mu}$ sind.

§. 12.

Aus der vorstehenden Darstellung der Coefficienten von Δf, lassen sich jetzt auch alle Operationen für diese homogene Function dritter Ordnung ausführen und ich gehe daher zunächst zu einem Grundprinzipe über, welches sich an diese Function anknüpfen läfst.

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

Wenn man die zweiten Ableitungen von Δf:

$$\frac{1}{6}\frac{d^2\Delta f}{dx_1^2},\quad \frac{1}{6}\frac{d^2\Delta f}{dx_2^2},\quad \frac{1}{6}\frac{d^2\Delta f}{dx_3^3},\quad \frac{1}{6}\frac{d^2\Delta f}{dx_2dx_3},\quad \frac{1}{6}\frac{d^2\Delta f}{dx_1dx_3},\quad \frac{1}{6}\frac{d^2\Delta f}{dx_1dx_2}$$

respective durch

$$B_{11},\quad B_{22},\quad B_{33},\quad B_{23},\quad B_{13},\quad B_{12}$$

bezeichnet, so ist

$$(1.)\qquad B_{\varrho\sigma} = b_{1\varrho\sigma}x_1 + b_{2\varrho\sigma}x_2 + b_{3\varrho\sigma}x_3$$

und wegen §. 11 (4.)

$$B_{\varrho\sigma} = \Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda}a_{1\varkappa\lambda}x_1 + \Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda}a_{2\varkappa\lambda}x_2 + \Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda}a_{3\varkappa\lambda}x_3$$

oder, weil $A_{\varkappa\lambda} = a_{1\varkappa\lambda}x_1 + a_{2\varkappa\lambda}x_2 + a_{3\varkappa\lambda}x_3$:

$$(2.)\qquad B_{\varrho\sigma} = \Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda}A_{\varkappa\lambda}.$$

Geht man nun zu Theorem 3. §. 8 zurück, und setzt in den Gleichungen (6.) desselben

$$U_{\varkappa\lambda} = A_{\varkappa\lambda},$$

so folgt aus (2.), dafs

$$\Theta_{\varkappa\lambda} = B_{\varkappa\lambda}$$

wird, und in Folge dessen, wegen der Gleichung (7.) in jenem Theorem:

$$(3.)\qquad S.A_{\varrho\sigma} = \Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda}B_{\varkappa\lambda}$$

oder:

$$S(a_{1\varrho\sigma}x_1 + a_{2\varrho\sigma}x_2 + a_{3\varrho\sigma}x_3) = \Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda}(b_{1\varkappa\lambda}x_1 + b_{2\varkappa\lambda}x_2 + b_{3\varkappa\lambda}x_3),$$

also, durch Vergleichung der Coefficienten von x_τ:

$$(4.)\qquad S.a_{\varrho\sigma\tau} = \Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda}b_{\tau\varkappa\lambda}.$$

Diese höchst merkwürdige Gleichung zeigt zunächst, dafs man, ebenso wie auf der linken Seite

$$a_{\varrho\sigma\tau} = a_{\varrho\tau\sigma} = \text{u. s. w.}$$

ist, auch auf ***der rechten Seite die Indices*** ϱ, σ, τ nach Belieben vertauschen kann.

Ich will jetzt durch das Differentiationszeichen δ andeuten, dafs man eine Function der Gröfsen $a_{\varkappa\lambda\mu}$ in Bezug auf diese total differentiirt, und statt der Incremente die entsprechenden Gröfsen $b_{\varkappa\lambda\mu}$ substituirt, und die Wiederholungen dieser Operation durch δ^2, δ^3, ... bezeichnen, dann ist

$$(5.)\qquad \delta f = \Delta f,$$

ferner

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

$$\begin{aligned}\delta b_{\varrho\sigma\tau} &= \delta\Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda} a_{\tau\varkappa\lambda}\\ &= \Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda}\delta a_{\tau\varkappa\lambda} + \Sigma(a_\varrho \delta a_\sigma) a_{\tau\varkappa\lambda} + \Sigma(\delta a_\varrho a_\sigma) a_{\tau\varkappa\lambda}\\ &= \Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda} b_{\tau\varkappa\lambda} + \Sigma(a_\varrho a_\tau)^{\varkappa\lambda} b_{\sigma\varkappa\lambda} + \Sigma(a_\sigma a_\tau)^{\varkappa\lambda} b_{\varrho\varkappa\lambda},\ \S.\,3\ (10.).\end{aligned}$$

Da nun unter (4.) bewiesen ist, dafs diese Summen einander gleich sind und jede $= S.a_{\varrho\sigma\tau}$ ist, so folgt

$$(6.)\qquad \delta b_{\varrho\sigma\tau} = 3Sa_{\varrho\sigma\tau},$$

oder

$$(7.)^*\qquad \delta\Delta f = 3S.f$$

und hieraus:

Theorem 6.

Wenn man die Functionen f und Δf nach den Gröfsen $a_{\varkappa\lambda\mu}$ differentiirt und statt der Incremente die entsprechenden Gröfsen $b_{\varkappa\lambda\mu}$ substituirt, so gehen dieselben bis auf einen constanten Factor der für δf, $=1$, für $\delta\Delta f$, $=3S$ ist, in einander über.

§. 13.

Von dem vorstehenden Satze aus gelangt man a priori zu den Resultaten, welche die Grundlage der von Herrn *Hesse* aufgestellten Theorie bilden, und welche erst nach Ueberwindung aller Schwierigkeiten der Theorie der homogenen Functionen dritter Ordnung in jenen Untersuchungen ermittelt werden können.

Herr *Hesse* beweist nämlich den folgenden Satz:

Wenn man die Functionaldeterminante von

$$af + b\Delta f$$

bildet, wo a und b beliebige Constanten sind, so ergiebt sich immer ein Ausdruck von derselben Form:

$$\alpha f + \beta\Delta f.$$

Ich werde jetzt die Operation

$$\Delta(af + b\Delta f)$$

ausführen, ohne den vorstehenden Satz vorauszusetzen und dadurch nicht allein den Beweis desselben sondern auch die Bildung der Functionen α und β in schliefslicher Endform geben.

Man beachte, dafs die Operationen

$$\delta,\quad \delta^2,\quad \delta^3,\quad \delta^4\quad \ldots$$

durch Differentiation sofort ausgeführt werden können, also bekannte sind und wegen des Theorems 6. auf f angewandt, immer zu Ausdrücken von der Form:

$$\lambda f + \mu\Delta f$$

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

führen müssen. Es soll nun zunächst die Operation:

$$\varDelta(af+b\varDelta f)$$

auf die Bildung von δf, $\delta^2 f$, $\delta^3 f$, $\delta^4 f$ zurückgeführt werden.

Setzt man in §. 11 (5.) statt $A_{\varkappa\lambda}: aA_{\varkappa\lambda}+bB_{\varkappa\lambda}$ so ist:

$$\varDelta(af+b\varDelta f) = \Sigma(aA_{\varkappa\lambda}+bB_{\varkappa\lambda})(aA+bB,\, aA+bB)^{\varkappa\lambda}$$

oder nach Potenzen von a und b geordnet:

$$(1.)\qquad \varDelta(af+b\varDelta f)$$
$$= a^3\Sigma A_{\varkappa\lambda}(AA)^{\varkappa\lambda}+3a^2b\Sigma B_{\varkappa\lambda}(AA)^{\varkappa\lambda}+3ab^2\Sigma A_{\varkappa\lambda}(BB)^{\varkappa\lambda}+b^3\Sigma B_{\varkappa\lambda}(BB)^{\varkappa\lambda}.$$

Dies ergiebt sich durch Anwendung der *Maclaurin*schen Reihe, oder auch durch directe Auflösung.

Nun ist

$$\Sigma A_{\varkappa\lambda}(AA)^{\varkappa\lambda} = \varDelta f = \delta f,$$

also mit fortwährender Berücksichtigung der Definition von δ, nach welcher $\delta A_{\varkappa\lambda} = B_{\varkappa\lambda}$ ist:

$$\delta^2 f = 3\Sigma B_{\varkappa\lambda}(AA)^{\varkappa\lambda}$$
$$\delta^3 f = 6\Sigma A_{\varkappa\lambda}(BB)^{\varkappa\lambda}+9S.\Sigma A_{\varkappa\lambda}(AA)^{\varkappa\lambda},$$

wenn man beachtet, dafs wegen Theorem 6.

$$\delta B_{\varkappa\lambda} = 3S.A_{\varkappa\lambda}$$

ist; ferner

$$\delta^4 f = 6\Sigma B_{\varkappa\lambda}(BB)^{\varkappa\lambda}+36S.\Sigma B_{\varkappa\lambda}(AA)^{\varkappa\lambda}$$
$$+9.\delta S.\Sigma A_{\varkappa\lambda}(AA)^{\varkappa\lambda}+27S.\Sigma B_{\varkappa\lambda}(AA)^{\varkappa\lambda}.$$

Aus diesen 4 Gleichungen ergeben sich sofort die 4 Coefficienten von a^3, a^2b, ab^2, b^3 in (1.), nämlich

$$\Sigma A_{\varkappa\lambda}(AA)^{\varkappa\lambda} = \delta f$$
$$3\Sigma B_{\varkappa\lambda}(AA)^{\varkappa\lambda} = \delta^2 f$$
$$3\Sigma A_{\varkappa\lambda}(BB)^{\varkappa\lambda} = \tfrac{1}{2}(\delta^3 f-9S.\delta f)$$
$$\Sigma B_{\varkappa\lambda}(BB)^{\varkappa\lambda} = \tfrac{1}{6}(\delta^4 f-9\delta f.\delta S-21S.\delta^2 f),$$

also durch Substitution in (1.):

$$(2.)\qquad \varDelta(af+b\varDelta f)$$
$$= \left(a^3-\frac{9ab^2}{2}S-\tfrac{3}{2}b^3.\delta S\right)\delta f+(a^2b-\tfrac{7}{2}Sb^3)\delta^2 f+\tfrac{1}{2}ab^2\delta^3 f+\frac{b^3}{6}\delta^4 f.$$

Die Werthe von δf, $\delta^2 f$, $\delta^3 f$, $\delta^4 f$ sind aber:

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

$$(3.)\quad \begin{cases} \delta f = \Delta f, & \S.\,12\ (5.) \\ \delta^2 f = 3S.f, & \S.\,12\ (7.) \\ \delta^3 f = 3f.\delta S + 3S.\Delta f \\ \delta^4 f = 3f.\delta^2 S + 6\Delta f.\delta S + 9S^2 f = f(9S^2 + 3\delta^2 S) + 6\Delta f.\delta S \end{cases}$$

und durch Substitution in (2.)

$$(4.)\quad \Delta(af+b\Delta f)$$
$$= \left(3Sa^2b + 3\frac{\delta S}{2}ab^2 + \left(\frac{\delta^2 S}{2} - 9S^2\right)b^3\right)f + (a^3 - 3Sab^2 - \tfrac{1}{2}\delta S b^3)\Delta f,$$

mithin

$$(5.)\quad \begin{cases} \alpha = 3Sa^2b + 3\frac{\delta S}{2}ab^2 + \left(\frac{\delta^2 S}{2} - 9S^2\right)b^3, \\ \beta = a^3 - 3Sab^2 - \tfrac{1}{2}\delta S b^3, \end{cases}$$

wodurch der *Hesse*sche Satz vollständig erledigt ist.

Da die Coefficienten von a^3, a^2b, ab^2, b^3 in (1.) auch selbständig vorkommen, so will ich noch ihre Werthe, welche durch Substitution von (3.) entstehen, hier hersetzen:

$$(6.)\quad \begin{cases} \Sigma A_{\varkappa\lambda}(AA)^{\varkappa\lambda} = \Delta f \\ \Sigma B_{\varkappa\lambda}(AA)^{\varkappa\lambda} = S.f \\ \Sigma A_{\varkappa\lambda}(BB)^{\varkappa\lambda} = \frac{\delta S}{2} f - S.\Delta f \\ \Sigma B_{\varkappa\lambda}(BB)^{\varkappa\lambda} = \left(\frac{\delta^2 S}{2} - 9S^2\right)f - \frac{\delta S}{2}\Delta f. \end{cases}$$

Die Auswerthung der Constanten δS, $\delta^2 S$ ist zwar sofort ersichtlich, es erfordert aber die ganze Theorie noch eine besondere vereinfachte und gesetzmäfsige Darstellung derselben in expliciter Form, die ich sehr bald geben werde. Ich bemerke nur, dafs in der Folge

$$(7.)\quad \tfrac{1}{4}\delta S = T$$

gesetzt wird, dafs sich ferner

$$(8.)\quad \delta^2 S = 24S^2$$

ergiebt, und dafs sich mit Berücksichtigung hiervon der schliefsliche Werth für $\Delta(af+b\Delta f)$ in

$$(9.)\quad \Delta(af+b\Delta f) = (3Sa^2b + 6Tab^2 + 3S^2b^3)f + (a^3 - 3Sab^2 - 2Tb^3)\Delta f$$

verwandelt.

§. 14.

Der Weg, welcher in diesen Entwicklungen eingeschlagen ist, führt naturgemäfs allmälig zu den wichtigsten der Function f bei- und unterge-

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

ordneten Formen. Es ist in der That im vorigen Paragraph die Entwicklung von δS noch anzugeben, und diese erfolgt durch die nun zu betrachtende *erste zugehörige Form von f.*

Theorem 7.

Wenn man wie in §. 5 *das Produkt der 4 Determinanten:*

$$A, \quad B, \quad C, \quad D$$

des unvollständigen Systemes

$$\begin{matrix} u_1, & u_2, & u_3 \\ v_1, & v_2, & v_3 \\ w_1, & w_2, & w_3 \\ p_1, & p_2, & p_3 \end{matrix}$$

bildet, nämlich

$$ABCD = \Sigma \pm v_1 w_2 p_3 . \Sigma \pm u_1 w_2 p_3 . \Sigma \pm u_1 v_2 p_3 . \Sigma \pm u_1 v_2 w_3$$

und statt der Potenzen und Produkte der dritten Ordnung:

$$v_\varkappa v_\lambda v_\mu, \qquad w_\varkappa w_\lambda w_\mu, \qquad p_\varkappa p_\lambda p_\mu$$

die entsprechenden

$$a_{\varkappa\lambda\mu}$$

substituirt, die Produkte $u_\varkappa u_\lambda u_\mu$ *aber ungeändert läfst, so erhält man eine homogene Function dritter Ordnung der Veränderlichen* u_1, u_2, u_3, *welche eine zugehörige Form von f ist.*

Ferner

Wenn man das totale Differential der ersten Invariante S in Bezug auf die Gröfsen $a_{\varkappa\lambda\mu}$ *bildet und statt der Incremente die entsprechenden Potenzen und Producte dritter Ordnung:*

$$u_\varkappa u_\lambda u_\mu$$

substituirt, so erhält man dieselbe zugehörige Form multiplicirt mit $\frac{3}{2}$ *).

*) Man kann sich sehr leicht davon überzeugen, dafs die Definitionen der zugehörigen Formen durch partielle Ableitungen der entsprechenden Invarianten, so wichtig sie auch für die Theorie bleiben, doch für wirkliche Auswerthungen unzweckmäfsig sind, weil sie für *specielle* Formen nicht gebraucht werden können. Sind nämlich einzelne Coefficienten von f der Null oder einem andern Zahlenwerthe gleich, so kann man die partiellen Ableitungen nicht anders berechnen, als dafs man zuvor die volle allgemeine Form differentiirt und dann die speciellen Zahlenwerthe substituirt, wodurch der Vortheil der Specialisirung fast gänzlich verloren geht. Dasselbe findet in noch gröfserm Mafse statt, wenn zwischen den Coefficienten von f Relationen existiren.

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

Wegen des zweiten Theiles dieses Theoremes soll die erste zugehörige Form durch

$$S_f(u_1, u_2, u_3)$$

bezeichnet werden; sie ist, wie aus demselben sogleich ersichtlich wird, nicht allein in Bezug auf die Variabeln, sondern auch in Bezug auf die Coefficienten $a_{\varkappa\lambda\mu}$ homogen und von der dritten Ordnung.

Da der erste Theil des Theoremes einerseits wie in §. 5 die Gültigkeit der Gleichung:

$$(1.) \qquad S'_f(U_1, U_2, U_3) = r^4 . S_f(u_1, u_2, u_3)$$

sofort darthut, andrerseits zur expliciten Darstellung derselben sofort führt, so will ich zunächst die Uebereinstimmung beider Definitionen beweisen, und dann die fernern Entwicklungen an die erste Definition knüpfen.

Es gilt die symbolische Gleichung §. 5:

$$6S = A.B.C.D,$$

daher auch in demselben Sinne:

$$6\frac{dS}{da_{\varkappa\lambda\mu}} = \frac{d(ABCD)}{d(u_\varkappa u_\lambda u_\mu)} + \frac{d(ABCD)}{d(v_\varkappa v_\lambda v_\mu)} + \frac{d(ABCD)}{d(w_\varkappa w_\lambda w_\mu)} + \frac{d(ABCD)}{d(p_\varkappa p_\lambda p_\mu)}.$$

Die 4 partiellen Ableitungen werden aber einander gleich, wenn man für die Produkte

$$u_\varkappa u_\lambda u_\mu, \quad v_\varkappa v_\lambda v_\mu, \quad w_\varkappa w_\lambda w_\mu, \quad p_\varkappa p_\lambda p_\mu$$

dieselben Gröfsen $a_{\varkappa\lambda\mu}$ substituirt, also hat man

$$6\frac{dS}{da_{\varkappa\lambda\mu}} = 4\frac{d(ABCD)}{d(u_\varkappa u_\lambda u_\mu)}.$$

Es ist aber $ABCD$ in Bezug auf die Produkte $u_\varkappa u_\lambda u_\mu$ linear, daher wird $\frac{d(ABCD)}{d(u_\varkappa u_\lambda u_\mu)}$ nach dem ersten Theile des 7ten Theorems, gleich dem Coefficienten von $u_\varkappa u_\lambda u_\mu$ in $S_f(u_1, u_2, u_3)$, also ist dieser Coefficient

$$= \tfrac{6}{4}\frac{dS}{da_{\varkappa\lambda\mu}} = \tfrac{3}{2}\frac{dS}{da_{\varkappa\lambda\mu}}$$

und in Folge dessen:

$$S_f(u_1, u_2, u_3) = \tfrac{3}{2}\Sigma! \frac{dS}{da_{\varkappa\lambda\mu}} u_\varkappa u_\lambda u_\mu,$$

was zu beweisen war. Das Zeichen $\Sigma!$ soll andeuten, dafs man nicht in Bezug auf $\varkappa$, λ, μ, sondern in Bezug auf alle von einander verschiedenen Ableitungen von S, also *einfach* summirt.

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

Um nun die Function $S_f(u_1, u_2, u_3)$ nach dem ersten Theile des 7ten Theorems durch die Coefficienten $a_{\varkappa\lambda\mu}$ auszudrücken, hat man, da wegen §. 6 (4.):

$$4ABCD = \Sigma\Sigma(w_\varkappa p_\lambda + w_\lambda p_\varkappa)(ww, pp)^{\varrho\sigma}(u_\varrho v_\sigma + u_\sigma v_\varrho)(uu, vv)^{\varkappa\lambda}$$

ist, und wegen §. 6 (6.)

$$(w_\varkappa p_\lambda + w_\lambda p_\varkappa)(ww, pp)^{\varrho\sigma} = 2(a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho\sigma},$$

die Gleichung:

$$(2.)\qquad 2ABCD = \Sigma\Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho\sigma}(u_\varrho v_\sigma + u_\sigma v_\varrho)(uu, vv)^{\varkappa\lambda},$$

und wenn man die Summation über ϱ, σ ausführt und den Factor 2 auf der linken Seite gegen den auf der rechten Seite entstehenden forthebt:

$$(3.)\qquad ABCD =$$

$$\begin{cases} u_1(\Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{11}(uu, vv)^{\varkappa\lambda}v_1 + \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{12}(uu, vv)^{\varkappa\lambda}v_2 + \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{13}(uu, vv)^{\varkappa\lambda}v_3) \\ + u_2(\Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{12}(uu, vv)^{\varkappa\lambda}v_1 + \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{22}(uu, vv)^{\varkappa\lambda}v_2 + \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{23}(uu, vv)^{\varkappa\lambda}v_3) \\ + u_3(\Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{13}(uu, vv)^{\varkappa\lambda}v_1 + \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{23}(uu, vv)^{\varkappa\lambda}v_2 + \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{33}(uu, vv)^{\varkappa\lambda}v_3). \end{cases}$$

Es ist aber wegen §. 3 (10.) die Vertauschung

$$(4.)\qquad \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho\sigma}(uu, vv)^{\varkappa\lambda} = \Sigma((aa)^{\varrho\sigma}, uu)^{\varkappa\lambda}v_\varkappa v_\lambda$$

erlaubt, wo, um die Bezeichnung zu erläutern, z. B.

$$((aa)^{\varrho\sigma}, uu)^{11} = (a_2a_2)^{\varrho\sigma}u_3^2 + (a_3a_3)^{\varrho\sigma}u_2^2 - 2(a_2a_3)^{\varrho\sigma}u_2u_3$$

ist. Substituirt man nun (4.) in (3.) und setzt

$$v_\varkappa v_\lambda v_\mu = a_{\varkappa\lambda\mu},$$

so entsteht aus (3.):

$$(5.)\ S_f(u_1, u_2, u_3) = \begin{Bmatrix} u_1\Sigma\{((aa)^{11}a_1)^{\varkappa\lambda} + ((aa)^{12}a_2)^{\varkappa\lambda} + ((aa)^{13}a_3)^{\varkappa\lambda}\}u_\varkappa u_\lambda \\ + u_2\Sigma\{((aa)^{12}a_1)^{\varkappa\lambda} + ((aa)^{22}a_2)^{\varkappa\lambda} + ((aa)^{23}a_3)^{\varkappa\lambda}\}u_\varkappa u_\lambda \\ + u_3\Sigma\{((aa)^{13}a_1)^{\varkappa\lambda} + ((aa)^{23}a_2)^{\varkappa\lambda} + ((aa)^{33}a_3)^{\varkappa\lambda}\}u_\varkappa u_\lambda \end{Bmatrix}$$

$$= \Sigma\Sigma((aa)^{\varrho\mu}a_\varrho)^{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda u_\mu$$

in einer Form, die nach den Variabeln geordnet ist, und ein vollständig symmetrisches Gesetz darbietet.

Obwohl ich bald zeigen werde, dafs die in der ersten Darstellung (5.) vorkommenden Summen sich theilweise noch zusammenziehen lassen, so bietet doch diese Darstellung den grofsen Vortheil, *dafs die respective in u_1, u_2, u_3 multiplicirten Summen die mit dem Faktor $\frac{1}{3}$ versehenen Ableitungen von S_f nach u_1, u_2, u_3 sind.* Um dies zu beweisen bemerke man, dafs das Differential von S_f in Bezug auf die Variabeln u_1, u_2, u_3 dadurch gefunden

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

werden kann, dafs man

$$d(ABCD)$$

bildet, und dann die symbolische Substitution vollzieht. Es ist aber

$$d(ABCD) = ACDdB + ABDdC + ABCdD,$$

weil A von u_1, u_2, u_3 unabhängig ist. Die 3 Ausdrücke rechter Hand werden einander gleich, wenn man die Gröfsen $a_{\varkappa\lambda\mu}$ substituirt, daher

$$dS_f(u_1, u_2, u_3) = 3ACDdB,$$

oder

$$dS_f(u_1, u_2, u_3) = 3\Sigma \pm v_1 w_2 p_3 \,\Sigma \pm u_1 v_2 p_3 \,\Sigma \pm u_1 v_2 w_3 \,\Sigma \pm du_1 w_2 p_3.$$

Das Produkt der beiden mittelsten Summen rechts giebt nach §. 6 (3.)

$$\Sigma \pm u_1 v_2 p_3 \,\Sigma \pm u_1 v_2 w_3 = -\tfrac{1}{2}\Sigma(w_\varkappa p_\lambda + w_\lambda p_\varkappa)(uu, vv)^{\varkappa\lambda}$$

und auf ähnliche Weise das Produkt der beiden äufsersten:

$$\Sigma \pm v_1 w_2 p_3 \,\Sigma \pm du_1 w_2 p_3 = -\tfrac{1}{2}\Sigma(v_\sigma du_\varrho + v_\varrho du_\sigma)(ww, pp)^{\varkappa\lambda},$$

also

$$4dS_f(u_1, u_2, u_3) = 3\Sigma\Sigma(w_\varkappa p_\lambda + w_\lambda p_\varkappa)(ww, pp)^{\varrho\sigma}(du_\varrho v_\sigma + du_\sigma v_\varrho)(uu, vv)^{\varkappa\lambda},$$

also analog mit (2.):

$$2dS_f(u_1, u_2, u_3) = 3\Sigma\Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho\sigma}(du_\varrho v_\sigma + du_\sigma v_\varrho)(uu, vv)^{\varkappa\lambda}$$

mit welchem Ausdrucke dieselben weitern Operationen vorzunehmen sind wie mit (2.). Es ergiebt sich aber alsdann das Resultat (5.) mit dem Unterschiede, dafs vor den Summen statt u_1, u_2, u_3 deren Incremente du_1, du_2, du_3 stehen, und dafs die ganze rechte Seite den Factor 3 hat, d. h. es wird

$$dS_f(u_1, u_2, u_3) = 3(du_1\Sigma_1 + du_2\Sigma_2 + du_3\Sigma_3),$$

wenn man der Kürze halber die 3 Summen in (5.) durch Σ_1, Σ_2, Σ_3 bezeichnet, so dafs

$$(6.)\quad \begin{cases} \frac{1}{3}\dfrac{dS_f(u_1, u_2, u_3)}{du_1} = \Sigma_1, \\ \frac{1}{3}\dfrac{dS_f(u_1, u_2, u_3)}{du_2} = \Sigma_2, \\ \frac{1}{3}\dfrac{dS_f(u_1, u_2, u_3)}{du_3} = \Sigma_3. \end{cases}$$

Bezeichnet man die zugehörige Form S_f in entwickelter Gestalt durch

$$S_f(u_1, u_2, u_3) = \Sigma s_{\varkappa\lambda\mu} u_\varkappa u_\lambda u_\mu$$

und setzt fest, dafs

$$s_{\varkappa\lambda\mu} = s_{\varkappa\mu\lambda} = s_{\lambda\varkappa\mu} = s_{\lambda\mu\varkappa} = s_{\mu\varkappa\lambda} = s_{\mu\lambda\varkappa}$$

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

ist, wie bei der Bezeichnung von f, so ist

$$\frac{1}{3}\frac{dS_f(u_1, u_2, u_3)}{du_\mu} = \Sigma s_{\varkappa\lambda\mu} x_\varkappa x_\lambda \quad (\text{§. 6 (5.)}),$$

wo μ constanter Index ist; da aber wegen (6.)

$$\frac{1}{3}\frac{dS_f(u_1, u_2, u_3)}{du_\mu} = \Sigma_\mu = \Sigma\{((aa)^{1\mu}a_1)^{\varkappa\lambda} + ((aa)^{2\mu}a_2)^{\varkappa\lambda} + ((aa)^{3\mu}a_3)^{\varkappa\lambda}\} u_\varkappa u_\lambda$$

ist, so folgt durch Vergleichung:

$$(7.)\qquad s_{\varkappa\lambda\mu} = ((aa)^{1\mu}a_1)^{\varkappa\lambda} + ((aa)^{2\mu}a_2)^{\varkappa\lambda} + ((aa)^{3\mu}a_3)^{\varkappa\lambda},$$

und weil $s_{\varkappa\lambda\mu}$ ungeändert bleibt, wenn man die Indices $\varkappa$, λ, μ mit einander vertauscht, so hat auch die rechte Seite von (7.) *diese Eigenschaft.* Dieser Satz ist sehr schwer a posteriori zu verificiren und deshalb für die Function S_f charakteristisch. Ueberhaupt ist diese gesetzmäfsige Darstellung der Coefficienten $s_{\varkappa\lambda\mu}$ nicht leicht auf einem andern Wege zu erreichen. Sie ist aber besonders wegen des zweiten Theils des 7ten Theorems wichtig, weil man jetzt nach demselben *die partielle Ableitung der Invariante S explicite dargestellt hat,* nämlich:

$$(8.)\quad \begin{cases} \dfrac{dS}{da_{\varkappa\varkappa\varkappa}} = \frac{2}{3}s_{\varkappa\varkappa\varkappa} = ((aa)^{1\varkappa}a_1)^{\varkappa\varkappa} + ((aa)^{2\varkappa}a_2)^{\varkappa\varkappa} + ((aa)^{3\varkappa}a_3)^{\varkappa\varkappa} \\ \dfrac{dS}{da_{\varkappa\varkappa\lambda}} = \frac{2}{3}.3s_{\varkappa\varkappa\lambda} = 2\{((aa)^{1\varkappa}a_1)^{\varkappa\lambda} + ((aa)^{2\varkappa}a_2)^{\varkappa\lambda} + ((aa)^{3\varkappa}a_3)^{\varkappa\lambda}\} \\ \dfrac{dS}{da_{\varkappa\lambda\mu}} = \frac{2}{3}.6s_{\varkappa\lambda\mu} = 4\{((aa)^{1\mu}a_1)^{\varkappa\lambda} + ((aa)^{2\mu}a_2)^{\varkappa\lambda} + ((aa)^{3\mu}a_3)^{\varkappa\lambda}\}, \end{cases}$$

je nachdem alle 3 Indices oder nur 2 einander gleich oder alle von einander verschieden sind. Da die 36 Verbindungen $(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda}$ schon als bekannt vorausgesetzt werden können, so ist hiernach die Berechnung der Differentialquotienten von S leicht auszuführen.

