5.

Über die *Gaufs*ische Quadratur und eine Verallgemeinerung derselben.

(Von Herrn *E. B. Christoffel* in Montjoie.)

Das Folgende enthält eine neue Darstellung des bekannten, von *Gaufs* (Comm. Gott. rec. 1814—15) erfundenen Verfahrens zur angenäherten Berechnung bestimmter Integrale. Im Anschlufs hieran wird dasselbe in der Weise verallgemeinert, dafs zu einer Anzahl beliebig gegebener Zwischenwerthe die übrigen nach den von *Gaufs* aufgestellten Prinzipien ausgewählt werden. Diese neue Methode kann in verschiedenen Beziehungen von Nutzen sein, wie weiter unten nachgewiesen werden soll.

1.

Da die spätern Entwicklungen in stetigem Zusammenhange mit den Formeln für die mechanische Quadratur im Allgemeinen stehen, so kann eine kurze Herleitung der letztern nicht füglich umgangen werden. Sei

$$(1.)\qquad f(x) = A(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n),$$

so fällt die Funktion

$$(2.)\qquad \varphi(x) = f(x)\left\{\frac{F(a_1)}{f'(a_1)(x-a_1)}+\frac{F(a_2)}{f'(a_2)(x-a_2)}+\dots+\frac{F(a_n)}{f'(a_n)(x-a_n)}\right\}$$

mit der Funktion $F(x)$ für die Werthe $x=a_1, a_2, \dots a_n$ zusammen, und es ist $\varphi(a_1)=F(a_1)$, $\varphi(a_2)=F(a_2)$, $\dots$ $\varphi(a_n)=F(a_n)$. Aus (2.) folgt

$$(3.)\qquad \int_{-1}^{1}\varphi(x)\,\partial x$$

$$=\frac{F(a_1)}{f'(a_1)}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)\,\partial x}{x-a_1}+\frac{F(a_2)}{f'(a_2)}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)\,\partial x}{x-a_2}+\dots+\frac{F(a_n)}{f'(a_n)}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)\,\partial x}{x-a_n},$$

und dieser Ausdruck ist bis auf einen bestimmten Fehler gleich dem Integrale $\int_{-1}^{1}F(x)\,\partial x$.

Um die in (3.) angedeuteten Integrationen auszuführen, ist im Allgemeinen folgender Weg einzuschlagen. Ist u eine beliebige, aufserhalb der

Gränzen -1 und 1 liegende Gröfse, so hat man identisch

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)\,\partial x}{x-u} = \int_{-1}^{1} \frac{f(u)\,\partial x}{x-u} + \int_{-1}^{1} \frac{f(x)-f(u)}{x-u}\,\partial x$$
$$= f(u)\lg\frac{u-1}{u+1} + \int_{-1}^{1} \frac{f(x)-f(u)}{x-u}\,\partial x.$$

Da $f(x)$ eine rationale ganze Funktion von x vom n^{ten} Grade ist, so ist $\frac{f(x)-f(u)}{x-u}$ ebenfalls eine solche Funktion vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade von x wie von u. Setzt man demnach

$$(4.)\quad \int_{-1}^{1} \frac{f(x)-f(u)}{x-u}\,\partial x = f_1(u),$$

so ist $f_1(u)$ eine ganze Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, und

$$(5.)\quad \int_{-1}^{1} \frac{f(x)\,\partial x}{x-u} = f(u)\lg\frac{u-1}{u+1} + f_1(u).$$

Diese Formel bleibt offenbar selbst dann bestehen, wenn u zwischen die Grenzen -1 und $+1$ fällt, sobald nur die unter dem Integral linker Hand stehende Funktion $\frac{f(x)}{x-u}$ innerhalb jener Gränzen überall endlich bleibt. Die Formel (5.) gilt daher, wenn u einer der Gröfsen $a_1, a_2, \dots a_n$ gleich gesetzt wird, unter allen Umständen, mögen diese Gröfsen aufserhalb oder innerhalb der erwähnten Gränzen liegen. Dadurch geht die Gleichung (3.) in folgende über:

$$(6.)\quad \int_{-1}^{1} \varphi(x)\,\partial x = \frac{f_1(a_1)}{f'(a_1)}F(a_1) + \frac{f_1(a_2)}{f'(a_2)}F(a_2) + \cdots + \frac{f_1(a_n)}{f'(a_n)}F(a_n),$$

und man hat annähernd

$$(7.)\quad \int_{-1}^{1} F(x)\,\partial x = \int_{-1}^{1} \varphi(x)\,\partial x.$$

Durch Zerlegung in Partialbrüche folgt:

$$\frac{f_1(u)}{f(u)} = \frac{f_1(a_1)}{f'(a_1)}\cdot\frac{1}{u-a_1} + \frac{f_1(a_2)}{f'(a_2)}\cdot\frac{1}{u-a_2} + \cdots + \frac{f_1(a_n)}{f'(a_n)}\cdot\frac{1}{u-a_n},$$

so dafs $\frac{f_1(u)}{f(u)}$ der mittelst der Zwischenwerthe $a_1, a_2, \dots a_n$ berechnete angenäherte Werth des Integrals $\int_{-1}^{1} \frac{\partial x}{u-x}$ ist; und wenn man dies in (5.) anwendet

$$(8.)\quad \int_{-1}^{1} \frac{f(x)\,\partial x}{x-u}$$
$$= f(u)\left\{\lg\frac{u-1}{u+1} + \frac{f_1(a_1)}{f'(a_1)}\cdot\frac{1}{u-a_1} + \frac{f_1(a_2)}{f'(a_2)}\cdot\frac{1}{u-a_2} + \cdots + \frac{f_1(a_n)}{f'(a_n)}\cdot\frac{1}{u-a_n}\right\}.$$

Setzt man von jetzt an

$$(9.)\quad \int_{-1}^{1}\frac{f(x)\partial x}{u-x} = f_2(u),$$

so ist wegen (5.)

$$(10.)\quad f(u)\lg\frac{u+1}{u-1} = f_1(u)+f_2(u),$$

und wegen (8.)

$$(11.)\quad \int_{