§. 15.

Die Fundamentalgleichungen für die Verbindungen $(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda}$ (§. 6 (8.) (9.)) führen zu einer Eigenschaft der Differentialquotienten von S nach den Gröfsen $a_{\varkappa\lambda\mu}$, welche allen Invarianten gemeinschaftlich ist, und von einem andern Standpunkt a priori entwickelt werden kann.

Theorem 8.

Wenn man in den folgenden 9 linearen Gleichungen

$$(1.)\quad \begin{cases} \Sigma a_{1\varkappa\lambda}s_{1\varkappa\lambda} = 2S, & \Sigma a_{1\varkappa\lambda}s_{2\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma a_{1\varkappa\lambda}s_{3\varkappa\lambda} = 0, \\ \Sigma a_{2\varkappa\lambda}s_{1\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma a_{2\varkappa\lambda}s_{2\varkappa\lambda} = 2S, & \Sigma a_{2\varkappa\lambda}s_{3\varkappa\lambda} = 0, \\ \Sigma a_{3\varkappa\lambda}s_{1\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma a_{3\varkappa\lambda}s_{2\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma a_{3\varkappa\lambda}s_{3\varkappa\lambda} = 2S \end{cases}$$

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

die 10 Gröfsen $s_{\varkappa\lambda\mu}$ als einfache Unbekannte betrachtet, so giebt es immer eine Lösung der Gleichungen, welche durch die partiellen Differentialquotienten von S darstellbar ist, nämlich

$$s_{\varkappa\varkappa\varkappa} = \tfrac{3}{2}\frac{dS}{da_{\varkappa\varkappa\varkappa}}, \qquad 3s_{\varkappa\varkappa\lambda} = \tfrac{3}{2}\frac{dS}{da_{\varkappa\varkappa\lambda}}, \qquad 6s_{\varkappa\lambda\mu} = \tfrac{3}{2}\frac{dS}{da_{\varkappa\lambda\mu}}.$$

Da die Anzahl der Gleichungen um eine geringer ist, als die Anzahl der Unbekannten, so existiren überhaupt nur zwei Lösungen derselben, welche von einander unabhängig sind; die zweite Lösung wird sich ebenfalls im Laufe dieser Untersuchungen ergeben.

Der Beweis des Theorems ist folgender:

Es seien ϱ und σ die constanten Indices über welche nicht summirt wird, so folgt aus der Gleichung (7.) des vorigen Paragraphen:

$$\Sigma\{((aa)^{1\varrho}a_1)^{\varkappa\lambda} + ((aa)^{2\varrho}a_2)^{\varkappa\lambda} + ((aa)^{3\varrho}a_3)^{\varkappa\lambda}\}u_\varkappa u_\lambda = \tfrac{1}{3}\frac{dS_f}{du_\varrho}$$
$$= s_{\varrho 11}u_1^2 + s_{\varrho 22}u_2^2 + s_{\varrho 33}u_3^2 + 2s_{\varrho 23}u_2u_3 + 2s_{\varrho 13}u_1u_3 + 2s_{\varrho 12}u_1u_2,$$

und wenn man statt der Potenzen und Produkte zweiter Ordnung $u_\varkappa u_\lambda$ die entsprechenden $a_{\sigma\varkappa\lambda}$ substituirt,

$$\Sigma s_{\varrho\varkappa\lambda}a_{\sigma\varkappa\lambda} = \Sigma((aa)^{1\varrho}a_1)^{\varkappa\lambda}a_{\sigma\varkappa\lambda} + \Sigma((aa)^{2\varrho}a_2)^{\varkappa\lambda}a_{\sigma\varkappa\lambda} + \Sigma((aa)^{3\varrho}a_3)^{\varkappa\lambda}a_{\sigma\varkappa\lambda}$$

also mit Hülfe des Vertauschungssatzes:

$$\Sigma s_{\varrho\varkappa\lambda}a_{\sigma\varkappa\lambda} = \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{1\varrho}(a_1a_\sigma)^{\varkappa\lambda} + \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{2\varrho}(a_2a_\sigma)^{\varkappa\lambda} + \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{3\varrho}(a_3a_\sigma)^{\varkappa\lambda}.$$

Ist nun ϱ von σ verschieden so sind diese 3 Summen wegen §. 6 (9.) = Null, und ist $\varrho = \sigma$, so ist wegen §. 6 (8.) eine der 3 Summen $= S$, die beiden andern $= \frac{1}{2}S$, mithin

$$(2.)\qquad \Sigma a_{\varrho\varkappa\lambda}s_{\sigma\varkappa\lambda} = 0, \qquad \Sigma a_{\varrho\varkappa\lambda}s_{\varrho\varkappa\lambda} = 2S,$$

wenn ϱ und σ verschieden sind, was zu beweisen war.

§. 16.

Nach §. 14 (5.) ist

$$(1.)\qquad S_f(u_1, u_2, u_3) = \Sigma\Sigma((aa)^{\varrho\mu}a_\varrho)^{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda u_\mu,$$

wo die Summation über alle Werthe 1, 2, 3 für ϱ, $\varkappa$, λ, μ auszudehnen ist. Nach dem Vertauschungssatze ist aber auch

$$(2.)\qquad S_f(u_1, u_2, u_3) = \Sigma\Sigma((a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho\mu}(a_\varrho, uu)^{\varkappa\lambda})u_\mu,$$

und beide Darstellungen zeichnen sich durch eine gewisse Symmetrie aus, die für allgemeine Entwicklungen schätzbar ist.

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

Nichts destoweniger sind diese Formen für specielle Berechnungen bedeutend verkürzbar, indem sie den bei allen Determinanten und Invarianten vorkommenden Relationen genügen. Es gilt hier das folgende Theorem:

Theorem 9.

Wenn man in (1.) die Summation in Bezug auf ϱ unterläfst und $\varrho = 1$, 2 oder 3 setzt, so wird

$$(3.)\quad \Sigma((aa)^{1\mu} a_1)^{\varkappa\lambda} u_\varkappa u_\lambda u_\mu = \Sigma((aa)^{2\mu} a_2)^{\varkappa\lambda} u_\varkappa u_\lambda u_\mu = \Sigma((aa)^{3\mu} a_3)^{\varkappa\lambda} u_\varkappa u_\lambda u_\mu = \tfrac{1}{3} S_f(u_1, u_2, u_3)$$

und

$$(4.)\quad \Sigma((aa)^{\varrho\mu} a_\sigma) u_\varkappa u_\lambda u_\mu = 0,$$

wo ϱ und σ verschiedene aber constante Indices sind.

Um dieses Theorem von dem hier zu Grunde liegenden Principe aus zu beweisen, soll allein das Produkt:

$$B.C.D = -\Sigma u_1 w_2 p_3 \Sigma u_1 v_2 p_3 \Sigma u_1 v_2 w_3$$

ohne A gebildet werden, welches in Bezug auf jedes der Systeme $v_\varkappa$, $w_\varkappa$, $p_\varkappa$ nur von der zweiten Ordnung ist, und dann sollen statt der Potenzen und Produkte zweiter Ordnung:

$v_\varkappa v_\lambda$	die entsprechenden			$a_{1\varkappa\lambda}$
$w_\varkappa w_\lambda$	-	-	-	$a_{2\varkappa\lambda}$
$p_\varkappa p_\lambda$	-	-	-	$a_{3\varkappa\lambda}$

substituirt werden.

Es ist, §. 6 (3.),

$$2CD = -\Sigma(uu, vv)^{\varkappa\lambda}(w_\varkappa p_\lambda + w_\lambda p_\varkappa)$$

oder nach Ausführung der Substitution für $v_\varkappa v_\lambda$

$$(5.)\quad 2CD = -\Sigma(uu, a_1)^{\varkappa\lambda}(w_\varkappa p_\lambda + w_\lambda p_\varkappa).$$

Da

$$B = -\{u_1(w_2 p_3 - w_3 p_2) + u_2(w_3 p_1 - w_1 p_3) + u_3(w_1 p_2 - w_2 p_1)\}$$

ist, und nach Ausführung einer sehr einfachen Multiplication

$$(6.)\quad \begin{cases} (w_2 p_3 - w_3 p_2)(w_\varkappa p_\lambda + w_\lambda p_\varkappa) = (a_\varkappa a_\lambda)^{11} \\ (w_3 p_1 - w_1 p_3)(w_\varkappa p_\lambda + w_\lambda p_\varkappa) = (a_\varkappa a_\lambda)^{12} \\ (w_1 p_2 - w_2 p_1)(w_\varkappa p_\lambda + w_\lambda p_\varkappa) = (a_\varkappa a_\lambda)^{13} \end{cases}$$

wird, nachdem für $w_\varkappa w_\lambda$ und $p_\varkappa p_\lambda$ die Substitution ausgeführt ist, so folgt:

$$(7.)\quad 2BCD = u_1 \Sigma(uu, a_1)^{\varkappa\lambda}(a_\varkappa a_\lambda)^{11} + u_2 \Sigma(uu, a_1)^{\varkappa\lambda}(a_\varkappa a_\lambda)^{12} + u_3 \Sigma(uu, a_1)^{\varkappa\lambda}(a_\varkappa a_\lambda)^{13}$$

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

oder nach dem Vertauschungssatze:

$$2BCD = u_1\Sigma((aa)^{11}a_1)^{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda + u_2\Sigma((aa)^{12}a_1)^{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda + u_3\Sigma((aa)^{13}a_1)^{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda$$
$$= \Sigma((aa)^{1\mu}a_1)^{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda u_\mu.$$

Man ändert das Produkt BCD nicht, wenn man zuerst BD bildet und mit C multiplicirt, oder BC bildet und mit D multiplicirt, im ersten Falle würde sich

$$2BCD = \Sigma((aa)^{2\mu}a_2)^{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda u_\mu,$$

im zweiten

$$2BCD = \Sigma((aa)^{3\mu}a_3)^{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda u_\mu$$

ergeben, mithin ist

$$\Sigma((aa)^{1\mu}a_1)^{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda u_\mu = \Sigma((aa)^{2\mu}a_2)^{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda u_\mu = \Sigma((aa)^{3\mu}a_3)^{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda u_\mu;$$

die Summe dieser 3 Summen ist aber =

$$\Sigma\Sigma((aa)^{\varrho\mu}a_\varrho)^{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda u_\mu = S_f(u_1, u_2, u_3),$$

daher ist jede derselben $= \frac{1}{3}S_f(u_1, u_2, u_3)$ w. z. b. w.

Hätte man statt $v_\varkappa v_\lambda = a_{1\varkappa\lambda}$ zu setzen, was zu Gleichung (5.) führte,

$$v_\varkappa v_\lambda = a_{\varrho\varkappa\lambda}$$

substituirt, wo $\varrho = 2$ oder 3 sein soll, so würde sich auf demselben Wege

$$2BCD = \Sigma((aa)^{1\mu}a_\varrho)^{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda u_\mu$$

ergeben haben; bildet man aber, wenn $\varrho = 3$, zuerst BD und multiplicirt mit C, so würden die (6.) entsprechenden Gleichungen, z. B. die erste:

$$(8.)\quad (v_2p_3 - v_3p_2)(v_\varkappa p_\lambda + v_\lambda p_\varkappa) = v_2v_\varkappa p_3p_\lambda + v_2v_\lambda p_3p_\varkappa - v_3v_\varkappa p_2p_\lambda - v_3v_\lambda p_2p_\varkappa$$
$$= a_{32\varkappa}a_{33\lambda} + a_{32\lambda}a_{33\varkappa} - a_{33\varkappa}a_{32\lambda} - a_{33\lambda}a_{32\varkappa}$$
$$= 0,$$

und ebenso die übrigen; bildet man ferner, wenn $\varrho = 2$, zuerst BC und multiplicirt mit D, so würden sich wieder die (6.) entsprechenden Gleichungen (8.) analog ergeben, daher folgt

$$\Sigma((aa)^{1\mu}a_\varrho)^{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda u_\mu = 0,$$

wenn $\varrho = 2$ oder 3 ist, und überhaupt die Gleichung (4.).

Als Controlle der vorstehenden oder der Gleichung (4.) kann man bemerken, dafs sie durch Substitution von

$$u_\varkappa u_\lambda u_\mu = a_{\varkappa\lambda\mu}$$

in

$$\Sigma((aa)^{\varrho\mu}a_\sigma)^{\varkappa\lambda}a_{\varkappa\lambda\mu} = 0$$

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

oder durch Vertauschung und durch Substitution von 1, 2, 3 für μ in

$$\Sigma(aa)^{\varrho 1}(a_\sigma a_1)^{\varkappa\lambda}+\Sigma(aa)^{\varrho 2}(a_\sigma a_2)^{\varkappa\lambda}+\Sigma(aa)^{\varrho 3}(a_\sigma a_3)^{\varkappa\lambda} = 0$$

übergeht, welche Gleichung wirklich wegen §. 6 (9.) erfüllt ist; doch kann aus (4.) nicht das Verschwinden der einzelnen Summen des vorstehenden Ausdruckes abgeleitet werden.

Man erhält schliefslich noch Relationen zwischen den Bestandtheilen der Function S_f, wenn man die Relationen für S (§. 6 (8.), (9.)) nach den Coefficienten $a_{\varkappa\lambda\mu}$ differentiirt, statt der Incremente die entsprechenden Potenzen und Produkte $u_\varkappa u_\lambda u_\mu$ substituirt und beachtet, dafs zugleich S in $\frac{3}{2}S_f$ übergeht.

Wendet man diese Operation auf S_f selbst an, setzt aber statt der Potenzen und Produkte $u_\varkappa u_\lambda u_\mu$ zuvor die davon verschiedenen $\eta_\varkappa\eta_\lambda\eta_\mu$, so erhält man eine Function der Variabeln u_1, u_2, u_3 und η_1, η_2, η_3, *deren Coefficienten das doppelte der zweiten Ableitungen von S sind,* vorausgesetzt, dafs man den nach der Differentiation sich vorfindenden Zahlenfactor 3 fortläfst; in der That kann man auf eine sehr einfache und gesetzmäfsige Weise diese Differentiation ausführen, wenn man bemerkt, dafs wegen (3.) die Function $\frac{1}{3}S_f$ nach den Coefficienten $a_{1\varkappa\lambda}$ geordnet und differentiirt

$$\Sigma((aa)^{1\mu}uu)^{\varkappa\lambda}da_{1\varkappa\lambda}u_\mu,$$

nach den Coefficienten $a_{2\varkappa\lambda}$ geordnet und differentiirt

$$\Sigma((aa)^{2\mu}uu)^{\varkappa\lambda}da_{2\varkappa\lambda}u_\mu,$$

nach den Coefficienten $a_{3\varkappa\lambda}$ geordnet und differentiirt

$$\Sigma((aa)^{3\mu}uu)^{\varkappa\lambda}da_{3\varkappa\lambda}u_\mu$$

giebt. Bezeichnet man also

$$\tfrac{1}{3}\Sigma\frac{dS_f(u_1,u_2,u_3)}{da_{\varkappa\lambda\tau}}\eta_\varkappa\eta_\lambda\eta_\tau \text{ durch } S_{1f}(u_1,u_2,u_3;\eta_1,\eta_2,\eta_3),$$

so giebt die Summe der vorstehenden Ausdrücke

$$S_{1f}(u_1,u_2,u_3;\eta_1,\eta_2,\eta_3)$$
$$=\Sigma((aa)^{1\mu}uu)^{\varkappa\lambda}\eta_1\eta_\varkappa\eta_\lambda u_\mu+\Sigma((aa)^{2\mu}uu)^{\varkappa\lambda}\eta_2\eta_\varkappa\eta_\lambda u_\mu+\Sigma((aa)^{3\mu}uu)^{\varkappa\lambda}\eta_3\eta_\varkappa\eta_\lambda u_\mu$$

oder

$$(9.)\quad \begin{cases} S_{1f}(u_1,u_2,u_3;\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\Sigma((aa)^{\tau\mu}uu)^{\varkappa\lambda}\eta_\varkappa\eta_\lambda\eta_\tau u_\mu \\ \qquad\qquad = \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{\tau\mu}\eta_\tau u_\mu(\eta\eta,uu)^{\varkappa\lambda}. \end{cases}$$

In dem speciellen Falle, wo die Variabeln η und u einander gleich sind, giebt die letzte Form $S_{1f}=0$, weil $(\eta\eta,uu)^{\varkappa\lambda}=(uu,uu)^{\varkappa\lambda}=0$ wird; man erhält daher den Satz:

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

Wenn man die Invariante S zweimal nach den Gröfsen $a_{\varkappa\lambda\mu}$ differentiirt, und jedesmal statt der Incremente die entsprechenden Potenzen und Produkte $u_\varkappa u_\lambda u_\mu$ substituirt, so entsteht identisch Null.

Die Coefficienten der Form (9.) sind übrigens die ersten Ableitungen der $s_{\varkappa\lambda\mu}$ dividirt durch 3, letztere aber die ersten Ableitungen von S multiplicirt mit $\frac{3}{2}$, also sind die Coefficienten von (9.) wirklich die Hälften der zweiten Ableitungen von S.

Von den zweiten Grundformen der homogenen Functionen dritter Ordnung von drei Veränderlichen.

§. 17.

Aus den Sätzen des §. 2 geht hervor, dafs man durch jede für eine Covariante, zugehörige Form oder Zwischenform gebildete Grundform eine solche auch für die ursprüngliche Function erhält. Geht man insbesondere von denjenigen bekannten Formen aus, welche in Bezug auf die Variabeln von *derselben* Ordnung sind, wie die ursprüngliche Function, so hat man auf diese die Theorie der *ersten* Grundformen nur wörtlich anzuwenden, um neue zu erhalten.

Es läfst sich dieser Satz auch noch dahin erweitern, dafs, wie sogleich ersichtlich ist, jede aus einem Functionensystem gebildete simultane Grundform ebenfalls Grundform der ursprünglichen wird, wenn dasselbe aus der ursprünglichen Form und ihren bereits bekannten bei- und zugeordneten Formen besteht. Man kann denselben daher als zweckmäfsigen Ausgangspunkt für eine weitere Entwickelung der Theorie anwenden, wenngleich nicht zu verkennen ist, dafs Originaldefinitionen auch der zweiten Formen, selbst wenn sie complicirter sind, zur Entwickelung der Uebergänge solcher Formen, welche ganz oder theilweise von einander abhangen, von grofser Wichtigkeit sind. Ich werde die Theorie nach beiden Richtungen verfolgen, und zunächst einen sehr einfachen Satz über die Bildung simultaner Grundformen hervorheben.

Theorem 10.

Wenn Δ_a eine Grundform für die homogene Function f der p^{ten} Ordnung bedeutet, deren Coefficienten durch die Buchstaben a bezeichnet werden, und Δ_{ab} eine simultane Grundform für f und eine zweite homogene Function φ der p^{ten} Ordnung, deren Coefficienten durch b bezeichnet werden, *so kann man immer eine Form* Δ_{ab} ***dadurch erhalten,***

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

dafs man Δ_a nach den Coefficienten a differentiirt und statt der Incremente die entsprechenden b substituirt.

Es folgt hieraus unmittelbar, dafs man die Differentiationen so oft wiederholen kann, als die Ordnung von Δ_a in Bezug auf die Gröfsen a beträgt, wofern Δ_a eine ganze Function ist.

Der Beweis des Satzes ergiebt sich sofort, wenn man bemerkt, dafs die *entsprechende* Grundform für die Function $f+h.\varphi$, wo h eine Constante bedeutet, nämlich Δ_{a+hb}, der Gleichung

$$\Delta'_{a'+hb'} = r^\lambda.\Delta_{a+hb}$$

genügt, wenn der Voraussetzung gemäfs,

$$\Delta'_{a'} = r^\lambda.\Delta_a$$

gesetzt wird. In Folge davon müssen alle Coefficienten der Potenzen von h in der Entwickelung von Δ_{a+hb} *dieselbe* Eigenschaft haben, der Coefficient von h giebt aber die im Theorem bezeichnete Form Δ_{ab}, und die übrigen sind durch die höheren Differentialquotienten darstellbar, wie die *Maclaurin*-sche Reihe lehrt. Es ergiebt sich überdies, dafs der Exponent λ in r^λ für alle diese Grundformen derselbe ist.

§. 18.

Wenn man die beiden Functionen

$$(1.)\quad \begin{cases} f(x_1, x_2, x_3) = \Sigma a_{\varkappa\lambda\mu} x_\varkappa x_\lambda x_\mu \\ \Delta f(x_1, x_2, x_3) = \Sigma b_{\varkappa\lambda\mu} x_\varkappa x_\lambda x_\mu \end{cases}$$

zu Grunde legt, und auf dieselben das 10te Theorem anwendet, d. h. jede Form, die in Beziehung auf f Grundform ist, nach den Gröfsen $a_{\varkappa\lambda\mu}$ differentiirt und statt der Incremente die entsprechenden $b_{\varkappa\lambda\mu}$ substituirt, so ist diese Operation keine andere als die bereits in §. 12 betrachtete, welche dort durch δ bezeichnet wurde. Behält man jetzt diese Bezeichnung bei und bemerkt, dafs wegen §. 11 (1.)

$$\Delta' f(X_1, X_2, X_3) = r^2.\Delta f(x_1, x_2, x_3)$$

ist, also die Coefficienten $b'_{\varkappa\lambda\mu}$ den Factor r^2 mit sich führen, so giebt jede Grundform Δ für f, welche der Gleichung

$$\Delta' = r^\lambda.\Delta$$

genügt, eine neue $\delta\Delta$, für welche die Gleichung:

$$(2.)\quad \delta\Delta' = r^{\lambda+2}.\delta\Delta$$

stattfindet, daher folgt:

Theorem 11.

Wenn man auf die ersten Grundformen: die Invariante S, die Zwischenform Θ, die zugehörige Form S_f und die Covariante Δf, welche

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

den Gleichungen:

$$(3.)\qquad S' = r^4 S,\quad \Theta' = r^2\Theta,\quad S'_f = r^4 S_f,\quad \Delta' f = r^2 \Delta f$$

Genüge leisten, die Operation δ *anwendet, und die Bezeichnungen:*

$$(4.)\qquad T = \tfrac{1}{4}\delta S,\quad H = \tfrac{1}{2}\delta\Theta,\quad T_f = \tfrac{1}{3}\delta S_f$$

einführt, überdies bemerkt, dafs wegen §. 12 (7.)

$$(5.)\qquad \tfrac{1}{3}\delta\Delta f = f.S$$

ist, so entstehen die Grundformen:

T als zweite Invariante,
H als zweite Zwischenform,
T_f als zweite zugehörige Form,
$f.S$ als zweite Covariante,

von denen die letztere abgesehen vom constanten Factor S, die ursprünglich gegebene homogene Function ist, und man erhält:

$$(6.)\qquad T' = r^6.T,\quad H' = r^4.H,\quad T'_f = r^6.T_f,\quad f'.S' = r^4.f.S,$$

wo die Exponenten von r überall um zwei Einheiten höher sind, als in den für die ersten Grundformen stattfindenden Gleichungen (3.).

Die Ausführung der Differentiation δ ist in allen Fällen bereits im Vorstehenden gegeben, so dafs man die explicite Form sogleich hinschreiben kann; bemerkt man nämlich, dafs nach §. 14 (8.):

$$\tfrac{3}{2}\frac{dS}{da_{\varkappa\lambda\mu}} = 6 s_{\varkappa\lambda\mu},$$
$$\tfrac{3}{2}\frac{dS}{da_{\varkappa\lambda\lambda}} = 3 s_{\varkappa\lambda\lambda},$$
$$\tfrac{3}{2}\frac{dS}{da_{\varkappa\varkappa\varkappa}} = s_{\varkappa\varkappa\varkappa},$$

ist, so folgt

$$\tfrac{3}{2}\delta S = \Sigma s_{\varkappa\lambda\mu} b_{\varkappa\lambda\mu},$$

mithin:

$$(7.)\qquad T = \tfrac{1}{4}\delta S = \tfrac{1}{6}\Sigma s_{\varkappa\lambda\mu} b_{\varkappa\lambda\mu}.$$

Man erhält also $6T$, wenn man in S_f, statt der Produkte $u_\varkappa u_\lambda u_\mu$ die entsprechenden $b_{\varkappa\lambda\mu}$ substituirt, folglich wegen §. 16 (1.):

$$(8.)\qquad 6T = \Sigma\Sigma((aa)^{\varrho\sigma} a_\varrho)^{\varkappa\lambda} b_{\sigma\varkappa\lambda} = \Sigma\Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho\sigma}(a_\varrho b_\sigma)^{\varkappa\lambda}.$$

Da ferner nach §. 16 (9.)

$$S_{1f} = \Sigma!\tfrac{1}{3}\frac{dS_f}{da_{\varkappa\lambda\tau|}}\eta_\varkappa\eta_\lambda\eta_\tau = \Sigma\Sigma((aa)^{\tau\mu}uu)^{\varkappa\lambda}\eta_\varkappa\eta_\lambda\eta_\tau u_\mu$$

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

ist, so ergiebt sich $\frac{1}{3}\delta S_f$, wenn man in der vorstehenden Gleichung statt $\eta_\varkappa \eta_\lambda \eta_\tau$ die entsprechenden $b_{\varkappa\lambda\tau}$ substituirt, also

$$T_f = \tfrac{1}{3}\delta S_f = \Sigma\Sigma((a\,a)^{\tau\mu} uu)^{\varkappa\lambda} b_{\varkappa\lambda\tau}.u_\mu$$

oder

$$(9.) \qquad T_f(u_1, u_2, u_3) = \Sigma\Sigma((a\,a)^{\tau\mu} b_\tau)^{\varkappa\lambda} u_\varkappa u_\lambda u_\mu.$$

Man beachte, dafs sowohl bei (8.) als (9.) die *directen* Differentiationen die dreifachen Resultate in *nicht* zusammengezogener Form liefern würden, was besonders hervortritt, wenn man (9.) mit der Darstellung §. 16 (1.) von S_f vergleicht, die nach der gegenwärtigen Indicesbezeichnung

$$S_f = \Sigma\Sigma((a\,a)^{\tau\mu} \overline{a_\tau})^{\varkappa\lambda} u_\varkappa u_\lambda u_\mu$$

geschrieben werden kann. Es zeigt nämlich (9.), dafs man nur in Bezug auf die durch $\overline{a_\tau}$ angedeuteten Gröfsen $a_{\varrho\sigma\tau}$ zu differentiiren hat, um $\frac{1}{3}dS_f$ zu erhalten.

Die Darstellung der zweiten Zwischenform ist sehr einfach; ich erinnere zu diesem Ende, dafs (§. 9 (4.)) und (§. 12 (1.))

$$(10.) \qquad \begin{cases} \frac{1}{6}\dfrac{d^2 f}{dx_\varkappa dx_\lambda} = a_{1\varkappa\lambda}x_1 + a_{2\varkappa\lambda}x_2 + a_{3\varkappa\lambda}x_3 = A_{\varkappa\lambda}, \\ \frac{1}{6}\dfrac{d^2 \varDelta f}{dx_\varkappa dx_\lambda} = b_{1\varkappa\lambda}x_1 + b_{2\varkappa\lambda}x_2 + b_{3\varkappa\lambda}x_3 = B_{\varkappa\lambda} \end{cases}$$

gesetzt war, und dafs

$$\delta A_{\varkappa\lambda} = B_{\varkappa\lambda}$$

ist. Hieraus folgt, da $\Theta = \Sigma u_\varkappa u_\lambda (AA)^{\varkappa\lambda}$ (§. 9 (6.)) ist:

$$\begin{aligned} \delta\Theta = \delta\Sigma u_\varkappa u_\lambda (AA)^{\varkappa\lambda} &= \Sigma u_\varkappa u_\lambda (AB)^{\varkappa\lambda} + \Sigma u_\varkappa u_\lambda (BA)^{\varkappa\lambda} \\ &= 2\Sigma u_\varkappa u_\lambda (AB)^{\varkappa\lambda}, \end{aligned}$$

folglich

$$(11.) \qquad H = \tfrac{1}{2}\delta\Theta = \Sigma u_\varkappa u_\lambda (AB)^{\varkappa\lambda}$$

oder auch mit Berücksichtigung von (10.):

$$(11.^*) \qquad H = \Sigma\Sigma u_\varkappa u_\lambda (a_\varrho b_\sigma)^{\varkappa\lambda} x_\varrho x_\sigma.$$

Ich werde jetzt die verkürzten Darstellungen der Invariante T und zugehörigen Form T_f geben und die Grundgesetze dieser Formen analog mit der Theorie der ersten Grundformen entwickeln und bemerke hierzu, dafs wiederum die Zwischenform H den Ausgangspunkt bildet.

§. 19.

Die Zwischenform H läfst sich durch folgende ursprüngliche Definition erhalten:

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

Theorem 12.

Wenn man

$$(1.)\quad \begin{cases} v = v_1x_1+v_2x_2+v_3x_3 \\ w = w_1x_1+w_2x_2+w_3x_3 \\ p = p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3 \\ \vartheta = \vartheta_1x_1+\vartheta_2x_2+\vartheta_3x_3 \end{cases}$$

setzt, so ist immer die zweite Zwischenform H durch

$$(2.)\qquad H = \Sigma\pm u_1v_2p_3\,\Sigma\pm u_1v_2w_3(\Sigma\pm\vartheta_1w_2p_3)^2 v.\vartheta,$$

oder irgend einen analogen durch Vertauschung der 4 Systeme v, w, p, ϑ gebildeten Ausdruck darstellbar, wenn nach Ausführung der Multiplication:

$$v_\varkappa v_\lambda v_\mu = a_{\varkappa\lambda\mu};\quad w_\varkappa w_\lambda w_\mu = a_{\varkappa\lambda\mu};\quad p_\varkappa p_\lambda p_\mu = a_{\varkappa\lambda\mu};\quad \vartheta_\varkappa\vartheta_\lambda\vartheta_\mu = a_{\varkappa\lambda\mu}$$

gesetzt wird.

Da alle 4 Systeme durch *dieselben* $a_{\varkappa\lambda\mu}$ ersetzt werden, so giebt die Vertauschung in (2.) wirklich immer dasselbe Resultat. Der Beweis des Theorems selbst ist sehr einfach: Man hat

$$\begin{aligned} \Sigma\pm u_1v_2p_3\,\Sigma\pm u_1v_2w_3 &= \tfrac{1}{2}\Sigma(uu,vv)^{\varkappa\lambda}(w_\varkappa p_\lambda+w_\lambda p_\varkappa) \\ (\Sigma\pm\vartheta_1w_2p_3)^2 &= \Sigma(pp,ww)^{\mu\tau}\vartheta_\mu\vartheta_\tau \\ v\vartheta &= \Sigma\vartheta_\varrho v_\sigma x_\varrho x_\sigma, \end{aligned}$$

also multiplicirt:

$$\begin{aligned} H &= \tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma\Sigma(uu,vv)^{\varkappa\lambda}(p_\varkappa w_\lambda+p_\lambda w_\varkappa)(pp,ww)^{\mu\tau}\vartheta_\mu\vartheta_\tau\vartheta_\varrho v_\sigma x_\varrho x_\sigma, \\ &= \Sigma\Sigma\Sigma(uu,vv)^{\varkappa\lambda}(a_\varkappa a_\lambda)^{\mu\tau}a_{\varrho\mu\tau}v_\sigma x_\varrho x_\sigma \quad (\S.\,6\ (6.)) \\ &= \Sigma\Sigma\Sigma(uu,vv)^{\varkappa\lambda}b_{\varkappa\lambda\varrho}v_\sigma x_\varrho x_\sigma \quad (\S.\,11\ (4.)). \end{aligned}$$

Die Ausführung der Summation über ϱ allein giebt wegen §. 18 (10.)

$$\begin{aligned} H &= \Sigma\Sigma(uu,vv)^{\varkappa\lambda}B_{\varkappa\lambda}v_\sigma x_\sigma = \Sigma\Sigma(uu,B)^{\varkappa\lambda}v_\varkappa v_\lambda v_\sigma x_\sigma \\ &= \Sigma\Sigma(uu,B)^{\varkappa\lambda}a_{\varkappa\lambda\sigma}x_\sigma \end{aligned}$$

und wenn man noch über σ summirt und wieder §. 18 (10.) benutzt,

$$H = \Sigma(uu,B)^{\varkappa\lambda}A_{\varkappa\lambda} = \Sigma(AB)^{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda,$$

was zu beweisen war.

§. 20.

Man kann die Determinantengleichung §. 7 (2.)

$$(1.)\quad \begin{cases} -ABCD\vartheta^2 = ABwp(\Sigma\pm\vartheta_1u_2v_3)^2+CDuv(\Sigma\pm\vartheta_1w_2p_3)^2 \\ \qquad\qquad +ACvp(\Sigma\pm\vartheta_1u_2w_3)^2+BDuw(\Sigma\pm\vartheta_1v_2p_3)^2 \\ \qquad\qquad +ADvw(\Sigma\pm\vartheta_1u_2p_3)^2+BCup(\Sigma\pm\vartheta_1v_2w_3)^2 \end{cases}$$

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

dazu benutzen um eine für die Folge *fundamentale* Umformung der Coefficienten

$$(AB)^{\varkappa\lambda}$$

von H zu finden.

Man bemerke zuvörderst, dafs (§. 14 Theorem 7.)

$$ABCD = S_f(u_1, u_2, u_3)$$

wird, wenn $v_\varkappa v_\lambda v_\mu = a_{\varkappa\lambda\mu}$, $w_\varkappa w_\lambda w_\mu = a_{\varkappa\lambda\mu}$, $p_\varkappa p_\lambda p_\mu = a_{\varkappa\lambda\mu}$ gesetzt wird.

Differentiirt man

$$A.B.C.D$$

nach den Gröfsen u_1, u_2, u_3 *und setzt statt der Incremente* ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3, *so ergiebt sich daher, wenn durch d diese Differentiation angedeutet wird:*

$$d(A.B.C.D).\vartheta^2 = \left(\frac{dS_f}{du_1}\vartheta_1 + \frac{dS_f}{du_2}\vartheta_2 + \frac{dS_f}{du_3}\vartheta_3\right)\vartheta^2$$

und wenn man $\vartheta_\varkappa \vartheta_\lambda \vartheta_\mu = a_{\varkappa\lambda\mu}$ *setzt:*

$$d(A.B.C.D)\vartheta^2 = \frac{dS_f}{du_1}\Sigma a_{1\varkappa\lambda}x_\varkappa x_\lambda + \frac{dS_f}{du_2}\Sigma a_{2\varkappa\lambda}x_\varkappa x_\lambda + \frac{dS_f}{du_3}\Sigma a_{3\varkappa\lambda}x_\varkappa x_\lambda$$

oder

$$d(A.B.C.D).\vartheta^2 = \tfrac{1}{3}\left\{\frac{dS_f}{du_1}\frac{df}{dx_1} + \frac{dS_f}{du_2}\frac{df}{dx_2} + \frac{dS_f}{du_3}\frac{df}{dx_3}\right\}.$$

Führt man dieselbe Operation auf der rechten Seite von (1.) aus, so ergeben sich 4 verschiedene Gruppen, von denen ich immer je ein Glied hersetzen will, nämlich:

$$\begin{aligned}
(\alpha) &= AdB.w.p(\Sigma\pm\vartheta_1 u_2 v_3)^2\\
(\beta) &= 2AB.w.p(\Sigma\pm\vartheta_1 u_2 v_3)(\Sigma\pm\vartheta_1\vartheta_2 v_3)\\
(\gamma) &= (CdD+DdC).u.v(\Sigma\pm\vartheta_1 w_2 p_3)^2\\
(\delta) &= CD\vartheta v(\Sigma\pm\vartheta_1 w_2 p_3)^2.
\end{aligned}$$

Da jedes Glied dreifach vorkommt, und durch die Vertauschungen von v, w, p erhalten wird, überdies für die Producte immer *dieselbe* Substitution

$$v_\varkappa v_\lambda v_\mu = a_{\varkappa\lambda\mu},\quad w_\varkappa w_\lambda w_\mu = a_{\varkappa\lambda\mu},\quad p_\varkappa p_\lambda p_\mu = a_{\varkappa\lambda\mu},$$

auszuführen ist, so werden diese drei Glieder immer einander gleich, daher ist zuvörderst

$$-\tfrac{1}{3}\left(\frac{dS_f}{du_1}\frac{df}{dx_1} + \frac{dS_f}{du_2}\frac{df}{dx_2} + \frac{dS_f}{du_3}\frac{df}{dx_3}\right) = 3(\alpha)+3(\beta)+3(\gamma)+3(\delta).$$

Aber aus Ansicht von (β) ergiebt sich sogleich

$$(\beta) = 0 \text{ weil } \Sigma\pm\vartheta_1\vartheta_2 v_3 = 0$$

ist, ferner wird

$$(\delta) = -H,$$

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

nach der Definition (Theorem 12 (2.)); daher ist

$$\tfrac{1}{3}\left(\frac{dS_f}{du_1}\frac{df}{dx_1}+\frac{dS_f}{du_2}\frac{df}{dx_2}+\frac{dS_f}{du_3}\frac{df}{dx_3}\right)+3(\alpha)+3(\gamma) = 3.H$$

eine Umformungsgleichung der zweiten Zwischenform. Nun folgt aber auch leicht, dafs

$$(\gamma) = 0$$

ist, denn es ist ausführlich geschrieben:

$$\begin{aligned}(\gamma) &= (CdD+DdC)u.v(\Sigma\pm\vartheta_1 w_2 p_3)^2\\ &= -\{\Sigma\pm u_1v_2p_3\,\Sigma\pm\vartheta_1v_2w_3+\Sigma\pm u_1v_2w_3\,\Sigma\pm\vartheta_1v_2p_3\}\,u.v.(\Sigma\pm\vartheta_1w_2p_3)^2\end{aligned}$$

und nach der Substitution der $a_{\varkappa\lambda\mu}$ ist es gleichgültig ob man hierin ϑ mit w oder mit p vertauscht, daher ist auch

$$(\gamma)=-\tfrac{1}{3}\left\{\begin{array}{l}\Sigma\pm u_1v_2p_3\,\Sigma\pm\vartheta_1v_2w_3+\Sigma\pm u_1v_2w_3\,\Sigma\pm\vartheta_1v_2p_3\\ +\Sigma\pm u_1v_2p_3\,\Sigma\pm w_1v_2\vartheta_3+\Sigma\pm u_1v_2\vartheta_3\,\Sigma\pm w_1v_2p_3\\ +\Sigma\pm u_1v_2\vartheta_3\,\Sigma\pm p_1v_2w_3+\Sigma\pm u_1v_2w_3\,\Sigma\pm p_1v_2\vartheta_3\end{array}\right\}uv(\Sigma\pm\vartheta_1w_2p_3)^2;$$

da aber $\Sigma\pm\vartheta_1v_2w_3=-\Sigma\pm w_1v_2\vartheta_3$ u. s. w. ist, so heben sich die 6 Glieder der Parenthese gegenseitig auf, und es ist $(\gamma)=0$; somit bleibt:

$$(2.)\qquad \tfrac{1}{3}\left(\frac{dS_f}{du_1}\frac{df}{dx_1}+\frac{dS_f}{du_2}\frac{df}{dx_2}+\frac{dS_f}{du_3}\frac{df}{dx_3}\right)-3(\alpha) = 3H.$$

Es ist endlich ausführlich geschrieben:

$$\begin{aligned}-(\alpha) &= \Sigma\pm v_1w_2p_3\,\Sigma\pm\vartheta_1w_2p_3(\Sigma\pm\vartheta_1u_2v_3)^2wp\\ &= \tfrac{1}{2}\Sigma(ww,pp)^{\varkappa\lambda}(v_\varkappa\vartheta_\lambda+v_\lambda\vartheta_\varkappa).\Sigma(\vartheta\vartheta,vv)^{\mu\tau}u_\mu u_\tau.\tfrac{1}{2}\Sigma(w_\varrho p_\sigma+w_\sigma p_\varrho)x_\varrho x_\sigma\\ &= \tfrac{1}{4}\Sigma\Sigma\Sigma\Sigma(ww,pp)^{\varkappa\lambda}(w_\varrho p_\sigma+w_\sigma p_\varrho)(\vartheta\vartheta,vv)^{\mu\tau}(v_\varkappa\vartheta_\lambda+v_\lambda\vartheta_\varkappa)u_\mu u_\tau x_\varrho x_\sigma\\ &= \Sigma\Sigma\Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda}(a_\varkappa a_\lambda)^{\mu\tau}u_\mu u_\tau x_\varrho x_\sigma\\ &= \Sigma\Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda}(a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho\sigma}u_\varrho u_\sigma x_\varrho x_\sigma,\end{aligned}$$

indem man nur die Glieder zu berücksichtigen hat, in welchen $\mu,\tau=\varrho,\sigma$ ist, weil nach dem Fundamentaltheorem für S

$$\Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda}(a_\varkappa a_\lambda)^{\mu\tau} = 0$$

ist, wenn ϱ, σ und μ, τ von einander verschiedene, constante Indices sind.

Nach dem andern Theile des citirten Theorems ist aber

$$2\Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda}(a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho\sigma} = S \quad \text{und}$$

$$\Sigma(a_\varrho a_\varrho)^{\varkappa\lambda}(a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho\varrho} = S,$$

daher wird

$$-(\alpha) = S\Sigma u_\varrho u_\sigma x_\varrho x_\sigma = S(u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3)^2$$

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

und die Gleichung (2.) geht über in:

$$(3.)\qquad H = \tfrac{1}{9}\left(\frac{dS_f}{du_1}\frac{df}{dx_1}+\frac{dS_f}{du_2}\frac{df}{dx_2}+\frac{dS_f}{du_3}\frac{df}{dx_3}\right) - S(u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3)^2,$$

welche die schliefsliche Transformation enthält.

Setzt man noch die Werthe von

$$\tfrac{1}{3}\frac{dS_f}{du_1} = \Sigma s_{1\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda,\quad \tfrac{1}{3}\frac{dS_f}{du_2} = \Sigma s_{2\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda,\quad \tfrac{1}{3}\frac{dS_f}{du_3} = \Sigma s_{3\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda$$

ein, so ergiebt sich

$$H = \Sigma(AB)^{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda = \tfrac{1}{3}\left(\frac{df}{dx_1}\Sigma s_{1\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda+\frac{df}{dx_2}\Sigma s_{2\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda+\frac{df}{dx_3}\Sigma s_{3\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda\right)$$
$$- S(u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3)^2,$$

also

$$(4.)\qquad (AB)^{\varkappa\lambda} = \tfrac{1}{3}\left(\frac{df}{dx_1}s_{1\varkappa\lambda}+\frac{df}{dx_2}s_{2\varkappa\lambda}+\frac{df}{dx_3}s_{3\varkappa\lambda}\right) - Sx_\varkappa x_\lambda.$$

Da wegen (11.*) (§. 18)

$$(AB)^{\varkappa\lambda} = \tfrac{1}{2}\Sigma(a_\varrho b_\sigma + a_\sigma b_\varrho)^{\varkappa\lambda}x_\varrho x_\sigma$$

ist, wenn der Kürze halber $(a_\varrho b_\sigma + a_\sigma b_\varrho)^{\varkappa\lambda}$ statt $(a_\varrho b_\sigma)^{\varkappa\lambda} + (a_\sigma b_\varrho)^{\varkappa\lambda}$ geschrieben wird, ferner

$$\frac{df}{dx_1} = \Sigma a_{1\varrho\sigma}x_\varrho x_\sigma,\quad \frac{df}{dx_2} = \Sigma a_{2\varrho\sigma}x_\varrho x_\sigma,\quad \frac{df}{dx_3} = \Sigma a_{3\varrho\sigma}x_\varrho x_\sigma,$$

also

$$\tfrac{1}{3}\left(\frac{df}{dx_1}s_{1\varkappa\lambda}+\frac{df}{dx_2}s_{2\varkappa\lambda}+\frac{df}{dx_3}s_{3\varkappa\lambda}\right) = \Sigma x_\varrho x_\sigma(a_{1\varrho\sigma}s_{1\varkappa\lambda}+a_{2\varrho\sigma}s_{2\varkappa\lambda}+a_{3\varrho\sigma}s_{3\varkappa\lambda})$$

ist, so folgt:

Theorem 13.

Die Summe der Produkte der Coefficienten irgend einer zweiten Ableitung $\tfrac{1}{6}\dfrac{d^2f}{dx_\varrho dx_\sigma}$ *von* f *mit den entsprechenden einer zweiten Ableitung* $\tfrac{1}{6}\dfrac{d^2S_f}{du_\varkappa du_\lambda}$ *von* S_f, *nämlich:*

$$a_{1\varrho\sigma}s_{1\varkappa\lambda}+a_{2\varrho\sigma}s_{2\varkappa\lambda}+a_{3\varrho\sigma}s_{3\varkappa\lambda} = \tfrac{3}{2}\left(a_{1\varrho\sigma}\frac{dS}{da_{1\varkappa\lambda}}+a_{2\varrho\sigma}\frac{dS}{da_{2\varkappa\lambda}}+a_{3\varrho\sigma}\frac{dS}{da_{3\varkappa\lambda}}\right)$$

giebt, wenn ϱ, σ *von* $\varkappa$, λ *verschieden sind,*

$$(5.)\qquad a_{1\varrho\sigma}s_{1\varkappa\lambda}+a_{2\varrho\sigma}s_{2\varkappa\lambda}+a_{3\varrho\sigma}s_{3\varkappa\lambda} = \tfrac{1}{2}(a_\varrho b_\sigma + a_\sigma b_\varrho)^{\varkappa\lambda},$$

und so oft $\varrho, \sigma = \varkappa, \lambda$ *ist,*

$$(6.)\qquad a_{1\varkappa\lambda}s_{1\varkappa\lambda}+a_{2\varkappa\lambda}s_{2\varkappa\lambda}+a_{3\varkappa\lambda}s_{3\varkappa\lambda} = \tfrac{1}{2}(a_\varkappa b_\lambda + a_\lambda b_\varkappa)^{\varkappa\lambda} + S.$$

§. 21.

Ich werde jetzt die *ursprüngliche* Definition der Invariante T geben, und aus derselben eine doppelte Darstellung der zweiten zugehörigen Form T_f entwickeln.

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

Theorem 14.

Wenn man in den 3 Determinanten

$$A = \Sigma \pm v_1 w_2 p_3, \quad B = -\Sigma \pm u_1 w_2 p_3, \quad C = \Sigma \pm u_1 v_2 p_3$$

das ihnen gemeinschaftliche System

$$p_1, \quad p_2, \quad p_3$$

der Reihe nach durch

$$\begin{matrix} \eta_1, & \eta_2, & \eta_3 \\ \zeta_1, & \zeta_2, & \zeta_3 \\ \vartheta_1, & \vartheta_2, & \vartheta_3 \end{matrix}$$

ersetzt, und die Ergebnisse respective durch

$$\begin{matrix} A_\eta, & B_\eta, & C_\eta \\ A_\zeta, & B_\zeta, & C_\zeta \\ A_\vartheta, & B_\vartheta, & C_\vartheta \end{matrix}$$

bezeichnet, ferner wie früher

$$D = -\Sigma \pm u_1 v_2 w_3$$

setzt, so ist

$$(1.) \qquad 6T = A_\eta B_\zeta C_\vartheta D(\Sigma \pm \eta_1 \vartheta_2 \zeta_3)^2$$

oder auch gleich einem der 6 andern Ausdrücke, welche durch Vertauschung von η, ζ, ϑ aus dem vorstehenden hervorgehen, wenn man jedesmal nach Ausführung der Multiplication

$$u_\varkappa u_\lambda u_\mu = a_{\varkappa\lambda\mu}, \quad v_\varkappa v_\lambda v_\mu = a_{\varkappa\lambda\mu}, \quad w_\varkappa w_\lambda w_\mu = a_{\varkappa\lambda\mu},$$
$$\eta_\varkappa \eta_\lambda \eta_\mu = a_{\varkappa\lambda\mu}, \quad \zeta_\varkappa \zeta_\lambda \zeta_\mu = a_{\varkappa\lambda\mu}, \quad \vartheta_\varkappa \vartheta_\lambda \vartheta_\mu = a_{\varkappa\lambda\mu}$$

setzt.

Wiewohl sich die Ausführung der Multiplication aus den Entwicklungen des vorigen Paragraphen ergiebt, wenn man dort die Variabeln x_1, x_2, x_3 durch die partiellen Determinanten

$$x_1 = \overline{\eta_2 \zeta_3}, \quad x_2 = \overline{\eta_3 \zeta_1}, \quad x_3 = \overline{\eta_1 \zeta_2}$$

ersetzt, so will ich dieselbe dennoch vollständig geben, um dadurch ein allgemeineres Resultat ersichtlich zu machen, welches in der Folge gebraucht wird.

Man bilde

$$k = A_\eta (B_\zeta C_\vartheta + B_\vartheta C_\zeta) D(\Sigma \pm \eta_1 \vartheta_2 \zeta_3)^2$$

indem man den Vertauschungsausdruck von ϑ mit ζ hinzufügt; dann mufs erwiesen werden, dafs

$$6T = \tfrac{1}{2} k$$

ist.

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

Nun ist nach der Definition:

$$-\{B_\zeta C_\vartheta + B_\vartheta C_\zeta\} = \Sigma \pm u_1 w_2 \zeta_3 \Sigma \pm u_1 v_2 \vartheta_3 + \Sigma \pm u_1 w_2 \vartheta_3 \Sigma \pm u_1 v_2 \zeta_3$$

was offenbar aus

$$\Sigma \pm u_1 v_2 \zeta_3 \Sigma \pm u_1 v_2 \vartheta_3 = \tfrac{1}{2}\Sigma (uu, vv)^{\varrho\sigma} (\vartheta_\varrho \zeta_\sigma + \vartheta_\sigma \zeta_\varrho)$$

entsteht, wenn man letztere Gleichung nach v_1, v_2, v_3 differentiirt und statt der Incremente w_1, w_2, w_3 substituirt, daher wird

$$(2.)\qquad -\{B_\zeta C_\vartheta + B_\vartheta C_\zeta\} = \tfrac{1}{2}\Sigma (uu, (vw+wv))^{\varrho\sigma} (\vartheta_\varrho \zeta_\sigma + \vartheta_\sigma \zeta_\varrho),$$

ferner

$$(3.)\qquad -A_\eta . D = \Sigma \pm v_1 w_2 \eta_3 \Sigma \pm v_1 w_2 u_3 = \tfrac{1}{2}\Sigma (\eta_\mu u_\tau + \eta_\tau u_\mu)(vv, ww)^{\mu\tau}$$

$$(4.)\qquad (\Sigma \pm \eta_1 \vartheta_2 \zeta_3)^2 = \Sigma \eta_\varkappa \eta_\lambda (\vartheta\vartheta, \zeta\zeta)^{\varkappa\lambda};$$

also nach Multiplication der 3 Ergebnisse:

$$k = \tfrac{1}{4}\Sigma\Sigma\Sigma (uu, vw+wv)^{\varrho\sigma} (\vartheta_\varrho \zeta_\sigma + \vartheta_\sigma \zeta_\varrho)(\vartheta\vartheta, \zeta\zeta)^{\varkappa\lambda} \eta_\varkappa \eta_\lambda (\eta_\mu u_\tau + \eta_\tau u_\mu)(vv, ww)^{\mu\tau},$$

und wenn man zunächst für $\vartheta\vartheta\vartheta$ und $\zeta\zeta\zeta$ die Substitution ausführt:

$$k = \tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma\Sigma (uu, vw+wv)^{\varrho\sigma} (a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda} \eta_\varkappa \eta_\lambda (\eta_\mu u_\tau + \eta_\tau u_\mu)(vv, ww)^{\mu\tau}.$$

Für $\eta\eta\eta$, uuu soll die Substitution zunächst nicht ausgeführt werden, man kann aber, da μ mit τ vertauscht werden darf, ohne dafs der Ausdruck sich ändert:

$$k = \Sigma\Sigma\Sigma (uu, (aa)^{\varkappa\lambda})^{\varrho\sigma} (v_\varrho w_\sigma + v_\sigma w_\varrho)(vv, ww)^{\mu\tau} \eta_\varkappa \eta_\lambda \eta_\mu u_\tau$$

schreiben, wenn man überdies den Vertauschungssatz anwendet, so dafs man nach Ausführung der Substitution für vvv, www:

$$(5.)\qquad k = 2\Sigma\Sigma\Sigma (uu, (aa)^{\varkappa\lambda})^{\varrho\sigma} (a_\varrho a_\sigma)^{\mu\tau} \eta_\varkappa \eta_\lambda \eta_\mu u_\tau$$

erhält, oder

$$(6.)\qquad \tfrac{1}{2}k = \Sigma\Sigma\Sigma ((aa)^{\mu\tau} (aa)^{\varkappa\lambda})^{\varrho\sigma} u_\varrho u_\sigma u_\tau \eta_\varkappa \eta_\lambda \eta_\mu .$$

Man bemerke, dafs bei dieser Entwicklung weder eine Vertauschung der Systeme $\eta\eta\eta$ mit $\vartheta\vartheta\vartheta$ und $\zeta\zeta\zeta$ noch der Systeme uuu mit vvv und www vorausgesetzt ist, *so dafs sie auch dann noch gültig bleibt, wenn uuu und $\eta\eta\eta$ ganz beliebige Gröfsen bedeuten.* Ferner beachte man, dafs in der Gleichung (3.) das System u_1, u_2, u_3 durch jedes andere ersetzt werden kann, also auch durch die Differentiale:

$$du_1, \qquad du_2, \qquad du_3,$$

ohne dafs bei der Zusammenziehung ein anderer Effect entsteht, als dafs

$$(7.)\qquad \tfrac{1}{2}k = \Sigma\Sigma\Sigma ((aa)^{\mu\tau} (aa)^{\varkappa\lambda})^{\varrho\sigma} u_\varrho u_\sigma du_\tau \eta_\varkappa \eta_\lambda \eta_\mu$$

wird.

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

Aus der Gleichung (6.) folgt nun das zu beweisende Theorem, denn setzt man jetzt noch:

$$u_\varrho u_\sigma u_\tau = a_{\varrho\sigma\tau}, \qquad \eta_\varkappa \eta_\lambda \eta_\mu = a_{\varkappa\lambda\mu},$$

so wird

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}k &= \Sigma\Sigma\Sigma((aa)^{\mu\tau}(aa)^{\varkappa\lambda})^{\varrho\sigma} a_{\varrho\sigma\tau} a_{\varkappa\lambda\mu} \\ &= \Sigma\Sigma\Sigma((aa)^{\mu\tau} a_\tau)^{\varrho\sigma}(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda} a_{\varkappa\lambda\mu} \\ &= \Sigma s_{\varrho\sigma\mu} b_{\varrho\sigma\mu} = 6T \quad (\text{§. } 18\ (7.)) \end{aligned}$$

weil

$$\begin{aligned} \Sigma((aa)^{\mu\tau} a_\tau)^{\varrho\sigma} &= s_{\varrho\sigma\mu} \quad (\text{§. } 14\ (7.)) \\ \Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda} a_{\varkappa\lambda\mu} &= b_{\varrho\sigma\mu} \quad (\text{§. } 11\ (4.)) \end{aligned}$$

ist.

§. 22.

Theorem 15.

Wenn man in dem die Function T definirenden Ausdruck

$$(1.) \qquad A_\eta B_\zeta C_\vartheta . D(\Sigma \pm \eta_1 \vartheta_2 \zeta_3)^2$$

entweder die Gröfsen

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3,$$

oder die Gröfsen

$$\eta_1, \quad \eta_2, \quad \eta_3$$

als die Variabeln betrachtet, und jedesmal für die übrigen Potenzen und Produkte dritter Ordnung die entsprechenden $a_{\varkappa\lambda\mu}$ setzt, so entsteht in beiden Fällen eine zugehörige Form.

Der Beweis ergiebt sich sofort aus der am Anfange dieser Abhandlung gegebenen Definition der zugehörigen Formen.

Bildet man die erste derselben, so hat man in der Gleichung (5.) des vorigen Paragraphen $\eta_\varkappa \eta_\lambda \eta_\mu = a_{\varkappa\lambda\mu}$ zu setzen, dieses giebt

$$\Sigma\Sigma\Sigma(uu, (aa)^{\varkappa\lambda})^{\varrho\sigma}(a_\varrho a_\sigma)^{\mu\tau} a_{\varkappa\lambda\mu} u_\tau$$

oder

$$\begin{aligned} &\Sigma\Sigma\Sigma(uu, (aa)^{\mu\tau})^{\varrho\sigma}(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda} a_{\varkappa\lambda\mu} u_\tau \\ &= \Sigma\Sigma(uu, (aa)^{\mu\tau})^{\varrho\sigma} b_{\varrho\sigma\mu} u_\tau \\ &= \Sigma\Sigma(b_\mu (aa)^{\mu\tau})^{\varrho\sigma} u_\varrho u_\sigma u_\tau = T_f(u_1, u_2, u_3) \quad (\text{§. } 18\ (9.)). \end{aligned}$$

Es entsteht also durch die ersten der angegebenen Operationen die schon definirte zweite zugehörige Form T_f. Die vorstehende Definition derselben giebt aber ohne alle Rechnung sofort eine sehr wichtige Eigenschaft derselben an.

Wenn man nämlich die Form (1.) nach u_1, u_2, u_3 total differentiirt,

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

so entsteht

$$A_\eta\{B_\zeta C_\vartheta dD + B_\zeta dC_\vartheta D + dB_\zeta C_\vartheta D\}(\Sigma \pm \vartheta_1\eta_2\zeta_3)^2,$$

welcher Ausdruck

$$= 3A_\eta B_\zeta C_\vartheta dD(\Sigma \pm \vartheta_1\eta_2\zeta_3)^2$$

geschrieben werden kann, weil aus einem der 3 Glieder die beiden andern folgen, wenn man die 5 Systeme v, w, η, ζ, ϑ passend vertauscht.

Hieraus folgt wegen (7.), dafs

$$dT_f(u_1, u_2, u_3) = 3\Sigma\Sigma(b_\mu(aa)^{\mu\tau})^{\varrho\sigma} u_\varrho u_\sigma du_\tau$$

$$= 3\{\Sigma(b_\mu(aa)^{\mu 1})^{\varrho\sigma} u_\varrho u_\sigma du_1 + \Sigma(b_\mu(aa)^{\mu 2})^{\varrho\sigma} u_\varrho u_\sigma du_2 + \Sigma(b_\mu(aa)^{\mu 3})^{\varrho\sigma} u_\varrho u_\sigma du_3,$$

d. h.

$$(2.) \qquad \frac{1}{3}\frac{dT_f(u_1, u_2, u_3)}{du_\tau} = \Sigma(b_\mu(aa)^{\mu\tau})^{\varrho\sigma} u_\varrho u_\sigma,$$

wo τ constanter Index ist.

Setzt man nun

$$(3.) \qquad T_f(u_1, u_2, u_3) = \Sigma t_{\varrho\sigma\tau} u_\varrho u_\sigma u_\tau,$$

indem man wie bei allen Bezeichnungen dieser Art die Gleichheit von

$$t_{\varrho\sigma\tau} = t_{\varrho\tau\sigma} = t_{\sigma\varrho\tau} = t_{\sigma\tau\varrho} = t_{\tau\varrho\sigma} = t_{\tau\sigma\varrho}$$

einführt, so ist

$$\frac{1}{3}\frac{dT_f(u_1, u_2, u_3)}{du_\tau} = \Sigma t_{\varrho\sigma\tau} u_\varrho u_\sigma,$$

wo τ constanter Index ist, also in Vergleichung mit (2.)

$$(3.^*) \qquad t_{\varrho\sigma\tau} = \{(b_1(aa)^{1\tau})^{\varrho\sigma} + (b_2(aa)^{2\tau})^{\varrho\sigma} + (b_3(aa)^{3\tau})^{\varrho\sigma}\},$$

d. h. man kann in diesem Ausdrucke die Indices ϱ, σ, τ nach Belieben vertauschen, und erhält auf diese Weise eine ***einfache symmetrische Darstellung der Coefficienten von T_f***, von welchen sehr bald nachgewiesen werden soll, dafs sie die partiellen Ableitungen von T sind.

Fügt man ferner noch hinzu, dafs weil (§. 18 (4.))

$$\delta S_f = 3T_f$$

gesetzt war:

$$(4.) \qquad \delta s_{\varrho\sigma\tau} = 3t_{\varrho\sigma\tau}$$

ist, so folgt aus §. 14 (7.):

$$3t_{\varrho\sigma\tau} = \delta\{(a_1(aa)^{1\tau})^{\varrho\sigma} + (a_2, aa)^{2\tau})^{\varrho\sigma} + (a_3(aa)^{3\tau})^{\varrho\sigma}\}$$

$$3t_{\varrho\sigma\tau} = (b_1(aa)^{1\tau})^{\varrho\sigma} + (b_2(aa)^{2\tau})^{\varrho\sigma} + (b_3(aa)^{3\tau})^{\varrho\sigma}$$
$$+ (a_1(ab+ba)^{1\tau})^{\varrho\sigma} + (a_2(ab+ba)^{2\tau})^{\varrho\sigma} + (a_3(ab+ba)^{3\tau})^{\varrho\sigma}.$$

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

Das erste Glied der rechten Seite ist aber wegen (3.*) $= t_{\varrho\sigma\tau}$, also

$$(5.) \qquad t_{\varrho\sigma\tau} = \tfrac{1}{2}\{(a_1(ab+ba)^{1\tau})^{\varrho\sigma}+(a_2(ab+ba)^{2\tau})^{\varrho\sigma}+(a_3(ab+ba)^{3\tau})^{\varrho\sigma}\},$$

es ist daher ersichtlich, dafs durch die Darstellungsweise (3.) die Berechnung des sehr complicirten Ausdruckes (5.) überflüssig wird, die Differentiation δ würde ihn aber erfordert haben. Die Verification der Identität von (3.) und (5.) ist a posteriori sehr schwer auszuführen, während sie aus dem hier benutzten Prinzipe ohne Weiteres folgt.

Geht man nun zum zweiten Theil des Theorems (15.) über, so ergiebt sich eine zugehörige Form, welche mit den Variabeln η_1, η_2, η_3 geschrieben aus §. 21 (6.) folgt, wenn man dort

$$u_\varrho u_\sigma u_\tau = a_{\varrho\sigma\tau}$$

setzt, nämlich

$$\mathfrak{T}_f = \Sigma\Sigma\Sigma((aa)^{\mu\tau}(aa)^{\varkappa\lambda})^{\varrho\sigma}a_{\varrho\sigma\tau}\eta_\varkappa\eta_\lambda\eta_\mu$$

oder auch

$$\mathfrak{T}_f = \Sigma\Sigma\Sigma(a_\tau(aa)^{\mu\tau})^{\varrho\sigma}(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda}\eta_\varkappa\eta_\lambda\eta_\mu,$$

d. h. wegen der Definition von $s_{\varrho\sigma\mu}$ §. 14 (7.):

$$(6.) \qquad \mathfrak{T}_f = \Sigma\Sigma s_{\varrho\sigma\mu}(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda u_\mu,$$

wenn man wieder u_1, u_2, u_3 als Variable schreibt. Die Werthe T_f und $\mathfrak{T}_f$ sind formell so von einander verschieden, dafs ein Zusammenhang beider nur durch höchst complicirte Transformation gewonnen werden kann. Die Berechnung beider Functionen für die specielle *Hessische* Form zeigt ihre Identität, woraus freilich auch im Allgemeinen die Identität hervorgeht. Indessen handelt es sich hier einerseits darum, den Zusammenhang der *Formenbildung* zu erkennen, andrerseits die Coefficienten von $\mathfrak{T}_f$ in ihrer einfachsten Form darzustellen. Nachdem ich sehr viel Zeit und Mühe auf die Entdeckung dieses Zusammenhanges verwandt hatte, der auch für alle hier folgenden Sätze fundamental ist, stellte sich derselbe in seiner einfachsten Form als das die Zwischenform H betreffende Theorem (13.) dar, aus welchem er sofort hervorgeht. Entnimmt man nämlich aus (5.)

$$\tfrac{1}{3}\frac{dT_f}{du_\tau} = \Sigma t_{\varrho\sigma\tau}u_\varrho u_\sigma = \tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma(a_\varkappa,(ab+ba)^{\varkappa\tau})^{\varrho\sigma}u_\varrho u_\sigma,$$

wo τ ein constanter Index ist, so ist auch

$$\tfrac{1}{3}\frac{dT_f}{du_\tau} = \tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma(a_\varkappa,uu)^{\varrho\sigma}(a_\varrho b_\sigma+a_\sigma b_\varrho)^{\varkappa\tau},$$

und wegen des 13ten Theorems:

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

$$\tfrac{1}{3}\frac{dT_f}{du_\tau} = \Sigma\Sigma(a_\varkappa, uu)^{\varrho\sigma}(a_{1\varrho\sigma}s_{1\varkappa\tau}+a_{2\varrho\sigma}s_{2\varkappa\tau}+a_{3\varrho\sigma}s_{3\varkappa\tau})-S\Sigma(a_\varkappa, uu)^{\varkappa\tau},$$

indem nur dann das Glied mit S hinzutritt, wenn $\varrho,\ \sigma=\varkappa,\ \tau$ ist.

Es folgt aber aus §. 8. (10), wenn man dort $v_\varkappa v_\lambda v_\mu = a_{\varkappa\lambda\mu}$ setzt,

$$\Sigma(a_\varkappa, uu)^{\varkappa\tau} = (a_1, uu)^{1\tau}+(a_2, uu)^{2\tau}+(a_3, uu)^{3\tau} = 0;$$

daher ist

$$\tfrac{1}{3}\frac{dT_f}{du_\tau} = \Sigma\Sigma((a_\varkappa a_1)^{\varrho\sigma}s_{1\varkappa\tau}+(a_\varkappa a_2)^{\varrho\sigma}s_{2\varkappa\tau}+(a_\varkappa a_3)^{\varrho\sigma}s_{3\varkappa\tau})u_\varrho u_\sigma$$
$$= \Sigma\Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho\sigma}s_{\varkappa\lambda\tau}u_\varrho u_\sigma.$$

Bildet man nun

$$T_f = \tfrac{1}{3}\left(u_1\frac{dT_f}{du_1}+u_2\frac{dT_f}{du_2}+u_3\frac{dT_f}{du_3}\right),$$

so wird

$$(7.)\qquad T_f = \Sigma\Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho\sigma}s_{\varkappa\lambda\tau}u_\varrho u_\sigma u_\tau = \mathfrak{T}_f;$$

es ist daher die Identität der beiden zugehörigen Formen des funfzehnten Theorems erwiesen. Ferner aber ist dann auch

$$(8.)\qquad \tfrac{1}{3}\frac{d\mathfrak{T}_f}{du_\tau} = \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho\sigma}s_{\varkappa\lambda\tau}u_\varrho u_\sigma,$$

wo τ constanter Index ist, also folgt

$$(9.)\qquad t_{\varrho\sigma\tau} = \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho\sigma}s_{\varkappa\lambda\tau} = \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho\tau}s_{\varkappa\lambda\sigma} = \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{\sigma\tau}s_{\varkappa\lambda\varrho},$$

während aus (6.) hervorgehen würde, dafs der Coefficient von $u_\varrho u_\sigma u_\tau$ in $\mathfrak{T}_f$ mit seinem Zahlenfactor 6

$$= 2\Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho\sigma}s_{\varkappa\lambda\tau}+2\Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho\tau}s_{\varkappa\lambda\sigma}+2\Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{\sigma\tau}s_{\varkappa\lambda\varrho}$$

ist, wenn alle Indices verschieden sind.

Die Function $\mathfrak{T}_f$ läfst sich in Folge der Gleichung (7.) *definiren durch*

$$(10.)\qquad \tfrac{1}{3}\Sigma!\frac{d\Delta f}{da_{\varkappa\lambda\mu}}u_\varkappa u_\lambda u_\mu = \mathfrak{T}_f,$$

wenn man statt der Potenzen und Produkte $x_\varrho x_\sigma x_\tau$ die entsprechenden $s_{\varrho\sigma\tau}$ substituirt, denn es ist

$$\Delta f = \Sigma(AA)^{\varrho\sigma}dA_{\varrho\sigma},\quad \text{also}$$

$$\Sigma!\frac{d\Delta f}{da_{\varkappa\lambda\mu}}u_\varkappa u_\lambda u_\mu = 3\Sigma!\Sigma(AA)^{\varrho\sigma}\frac{dA_{\varrho\sigma}}{da_{\varkappa\lambda\mu}}u_\varkappa u_\lambda u_\mu$$
$$= 3\Sigma(AA)^{\varrho\sigma}(u_\varrho u_\sigma u_1 x_1+u_\varrho u_\sigma u_2 x_2+u_\varrho u_\sigma u_3 x_3)$$
$$= 3\Sigma(AA)^{\varrho\sigma}u_\varrho u_\sigma(u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3)$$
$$= 3\Sigma\Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho\sigma}u_\varrho u_\sigma(u_1x_1x_\varkappa x_\lambda+u_2x_2x_\varkappa x_\lambda+u_3x_3x_\varkappa x_\lambda)$$
$$= 3\Sigma\Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho\sigma}u_\varrho u_\sigma(u_1s_{1\varkappa\lambda}+u_2s_{2\varkappa\lambda}+u_3s_{3\varkappa\lambda})$$
$$= 3\mathfrak{T}_f.$$

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

Hieraus ergiebt sich aber (§. 9 (6.))

$$(11.)\qquad \Theta.u = \Sigma(AA)^{\varrho\sigma}u_\varrho u_\sigma(u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3) = \mathfrak{T}_f,$$

wenn man wiederum $x_\varrho x_\sigma x_\tau = s_{\varrho\sigma\tau}$ *setzt, und es läfst sich die Gleichung* (8.) *so aussprechen, dafs zugleich mit* $x_\varrho x_\sigma x_\tau = s_{\varrho\sigma\tau}$

$$(11.^*)\qquad \frac{d(\Theta.u)}{du_\tau} = \Theta.u_\tau$$

wird.

Es bleibt nun schliefslich noch zu untersuchen, in welcher Beziehung die Gröfsen $t_{\varkappa\lambda\mu}$, welche durch (3.*) oder (5.) oder (9.) definirt sind, zu den partiellen Ableitungen der Invariante T nach den Gröfsen $a_{\varkappa\lambda\mu}$ stehen.

Bildet man die Function:

$$6\Sigma!\frac{dT}{da_{\varkappa\lambda\mu}}u_\varkappa u_\lambda u_\mu = \Sigma!\frac{d\Sigma s_{\varrho\sigma\tau}b_{\varrho\sigma\tau}}{da_{\varkappa\lambda\mu}}u_\varkappa u_\lambda u_\mu,$$

so erhält man jedenfalls eine zugehörige Form, es besteht aber das Resultat der Differentiation aus zwei Theilen, nämlich es ist

$$6\Sigma!\frac{dT}{da_{\varkappa\lambda\mu}}u_\varkappa u_\lambda u_\mu = \Sigma!\Sigma\frac{ds_{\varrho\sigma\tau}}{da_{\varkappa\lambda\mu}}b_{\varrho\sigma\tau}u_\varkappa u_\lambda u_\mu + \Sigma!\Sigma\frac{db_{\varrho\sigma\tau}}{da_{\varkappa\lambda\mu}}s_{\varrho\sigma\tau}u_\varkappa u_\lambda u_\mu.$$

Da aber wegen §. 16 (9.):

$$\tfrac{1}{3}\Sigma!\Sigma\frac{ds_{\varrho\sigma\tau}}{da_{\varkappa\lambda\mu}}\eta_\varrho\eta_\sigma\eta_\tau u_\varkappa u_\lambda u_\mu = \Sigma((aa)^{\tau\mu}uu)^{\varkappa\lambda}u_\mu\eta_\varkappa\eta_\lambda\eta_\mu$$

ist, so folgt, wenn man $\eta_\varrho\eta_\sigma\eta_\tau = b_{\varrho\sigma\tau}$ setzt,

$$\tfrac{1}{3}\Sigma!\Sigma\frac{ds_{\varrho\sigma\tau}}{da_{\varkappa\lambda\mu}}b_{\varrho\sigma\tau}u_\varkappa u_\lambda u_\mu = \Sigma((aa)^{\tau\mu}uu)^{\varkappa\lambda}b_{\varkappa\lambda\mu}u_\mu$$
$$= \Sigma((aa)^{\tau\mu}b_\mu)^{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda u_\mu = T_f.$$

Dies ist der erste Theil, der zweite wird wegen (10.)

$$= \Sigma!\frac{d\Delta f}{da_{\varkappa\lambda\mu}}u_\varkappa u_\lambda u_\mu = 3\mathfrak{T}_f.$$

Daher erhält man

$$6\Sigma!\frac{dT}{da_{\varkappa\lambda\mu}}u_\varkappa u_\lambda u_\mu = 3T_f+3\mathfrak{T}_f$$

oder, da $\mathfrak{T}_f = T_f$ ist,

$$(12.)\qquad \Sigma!\frac{dT}{da_{\varkappa\lambda\mu}}u_\varkappa u_\lambda u_\mu = T_f = \mathfrak{T}_f.$$

Fafst man Alles zusammen, so entsteht schliefslich das folgende Theorem:

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

Theorem 16.

Die folgenden drei zugehörigen Formen:

$$T_f = \delta S_f = \Sigma t_{\varkappa\lambda\mu} u_\varkappa u_\lambda u_\mu,$$
$$\mathfrak{T}_f = \Theta . u \quad (x_\varrho x_\sigma x_\tau = s_{\varrho\sigma\tau}),$$
$$\Sigma ! \frac{dT}{da_{\varkappa\lambda\mu}} u_\varkappa u_\lambda u_\mu$$

sind einander gleich, also:

$$(13.) \quad \begin{cases} \dfrac{dT}{da_{\varkappa\lambda\mu}} = 6 t_{\varkappa\lambda\mu}, & \text{wenn } \varkappa, \lambda, \mu \text{ verschieden sind,} \\ \dfrac{dT}{da_{\varkappa\varkappa\lambda}} = 3 t_{\varkappa\varkappa\lambda}, & \text{wenn } \varkappa, \lambda \text{ verschieden sind,} \\ \dfrac{dT}{da_{\varkappa\varkappa\varkappa}} = t_{\varkappa\varkappa\varkappa} \end{cases}$$

und die Werthe dieser Differentialquotienten sind in drei verschiedenen Formen:

$$(14.) \quad \begin{cases} t_{\varkappa\lambda\mu} = ((aa)^{1\mu} b_1)^{\varkappa\lambda} + ((aa)^{2\mu} b_2)^{\varkappa\lambda} + ((aa)^{3\mu} b_3)^{\varkappa\lambda} \\ t_{\varkappa\lambda\mu} = \frac{1}{2}((ab+ba)^{1\mu} a_1)^{\varkappa\lambda} + \frac{1}{2}((ab+ba)^{2\mu} a_2)^{\varkappa\lambda} + \frac{1}{2}((ab+ba)^{3\mu} a_3)^{\varkappa\lambda} \\ t_{\varkappa\lambda\mu} = \Sigma (a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda} s_{\varrho\sigma\mu} \end{cases}$$

darstellbar.

§. 23.

An diese Resultate knüpfen sich nun die Grundgesetze für die zweite Invariante.

Nach der Definition ist

$$\tfrac{1}{4}\delta S = T,$$

also

$$6T = \tfrac{3}{2}\delta S = \Sigma s_{\varkappa\lambda\mu} b_{\varkappa\lambda\mu},$$

d. h. gleich dem Werthe von S_f, wenn man

$$u_\varkappa u_\lambda u_\mu = b_{\varkappa\lambda\mu}$$

setzt. Diese Substitution giebt aber wegen (§. 16 (2.)):

$$6T = \Sigma\Sigma (a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho\sigma} (a_\varrho b_\sigma)^{\varkappa\lambda},$$

und wenn man die Summation über ϱ und σ ausführt:

$$(1.) \quad 6T = \begin{cases} \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{11}(a_1 b_1)^{\varkappa\lambda} + \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{12}(a_1 b_2)^{\varkappa\lambda} + \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{13}(a_1 b_3)^{\varkappa\lambda} \\ + \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{21}(a_2 b_1)^{\varkappa\lambda} + \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{22}(a_2 b_2)^{\varkappa\lambda} + \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{23}(a_2 b_3)^{\varkappa\lambda} \\ + \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{31}(a_3 b_1)^{\varkappa\lambda} + \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{32}(a_3 b_2)^{\varkappa\lambda} + \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{33}(a_3 b_3)^{\varkappa\lambda}, \end{cases}$$

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

wobei noch zu beachten ist, dafs

$$(a_\varrho b_\sigma)^{\varkappa\lambda} \quad \text{und} \quad (a_\sigma b_\varrho)^{\varkappa\lambda}$$

von einander verschieden sind.

Man kann aber auch das Theorem 9. (§. 16) benutzen, um T darzustellen. Setzt man in demselben

$$u_\varkappa u_\lambda u_\mu = b_{\varkappa\lambda\mu},$$

so ergiebt sich, weil dann

$$\tfrac{1}{3} S_f = \tfrac{6}{3} T = 2T$$

wird:

$$(2.) \qquad \Sigma((aa)^{\tau\mu} a_\tau)^{\varkappa\lambda} b_{\varkappa\lambda\mu} = \Sigma((a_\varkappa a_\lambda)^{\tau\mu} (a_\tau b_\mu)^{\varkappa\lambda}) = 2T,$$

$$(3.) \qquad \Sigma((aa)^{\tau\mu} a_\nu)^{\varkappa\lambda} b_{\varkappa\lambda\mu} = \Sigma((a_\varkappa a_\lambda)^{\tau\mu} (a_\nu b_\mu)^{\varkappa\lambda}) = 0,$$

wo τ und ν constante, von einander verschiedene Indices sind. Die Gleichungen (2.) treten mehr hervor, wenn man die Summation über μ ausführt; sie geben dann

$$(4.) \quad \begin{cases} 2T = \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{11} (a_1 b_1)^{\varkappa\lambda} + \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{12} (a_1 b_2)^{\varkappa\lambda} + \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{13} (a_1 b_3)^{\varkappa\lambda} \\ 2T = \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{21} (a_2 b_1)^{\varkappa\lambda} + \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{22} (a_2 b_2)^{\varkappa\lambda} + \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{23} (a_2 b_3)^{\varkappa\lambda} \\ 2T = \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{31} (a_3 b_1)^{\varkappa\lambda} + \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{32} (a_3 b_2)^{\varkappa\lambda} + \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{33} (a_3 b_3)^{\varkappa\lambda} \end{cases}$$

und zeigen so, dafs *die drei Horizontalzeilen der rechten Seite von* (1.) *gleiche Summen haben.* Andrerseits ist wegen §. 22 (3.*):

$$\Sigma t_{\varkappa\lambda\tau} a_{\varkappa\lambda\nu} = \Sigma((aa)^{\tau\mu} b_\mu)^{\varkappa\lambda} a_{\varkappa\lambda\nu}$$

und

$$\Sigma((aa)^{\tau\mu} b_\mu)^{\varkappa\lambda} a_{\varkappa\lambda\nu} = \Sigma((aa)^{\tau\mu} a_\nu)^{\varkappa\lambda} b_{\varkappa\lambda\mu},$$

daher gehen die Gleichungen (2.) und (3.) in folgende über:

$$(5.) \qquad \Sigma t_{\varkappa\lambda\tau} a_{\varkappa\lambda\tau} = 2T,$$

$$(6.) \qquad \Sigma t_{\varkappa\lambda\tau} a_{\varkappa\lambda\nu} = 0,$$

und geben so das Theorem:

Theorem 17.

Wenn man in den 9 Gleichungen:

$$\begin{array}{lll} \Sigma a_{1\varkappa\lambda} t_{1\varkappa\lambda} = 2T, & \Sigma a_{1\varkappa\lambda} t_{2\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma a_{1\varkappa\lambda} t_{3\varkappa\lambda} = 0, \\ \Sigma a_{2\varkappa\lambda} t_{1\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma a_{2\varkappa\lambda} t_{2\varkappa\lambda} = 2T, & \Sigma a_{2\varkappa\lambda} t_{3\varkappa\lambda} = 0, \\ \Sigma a_{3\varkappa\lambda} t_{1\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma a_{3\varkappa\lambda} t_{2\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma a_{3\varkappa\lambda} t_{3\varkappa\lambda} = 2T \end{array}$$

die 10 Gröfsen $t_{\varkappa\lambda\mu}$ als Unbekannte ansieht, so stellen die partiellen Ableitungen von T nach den Gröfsen $a_{\varkappa\lambda\mu}$ ein System ihrer Lösun-

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

gen dar, nämlich

$$6t_{\varkappa\lambda\mu} = \frac{dT}{da_{\varkappa\lambda\mu}}, \quad 3t_{\varkappa\varkappa\lambda} = \frac{dT}{da_{\varkappa\varkappa\lambda}}, \quad t_{\varkappa\varkappa\varkappa} = \frac{dT}{da_{\varkappa\varkappa\varkappa}}.$$

Die Verbindung dieses Theorems mit Theorem 8. (§. 15.) giebt die beiden von einander unabhängigen Lösungen beider Systeme von Gleichungen. Da dieselben sich nur in den Constanten $2S$ und $2T$ der rechten Seite von einander unterscheiden, so kann man durch Division mit respective $2S$ und $2T$ beide Systeme von Gleichungen identificiren, und demgemäfs durch

$$\frac{s_{\varkappa\lambda\mu}}{2S}, \quad \frac{t_{\varkappa\lambda\mu}}{2T},$$

zwei Systeme von Lösungen des entstehenden Systemes angeben, ferner alle übrigen durch

$$\frac{s_{\varkappa\lambda\mu}}{2S} + M \cdot \frac{t_{\varkappa\lambda\mu}}{2T},$$

wo M ein willkührlicher Factor ist.

Man findet sofort zwei analoge Systeme von Gleichungen, wenn man in (5.) und (6.) statt der Coefficienten $t_{\varkappa\lambda\tau}$ diejenigen Werthe setzt, welche sie als Coefficienten von $\mathfrak{T}_f$ besitzen. Nach §. 22 (9.) wird dann

$$\Sigma t_{\varkappa\lambda\tau} a_{\varkappa\lambda\nu} = \Sigma\Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda} s_{\varrho\sigma\tau} a_{\varkappa\lambda\nu},$$

wo immer τ und ν constante Indices sind; es ist aber definitionsmäfsig:

$$b_{\varrho\sigma\nu} = \Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda} a_{\varkappa\lambda\nu},$$

also auch

$$(7.) \quad \Sigma t_{\varkappa\lambda\tau} a_{\varkappa\lambda\nu} = \Sigma b_{\varrho\sigma\nu} s_{\varrho\sigma\tau},$$

und daher ergiebt sich wegen (5.) und (6.):

Theorem 18.

Wenn man in den 9 Gleichungen:

$$\begin{array}{lll} \Sigma b_{1\varkappa\lambda} s_{1\varkappa\lambda} = 2T, & \Sigma b_{1\varkappa\lambda} s_{2\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma b_{1\varkappa\lambda} s_{3\varkappa\lambda} = 0 \\ \Sigma b_{2\varkappa\lambda} s_{1\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma b_{2\varkappa\lambda} s_{2\varkappa\lambda} = 2T, & \Sigma b_{2\varkappa\lambda} s_{3\varkappa\lambda} = 0 \\ \Sigma b_{3\varkappa\lambda} s_{1\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma b_{3\varkappa\lambda} s_{2\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma b_{3\varkappa\lambda} s_{3\varkappa\lambda} = 2T \end{array}$$

die 10 Gröfsen $s_{\varkappa\lambda\mu}$ als Unbekannte betrachtet, so ist ein System von Lösungen durch die partiellen Ableitungen von S nach den Gröfsen $a_{\varkappa\lambda\mu}$ gegeben, nämlich

$$6s_{\varkappa\lambda\mu} = \tfrac{3}{2}\frac{dS}{da_{\varkappa\lambda\mu}}, \quad 3s_{\varkappa\varkappa\mu} = \tfrac{3}{2}\frac{dS}{da_{\varkappa\varkappa\mu}}, \quad s_{\varkappa\varkappa\varkappa} = \tfrac{3}{2}\frac{dS}{da_{\varkappa\varkappa\varkappa}}.$$

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

Der Charakter der Ausdrücke

$$\Sigma b_{\varrho\sigma\nu}\, s_{\varrho\sigma\tau}$$

tritt deutlicher hervor, wenn man die bekannten Werthe für $s_{\varrho\sigma\tau}$ substituirt. Ist nämlich μ ein veränderlicher Index, so wird

$$\Sigma b_{\varrho\sigma\nu}\, a_{\varrho\sigma\tau} = \Sigma b_{\varrho\sigma\nu}\left((aa)^{\tau\mu} a_\mu\right)^{\varrho\sigma} = \Sigma (a_\mu b_\nu)^{\varrho\sigma} (a_\varrho a_\sigma)^{\tau\mu}$$

und die Gleichungen (5.) und (6.) oder (2.) und (3.) nehmen die Form an:

$$(8.)\quad \begin{cases} 2T = \Sigma (a_\varrho a_\sigma)^{\mu\tau} (a_\mu b_\tau)^{\varrho\sigma} \\ 0 \;\;= \Sigma (a_\varrho a_\sigma)^{\mu\tau} (a_\mu b_\nu)^{\varrho\sigma}. \end{cases}$$

Führt man nun in der ersten Gleichung die Summation über μ aus und setzt statt τ allmälig 1, 2, 3, so entstehen die Gleichungen:

$$(9.)\quad \begin{cases} 2T = \Sigma (a_\varrho a_\sigma)^{11} (a_1 b_1)^{\varrho\sigma} + \Sigma (a_\varrho a_\sigma)^{12} (a_1 b_2)^{\varrho\sigma} + \Sigma (a_\varrho a_\sigma)^{13} (a_1 b_3)^{\varrho\sigma} \\ 2T = \Sigma (a_\varrho a_\sigma)^{21} (a_2 b_1)^{\varrho\sigma} + \Sigma (a_\varrho a_\sigma)^{22} (a_2 b_2)^{\varrho\sigma} + \Sigma (a_\varrho a_\sigma)^{23} (a_2 b_3)^{\varrho\sigma} \\ 2T = \Sigma (a_\varrho a_\sigma)^{31} (a_3 b_1)^{\varrho\sigma} + \Sigma (a_\varrho a_\sigma)^{32} (a_3 b_2)^{\varrho\sigma} + \Sigma (a_\varrho a_\sigma)^{33} (a_3 b_3)^{\varrho\sigma}, \end{cases}$$

welche zeigen, ***dafs auch die 3 Verticalzeilen in* (1.) *gleiche Summen haben.***

Schreibt man noch die Coefficienten von $\mathfrak{T}_f$ (§. 22 (9.))

$$t_{\varrho\sigma\tau} = \Sigma (a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho\sigma} s_{\varkappa\lambda\tau}$$

in ausgeführter Summation hin, nämlich

$$(10.)\quad t_{\varrho\sigma\tau} = (a_1 a_1)^{\varrho\sigma} s_{11\tau} + (a_2 a_2)^{\varrho\sigma} s_{22\tau} + (a_3 a_3)^{\varrho\sigma} s_{33\tau} + 2 (a_2 a_3)^{\varrho\sigma} s_{23\tau} + 2 (a_1 a_3)^{\varrho\sigma} s_{13\tau} + 2 (a_1 a_2)^{\varrho\sigma} s_{12\tau}$$

und setzt für ϱ und σ allmälig die Combinationen von 1, 2, 3, so entstehen sechs Gleichungen von der Form der im Theorem 3. (§. 8) erwähnten, welche sich in Folge dessen sofort nach den $s_{\varkappa\lambda\tau}$ auflösen lassen und wegen §. 8 (7.)

$$(11.)\quad S.\, s_{\varrho\sigma\tau} = \Sigma (a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho\sigma} t_{\varkappa\lambda\tau}$$

geben, so dafs also

$$(12.)\quad \Sigma\Sigma (a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho\sigma} t_{\varkappa\lambda\tau} u_\varrho u_\sigma = S \Sigma s_{\varrho\sigma\tau} u_\varrho u_\sigma = \tfrac{1}{3} S \frac{dS_f}{du_\tau}$$

wird. Diese Gleichungen liefern zunächst ein Ergänzungstheorem zum achtzehnten Theorem. Substituirt man nämlich in (12.) auf beiden Seiten statt $u_\varrho u_\sigma$ die entsprechenden $a_{\varrho\sigma\nu}$, wo ν wie τ ein constanter Index, und bemerkt, dafs nach §. 15 Theorem 8.

$$\Sigma a_{\varrho\sigma\tau} s_{\varrho\sigma\tau} = 2S, \qquad \Sigma a_{\varrho\sigma\nu} s_{\varrho\sigma\tau} = 0$$

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

ist, so giebt (12.)

$$\Sigma\Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho\sigma} t_{\varkappa\lambda\tau} a_{\varrho\sigma\nu} = 2S^2 \quad \text{oder} \quad = 0,$$

je nachdem $\tau = \nu$, oder τ von ν verschieden ist.

Aber

$$b_{\varkappa\lambda\nu} = \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho\sigma} a_{\varrho\sigma\nu},$$

also

$$(13.) \qquad \Sigma b_{\varkappa\lambda\nu} t_{\varkappa\lambda\tau} = 2S^2 \quad \text{oder} \quad = 0,$$

mithin:

Theorem 19.

Wenn man in den 9 Gleichungen:

$$\begin{array}{lll} \Sigma b_{1\varkappa\lambda} t_{1\varkappa\lambda} = 2S^2, & \Sigma b_{2\varkappa\lambda} t_{1\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma b_{3\varkappa\lambda} t_{1\varkappa\lambda} = 0, \\ \Sigma b_{1\varkappa\lambda} t_{2\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma b_{2\varkappa\lambda} t_{2\varkappa\lambda} = 2S^2, & \Sigma b_{3\varkappa\lambda} t_{2\varkappa\lambda} = 0, \\ \Sigma b_{1\varkappa\lambda} t_{3\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma b_{2\varkappa\lambda} t_{3\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma b_{3\varkappa\lambda} t_{3\varkappa\lambda} = 2S^2 \end{array}$$

die Gröfsen $t_{\varkappa\lambda\mu}$ als Unbekannte betrachtet, so ist ein System von Lösungen durch die partiellen Ableitungen von T nach den Gröfsen $a_{\varkappa\lambda\mu}$ gegeben, nämlich:

$$t_{\varkappa\varkappa\varkappa} = \frac{dT}{da_{\varkappa\varkappa\varkappa}}, \qquad 3t_{\varkappa\varkappa\lambda} = \frac{dT}{da_{\varkappa\varkappa\lambda}}, \qquad 6t_{123} = \frac{dT}{da_{123}}.$$

Die Verbindung der Theoreme 18. und 19. erfolgt ebenso wie die angegebene Verbindung der Theoreme 8. und 17.

Die Gleichung (11.) liefert noch ein zweites bemerkenswerthes Resultat. Bildet man nämlich

$$\begin{aligned} \delta t_{\varrho\sigma\tau} &= \delta\Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho\sigma} s_{\tau\varkappa\lambda} \\ &= 2\Sigma(a_\varkappa b_\lambda)^{\varrho\sigma} s_{\tau\varkappa\lambda} + 3\Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho\sigma} t_{\tau\varkappa\lambda} \end{aligned}$$

und bemerkt, dafs wegen §. 20 (5.) (6.) und des 8ten Theorems:

$$\begin{aligned} \Sigma(a_\varkappa b_\lambda)^{\varrho\sigma} s_{\tau\varkappa\lambda} &= \Sigma(a_{1\varkappa\lambda} s_{1\varrho\sigma} + a_{2\varkappa\lambda} s_{2\varrho\sigma} + a_{3\varkappa\lambda} s_{3\varrho\sigma}) s_{\tau\varkappa\lambda} - S.s_{\tau\varrho\sigma} \\ &= 2Ss_{\tau\varrho\sigma} - Ss_{\tau\varrho\sigma} = Ss_{\tau\varrho\sigma} \end{aligned}$$

ist, so ergiebt sich

$$\delta t_{\varrho\sigma\tau} = 2Ss_{\varrho\sigma\tau} + 3\Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho\sigma} t_{\tau\varkappa\lambda},$$

also wegen (11.):

$$\delta t_{\varrho\sigma\tau} = 5Ss_{\varrho\sigma\tau}.$$

Es folgt hieraus, dafs

$$(14.) \qquad \delta T_f = 5S.S_f,$$

ist, *also dafs sich durch Wiederholung der Operation δ immer nur Verbindungen aus S_f und T_f finden lassen.* Hiermit in Verbindung steht aber noch

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

ein anderes Resultat, welches in §. 13 (8.) bereits angegeben ist. Da nämlich

$$2T = \Sigma a_{1\varkappa\lambda} t_{1\varkappa\lambda}$$

ist, so wird

$$2\delta T = \Sigma b_{1\varkappa\lambda} t_{1\varkappa\lambda} + \Sigma a_{1\varkappa\lambda} \delta t_{1\varkappa\lambda},$$

aber wegen des 19ten Theorems

$$\Sigma b_{1\varkappa\lambda} t_{1\varkappa\lambda} = 2S^2$$

und wegen (14.)

$$\Sigma a_{1\varkappa\lambda} \delta t_{1\varkappa\lambda} = 5S\Sigma a_{1\varkappa\lambda} s_{1\varkappa\lambda} = 10S^2,$$

also

$$(15.) \qquad \delta T = 6S^2.$$

Die 4 Systeme linearer Gleichungen, welche in den Theoremen 8, 17, 18, 19 behandelt sind, kommen bei fast allen Anwendungen der vorliegenden Theorie vor, daher ist hervorzuheben, dafs durch die gegebene Auswerthung der bezüglichen Ableitungen von S und T, ihre Lösungen in schliefslicher Endform vollständig dargestellt sind.

§. 24.

Als Beispiel der Anwendung der bisher entwickelten Theorie will ich für die ***Hesse***sche Form die Invarianten, Covarianten, zugehörigen Formen und Zwischenformen berechnen, indem ich sie in der Fassung des §. 10 zu Grunde lege, und nur der Kürze halber die Variabeln und Coefficienten als ursprüngliche schreibe.

Es sei also

$$(1.) \qquad f = a_1 x_1^3 + a_2 x_2^3 + a_3 x_3^3 + 6a_4 x_1 x_2 x_3$$

die gegebene Form, dann sind die Coefficienten $A_{\varkappa\lambda}$ der *quadratischen* Form:

$$(2.) \quad \Sigma A_{\varkappa\lambda} y_\varkappa y_\lambda = a_1 x_1 y_1^2 + a_2 x_2 y_2^2 + a_3 x_3 y_3^2 + 2a_4(x_1 y_2 y_3 + x_2 y_1 y_3 + x_3 y_1 y_2),$$

die zweiten Ableitungen von f nach den Variabeln, dividirt durch 6, und die zugehörige Form von (2.) ist *die erste Zwischenform* (§. 9 (6.)), nämlich

$$(3.) \left\{\begin{aligned} &\Theta = \Sigma(AA)^{\varkappa\lambda} u_\varkappa u_\lambda = \\ &\quad (2a_2 a_3 x_2 x_3 - 2a_4^2 x_1^2) u_1^2 + (2a_1 a_3 x_1 x_3 - 2a_4^2 x_2^2) u_2^2 + (2a_1 a_2 x_1 x_2 - 2a_4^2 x_3^2) u_3^2 \\ &+ 2(2a_4^2 x_2 x_3 - 2a_1 a_4 x_1^2) u_2 u_3 + 2(2a_4^2 x_1 x_3 - 2a_2 a_4 x_2^2) u_1 u_3 \\ &\qquad\qquad + 2(2a_4^2 x_1 x_2 - 2a_3 a_4 x_3^2) u_1 u_2 \end{aligned}\right.$$

Hieraus ergiebt sich die *erste Covariante* $\Delta f = \Sigma(AA)^{\varkappa\lambda} A_{\varkappa\lambda}$ oder kürzer:

$$\Delta f = 3\{(AA)^{11} A_{11} + (AA)^{12} A_{12} + (AA)^{13} A_{13}\}$$

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

als folgende:

$$(4.)\qquad \Delta f = -6a_4^2(a_1x_1^3+a_2x_2^3+a_3x_3^3)+6(2a_4^3+a_1a_2a_3)x_1x_2x_3.$$

Zur Berechnung von S_f nehme man die verkürzte Form §. 16 (3.)

$$\tfrac{1}{3}S_f = \Sigma((aa)^{1\mu}a_1)^{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda u_\mu.$$

Setzt man der Kürze halber

$$(5.)\qquad (a_\varrho a_\sigma)^{11}u_1+(a_\varrho a_\sigma)^{12}u_2+(a_\varrho a_\sigma)^{13}u_3 = \alpha_{\varrho\sigma},$$

so ist

$$\tfrac{1}{3}S_f = \Sigma(\alpha a_1)^{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda = \Sigma(\alpha, uu)^{\varkappa\lambda}a_{1\varkappa\lambda},$$

also

$$(6.)\qquad \tfrac{1}{3}S_f = (\alpha, uu)^{11}a_1+2(\alpha, uu)^{23}a_4,$$

weil die übrigen Glieder mit Coefficienten multiplicirt sind, welche für die Form (1.) der Null gleich sind.

Es ist aber

$$(\alpha, uu)^{11} = \alpha_{22}u_3^2+\alpha_{33}u_2^2-2\alpha_{23}u_2u_3$$
$$(\alpha, uu)^{23} = \alpha_{13}u_1u_2+\alpha_{12}u_1u_3-\alpha_{11}u_2u_3-\alpha_{23}u_1u_3$$

und nach der Definition (5.):

$$\begin{array}{ll} \alpha_{11} = -2a_4^2u_1 & \alpha_{23} = a_2a_3u_1 \\ \alpha_{22} = -2a_2a_4u_3 & \alpha_{13} = a_4^2u_3 \\ \alpha_{33} = -2a_3a_4u_2 & \alpha_{12} = a_4^2u_2, \end{array}$$

wobei zu bemerken ist, dafs man die Coefficienten $(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda}$, welche in (5.) vorkommen, aus (3.) entnehmen kann oder aus dem Schema §. 10 (4.).

Hieraus folgt die *erste zugehörige Form*

$$(7.)\qquad S_f = -6a_4(a_2a_3u_1^2+a_1a_3u_2^2+a_1a_2u_3^2)+6(4a_4^3-a_1a_2a_3)u_1u_2u_3.$$

Die erste Invariante S, welche bereits §. 10 berechnet ist, folgt aus (7.) von Neuem, nämlich, da $S_f = \Sigma s_{\varkappa\lambda\mu}u_\varkappa u_\lambda u_\mu$,

$$(8.)\qquad S = \tfrac{1}{6}\Sigma s_{\varkappa\lambda\mu}a_{\varkappa\lambda\mu} = 4a_4(a_4^3-a_1a_2a_3),$$

und die zweite Invariante T:

$$(9.)\qquad T = \tfrac{1}{6}\Sigma s_{\varkappa\lambda\mu}b_{\varkappa\lambda\mu} = 8a_4^6+20a_1a_2a_3a_4^3-a_1^2a_2^2a_3^2,$$

wo die Coefficienten $b_{\varkappa\lambda\mu}$ aus (4.) zu entnehmen sind.

Man bilde nun die zweiten Ableitungen von Δf nach den Variabeln, als Coefficienten der quadratischen Form:

$$(10.)\qquad \Sigma B_{\varkappa\lambda}y_\varkappa y_\lambda = -6a_4^2(a_1x_1y_1^2+a_2x_2y_2^2+a_3x_3y_3^2)$$
$$+2(2a_4^3+a_1a_2a_3)(x_1y_2y_3+x_2y_1y_3+x_3y_1y_2)$$

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

und aus der Verbindung ihrer Coefficienten mit denen von (2.) die *zweite Zwischenform:*

$$(11.)\qquad H = \Sigma(AB)^{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda =$$
$$(-2a_4(2a_4^3+a_1a_2a_3)x_1^2-12a_2a_3a_4x_2x_3)u_1^2+$$
$$(-2a_4(2a_4^3+a_1a_2a_3)x_2^2-12a_1a_3a_4x_1x_3)u_2^2+$$
$$(-2a_4(2a_4^3+a_1a_2a_3)x_3^2-12a_1a_2a_4x_1x_2)u_3^2+$$
$$2(a_1(4a_4^3-a_1a_2a_3)x_1^2+2a_4(2a_4^3+a_1a_2a_3)x_2x_3)u_2u_3+$$
$$2(a_2(4a_4^3-a_1a_2a_3)x_2^2+2a_4(2a_4^3+a_1a_2a_3)x_1x_3)u_1u_3+$$
$$2(a_3(4a_4^3-a_1a_2a_3)x_3^2+2a_4(2a_4^3+a_1a_2a_3)x_1x_2)u_1u_2.$$

Diese Form giebt die sämmtlichen Gröfsen

$$(a_\varkappa b_\lambda+a_\lambda b_\varkappa)^{\varrho\sigma},$$

aus welchen, vermittelst der Definitionsgleichung

$$T_f = \tfrac{1}{3}\delta S_f = \Sigma((ab+ba)^{1\mu}a_1)^{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda u_\mu + \Sigma((aa)^{1\mu}b_1)^{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda u_\mu,$$

die zweite zugehörige Form T_f sich berechnen läfst, man gelangt aber wegen der oben bereits berechneten Gröfsen $\alpha_{\varkappa\lambda}$ etwas schneller zum Ziele, wenn man nach §. 18 (9.)

$$(12.)\quad T_f = \Sigma((aa)^{1\mu}b_1)u_\varkappa u_\lambda u_\mu + \Sigma((aa)^{2\mu}b_2)u_\varkappa u_\lambda u_\mu + \Sigma((aa)^{3\mu}b_3)^{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda u_\mu$$

setzt. Es ist nämlich wegen (5.)

$$\Sigma((aa)^{1\mu}b_1)^{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda u_\mu = \Sigma(\alpha, uu)^{\varkappa\lambda}b_{1\varkappa\lambda},$$

und weil wegen (4.)

$$b_{111} = -6a_4^2a_1,\qquad b_{123} = 2a_4^3+a_1a_2a_3$$

ist, und die übrigen $b_{1\varkappa\lambda}=0$ sind:

$$\Sigma((aa)^{1\mu}b_1)^{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda u_\mu = -6(\alpha, uu)^{11}a_4^2a_1+2(\alpha, uu)^{23}(2a_4^3+a_1a_2a_3)$$
$$= 6a_1a_4^2(2a_2a_4u_3^3+2a_3a_4u_2^3+2a_2a_3u_1u_2u_3)+2(2a_4^3+a_1a_2a_3)(4a_4^2u_1u_2u_3-a_2a_3u_1^3),$$

wenn man die obigen Werthe von $(\alpha, uu)^{11}$ und $(\alpha, uu)^{23}$ substituirt. Ordnet man diesen Ausdruck und bildet durch Vertauschung der Indices die beiden andern Summen von (12.), so entsteht:

$$(13.)\quad\begin{cases}\Sigma((aa)^{1\mu}b_1)^{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda u_\mu = -2a_2a_3(2a_4^3+a_1a_2a_3)u_1^3+12a_1a_3a_4^3u_2^3+12a_1a_2a_4^3u_3^3\\ \qquad\qquad +4a_4^2(4a_4^3+5a_1a_2a_3)u_1u_2u_3\\ \Sigma((aa)^{2\mu}b_2)^{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda u_\mu = 12a_2a_3a_4^3u_1^3-2a_1a_3(2a_4^3+a_1a_2a_3)u_2^3+12a_1a_2a_4^3u_3^3\\ \qquad\qquad +4a_4^2(4a_4^3+5a_1a_2a_3)u_1u_2u_3\\ \Sigma((aa)^{3\mu}b_3)^{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda u_\mu = 12a_2a_3a_4^3u_1^3+12a_1a_3u_2^3-2a_1a_2(2a_4^3+a_1a_2a_3)u_3^3\\ \qquad\qquad +4a_4^2(4a_4^3+5a_1a_2a_3)u_1u_2u_3,\end{cases}$$

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

also durch Summation dieser drei Gleichungen die *zweite zugehörige Form:*

$$(14.)\qquad T_f = 2\{(10a_4^3 - a_1a_2a_3)(a_2a_3u_1^3 + a_1a_3u_2^3 + a_1a_2u_3^3) \\ + 6a_4^2(4a_4^3 + 5a_1a_2a_3)u_1u_2u_3\}.$$

Von der absoluten Invariante.

§. 25.

Wenn man aus den Gleichungen

$$S' = r^4 S,$$
$$T' = r^6 T$$

die Determinante r eliminirt, so erhält man

$$(1.)\qquad \frac{S'^3}{T'^2} = \frac{S^3}{T^2}$$

d. h. eine Bedingung zwischen den Coefficienten der ursprünglichen und der transformirten Form, welche erfüllt sein mufs, wenn es möglich sein soll die eine in die andere zu transformiren.

Die Function $\frac{S^3}{T^2}$ will ich in der Folge die *absolute Invariante* nennen und durch J bezeichnen; sie ist eine gebrochene Function der Coefficienten, deren Zähler und Nenner von derselben und zwar 12ten Ordnung in Bezug auf die Coefficienten sind. Die Bezeichnung „absolut" gebe ich ihr, weil sie, für die transformirte Form gebildet, von den Substitutionscoefficienten gänzlich unabhängig bleibt, während die andern Invarianten noch die Determinante r der Substitutionscoefficienten enthalten, also weil $J' = J$ ohne Vermittlung von r ist.

Wenn man verlangt, dafs durch lineare Substitutionen die Functionen

$$f = \Sigma a_{\varkappa\lambda\mu} x_\varkappa x_\lambda x_\mu, \qquad f' = \Sigma a'_{\varkappa\lambda\mu} X_\varkappa X_\lambda X_\mu$$

in einander transformirt werden sollen, und das gewöhnliche Verfahren dabei angewendet wird, welches darin besteht, dafs man die Substitution in f einsetzt und die erhaltene Form mit f' identificirt, so erhält man zehn Gleichungen von der Form:

$$(2.)\qquad a'_{\varkappa\lambda\mu} = a_{111}\alpha_\varkappa\alpha_\lambda\alpha_\mu + a_{112}(\alpha_\varkappa\alpha_\lambda\beta_\mu + \alpha_\lambda\alpha_\mu\beta_\varkappa + \alpha_\mu\alpha_\varkappa\beta_\lambda) + \cdots,$$

aus welchen man die 9 Substitutionscoefficienten $\alpha_\varkappa$, β_λ, γ_μ eliminiren kann. Es folgt daher, dafs immer eine Relation zwischen den Coefficienten $a'_{\varkappa\lambda\mu}$ und $a_{\varkappa\lambda\mu}$ bestehen mufs, damit die Transformation möglich sei. Die Gleichung (1.)

$$J' = J \quad \text{oder} \quad J' - J = 0$$

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

giebt diese Bedingung und zwar in einer Form, welche dadurch merkwürdig ist, dafs in derselben die Coefficienten $a_{\varkappa\lambda\mu}$ und $a'_{\varkappa\lambda\mu}$ von einander ***separirt*** erscheinen, ohne dafs sie aufhört ***rational*** zu bleiben. In der am Eingange dieser Abhandlung bezeichneten Schrift habe ich nachgewiesen, dafs sowohl die Form der mit

$$J' - J = 0$$

analogen Gleichungen, als die Art und Weise ihrer Entstehung für homogene Functionen von beliebig vielen Variabeln und beliebiger Ordnung in allen Fällen bestehen bleibt, und diesen Umstand als Ausgangspunkt für die Theorie der Invarianten benutzt.

Um im vorliegenden Falle eine bestimmte Transformation für die homogenen Functionen 3ter Ordnung von drei Veränderlichen zu erhalten, mufs man über 9 Coefficienten nach Belieben verfügen und die Bestimmung des 10ten dem Eliminationsproblem, d. h. den Gleichungen (2.) überlassen; nach dem Vorstehenden giebt aber die Gleichung

$$J' = J$$

diesen übrig bleibenden Coefficienten.

Setzt man z. B. die ***Hesse***sche Form

$$f' = X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 + 6k X_1 X_2 X_3$$

voraus, so hat man im vorigen Paragraphen nur

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 1, \quad a_4 = k$$

zu setzen, um

$$J' = \frac{(4k^4 - 4k)^3}{(8k^6 + 20k^3 - 1)^2}$$

und durch Auflösung der Gleichung:

$$\frac{S^3}{T^2} = \frac{(4k^4 - 4k)^3}{(8k^6 + 20k^3 - 1)^2},$$

den Werth für k zu erhalten.

Diese Entwicklungen zeigen schliefslich, ***dafs die Anzahl der von einander unabhängigen Invarianten nur zwei beträgt,*** denn wäre P eine dritte, welche der Gleichung

$$P' = r^\lambda . P$$

genügt, so könnte man durch Elimination von r aus den 3 Gleichungen

$$S' = r^4 S$$
$$T' = r^6 T$$
$$P' = r^\lambda P$$

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

zwei Gleichungen erhalten, in welchen nur die eine Unbekannte k vorkommt, und durch nachträgliche Elimination von k aus denselben *eine* Relation zwischen P, S, T mit rein numerischen Coefficienten. Man sieht hieraus nicht allein, dafs P, S, T immer algebraisch von einander abhängig sind, sondern auch wie man P aus S und T zusammensetzen kann. Ich bemerke hierbei, dafs Herr *Sylvester* in einer schönen Abhandlung (Philosophical Magazine 1853. Vol. V, pag. 299 und folg.) nachgewiesen hat, dafs jede ganze Function P immer eine *ganze* Function von S und T ist.

§. 26.

Ich will nun eine Grundeigenschaft der *absoluten Invariante* angeben, welche sich auf alle absoluten Invarianten ausdehnen läfst, und für die Fortführung der allgemeinen Theorie nothwendig wird.

Bildet man

$$\frac{dJ}{da_{\varkappa\lambda\mu}} = \frac{d(S^3T^{-2})}{da_{\varkappa\lambda\mu}} = \frac{S^2}{T^3}\left(3T\frac{dS}{da_{\varkappa\lambda\mu}} - 2S\frac{dT}{da_{\varkappa\lambda\mu}}\right),$$

berücksichtigt ferner, dafs

$$\frac{dS}{da_{\varkappa\varkappa\varkappa}} = \tfrac{2}{3}s_{\varkappa\varkappa\varkappa}, \qquad \frac{dS}{da_{\varkappa\varkappa\lambda}} = \tfrac{2}{3}\cdot 3s_{\varkappa\varkappa\lambda}, \qquad \frac{dS}{da_{123}} = \tfrac{2}{3}\cdot 6s_{123},$$

$$\frac{dT}{da_{\varkappa\varkappa\varkappa}} = t_{\varkappa\varkappa\varkappa}, \qquad \frac{dT}{da_{\varkappa\varkappa\lambda}} = 3t_{\varkappa\varkappa\lambda}, \qquad \frac{dT}{da_{123}} = 6t_{123}$$

und setzt

$$\frac{dJ}{da_{\varkappa\varkappa\varkappa}} = J_{\varkappa\varkappa\varkappa}, \qquad \frac{dJ}{da_{\varkappa\varkappa\lambda}} = 3J_{\varkappa\varkappa\lambda}, \qquad \frac{dJ}{da_{123}} = 6J_{123},$$

so folgt:

$$(1.) \qquad J_{\varkappa\lambda\mu} = \frac{2S^2}{T^3}(T.s_{\varkappa\lambda\mu} - S.t_{\varkappa\lambda\mu}).$$

Die Gleichungen §. 15, Theorem 8., deren erste

$$\Sigma a_{1\varkappa\lambda}s_{1\varkappa\lambda} = 2S$$

und die Gleichungen §. 23, Theorem 17., deren erste

$$\Sigma a_{1\varkappa\lambda}t_{1\varkappa\lambda} = 2T$$

ist, geben aber, nachdem sie respective mit T und $-S$ multiplicirt und zu einander addirt sind:

$$\Sigma a_{1\varkappa\lambda}(T.s_{1\varkappa\lambda} - S.t_{1\varkappa\lambda}) = 0,$$

also folgt wegen (1.):

$$\Sigma a_{1\varkappa\lambda}J_{1\varkappa\lambda} = 0,$$

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

und ebenso

$$\Sigma a_{2\varkappa\lambda} J_{2\varkappa\lambda} = 0,$$
$$\Sigma a_{3\varkappa\lambda} J_{3\varkappa\lambda} = 0.$$

Da die rechten Seiten der übrigen Gleichungen der genannten Theoreme von selbst = Null sind, so folgt also für jeden constanten Werth von ϱ und σ

$$(2.) \qquad \Sigma a_{\varrho\varkappa\lambda} J_{\sigma\varkappa\lambda} = 0,$$

wenn $\varkappa$ und λ die veränderlichen Indices sind, daher:

Theorem 20.

Die Auflösungen der 9 linearen Gleichungen:

$$(3.) \quad \begin{cases} \Sigma a_{1\varkappa\lambda} p_{1\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma a_{1\varkappa\lambda} p_{2\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma a_{1\varkappa\lambda} p_{3\varkappa\lambda} = 0, \\ \Sigma a_{2\varkappa\lambda} p_{1\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma a_{2\varkappa\lambda} p_{2\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma a_{2\varkappa\lambda} p_{3\varkappa\lambda} = 0, \\ \Sigma a_{3\varkappa\lambda} p_{1\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma a_{3\varkappa\lambda} p_{2\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma a_{3\varkappa\lambda} p_{3\varkappa\lambda} = 0, \end{cases}$$

in welchen die 9 Verhältnisse der $p_{\varkappa\lambda\mu}$ die Unbekannten sind, lassen sich durch

$$p_{111} : p_{112} : \ldots : p_{123} = J_{111} : J_{112} : \ldots : J_{123}$$

darstellen, wo die Gröfsen $J_{\varkappa\lambda\mu}$ die partiellen Ableitungen der absoluten Invariante J nach den Gröfsen $a_{\varkappa\lambda\mu}$ bedeuten und zwar multiplicirt mit 1, 3 oder 6, je nachdem von den Indices $\varkappa$, λ, μ alle drei einander gleich, nur zwei einander gleich, oder alle von einander verschieden sind.

Die sämmtlichen $J_{\varkappa\lambda\mu}$ haben wegen (1.) den gemeinschaftlichen Factor $\frac{2S^2}{T^3}$, man kann daher in Folge der obigen Proportion als Auflösungen des Systems (3.) die Ausdrücke

$$(4.) \qquad p_{\varkappa\lambda\mu} = T.s_{\varkappa\lambda\mu} - S.t_{\varkappa\lambda\mu}$$

betrachten, welche in Bezug auf die Gröfsen $a_{\varkappa\lambda\mu}$ von der 9^{ten} Ordnung sind, und *daher bis auf einen numerischen Factor mit den partiellen Determinanten des Systems* (3.), *welche von derselben Ordnung sind, übereinstimmen müssen.*

Bildet man die zugehörige Form, welche der absoluten Invariante entspricht, so hat man

$$(5.) \qquad J_f(u_1, u_2, u_3) = \Sigma J_{\varkappa\lambda\mu} u_\varkappa u_\lambda u_\mu.$$

Da aber auch die Gröfsen $p_{\varkappa\lambda\mu}$ als Coefficienten einer zugehörigen Form betrachtet werden können, so sei

$$(6.) \qquad \Sigma p_{\varkappa\lambda\mu} u_\varkappa u_\lambda u_\mu = P_f(u_1, u_2, u_3)$$

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

gesetzt; dann ist

$$(7.)\qquad J_f(u_1, u_2, u_3) = \frac{2S^2}{T^3} P_f(u_1, u_2, u_3),$$

und man kann alle auf J_f bezüglichen Untersuchungen an die einfachere Form P_f anknüpfen. Diese ist aber eine der wichtigsten der vorliegenden Theorie und ich will sie aus Gründen, die im folgenden Paragraph entwickelt werden, die *conjugirte zugehörige Form* nennen. Bildet man dieselbe für die transformirte Form f', so ist leicht ersichtlich, dafs

$$(8.)\qquad P'_f(U_1, U_2, U_3) = r^{10}.P_f(u_1, u_2, u_3)$$

ist, weil nach (4.) die Bildung von P_f aus S_f und T_f durch die Gleichung

$$(9.)\qquad P_f(u_1, u_2, u_3) = T.S_f(u_1, u_2, u_3) - S.T_f(u_1, u_2, u_3)$$

ausgedrückt wird.

Von der conjugirten zugehörigen Form.

§. 27.

Aus den Gleichungen (§. 26 (3.))

$$(1.)\qquad \Sigma a_{\varrho\varkappa\lambda} p_{\sigma\varkappa\lambda} = 0,$$

welche die Coefficienten der conjugirten Form P_f liefern, folgt, dafs umgekehrt, wenn man die Coefficienten $p_{\varkappa\lambda\mu}$ als gegeben ansieht, die Coefficienten $a_{\varkappa\lambda\mu}$ genau dieselben Functionen der $p_{\varkappa\lambda\mu}$ sind, wie die $p_{\varkappa\lambda\mu}$ von $a_{\varkappa\lambda\mu}$ waren, weil die Gleichungen (1.) in Bezug auf beide Systeme symmetrisch sind. Hieraus folgt:

Theorem 21.

Die gegebene Form $f(x_1, x_2, x_3)$ und die conjugirte $P_f(u_1, u_2, u_3)$ stehen in der Beziehung zu einander, dafs gegenseitig die eine die conjugirte der andern ist.

Dieses Theorem zeigt, dafs P_f diejenige zugehörige Form der cubischen Formen ist, welche sich in einer sehr wichtigen Eigenschaft den zugehörigen Formen der homogenen Functionen zweiten Grades analog verhält.

Bezeichnet man demnach durch

$$P_p(x_1, x_2, x_3)$$

die conjugirte zugehörige Form zu

$$P_f(u_1, u_2, u_3),$$

so ist

$$(2.)\qquad P_p(x_1, x_2, x_3) = K.f(x_1, x_2, x_3),$$

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

wo K einen constanten Factor bedeutet, welcher von der 80sten Ordnung in Bezug auf die Coefficienten $a_{\varkappa\lambda\mu}$ ist, weil P_p in Bezug auf dieselben Gröfsen von der Ordnung 9^2 werden mufs. Der Werth für K ist übrigens

$$K = -32 R^6 S^2,$$

wie ich anderweitig zeigen werde. Führt man ferner die Coefficienten $p_{\varkappa\lambda\mu}$ in die Gleichungen des 18ten und 19ten Theorems ein, so entsteht

$$\begin{aligned}\Sigma b_{1\varkappa\lambda} p_{1\varkappa\lambda} &= \Sigma b_{1\varkappa\lambda}(T.s_{1\varkappa\lambda} - S.t_{1\varkappa\lambda}) \\ &= T.\Sigma b_{1\varkappa\lambda} s_{1\varkappa\lambda} - S\Sigma b_{1\varkappa\lambda} t_{1\varkappa\lambda},\end{aligned}$$

also mit Berücksichtigung der genannten Theoreme

$$\Sigma b_{1\varkappa\lambda} p_{1\varkappa\lambda} = 2(T^2 - S^3).$$

Bezeichnet man noch durch

$$(3.) \qquad R = T^2 - S^3$$

die Constante auf der rechten Seite, so hat man:

Theorem 22.

Die Coefficienten $p_{\varkappa\lambda\mu}$ der conjugirten Form genügen den folgenden Gleichungen:

$$(4.) \quad \begin{cases} \Sigma b_{1\varkappa\lambda} p_{1\varkappa\lambda} = 2R, & \Sigma b_{1\varkappa\lambda} p_{2\varkappa\lambda} = 0, \quad \Sigma b_{1\varkappa\lambda} p_{3\varkappa\lambda} = 0, \\ \Sigma b_{2\varkappa\lambda} p_{1\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma b_{2\varkappa\lambda} p_{2\varkappa\lambda} = 2R, \quad \Sigma b_{2\varkappa\lambda} p_{3\varkappa\lambda} = 0, \\ \Sigma b_{3\varkappa\lambda} p_{1\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma b_{3\varkappa\lambda} p_{2\varkappa\lambda} = 0, \quad \Sigma b_{3\varkappa\lambda} p_{3\varkappa\lambda} = 2R, \end{cases}$$

und es ist in Folge dessen

$$R = T^2 - S^3 = 0$$

das Eliminationsresultat der Variabeln x_1, x_2, x_3 aus den quadratischen Gleichungen:

$$(5.) \qquad \frac{df}{dx_1} = 0, \qquad \frac{df}{dx_2} = 0, \qquad \frac{df}{dx_3} = 0.$$

Der 2te Theil des Theorems folgt aus der bekannten Darstellung dieses Eliminationsresultats, welche Herr *Hesse* (Bd. 28, S. 68 dieses Journals) gegeben hat, und zwar hat man, da aus (5.) die 9 Gleichungen

$$(6.) \quad \begin{cases} x_1 \frac{df}{dx_1} = 0, & x_1 \frac{df}{dx_2} = 0, & x_1 \frac{df}{dx_3} = 0, \\ x_2 \frac{df}{dx_1} = 0, & x_2 \frac{df}{dx_2} = 0, & x_2 \frac{df}{dx_3} = 0, \\ x_3 \frac{df}{dx_1} = 0, & x_3 \frac{df}{dx_2} = 0, & x_3 \frac{df}{dx_3} = 0 \end{cases}$$

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

hervorgehen, deren Coefficienten mit denen des §. 26 (3.) übereinstimmen, zunächst

$$(7.)\qquad x_1 x_1 x_1 : x_1 x_1 x_2 : \ldots : x_1 x_2 x_3 = p_{111} : p_{112} : \ldots : p_{123}.$$

Da aber die Gleichungen (5.) sich auch wie folgt schreiben lassen:

$$(8.)\qquad \begin{cases} x_1 A_{11} + x_2 A_{12} + x_3 A_{13} = 0, \\ x_1 A_{21} + x_2 A_{22} + x_3 A_{23} = 0, \\ x_1 A_{31} + x_2 A_{32} + x_3 A_{33} = 0, \end{cases}$$

so erhält man nach §. 11 (6.) durch Elimination der explicite stehenden Variabeln x_1, x_2, x_3

$$(9.)\qquad 0 = \Delta f(x_1, x_2, x_3) = \Sigma b_{\varkappa\lambda\mu} x_\varkappa x_\lambda x_\mu$$

und demnach durch Substitution von (7.) in (9.)

$$0 = \Sigma b_{\varkappa\lambda\mu} p_{\varkappa\lambda\mu}.$$

Die Addition der in der Diagonale von (4.) stehenden Gleichungen giebt aber die identische Gleichung:

$$(10.)\qquad 6R = \Sigma b_{\varkappa\lambda\mu} p_{\varkappa\lambda\mu},$$

also ist

$$R = 0$$

das in Rede stehende Eliminationsresultat.

Es verdient noch hervorgehoben zu werden, dafs die Werthe (7.), welche nach Erfüllung der Gleichung $R = 0$ den Gleichungen (5.) genügen, durch (7.) in expliciter Form gegeben sind und zwar durch den Satz, dafs *ihre Verhältnisse den Verhältnissen der partiellen Ableitungen der absoluten Invariante nach den entsprechenden $a_{\varkappa\lambda\mu}$ gleich sind.*

Schreibt man die Gleichungen in der ersten Verticalreihe von §. 26 (3.) und der ersten Verticalreihe von (4.) neben einander *und setzt* $R = 0$, so entstehen die Gleichungen:

$$(11.)\qquad \begin{cases} \Sigma p_{1\varkappa\lambda} a_{1\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma p_{1\varkappa\lambda} b_{1\varkappa\lambda} = 0, \\ \Sigma p_{1\varkappa\lambda} a_{2\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma p_{1\varkappa\lambda} b_{2\varkappa\lambda} = 0, \\ \Sigma p_{1\varkappa\lambda} a_{3\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma p_{1\varkappa\lambda} b_{3\varkappa\lambda} = 0, \end{cases}$$

aus welchen nach Elimination der 6 Gröfsen $p_{1\varkappa\lambda}$ wieder die Bedingungsgleichung $R = 0$ hervorgehen mufs. Es stimmt diese Darstellungsweise mit der zweiten von Herrn *Hesse* gegebenen, welche darin besteht, dafs man aus

$$\frac{df}{dx_1} = 0,\quad \frac{df}{dx_2} = 0,\quad \frac{df}{dx_3} = 0;\quad \frac{d\Delta f}{dx_1} = 0,\quad \frac{d\Delta f}{dx_2} = 0,\quad \frac{d\Delta f}{dx_3} = 0$$

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

die 6 Produkte $x_\varkappa x_\lambda$ zu eliminiren hat, offenbar überein. Bemerkt man nun, dafs die Determinante der Gleichungen (11.) in Bezug auf die Gröfsen $a_{\varkappa\lambda\mu}$ von der 12ten Ordnung ist, also keinen überflüssigen Factor enthalten kann, weil R von der 12ten Ordnung ist, und der etwaige Zahlenfactor, wie sich an jedem speciellen Beispiele sogleich zeigen läfst, $=1$ ist, so folgt schliefslich:

$$(12.)\quad R = \begin{vmatrix} a_{111}, & a_{122}, & a_{133}, & a_{123}, & a_{113}, & a_{112} \\ a_{211}, & a_{222}, & a_{233}, & a_{223}, & a_{213}, & a_{212} \\ a_{311}, & a_{322}, & a_{333}, & a_{323}, & a_{313}, & a_{312} \\ b_{111}, & b_{122}, & b_{133}, & b_{123}, & b_{113}, & b_{112} \\ b_{211}, & b_{222}, & b_{233}, & b_{223}, & b_{213}, & b_{212} \\ b_{311}, & b_{322}, & b_{333}, & b_{323}, & b_{313}, & b_{312} \end{vmatrix} = \Sigma \pm a_{111} a_{222} a_{333} b_{123} b_{213} b_{312}.$$

Diese Formel ist zwar zur wirklichen Auswerthung weniger brauchbar, sie dient aber als bequemes Hülfsmittel zur Führung von Beweisen.

Aus der Invariante R entspringt eine zugehörige Form dritter Ordnung, deren Coefficienten die partiellen Ableitungen von R nach den Gröfsen $a_{\varkappa\lambda\mu}$ sind. Man bezeichne diese Form durch

$$(13.)\quad R_f(u_1 u_2 u_3) = \Sigma r_{\varkappa\lambda\mu} u_\varkappa u_\lambda u_\mu,$$

indem man

$$(14.)\quad r_{\varkappa\varkappa\varkappa} = \tfrac{1}{2}\frac{dR}{da_{\varkappa\varkappa\varkappa}},\quad 3r_{\varkappa\varkappa\lambda} = \tfrac{1}{2}\frac{dR}{da_{\varkappa\varkappa\lambda}},\quad 6r_{\varkappa\lambda\mu} = \tfrac{1}{2}\frac{dR}{da_{\varkappa\lambda\mu}}$$

setzt; dann findet man durch Differentiation von

$$R = T^2 - S^3:$$

$$(15.)\quad \begin{cases} r_{\varkappa\lambda\mu} = T.t_{\varkappa\lambda\mu} - S^2 s_{\varkappa\lambda\mu} \\ R_f = T.T_f - S^2 S_f. \end{cases}$$

Da nun

$$\Sigma a_{1\varkappa\lambda} t_{1\varkappa\lambda} = 2T,\qquad \Sigma a_{1\varkappa\lambda} s_{1\varkappa\lambda} = 2S$$

ist, so erhält man

$$\Sigma a_{1\varkappa\lambda} r_{1\varkappa\lambda} = T\Sigma a_{1\varkappa\lambda} t_{1\varkappa\lambda} - S^2 \Sigma a_{1\varkappa\lambda} s_{1\varkappa\lambda} = 2(T^2 - S^3) = 2R,$$

und wenn man mit den übrigen analogen Gleichungen ebenso verfährt, das folgende System:

$$(16.)\quad \begin{cases} \Sigma a_{1\varkappa\lambda} r_{1\varkappa\lambda} = 2R, & \Sigma a_{1\varkappa\lambda} r_{2\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma a_{1\varkappa\lambda} r_{3\varkappa\lambda} = 0, \\ \Sigma a_{2\varkappa\lambda} r_{1\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma a_{2\varkappa\lambda} r_{2\varkappa\lambda} = 2R, & \Sigma a_{2\varkappa\lambda} r_{3\varkappa\lambda} = 0, \\ \Sigma a_{3\varkappa\lambda} r_{1\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma a_{3\varkappa\lambda} r_{2\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma a_{3\varkappa\lambda} r_{3\varkappa\lambda} = 2R. \end{cases}$$

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

Ferner, da

$$\Sigma b_{1\varkappa\lambda} t_{1\varkappa\lambda} = 2S^2, \qquad \Sigma b_{1\varkappa\lambda} s_{1\varkappa\lambda} = 2T$$

ist:

$$\Sigma b_{1\varkappa\lambda} r_{1\varkappa\lambda} = 2(TS^2 - S^2 T) = 0,$$

also

$$(17.)\quad \begin{cases} \Sigma b_{1\varkappa\lambda} r_{1\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma b_{1\varkappa\lambda} r_{2\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma b_{1\varkappa\lambda} r_{3\varkappa\lambda} = 0, \\ \Sigma b_{2\varkappa\lambda} r_{1\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma b_{2\varkappa\lambda} r_{2\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma b_{2\varkappa\lambda} r_{3\varkappa\lambda} = 0, \\ \Sigma b_{3\varkappa\lambda} r_{1\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma b_{3\varkappa\lambda} r_{2\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma b_{3\varkappa\lambda} r_{3\varkappa\lambda} = 0. \end{cases}$$

Das System (17.) zeigt, dafs die $r_{\varkappa\lambda\mu}$ den Bedingungen genügen, welche die Coefficienten der zur Covariante Δf conjugirten Form erfüllen müssen und giebt daher den Satz, dafs die conjugirte Form der Covariante Δf bis auf einen constanten Factor die zugehörige Form R_f ist, oder dafs man hat

$$(18.)\quad P_{\Delta f}(u_1, u_2, u_3) = C . R_f(u_1, u_2, u_3),$$

wo C ein Factor der 16ten Ordnung in Bezug auf die Gröfsen $a_{\varkappa\lambda\mu}$ ist.

Dafs die Coefficienten von $P_{\Delta f}$ sich durch die Coefficienten von R_f, welche von der 11ten Ordnung sind, und durch einen gemeinschaftlichen Factor ausdrücken lassen, hat in einer andern Form bereits Herr *Hesse* in seiner Abhandlung im 28sten Bande dieses Journals bewiesen, denn bezeichnet man nach derselben durch $q_{\varkappa\lambda\mu}$ die Unbekannten eines Systems von Gleichungen, welches aus (17.) hervorgeht, wenn man statt der $r_{\varkappa\lambda\mu}$ die $q_{\varkappa\lambda\mu}$ substituirt, so kann man die $q_{\varkappa\lambda\mu}$ als die partiellen Determinanten des Systems (17.) und daher als die aus den $b_{\varkappa\lambda\mu}$ gebildeten $p_{\varkappa\lambda\mu}$ definiren. Herr *Hesse* hat auch bereits den Beweis geführt, dafs C ein vollständiges Quadrat ist; wir werden später C selbst darstellen.

Verlangt man endlich, dafs

$$(19.)\quad \Sigma(a a_{1\varkappa\lambda} + b b_{1\varkappa\lambda})(A p_{1\varkappa\lambda} + B r_{1\varkappa\lambda}) = 0,$$

indem man a und b als gegebene, A und B als gesuchte Constanten betrachtet, so ergiebt sich durch Auflösung der Parenthesen in (19.) mit Rücksicht auf §. 26 (3.), §. 27 (4.) (16.) (17.)

$$2R(Ab + Ba) = 0$$

oder

$$Ab + Ba = 0$$

als Bedingung, unter welcher sämmtliche 9 mit (19.) analoge Gleichungen befriedigt werden können. Man kann daher setzen

$$A = a, \qquad B = -b,$$

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

und es ist dann

$$\Sigma(a a_{\varrho\varkappa\lambda} + b b_{\varrho\varkappa\lambda})(a p_{\sigma\varkappa\lambda} - b r_{\sigma\varkappa\lambda}) = 0$$

für alle Werthe 1, 2, 3, welche die bei der Summation constanten Indices ϱ, σ annehmen können. Es folgt daher, *dafs die conjugirte zugehörige Form der zusammengesetzten homogenen Function $af + b\Delta f$ bis auf einen constanten Factor durch $aP_f - bR_f$ dargestellt werden kann.*

Bemerkt man nun noch, dafs die Operation δ die Gleichung

$$\delta f = \Delta f$$

giebt, ferner, dafs

$$\begin{aligned}\delta P_f &= \delta(T.S_f - S.T_f) \quad (\S.\,26\ (9.))\\ &= \delta T.S_f + T.\delta S_f - \delta S.T_f - S.\delta T_f\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\delta S &= 4T, \quad \delta S_f = 3T_f \quad (\S.\,18\ (4.))\\ \delta T &= 6S^2, \quad \delta T_f = 5S.S_f \quad (\S.\,23\ (14.)\ (15.))\end{aligned}$$

ist, so folgt

$$(19.^*) \qquad \delta P_f = S^2.S_f - T.T_f = -R_f.$$

Man kann daher δf statt Δf und $-\delta P_f$ statt R_f setzen und erhält dann

Theorem 23.

Die conjugirte zugehörige Form der zusammengesetzten Function

$$af + b\delta f = af + b\Delta f$$

ist von der Form:

$$(20.) \qquad P_{af+b\delta f} = L(aP_f + b\delta P_f) = L(aP_f - bR_f),$$

wo L einen von den Variabeln unabhängigen Factor vorstellt.

Da die Form $P_{af+b\delta f}$ in Bezug auf a und b von der 9ten Ordnung ist, so mufs L in Bezug auf diese Gröfsen von der 8ten werden. Der vorstehende Satz ist dadurch merkwürdig, dafs sich 8 Ordnungen in einem Factor abtrennen lassen.

Diese Eigenschaft führt in der That zu einem zweiten für die conjugirten Formen höchst wichtigen Theorem.

Man beachte, dafs R_f bis auf einen Factor die conjugirte Form zu Δf ist, wie ich unter (18.) bewiesen habe; hieraus folgt, dafs

$$(21.) \qquad R_{af+b\Delta f} = L_1(\alpha P_f - \beta R_f)$$

ist, wenn L_1 einen andern Factor bezeichnet, und wie im §. 13

$$\Delta(af + b\Delta f) = \alpha f + \beta\Delta f$$

gesetzt wird.

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

Es ist ferner

$$\Sigma p_{\varkappa\lambda\mu} b_{\varkappa\lambda\mu} = \Sigma r_{\varkappa\lambda\mu} a_{\varkappa\lambda\mu}$$

weil beide Summen $= 6R$ sind, daher auch, wenn man dieselbe Gleichung für die zusammengesetzte Function $af + b\Delta f$ bildet, wegen (20.) und (21.):

$$L\Sigma(ap_{\varkappa\lambda\mu} - br_{\varkappa\lambda\mu})(\alpha a_{\varkappa\lambda\mu} + \beta b_{\varkappa\lambda\mu}) = L_1(\alpha p_{\varkappa\lambda\mu} - \beta r_{\varkappa\lambda\mu})(a.a_{\varkappa\lambda\mu} + b.b_{\varkappa\lambda\mu})$$

oder, wenn man die Parenthesen wie bei (19.) auflöst:

$$L(a\beta - b\alpha) = L_1(b\alpha - a\beta)$$

oder

$$(22.) \qquad L = -L_1,$$

d. h. die beiden Factoren von (20.) und (21.) sind einander gleich und entgegensetzt.

Wenn man zuerst die Operation δ auf eine Function z. B. P_f anwenden, und dann die erhaltene Form für die zusammengesetzte Function bilden soll, so ist es nöthig, dieses in der Bezeichnungsweise hervortreten zu lassen, weil $\delta P_{af+b\Delta f}$ die Umkehrung der Reihenfolge beider Prozesse bedeuten würde, und ein anderes Resultat zur Folge hätte. Ich will daher $(\delta P)_{af+b\Delta f}$ für die erste Reihenfolge schreiben. Mit Rücksicht hierauf und wegen (19.*) und (22.) geht (21.) über in

$$(23.) \qquad (\delta P)_{af+b\Delta f} = L(\alpha P_f + \beta\delta P_f).$$

Die einander analogen Darstellungsweisen von $P_{af+b\Delta f}$ und $(\delta P)_{af+b\Delta f}$ führen nun zu dem folgenden auf (22.) beruhenden Theorem.

Theorem 24.

Wenn man aus den beiden zu f und Δf conjugirten Formen in Verbindung mit f und $\Delta f = \delta f$ die Determinante

$$(24.) \qquad \begin{vmatrix} P_f, & \delta P_f \\ f, & \delta f \end{vmatrix} = P_f\delta f - f\delta P_f$$

bildet, so erhält man eine Function von beiden Systemen von Variabeln (eine Zwischenform), welche durch die Substitution

$$a.a_{\varkappa\lambda\mu} + b.b_{\varkappa\lambda\mu} \quad \text{für} \quad a_{\varkappa\lambda\mu}$$

immer sich selbst reproducirt, multiplicirt mit dem Factor $L(\beta a - \alpha b)$.

Bildet man nämlich

$$\begin{vmatrix} P_{af+b\Delta f}, & (\delta P)_{af+b\Delta f} \\ af + b\Delta f, & \Delta(af + b\Delta f) \end{vmatrix}$$

welches der Werth der Function (24.) nach der Substitution ist, so kann

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

man wegen (20.) und (23.) dafür setzen

$$L.\begin{vmatrix} a\boldsymbol{P}_f + b\,\delta\boldsymbol{P}_f, & \alpha\boldsymbol{P}_f + \beta\,\delta\boldsymbol{P}_f \\ af + b\,\delta f, & \alpha f + \beta\,\delta f \end{vmatrix}$$

und diese Determinante geht in das Produkt

$$L.\begin{vmatrix} a, & b \\ \alpha, & \beta \end{vmatrix}.\begin{vmatrix} \boldsymbol{P}_f, & \delta\boldsymbol{P}_f \\ f, & \delta f \end{vmatrix}$$

über, w. z. b. w.

Ueber die Grundformen der zusammengesetzten Function $af+b\Delta f$.

§. 28.

Die weitere Entwicklung der vorstehenden Formen hängt von der Theorie der Grundformen für die zusammengesetzte Function $af+b\Delta f$ ab, von welcher bereits in meiner Abhandlung im 39sten Bande dieses Journals die Grundzüge sich vorfinden. Herr *Cayley* hat später einen grofsen Theil der übrigen Formen (Philosophical Transactions vol. 146, p. 638) veröffentlicht. Indessen geben die folgenden Darstellungen auch für diese einen ganz neuen Gesichtspunkt, da sie dahin gerichtet sind den Zusammenhang der Formen unter einander kennen zu lehren, während die übrigens sehr schätzbare Zusammenstellung des Herrn *Cayley* nur die letzten gänzlich aufgelösten Formeln ohne Entwicklungen und Beweise enthält.

Es sollen durch

$$\boldsymbol{S}_{ab}, \quad \boldsymbol{T}_{ab}, \quad \boldsymbol{R}_{ab}$$

die beiden Invarianten und die Discriminante bezeichnet werden, und ich beginne mit der Berechnung von $\boldsymbol{R}_{ab}$. Dieselbe läfst sich zwar nachträglich noch anders geben, wird aber auf sehr zweckmäfsige Weise dadurch ausgeführt, dafs man die Darstellung von $\boldsymbol{R}$ durch die Determinante §. 27 (12.) benutzt.

Bezeichnet man nämlich wie früher den Werth von $\Delta(af+b\Delta f)$ durch

$$\Delta(af+b\Delta f) = \alpha f+\beta\Delta f,$$

so wird

$$\boldsymbol{R}_{ab} = \Sigma\pm(aa_{111}+bb_{111})(aa_{222}+bb_{222})(aa_{333}+bb_{333})(\alpha a_{123}+\beta b_{123})(\alpha a_{213}+\beta b_{213})(\alpha a_{312}+\beta b_{312})$$

und nach dem bekannten Fundamentaltheorem der Determinanten:

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

$$R_{ab} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & b \\ \alpha & 0 & 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & \beta \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_{111}, & a_{122}, & a_{133}, & a_{123}, & a_{113}, & a_{112} \\ a_{211}, & a_{222}, & a_{233}, & a_{223}, & a_{213}, & a_{212} \\ a_{311}, & a_{322}, & a_{333}, & a_{323}, & a_{313}, & a_{312} \\ b_{111}, & b_{122}, & b_{133}, & b_{123}, & b_{113}, & b_{112} \\ b_{211}, & b_{222}, & b_{233}, & b_{223}, & b_{213}, & b_{212} \\ b_{311}, & b_{322}, & b_{333}, & b_{323}, & b_{313}, & b_{312} \end{vmatrix}.$$

Der erste Factor der rechten Seite zerfällt nach demselben Theorem in folgende drei Factoren

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & \beta \end{vmatrix},$$

von denen jeder den Werth $\beta a - \alpha b$ hat, daher folgt, wenn man

$$(1.) \qquad G = \beta a - \alpha b$$

setzt:

$$(2.) \qquad R_{ab} = (\beta a - \alpha b)^3 R = G^3 . R.$$

Ich habe die Operation δ, wenn sie auf eine Function $\varphi(a, b)$ der Gröfsen $a . a_{\varkappa\lambda\mu} + b . b_{\varkappa\lambda\mu}$ in dem Sinne anzuwenden ist, dafs man nach den Gröfsen $(a . a_{\varkappa\lambda\mu} + b . b_{\varkappa\lambda\mu})$ differentiiren und statt der Incremente die entsprechenden Coefficienten $(\alpha a_{\varkappa\lambda\mu} + \beta b_{\varkappa\lambda\mu})$ der Function $\Delta(af + b\Delta f)$ substituiren soll, durch $(\delta\varphi)$ bezeichnet, damit sie mit derselben Operation $\delta\varphi$, auf die $a_{\varkappa\lambda\mu}$ allein angewandt, nicht verwechselt werde.

Es ist wichtig diesen Prozefs auf die einfachste Weise bewerkstelligen zu können. Hierzu bemerke man, dafs

$$(3.) \qquad \begin{cases} \Sigma \dfrac{d\varphi(a, b)}{d(a . a_{\varkappa\lambda\mu} + b . b_{\varkappa\lambda\mu})} a_{\varkappa\lambda\mu} = \dfrac{d\varphi(a, b)}{da}, \\[2ex] \Sigma \dfrac{d\varphi(a, b)}{d(a . a_{\varkappa\lambda\mu} + b . b_{\varkappa\lambda\mu})} b_{\varkappa\lambda\mu} = \dfrac{d\varphi(a, b)}{db} \end{cases}$$

ist, also

$$\Sigma! \frac{d\varphi(a, b)}{d(a . a_{\varkappa\lambda\mu} + b . b_{\varkappa\lambda\mu})} (\alpha a_{\varkappa\lambda\mu} + \beta b_{\varkappa\lambda\mu}) = \alpha \frac{d\varphi(a, b)}{da} + \beta \frac{d\varphi(a, b)}{db},$$

d. h. kürzer geschrieben:

$$(4.) \qquad (\delta\varphi) = \alpha \frac{d\varphi}{da} + \beta \frac{d\varphi}{db}.$$

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

Statt also die Operation (δ) in dem definirten Sinne auszuführen, hat man nur nach den Gröfsen a und b zu differentiiren und statt der Incremente respective α und β zu substituiren.

Man kann diesem Satze eine noch geeignetere Form geben. Wenn man nämlich beachtet, dafs

$$\delta S = 4T, \qquad \delta T = 6S^2$$

ist, so folgt

$$\delta R = \delta(T^2 - S^3) = 2T.\delta T - 3S.^2\delta S = 0;$$

daher ist auch

$$(\delta R)_{ab} = 0,$$

und weil

$$R_{ab} = G^3 R,$$

R aber von a und b unahhängig ist,

$$(5.) \quad (\delta G) = 0,$$

oder

$$\frac{dG}{da}\alpha + \frac{dG}{db}\beta = 0.$$

G ist eine binäre biquadratische Form in Bezug auf a und b, weil R_{ab} und demnach auch G^3 von der 12^{ten} Ordnung ist, daher folgt

$$\frac{dG}{da}a + \frac{dG}{db}b = 4G,$$

also durch Entwicklung aus den beiden letzten Gleichungen:

$$(6.) \quad \tfrac{1}{4}\frac{dG}{da} = \beta, \qquad \tfrac{1}{4}\frac{dG}{db} = -\alpha,$$

wenn man (1.) berücksichtigt.

Die vorstehenden Gleichungen, so wie die explicite Darstellung der höchst merkwürdigen binären Form G habe ich schon in meiner Abhandlung in Bd. 39, S. 154 dieses Journals gegeben. Ich werde auch hier gleich darauf eingehen, will aber zuvor eine wichtige Anwendung der Gleichungen (6.) zeigen.

Substituirt man nämlich die Werthe von α und β aus (6.) in (4.), so entsteht:

$$(7.) \quad (\delta\varphi) = \tfrac{1}{4}\left(\frac{dG}{da}\frac{d\varphi}{db} - \frac{dG}{db}\frac{d\varphi}{da}\right) = \begin{vmatrix} \tfrac{1}{4}\frac{dG}{da}, & \tfrac{1}{4}\frac{dG}{db} \\ \frac{d\varphi}{da}, & \frac{d\varphi}{db} \end{vmatrix};$$

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

man nennt aber bekanntlich den letzten Ausdruck die ***Functionaldeterminante*** der beiden binären Formen $\frac{1}{4}G$ und φ, daher folgt:

Theorem 25.

Wenn man aus einer (constanten oder veränderlichen) Grundform A der homogenen Function f die Grundform B dadurch erhalten kann, dafs man A nach den Constanten $a_{\varkappa\lambda\mu}$ differentiirt und statt der Incremente die entsprechenden Coefficienten $b_{\varkappa\lambda\mu}$ von Δf substituirt, so findet man aus derselben Grundform A_{ab} für die zusammengesetzte Function $af+b\Delta f$ die analoge B_{ab}, wenn man die Functionaldeterminante der beiden binären Formen

$$\tfrac{1}{4}G \text{ und } A_{ab}$$

bildet, also

$$(8.)\qquad B_{ab}=(\delta A)_{ab}=\begin{vmatrix}\frac{1}{4}\frac{dG}{da}, & \frac{1}{4}\frac{dG}{db}\\ \frac{dA_{ab}}{da}, & \frac{dA_{ab}}{db}\end{vmatrix}.$$

Man beachte, dafs zur Darstellung dieses Theorems die bereits §. 13 (9.) berechneten Werthe für α und β nicht zur Anwendung gekommen sind.

Aus demselben folgt nun:

I) Da $\delta f=\Delta f$ ist:

$$(9.)\qquad \Delta_{af+b\Delta f}=\begin{vmatrix}\frac{1}{4}\frac{dG}{da}, & \frac{1}{4}\frac{dG}{db}\\ f, & \Delta f\end{vmatrix},$$

weil

$$\frac{d(af+b\Delta f)}{da}=f,$$

$$\frac{d(af+b\Delta f)}{db}=\Delta f.$$

II) Da $\delta S=4T$ ist:

$$(10.)\qquad T_{ab}=\tfrac{1}{4}\begin{vmatrix}\frac{1}{4}\frac{dG}{da}, & \frac{1}{4}\frac{dG}{db}\\ \frac{dS_{ab}}{da}, & \frac{dS_{ab}}{db}\end{vmatrix}.$$

III) Da $\delta P_f=-R_f$ ist (§. 27 (20.)):

$$(11.)\qquad R_{af+b\Delta f}=-\begin{vmatrix}\frac{1}{4}\frac{dG}{da}, & \frac{1}{4}\frac{dG}{db}\\ \frac{dP_{af+b\Delta f}}{da}, & \frac{dP_{af+b\Delta f}}{db}\end{vmatrix}.$$

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

IV) Da $\delta S_f = 3T_f$ ist:

$$(12.)\qquad T_{af+b\varDelta f} = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} \frac{1}{4}\frac{dG}{da}, & \frac{1}{4}\frac{dG}{db} \\ \frac{dS_{af+b\varDelta f}}{da}, & \frac{dS_{af+b\varDelta f}}{db} \end{vmatrix}.$$

Die Gleichung (9.) reproducirt nur die Gleichungen (6.), hingegen geben die drei andern Gleichungen ein sehr einfaches Gesetz zur Darstellung von

$$T_{ab},\quad R_{af+b\varDelta f},\quad T_{af+b\varDelta f},$$

wenn

$$S_{ab},\quad P_{af+b\varDelta f},\quad S_{af+b\varDelta f}$$

bekannt sind.

Es läfst sich aber auch S_{ab} durch eine Functionaldeterminante darstellen. Zu diesem Ende gehe ich zu der Gleichung

$$\delta\varDelta f = 3S.f \quad (\S.\,12\ (7.))$$

zurück, aus welcher

$$(\delta\varDelta)(af+b\varDelta f) = 3S_{ab}(af+b\varDelta f)$$

hervorgeht; andrerseits ist

$$(\delta\varDelta)(af+b\varDelta f) = \tfrac{1}{4}\left(\delta\left(\frac{dG}{da}\cdot\varDelta f - \frac{dG}{db}\cdot f\right)\right) \text{ wegen (9.)},$$

mithin folgt durch Identificirung beider Werthe:

$$(13.)\qquad \begin{cases} 3S_{ab}\,a = -\tfrac{1}{4}\left(\delta\frac{dG}{db}\right) \\ 3S_{ab}\,b = \tfrac{1}{4}\left(\delta\frac{dG}{da}\right). \end{cases}$$

Durch Ausführung der Operationen der rechten Seite folgt vermöge des 25sten Theorems:

$$3S_{ab}\,a = -\tfrac{1}{16}\left(\frac{dG}{da}\frac{d^2G}{db^2} - \frac{dG}{db}\frac{d^2G}{da\,db}\right)$$

$$3S_{ab}\,b = \tfrac{1}{16}\left(\frac{dG}{da}\frac{d^2G}{da\,db} - \frac{dG}{db}\frac{d^2G}{da^2}\right);$$

multiplicirt man die erste Gleichung mit $\frac{d^2G}{da\,db}$ die zweite mit $\frac{d^2G}{db^2}$ und addirt beide, so ergiebt sich

$$3S_{ab}\left(a\frac{d^2G}{da\,db} + b\frac{d^2G}{db^2}\right) = \tfrac{1}{16}\frac{dG}{db}\left(\left(\frac{d^2G}{da\,db}\right)^2 - \frac{d^2G}{da^2}\cdot\frac{d^2G}{db^2}\right),$$

und weil

$$a\frac{d^2G}{da\,db} + b\frac{d^2G}{db^2} = 3\frac{dG}{db}$$

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

ist:

$$S_{ab} = \tfrac{1}{144}\left(\left(\frac{d^2G}{da\,db}\right)^2 - \frac{d^2G}{da^2}\cdot\frac{d^2G}{db^2}\right),$$

oder

$$(14.)\qquad S_{ab} = -\begin{vmatrix} \frac{1}{12}\frac{d^2G}{da^2}, & \frac{1}{12}\frac{d^2G}{da\,db} \\ \frac{1}{12}\frac{d^2G}{da\,db}, & \frac{1}{12}\frac{d^2G}{db^2} \end{vmatrix}.$$

Die erste Invariante der zusammengesetzten Function** $af+b\Delta f$ **ist also die Functionaldeterminante der binären Form** G **selbst.

Um die Form G zu bilden, will ich die Werthe für α und β aus §. 13 (9.) benutzen. Diese sind

$$(15.)\qquad \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{4}\frac{dG}{db} = 3Sa^2b+6Tab^2+3S^2b^3, \\ \beta = \frac{1}{4}\frac{dG}{da} = a^3-3Sab^2-2Tb^3; \end{cases}$$

hieraus ergiebt sich

$$(16.)\qquad G = \tfrac{1}{4}\left(a\frac{dG}{da}+b\frac{dG}{db}\right) = a^4-6Sa^2b^2-8Tab^3-3S^2b^4,$$

und hieraus in Verbindung mit (14.):

$$(17.)\qquad \begin{cases} S_{ab} = -\begin{vmatrix} a^2-Sb^2, & -2Sab-2Tb^2 \\ -2Sab-2Tb^2, & -a^2S-4Tab-3S^2b^2 \end{vmatrix} \\ \text{oder} \\ S_{ab} = a^4S+4a^3bT+6a^2b^2S^2+4ab^3ST+b^4(4T^2-3S^3), \end{cases}$$

ferner wegen (10.):

$$(18.)\qquad \begin{cases} T_{ab} = \\ \begin{vmatrix} (a^3-3Sab^2-2Tb^3), & (-3Sa^2b-6Tab^2-3S^2b^3) \\ (a^3S+3a^2bT+3ab^2S^2+b^3ST), & (a^3T+3a^2bS^2+3ab^2ST+(4T^2-3S^3)b^3) \end{vmatrix} \\ \text{oder} \\ T_{ab} = a^6T+6a^5bS^2+15a^4b^2ST+20a^3b^3T^2+15a^2b^4S^2T \\ \qquad +6S(-2T^2+3S^3)ab^5+T(-8T^2+9S^3)b^6. \end{cases}$$

Wenn man die Zusammensetzung dieser beiden Invarianten nur in den expliciten zweiten Formen (17.), (18.) erhalten kann, was z. B. bei der Berechnung derselben durch die *Hesse*sche specielle Form eintritt, so dürfte es schwer sein

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

rückwärts zu dem Gesetze ihrer Bildungsweisen als Determinanten zu gelangen*).

Ich gehe jetzt zur Entwicklung der zugehörigen Form $P_{af+b\Delta f}$ über. Es ist bereits in §. 27 (20.) bewiesen, dafs

$$P_{af+b\Delta f} = L(aP_f - bR_f)$$

ist, und nur die Ermittlung von L noch übrig geblieben. Da aber

$$\Sigma p_{\varkappa\lambda\mu} b_{\varkappa\lambda\mu} = 6R$$

ist, so mufs

$$L\Sigma(ap_{\varkappa\lambda\mu} - br_{\varkappa\lambda\mu})\left(-\tfrac{1}{4}\frac{dG}{db}a_{\varkappa\lambda\mu} + \tfrac{1}{4}\frac{dG}{da}b_{\varkappa\lambda\mu}\right) = 6R_{ab}$$

sein, und mit Berücksichtigung der Gleichungen

$$\Sigma p_{\varkappa\lambda\mu} a_{\varkappa\lambda\mu} = 0, \quad \Sigma r_{\varkappa\lambda\mu} a_{\varkappa\lambda\mu} = \Sigma p_{\varkappa\lambda\mu} b_{\varkappa\lambda\mu} = 6R, \quad \Sigma r_{\varkappa\lambda\mu} b_{\varkappa\lambda\mu} = 0,$$

wenn man die Parenthesen auflöst:

$$\tfrac{1}{4}L\left(a\frac{dG}{da} + b\frac{dG}{db}\right).R = R_{ab} = G^3R \quad (2.);$$

es ist aber $G = \frac{1}{4}\left(a\frac{dG}{da} + b\frac{dG}{db}\right)$, also folgt

$$(19.) \qquad L = G^2$$

und

$$(20.) \qquad P_{af+b\Delta f} = G^2(aP_f - bR_f).$$

Die Determinante (11.) liefert hieraus den Werth für R_{ab} und zwar weil

$$(\delta G) = 0 \quad (5.)$$

ist:

$$(21.) \qquad R_{af+b\Delta f} = -G^2\begin{vmatrix} \frac{1}{4}\frac{dG}{da}, & \frac{1}{4}\frac{dG}{db} \\ P_f, & -R_f \end{vmatrix} = G^2\left(\tfrac{1}{4}\frac{dG}{db}P_f + \tfrac{1}{4}\frac{dG}{da}R_f\right).$$

Es ist schon in §. 27 (23.) bewiesen, dafs dieses Resultat entstehen mufste, wenn (20.) vorausgesetzt wird.

Die Form $R_{af+b\Delta f}$ stimmt mit der conjugirten Form zu $\Delta(af + b\Delta f)$ wegen §. 27 (18.) bis auf einen Factor überein; um denselben zu finden,

*) In dem mir während des Drucks dieser Abhandlung zu Gesicht gekommenen Januarhefte des *Liouville*schen Journals von 1858 finde ich eine Note des Herrn *Hermite*, nach welcher es diesem scharfsinnigen Geometer gelungen ist, die beiden Determinantenformen aus den von Herrn *Cayley* gegebenen expliciten Darstellungen der beiden Invarianten herauszuerkennen.

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

hat man nur in (20.) für a und b die Substitution

$$(22.) \qquad a = -\tfrac{1}{4}\frac{dG}{db}, \quad b = \tfrac{1}{4}\frac{dG}{da}$$

auszuführen, wodurch

$$P_{\Delta(af+b\Delta f)} = -\mathfrak{G}^2.\left(\tfrac{1}{4}\frac{dG}{db}P_f + \tfrac{1}{4}\frac{dG}{da}R_f\right)$$

entsteht, wenn man durch $\mathfrak{G}$ denjenigen Ausdruck bezeichnet, in welchen G durch diese Substitution übergeht. Die Ausführung derselben erfordert eine etwas complicirte Rechnung, welche auf folgende Weise vermieden werden kann. Man bestimme nämlich zuerst den Werth der einfachern Form $P_{\Delta f}$, indem man $a=0$, $b=1$ setzt, was wegen (16.)

$$(23.) \qquad P_{\Delta f} = -9S^4.R_f$$

liefert, woraus beiläufig der Factor C aus §. 27 (18.), nämlich

$$C = -9S^4$$

folgt. Aus (23.) geht aber sofort

$$P_{af+b\Delta f} = -9S_{ab}^4.R_{af+b\Delta f}$$

hervor, also wegen (21.)

$$(24.) \qquad P_{af+b\Delta f} = -9S_{ab}^4.G^2.\left(\tfrac{1}{4}\frac{dG}{db}P_f + \tfrac{1}{4}\frac{dG}{da}R_f\right)$$

und

$$(25.) \qquad \mathfrak{G} = 3S_{ab}^2.G.$$

Ich komme jetzt zu einem zweiten Prinzip, welches dem im Theorem 25. enthaltenen analog ist und sich auf die Bildung der zugehörigen Formen für die zusammengesetzte Function bezieht. Wenn irgend eine Invariante durch φ bezeichnet wird, so handelt es sich darum

$$\varphi_{af+b\Delta f} = \Sigma!\frac{d\varphi_{ab}}{d(a.a_{\varkappa\lambda\mu}+b.b_{\varkappa\lambda\mu})}u_\varkappa u_\lambda u_\mu$$

zu bilden, wenn die in φ_{ab} vorkommenden $b_{\varkappa\lambda\mu}$ in Functionen der $a_{\varkappa\lambda\mu}$ wirklich ausgedrückt, und mit den übrigen $a_{\varkappa\lambda\mu}$ vereinigt sind. Hierzu führt nun das 24ste Theorem, welches wegen (19.) und (20.), weil $\beta a - \alpha b = G$ ist, die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} P_{af+b\Delta f}, & (\delta P)_{af+b\Delta f} \\ af+b\Delta f, & \Delta(af+b\Delta f) \end{vmatrix} = G^3.\begin{vmatrix} P_f, & \delta P_f \\ f, & \delta f \end{vmatrix}$$

liefert. Wenn man die symbolische Substitution

$$x_\varkappa x_\lambda x_\mu = \frac{d\varphi_{ab}}{d(a\,a_{\varkappa\lambda\mu}+b\,b_{\varkappa\lambda\mu})}$$

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

auf diese Gleichung anwendet und bemerkt, dafs dadurch

$$af+b\Delta f = \gamma.\varphi_{ab}, \qquad \Delta(af+b\Delta f) = (\delta\varphi)_{ab}$$

wird, wo γ die Ordnung von φ in Bezug auf die Gröfsen $a_{\varkappa\lambda\mu}$ ist, ferner dafs wegen (3.)

$$f \text{ in } \frac{d\varphi_{ab}}{da}, \qquad \delta f \text{ in } \frac{d\varphi_{ab}}{db}$$

übergeht, so entsteht:

$$(26.) \qquad \begin{vmatrix} P_{af+b\Delta f}, & (\delta P)_{af+b\Delta f} \\ \gamma.\varphi_{ab}, & \delta\varphi_{ab} \end{vmatrix} = G^3 \begin{vmatrix} P_f, & \delta P_f \\ \frac{d\varphi_{ab}}{da}, & \frac{d\varphi_{ab}}{db} \end{vmatrix}.$$

Die linke Seite dieses Ausdrucks geht aber aus

$$\begin{vmatrix} P_f, & \delta P_f \\ \gamma.\varphi, & \delta\varphi \end{vmatrix} = P_f.\delta\varphi+\gamma.R_f.\varphi$$

hervor, wenn man statt $a_{\varkappa\lambda\mu}$ überall $a.a_{\varkappa\lambda\mu}+b.b_{\varkappa\lambda\mu}$ substituirt, *und $P_f.\delta\varphi+\gamma.R_f.\varphi$ hat die merkwürdige Eigenschaft, die Zusammensetzung der zugehörigen Form dritter Ordnung φ_f durch P_f und R_f zu liefern, während φ eine beliebige Invariante ist, über deren Zusammensetzung keine Voraussetzung gemacht wird.* Da nämlich φ eine Function von S und T sein mufs, so ist

$$d\varphi = \frac{d\varphi}{dS}dS+\frac{d\varphi}{dT}dT,$$

also wird auch φ_f eine Function von S_f und T_f, oder von P_f und R_f. Setzt man daher

$$\varphi_f = A.P_f+B.R_f,$$

und in dieser Gleichung auf beiden Seiten

$$a_{\varkappa\lambda\mu} \quad \text{statt} \quad u_\varkappa u_\lambda u_\mu,$$

so entsteht:

$$\gamma.\varphi = 6BR, \qquad B = \frac{\gamma.\varphi}{6R};$$

setzt man ferner auf beiden Seiten

$$b_{\varkappa\lambda\mu} \quad \text{statt} \quad u_\varkappa u_\lambda u_\mu,$$

so erhält man:

$$\delta\varphi = 6AR, \qquad A = \frac{\delta\varphi}{6R},$$

mithin:

$$(27.) \qquad \varphi_f = \frac{P_f.\delta\varphi+\gamma.R_f.\varphi}{6R},$$

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

oder:

$$(28.)\qquad \begin{vmatrix} P_f, & \delta P_f \\ \gamma.\varphi, & \delta\varphi \end{vmatrix} = 6R.\varphi_f.$$

Hienach geht die linke Seite von (26.) in

$$6R_{ab}.\varphi_{af+b\Delta f} = 6G.^3R.\varphi_{af+b\Delta f}$$

über, und es folgt, wenn man noch G^3 forthebt,

$$(29.)\qquad 6R.\varphi_{af+b\Delta f} = \begin{vmatrix} P_f, & \delta P_f \\ \frac{d\varphi_{ab}}{da}, & \frac{d\varphi_{ab}}{db} \end{vmatrix} = P_f\frac{d\varphi_{ab}}{db} + R_f\frac{d\varphi_{ab}}{da}.$$

Durch Vergleichung der Coefficienten von $u_\varkappa u_\lambda u_\mu$ auf beiden Seiten dieser Gleichung erhält man hieraus die gesuchten Differentialquotienten, nämlich:

$$(30.)\qquad \begin{cases} R\dfrac{d\varphi_{ab}}{d(a\,a_{\varkappa\lambda\mu}+b\,b_{\varkappa\lambda\mu})} = \dfrac{d\varphi_{ab}}{db}p_{\varkappa\lambda\mu} + \dfrac{d\varphi_{ab}}{da}r_{\varkappa\lambda\mu} \\ 2R\dfrac{d\varphi_{ab}}{d(a\,a_{\varkappa\varkappa\lambda}+b\,b_{\varkappa\varkappa\lambda})} = \dfrac{d\varphi_{ab}}{db}p_{\varkappa\varkappa\lambda} + \dfrac{d\varphi_{ab}}{da}r_{\varkappa\varkappa\lambda} \\ 6R\dfrac{d\varphi_{ab}}{d(a\,a_{\varkappa\varkappa\varkappa}+b\,b_{\varkappa\varkappa\varkappa})} = \dfrac{d\varphi_{ab}}{db}p_{\varkappa\varkappa\varkappa} + \dfrac{d\varphi_{ab}}{da}r_{\varkappa\varkappa\varkappa}. \end{cases}$$

Diese einfache Ausdrucksweise der Form $\varphi_{af+b\Delta f}$ durch P_f und R_f zeigt, dafs es zweckmässiger ist, zunächst diese zur Zusammensetzung zu verwenden, als S_f und T_f, da überdies durch die Gleichungen

$$(31.)\qquad P_f = T.S_f - S.T_f,\qquad R_f = T.T_f - S^2.S_f$$

die Uebertragung sehr leicht ist. Der Factor R, welcher auf der linken Seite auftritt, beseitigt sich sehr leicht jedesmal nach der Substitution von (31.), wenn die Gleichung

$$T^2 - S^3 = R$$

berücksichtigt wird.

Wendet man das Vorstehende auf $S_{af+b\Delta f}$ an, so hat man aus (17.)

$$\tfrac{1}{4}\frac{dS_{ab}}{da} = a^3S + 3a^2bT + 3ab^2S^2 + b^3ST,$$

$$\tfrac{1}{4}\frac{dS_{ab}}{db} = a^3T + 3a^2bS^2 + 3ab^2ST + (4T^2 - 3S^3)b^3$$

in die Gleichung:

$$4R.S_{af+b\Delta f} = \frac{dS_{ab}}{db}P_f + \frac{dS_{ab}}{da}R_f$$

zu substituiren, um $S_{af+b\Delta f}$ aus P_f und R_f zusammenzusetzen. Durch Sub-

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

stitution von (31.) ergiebt sich:

$$4R.S_{af+b\Delta f} = \left(T\frac{dS_{ab}}{da} - S^2\frac{dS_{ab}}{db}\right)S_f + \left(-S\frac{dS_{ab}}{da} + T\frac{dS_{ab}}{db}\right)T_f;$$

aber

$$T\frac{dS_{ab}}{da} - S^2\frac{dS_{ab}}{db} = 4(T^2-S^3)(a^3+3ab^2S+4Tb^3).$$

$$-S\frac{dS_{ab}}{da} + T\frac{dS_{ab}}{db} = 4(T^2-S^3)(3a^2b-3Sb^3),$$

also, wenn R gegen T^2-S^3 fortgelassen wird:

$$(32.)\qquad S_{af+b\Delta f} = (a^3+3ab^2S+4Tb^3)S_f + 3b(a^2-b^2S)\,T_f.$$

Auf ähnliche Weise liefse sich auch $T_{af+b\Delta f}$ aus (29.) entnehmen, man findet aber wegen des 25sten Theorems den Werth der letztern Function schneller aus (12.), nämlich

$$T_{af+b\Delta f} = \begin{vmatrix} a^3-3Sab^2-2Tb^3, & -3Sa^2b-6Tab^2-3S^2b^3 \\ (a^2+b^2S)S_f+2abT_f, & (2abS+4Tb^2)S_f+(a^2-3b^2S)T_f \end{vmatrix}$$

oder

$$(33.)\qquad T_{af+b\Delta f} = \begin{vmatrix} a^3-3Sab^2-2Tb^3, & -3Sa^2b-6Tab^2-3S^2b^3 \\ a^2+b^2S, & 2abS+4Tb^2 \end{vmatrix} S_f + \begin{vmatrix} a^3-3Sab^2-2Tb^3, & -3Sa^2b-6Tab^2-3S^2b^3 \\ 2ab, & a^2-3b^2S \end{vmatrix} T_f.$$

Von den höhern Grundformen.

§. 29.

Ebenso wie vermittelst der beiden Invarianten S und T sich alle übrigen darstellen lassen, genügen auch zwei Zwischenformen unter Hinzufügung der evidenten Zwischenform (§. 2 (4.))

$$u = u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3,$$

um alle übrigen durch sie zusammenzusetzen. In der That kann man durch Θ, H, u entweder die Variabeln x_1, x_2, x_3 oder u_1, u_2, u_3 ausdrücken und in jede 4te Zwischenform substituiren. Im ersten Falle würde eine Relation zwischen den 4 Zwischenformen unter Vermittlung von zugehörigen Formen und Invarianten, im andern Falle eine derartige Relation unter Vermittlung von Covarianten und Invarianten entstehen.

Will man die Relation für Zwischenformen nur von den constanten Invarianten abhängen lassen, so müfste man sechs Zwischenformen aufstellen, welche in Bezug auf alle 6 Variabeln von einander unabhängig sind, und

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

soll sie endlich nur unter Vermittlung von numerischen Constanten stattfinden, so müfsten 8 Zwischenformen gegeben sein, um auch die beiden Invarianten zu eliminiren. Jedenfalls sieht man, dafs hiernach die Anzahl der Zwischenformen sehr grofs werden mufs, weil man Verbindungen aus 8 zu Grunde gelegten als solche bilden und antreffen kann.

Ich werde eine Theorie der Zwischenformen in einer andern Abhandlung geben, und vermittelst derselben zeigen, wie sich die Grundformen für zusammengesetzte Functionen von der Form $aS_f(u_1, u_2, u_3) + bT_f(u_1, u_2, u_3)$ bilden lassen und welchen Gesetzen sie unterworfen sind. Hier will ich nur noch hervorheben, dafs sowohl die Anzahl der von einander unabhängigen zugehörigen Formen, als die Anzahl der Covarianten *drei* betragen mufs, weil man jedesmal die 3 Variabeln durch drei derartige Functionen ausdrücken und in jede 4te substituiren kann. Da nun zwei Covarianten, nämlich f selbst und Δf, ferner zwei zugehörige Formen, S_f und T_f, bereits aufgestellt sind, so bliebe noch eine Covariante und eine zugehörige Form zu bilden, um die von einander unabhängigen Grundformen vollständig zu kennen. Dieses geschieht nun mit Hülfe des folgenden Theorems, welches ganz allgemein gilt und zur Erfindung von unendlich vielen Covarianten und zugehörigen Formen führt.

Theorem 26.

I) *Wenn man die gegebene homogene Function und ihre erste Covariante allmälig in folgenden Formen schreibt:*

$$(1.)\quad \begin{cases} f = A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 = \Sigma A_\varkappa x_\varkappa \\ f = \Sigma A_{\varkappa\lambda} x_\varkappa x_\lambda \\ f = \Sigma a_{\varkappa\lambda\mu} x_\varkappa x_\lambda x_\mu \end{cases}$$

$$(2.)\quad \begin{cases} \Delta f = \Sigma B_\varkappa x_\varkappa \\ \Delta f = \Sigma B_{\varkappa\lambda} x_\varkappa x_\lambda \\ \Delta f = \Sigma b_{\varkappa\lambda\mu} x_\varkappa x_\lambda x_\mu, \end{cases}$$

wo

$$A_\varkappa = \tfrac{1}{3}\frac{df}{dx_\varkappa}, \qquad B_\varkappa = \tfrac{1}{3}\frac{d\Delta f}{dx_\varkappa}$$

$$A_{\varkappa\lambda} = \tfrac{1}{6}\frac{d^2 f}{dx_\varkappa dx_\lambda}, \quad B_{\varkappa\lambda} = \tfrac{1}{6}\frac{d^2\Delta f}{dx_\varkappa dx_\lambda}$$

ist, und aus den Coefficienten dieser Functionen in Bezug auf die ex-

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

plicite stehenden Variabeln simultane Invarianten und Covarianten bildet, so erhält man jedesmal eine Covariante für f.

Der Beweis ergiebt sich sehr leicht aus dem Umstande, dafs es einerlei ist, ob man die Functionen (1.), (2.) zuerst in Bezug auf die explicite stehenden Variabeln transformirt und dann nachträglich die Substitution in den noch veränderlichen Coefficienten ausführt, oder ob man gleich von vorn herein die Functionen f und Δf vollständig transformirt. Wenn also im ersten Falle die Gleichung

$$\psi' = r^\lambda \psi$$

besteht, so ist sie auch noch im zweiten Falle richtig, nur dafs für jedes System von Coefficienten der Functionen (2.), welches in die Verbindung ψ eingeht, λ um 2 Potenzen erhöht werden mufs, weil jeder Coefficient

$$B_x, \quad B_{x\lambda}, \quad b_{x\lambda\mu}$$

den Factor r^2 mit sich führt (§. 11 (1.)).

Der Exponent λ bestimmt sich übrigens in allen Fällen durch $\lambda = \gamma - \frac{n}{3}$, wenn γ die Ordnung von ψ in Bezug auf die Gröfsen $a_{x\lambda\mu}$, und n in Bezug auf die Variabeln ist, denn in der transformirten Form kommen die Substitutionscoefficienten in der $(3\gamma - n)^{\text{ten}}$ Ordnung vor, während r^λ von der $3\lambda^{\text{ten}}$ Ordnung in Bezug auf dieselben ist, also mufs $3\lambda = 3\gamma - n$ sein.

II) ***Wenn man statt der Functionen f und Δf die beiden zugehörigen Formen S_f und T_f in der unter*** (1.) ***und*** (2.) ***angegebenen Weise schreibt, und dann ebenso aus den Coefficienten derselben Invarianten und Covarianten bildet, so erhält man jedesmal eine zugehörige Form.*** Ferner:

III) ***Wenn man jede zugehörige Form nach den Gröfsen $a_{x\lambda\mu}$ differentiirt und statt der Incremente die entsprechenden Produkte $u_x u_\lambda u_\mu$ substituirt, so erhält man eine neue zugehörige Form.***

Ist φ eine aus II) oder III) hervorgehende zugehörige Form, so sieht man leicht, dafs

$$\varphi' = r^\lambda \varphi$$

wird, wo $\lambda = \gamma + \frac{n}{3}$ ist, wenn γ wieder die Ordnung von φ in Bezug auf die Gröfsen $a_{x\lambda\mu}$ und n in Bezug auf die Variabeln bezeichnet. Aus dem Werth für λ geht nun hervor, dafs jede rationale Covariante oder zugehörige Form von der $3p^{\text{ten}}$ Ordnung in Bezug auf die Variabeln sein mufs, wo p eine ganze Zahl bezeichnet. Da ferner die Coefficienten jeder zugehörigen

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

Form der dritten Ordnung den 9 Gleichungen genügen, welche im Vorhergehenden (§. 15, Theorem 8. und §. 23, Theorem 16.) für die Coefficienten von S_f und T_f entwickelt wurden, nur dafs statt S und T andere Gröfsen eintreten, und die Lösungen dieser Gleichungen, wie in §. 23 gezeigt ist, sich immer in der Form

$$A s_{\varkappa\lambda\mu} + B t_{\varkappa\lambda\mu}$$

darstellen lassen, so folgt, dafs sich jede zugehörige Form der *dritten* Ordnung durch S_f und T_f ausdrücken läfst und *dafs daher die dritte unabhängige zugehörige Form mindestens von der sechsten Ordnung sein mufs.* Man kann endlich auch jede Covariante dritter Ordnung durch f und $\varDelta f$ darstellen, wenn man die Theorie der conjugirten Formen dazu benutzt. Ist ψ eine Covariante der dritten Ordnung und $P_\psi(u_1, u_2, u_3)$ ihre conjugirte Form, so drücke man die letztere als zugehörige Form durch P_f und R_f aus. Es sei in dieser Weise $P_\psi = AP_f + BR_f$, dann ist die conjugirte zu P_ψ nach §. 27, Theorem 23. einerseits die Function $Af - B\varDelta f$, andrerseits nach §. 27, Theorem 21. die Function ψ selbst, beide Male noch multiplicirt mit einem constanten Factor, so dafs

$$\psi = C(Af - B\varDelta f)$$

wird, also durch f und $\varDelta f$ dargestellt ist. Es mufs *daher auch jede dritte unabhängige Covariante mindestens von der sechsten Ordnung sein.*

Zur Darstellung solcher Covarianten benutze ich das 26ste Theorem insofern, als ich für die 5 homogenen Functionen zweiter Ordnung

$$(3.)\quad \begin{cases} \Sigma A_\varkappa A_\lambda x_\varkappa x_\lambda, & \Sigma A_\varkappa B_\lambda x_\varkappa x_\lambda, \quad \Sigma B_\varkappa B_\lambda x_\varkappa x_\lambda, \\ \Sigma A_{\varkappa\lambda} x_\varkappa x_\lambda, & \Sigma B_{\varkappa\lambda} x_\varkappa x_\lambda \end{cases}$$

simultane Invarianten nach §. 3 (9.) bilde, was im Ganzen, nach Ausscheidung der übereinstimmenden und der verschwindenden, noch 15 Covarianten giebt; von diesen wähle ich die folgende aus den Coefficienten von f und $\varDelta f$ symmetrisch gebildete:

$$(4.)\quad \psi(x_1, x_2, x_3) = \Sigma(AB)^{\varkappa\lambda} A_\varkappa B_\lambda,$$

als dritte Fundamentalcovariante. Man könnte aus dem Systeme 3 auch eine der beiden folgenden wählen:

$$\Sigma(AA)^{\varkappa\lambda} B_\varkappa B_\lambda \quad \text{oder} \quad \Sigma(BB)^{\varkappa\lambda} A_\varkappa A_\lambda,$$

indessen sind diese wegen der Unsymmetrie in Bezug auf die Coefficienten von f und $\varDelta f$, weniger günstig. Da die nähere Entwicklung des Zusammen-

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

hanges der 15 Covarianten in die Theorie der Zwischenformen gehört, so übergehe ich hier dieselbe, indem ich nur in Bezug auf die beiden vorstehenden Covarianten hinzufüge, dafs sich durch die Operation δ sehr leicht

$$(5.)\quad \begin{cases} \Sigma(AA)^{\varkappa\lambda}B_\varkappa B_\lambda = f.\Delta f.S-2\psi \\ \Sigma(BB)^{\varkappa\lambda}A_\varkappa A_\lambda = -f.\Delta f.S+2f^2.T-2\psi \end{cases}$$

ergiebt. Die beiden Covarianten (5.) hat auch Herr *Cayley* in der citirten Abhandlung aufgeführt, indessen ist seine dritte aus diesen beiden zusammengesetzte nicht die im Vorstehenden definirte ψ.

Als *dritte zugehörige Form* eignet sich am besten die unter dem Namen der reciproken Polaren in der Geometrie vorkommende, welche deshalb die *reciproke Form* genannt werden soll. Bezeichnet man dieselbe durch $F(u_1, u_2, u_3)$, so ist bekanntlich

$$F = 0$$

das Resultat der Elimination der Variabeln x_1, x_2, x_3 aus den Gleichungen

$$\frac{df}{dx_1} = u_1, \quad \frac{df}{dx_2} = u_2, \quad \frac{df}{dx_3} = u_3$$
$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3 = 0.$$

Eine von Herrn ***Hesse*** im 40^{sten} Bande dieses Journals S. 318 gegebene Methode zur Bestimmung dieses Resultats läfst sich dadurch ausführen, dafs man die nach den Variabeln x_1, x_2, x_3 geordnete Zwischenform Θ,

$$\Theta = \Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda x_\varrho x_\sigma = \Sigma\Theta_{\varrho\sigma}x_\varrho x_\sigma$$

als homogene Function zweiten Grades dieser Variabeln betrachtet und zu derselben in diesem Sinne die zugehörige Form bildet, was

$$(6.)\quad F(u_1, u_2, u_3) = \Sigma(\Theta\Theta)^{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda$$

giebt. Diese Form ist in Bezug auf die Variabeln von der 6^{ten}, in Bezug auf die Coefficienten von der 4^{ten} Ordnung.

Ich will nun eine neue Darstellungsweise von F geben.

Es soll auf ähnliche Weise wie in §. 16 (9.) durch

$$T_{1f}(u_1, u_2, u_3; \eta_1, \eta_2, \eta_3) = \Sigma!\frac{dT_f(u_1, u_2, u_3)}{da_{\varrho\sigma\tau}}\eta_\varrho\eta_\sigma\eta_\tau$$

die Function bezeichnet werden, welche entsteht, wenn man T_f nach den Gröfsen $a_{\varrho\sigma\tau}$ differentiirt und statt der Incremente die Potenzen und Produkte $\eta_\varrho\eta_\sigma\eta_\tau$ substituirt, und für den Augenblick diese Operation durch d angedeutet

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

werden, dann ist

$$(7.)\qquad dT_f = d\Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda} s_{\varrho\sigma\mu} u_\varkappa u_\lambda u_\mu$$
$$= 2\Sigma(a_\varrho\, da_\sigma)^{\varkappa\lambda} s_{\varrho\sigma\mu} u_\varkappa u_\lambda u_\mu + \Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda} ds_{\varrho\sigma\mu} u_\varkappa u_\lambda u_\mu,$$

aber $(a_\varrho\, da_\sigma)^{\varkappa\lambda} = (a_\varrho, \eta\eta)^{\varkappa\lambda}\eta_\sigma$, also mit Anwendung des Vertauschungssatzes:

$$(\alpha.)\quad \Sigma(a_\varrho\, da_\sigma)^{\varkappa\lambda} s_{\varrho\sigma\mu} u_\varkappa u_\lambda u_\mu = \Sigma(a_\varrho, \eta\eta)^{\varkappa\lambda} s_{\varrho\sigma\mu} u_\varkappa u_\lambda u_\mu \eta_\sigma = \Sigma(uu, \eta\eta)^{\varkappa\lambda} s_{\varrho\sigma\mu} u_\mu \eta_\sigma.$$

Ferner, weil

$$S_f(v_1, v_2, v_3) = \Sigma s_{\varrho\sigma\mu} v_\varrho v_\sigma v_\mu = \Sigma((a\,a)^{\mu\tau} a_\tau)^{\varrho\sigma} v_\varrho v_\sigma v_\mu$$

ist,

$$dS_f(v_1, v_2, v_3) = \Sigma ds_{\varrho\sigma\mu} v_\varrho v_\sigma v_\mu = 3\Sigma((a\,a)^{\mu\tau} da_\tau)^{\varrho\sigma} v_\varrho v_\sigma v_\mu \quad (\S.\,14\ (6.))$$

und

$$((a\,a)^{\mu\tau} da_\tau)^{\varrho\sigma} = ((a\,a)^{\mu\tau}\eta\eta)^{\varrho\sigma}\eta_\tau,$$

also

$$\Sigma ds_{\varrho\sigma\mu} v_\varrho v_\sigma v_\mu = 3\Sigma((a\,a)^{\mu\tau}\eta\eta)^{\varrho\sigma} v_\varrho v_\sigma v_\mu \eta_\tau,$$

und wenn man auf beiden Seiten die symbolische Substitution

$$v_\varrho v_\sigma v_\mu = (a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda} u_\varkappa u_\lambda u_\mu$$

ausführt:

$$(\beta.)\qquad \Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda} ds_{\varrho\sigma\mu} u_\varkappa u_\lambda u_\mu = 3\Sigma((a\,a)^{\mu\tau}\eta\eta)^{\varrho\sigma}(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda} u_\varkappa u_\lambda u_\mu \eta_\tau$$
$$= 3\Sigma((a\,a)^{\mu\tau}\eta\eta)^{\varrho\sigma}\Theta_{\varrho\sigma} u_\mu \eta_\tau \quad (5.)$$
$$= 3\Sigma(\Theta, \eta\eta)^{\varrho\sigma}(a_\varrho a_\sigma)^{\mu\tau} u_\mu \eta_\tau.$$

Substituirt man $(\alpha.)$ und $(\beta.)$ in $(7.)$, so ergiebt sich

$$(8.)\qquad T_{1f}(u_1, u_2, u_3; \eta_1, \eta_2, \eta_3)$$
$$= 2\Sigma(uu, \eta\eta)^{\varkappa\lambda} s_{\varkappa\lambda\mu} u_\mu \eta_\sigma + 3\Sigma(\Theta, \eta\eta)^{\varrho\sigma}(a_\varrho a_\sigma)^{\mu\tau} u_\mu \eta_\tau.$$

Setzt man nun die Variabeln $\eta_\varkappa = u_\varkappa$, so wird $(uu, \eta\eta)^{\varkappa\lambda} = (uu, uu)^{\varkappa\lambda} = 0$ und (8.) geht über in

$$(9.)\qquad T_{1f}(u_1, u_2, u_3; u_1, u_2, u_3) = 3\Sigma(\Theta, uu)^{\varrho\sigma}\Theta_{\varrho\sigma} = 3\Sigma(\Theta\,\Theta)^{\varrho\sigma} u_\varrho u_\sigma,$$

was wegen (5.) das folgende Theorem giebt:

Theorem 27.

Wenn man die zweite Invariante T nach den Gröfsen $a_{\varkappa\lambda\mu}$ zweimal differentiirt, und statt der Incremente jedesmal die entsprechenden Potenzen und Produkte $u_\varkappa u_\lambda u_\mu$ substituirt, so entsteht die dreifache reciproke Form, nämlich

$$F(u_1, u_2, u_3) = \Sigma(\Theta\,\Theta)^{\varrho\sigma} u_\varrho u_\sigma = \tfrac{1}{8}\Sigma!\Sigma!\frac{d^2T}{da_{\varkappa\lambda\mu}\,da_{\varrho\sigma\tau}} u_\varkappa u_\lambda u_\mu u_\varrho u_\sigma u_\tau.$$

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

Differentiirt man die Form (9.) nochmals und setzt wiederum statt der Incremente die Potenzen und Produkte $u_\varkappa u_\lambda u_\mu$, so erhält man mit Rücksicht auf (β.), weil jetzt nur noch die Ausdrücke $(a_\varrho a_\sigma)^{\mu\tau}$, $(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda}$ differentiirt werden müssen, nur Glieder von der Form $(uu, uu)^{\mu\tau}$, $(uu, uu)^{\varkappa\lambda}$, welche verschwinden, daher folgt:

$$\Sigma!\Sigma!\Sigma!\frac{d^3 T}{da_{\varkappa\lambda\mu}\, da_{\varrho\sigma\tau}\, da_{pqr}} u_\varkappa u_\lambda u_\mu u_\varrho u_\sigma u_\tau u_p u_q u_r = 0.$$

Man kann diesen Satz, so wie den analogen aus §. 16 (9.) hervorgehenden dazu benutzen, um die beiden Invarianten der Form

$$f(x_1, x_2, x_3) + h(u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3)^3$$

in reducirter Weise darzustellen. Bezeichnet man dieselben durch S_h und T_h, so wird

$$S_h = S + hdS, \qquad T_h = T + hdT + \frac{h^2}{2} d^2 T,$$

weil für S_h die Differentiale vom zweiten ab, für T_h vom dritten ab verschwinden, daher

$$(10.) \qquad S_h = S + \tfrac{2}{3} h S_f; \qquad T_h = T + hT_f + \tfrac{3}{2} h^2 F_f.$$

Zur Darstellung der zugehörigen Formen dritter Ordnung habe ich in §. 28 die Gleichung

$$6R\varphi_f = P_f.\delta\varphi + \gamma R_f.\varphi$$

gegeben; eine ganz analoge Beziehung gilt für die Zusammensetzung der zugehörigen Formen 6$^{\text{ter}}$ Ordnung, welche aus der *zweimaligen* Differentiation einer Invariante entspringen, und ich will hiervon nur der Vollständigkeit halber noch die Zerlegung von $F_{af+b\Delta f}$ in F, P_f, R_f oder F, S_f, T_f angeben. Es ist nämlich

$$(11.) \qquad 6R^2 F_{af+b\Delta f} =$$

$$6R^2.G.F + \left(\tfrac{1}{30}\frac{d^2 T_{ab}}{db^2} - GST\right)P_f^2 + 2\left(\tfrac{1}{30}\frac{d^2 T_{ab}}{da\,db} - GS^2\right)P_f R_f + \left(\tfrac{1}{30}\frac{d^2 T_{ab}}{da^2} - GT\right)R_f^2$$

oder wenn man P_f und R_f durch S_f und T_f ersetzt:

$$(12.) \qquad 3F_{af+b\Delta f} = 3G.F + (2a^3 - 4Tb^3)bS_f^2 + 6(a^2 + Sb^2)S_f T_f + 6ab^3 T_f^2.$$

Herr *Cayley* hat in der citirten Abhandlung die Form (12.) gegeben; die Form (11.) enthält aber das Bildungsgesetz.

§. 30.

Zum Schlusse dieser Untersuchungen, aus welchen die ganz besondere Wichtigkeit der conjugirten Formen genugsam erhellet, will ich noch eine

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

merkwürdige Beziehung dieser Formen zu den ursprünglich gegebenen Functionen entwickeln, die eine Art Reciprocitätsgesetz zwischen der ersten Covariante und der ersten zugehörigen Form bildet.

Theorem 28.

Die erste zugehörige Form und erste Covariante der conjugirten Form $P_f(u_1, u_2, u_3)$ sind beziehungsweise, bis auf einen constanten Factor, mit der ersten Covariante und ersten zugehörigen Form der ursprünglichen Function $f(x_1, x_2, x_3)$ übereinstimmend.

Zum Beweise bemerke man zunächst, dafs der eine Theil des Satzes den andern mit herbeiführt, weil die Grundeigenschaft der conjugirten Formen darin besteht, dafs sie sich gegenseitig reproduciren.

Ferner vereinfacht sich der Beweis, wenn man von dem constanten Factor absieht, weil man dann die Uebereinstimmung der beiden in Rede stehenden Formen dadurch nachweisen kann, dafs man sie als Eliminationsresultate derselben Gleichungen darstellt. Um die erste zugehörige Form als Eliminationsresultat darzustellen, d. h. um ein System von Gleichungen zu finden, aus welchen sich

$$S_f(u_1, u_2, u_3) = 0$$

als Endresultat ergiebt, beachte man die Grundgleichungen für S_f, §. 16 Theorem 9:

$$(1.) \qquad \Sigma((aa)^{\tau\mu} a_\tau)^{\varkappa\lambda} u_\varkappa u_\lambda u_\mu = \tfrac{1}{3} S_f, \qquad \Sigma((aa)^{\tau\mu} a_{\tau_1})^{\varkappa\lambda} u_\varkappa u_\lambda u_\mu = 0,$$

wo τ, τ_1 constante von einander verschiedene Indices bezeichnen.

Aus denselben folgt zunächst

$$(2.) \qquad \Sigma\Sigma((aa)^{\tau\mu} a_{\tau_1})^{\varkappa\lambda} u_\varkappa u_\lambda u_\mu u_\tau x_{\tau_1} = \tfrac{1}{3}(x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3) S_f,$$

wenn man über τ und τ_1 summirt, da sich die Gleichungen (1.) wieder ergeben, wenn man die Coefficienten gleicher Potenzen von x_1, x_2, x_3 einander gleich setzt.

Bezeichnet man jedoch wie im §. 8.

$$\Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{\tau\mu} u_\mu u_\tau \quad \text{durch} \quad \Theta_{\varkappa\lambda},$$

ferner wie früher

$$\Sigma a_{\tau_1, \varkappa\lambda} x_{\tau_1} \quad \text{durch} \quad A_{\varkappa\lambda},$$

so geht (2.) in

$$(3.) \qquad \Sigma(\Theta A)^{\varkappa\lambda} u_\varkappa u_\lambda = \tfrac{1}{3}(x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3) S_f$$

über, oder in

$$(4.) \qquad \Sigma(uu, A)^{\varkappa\lambda} \Theta_{\varkappa\lambda} = \tfrac{1}{3}(x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3) S_f.$$

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

Es sei v_1, v_2, v_3 ein zweites System von Variabeln, welches in Verbindung mit x_1, x_2, x_3, die bis dahin ganz beliebig waren, den Gleichungen

$$(5.) \qquad 2A_{\varkappa\lambda} = u_\varkappa v_\lambda + u_\lambda v_\varkappa$$

genügt, so wird die linke Seite von (4.) identisch $=0$, weil $(uu, uv+vu)^{\varkappa\lambda} = 0$ ist, daher folgt, dafs die 6 Gleichungen, welche aus (5.) entstehen, wenn man alle Werthe 1, 2, 3 für $\varkappa$, λ setzt, als Eliminationsresultat der Variabeln x_1, x_2, x_3; v_1, v_2, v_3 die Gleichung

$$S_f = 0$$

liefern.

Die Gleichungen (5.) sind ausführlich geschrieben die folgenden:

$$(6.) \quad \left\{\begin{aligned} (a_{111}x_1 + a_{112}x_2 + a_{113}x_3) &= u_1 v_1 \\ (a_{122}x_1 + a_{222}x_2 + a_{123}x_3) &= u_2 v_2 \\ (a_{133}x_1 + a_{233}x_2 + a_{333}x_3) &= u_3 v_3 \\ 2(a_{123}x_1 + a_{223}x_2 + a_{233}x_3) &= u_2 v_3 + u_3 v_2 \\ 2(a_{113}x_1 + a_{123}x_2 + a_{133}x_3) &= u_3 v_1 + u_1 v_3 \\ 2(a_{112}x_1 + a_{122}x_2 + a_{123}x_3) &= u_1 v_2 + u_2 v_1 \end{aligned}\right.$$

und S_f ist demnach bis auf einen Zahlenfactor einer Determinante gleich, nämlich:

$$(7.) \qquad S_f = -6 \begin{vmatrix} a_{111} & a_{122} & a_{133} & 2a_{123} & 2a_{113} & 2a_{112} \\ a_{112} & a_{222} & a_{233} & 2a_{223} & 2a_{123} & 2a_{122} \\ a_{113} & a_{223} & a_{333} & 2a_{233} & 2a_{133} & 2a_{123} \\ u_1 & 0 & 0 & 0 & u_3 & u_2 \\ 0 & u_2 & 0 & u_3 & 0 & u_1 \\ 0 & 0 & u_3 & u_2 & u_1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Nun kann man aber die Gleichung (6.) mit Hülfe der Coefficienten von P_f auflösen. Da nämlich

$$\Sigma p_{1\varkappa\lambda} A_{\varkappa\lambda} = 0, \qquad \Sigma p_{2\varkappa\lambda} A_{\varkappa\lambda} = 0, \qquad \Sigma p_{3\varkappa\lambda} A_{\varkappa\lambda} = 0$$

ist, so erhält man, wenn man die Gleichungen (6.) mit den entsprechenden $p_{\tau\varkappa\lambda}$ multiplicirt

$$\begin{aligned} 0 = {} & v_1(p_{\tau 11}u_1 + p_{\tau 12}u_2 + p_{\tau 13}u_3) \\ & + v_2(p_{\tau 12}u_1 + p_{\tau 22}u_2 + p_{\tau 23}u_3) \\ & + v_3(p_{\tau 13}u_1 + p_{\tau 23}u_2 + p_{\tau 33}u_3) \end{aligned}$$

oder wenn der Kürze halber

$$P_{\varkappa\lambda} = p_{1\varkappa\lambda}u_1 + p_{2\varkappa\lambda}u_2 + p_{3\varkappa\lambda}u_3$$

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

ist, und man $\tau = 1$, 2 oder 3 setzt:

$$0 = v_1 P_{11} + v_2 P_{12} + v_3 P_{13}$$
$$0 = v_1 P_{12} + v_2 P_{22} + v_3 P_{23}$$
$$0 = v_1 P_{13} + v_2 P_{23} + v_3 P_{33}.$$

Eliminirt man hieraus v_1, v_2, v_3, so ergiebt sich wegen §. 11 (6.):

$$\Delta P_f = 0.$$

Da aber ΔP_f und S_f von der dritten Ordnung in Bezug auf die Variabeln sind, so können sie sich nur noch durch einen constanten Factor von einander unterscheiden.

Beiläufig bemerke ich noch, dafs nach Bestimmung dieses Factors sich ergiebt:

$$(9.) \quad \begin{cases} \Delta P_f = -2R^2 S_f, \\ S_{Pf} = 4R^2 \Delta f. \end{cases}$$

Ich habe bereits in meiner Abhandlung im 39sten Bande dieses Journals darauf aufmerksam gemacht, dafs eine der zugehörigen Formen die Eigenschaft hat eine Function mit *rationalen* Coefficienten zu liefern, deren erste Covariante (Functionaldeterminante) sie ist, aus dem Vorhergehenden (9.) sieht man, dafs $-2R^2 S_f$ diese Function ist, und dafs P_f ihre primitive Form wird.

Für geometrische Anwendungen ist durch das 28ste Theorem eine Reciprocität zwischen Punkt- und Liniengebilden dritter Ordnung erwiesen, welche denen der Kegelschnitte analog ist, weil man in ein und demselben System direct von Curven dritter Ordnung zu Curven dritter Klasse übergehen kann, während die bekannte Verallgemeinerung dieser Theorie einen Uebergang von Curven *der dritten Ordnung* zu Curven *der sechsten Klasse* erfordert.

Ich bemerke zum Schlufs, dafs die zweite zugehörige Form T_f einem analogen, für den Charakter derselben fundamentalen Theorem genügt, welches sich wie folgt aussprechen läfst:

Theorem 29.

Die homogene Function der Variabeln x_1, x_2, x_3, deren conjugirte Form die zweite zugehörige T_f ist, stimmt mit der zweiten zugehörigen Form der zu f conjugirten P_f bis auf einen constanten Factor überein.

Mit Hülfe einiger die Zwischenformen betreffenden Entwicklungen gelangt man von den beiden letzten Theoremen zu einer wesentlich andern

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM

Darstellung der Grundformen im System der zugehörigen Formen, als sie Herr *Cayley* in der citirten Abhandlung gegeben hat. Es gestaltet sich in der That das ganze System, welchem die zusammengesetzte Function

$$aP_f - bR_f = R((aT - bS^2)S_f - (aS - bT)T_f)$$

zu Grunde gelegt ist, in folgender ebenso einfachen wie gesetzmäfsigen Weise:

$$\text{I.)} \qquad S_{ap_{\varkappa\lambda\mu}-br_{\varkappa\lambda\mu}} = 4R^3G,$$

$$\text{II.)} \qquad T_{ap_{\varkappa\lambda\mu}-br_{\varkappa\lambda\mu}} = -8R^4T_{ab},$$

$$\text{III.)} \qquad R_{ap_{\varkappa\lambda\mu}-br_{\varkappa\lambda\mu}} = 64R^8S^3_{ab},$$

$$\text{IV.)} \qquad \varDelta(aP_f - bR_f) = -2R^2S_{af+b\varDelta f},$$

$$\text{V.)} \qquad S_{aP_f-bR_f} = 4R^2\varDelta(af+b\varDelta f),$$

$$\text{VI.)} \qquad T_{aP_f-bR_f} = 8R^3\left(\tfrac{1}{6}\frac{dT_{ab}}{db}f - \tfrac{1}{6}\frac{dT_{ab}}{da}\varDelta f\right),$$

$$\text{VII.)} \qquad P_{aP_f-bR_f} = -32R^6S^2_{ab}(af+b\varDelta f),$$

$$\text{VIII.)} \qquad R_{aP_f-bR_f} = -64R^7S^2_{ab}\left(\tfrac{1}{4}\frac{dS_{ab}}{db}f - \tfrac{1}{4}\frac{dS_{ab}}{da}\varDelta f\right),$$

$$\text{IX.)} \qquad 3F_{aP_f-bR_f} =$$
$$4R^2\{(af+b\varDelta f).\varDelta(af+b\varDelta f)S^2_{ab} + \varDelta(af+b\varDelta f).\varDelta\varDelta(af+b\varDelta f) - 6S_{ab}\psi_{af+b\varDelta f}\}.$$

$$\text{X.)} \qquad 3G.\psi_{aP_f-bR_f} =$$
$$8R^5.\{T_{ab}.S^2_{af+b\varDelta f} + 2S_{ab}.S_{af+b\varDelta f}.T_{af+b\varDelta f} - 3S^2_{ab}.F_{af+b\varDelta f}\},$$

wo ψ die oben definirte *dritte Covariante* bedeutet.

Die Ableitung des 29sten Theorems, so wie die Entwicklung der vorstehenden Formen werde ich sehr bald diesen Untersuchungen folgen lassen.

Berlin, im December 1857.

Brought to you by | University of Iowa Libraries
Authenticated
Download Date | 5/29/15 12:23 AM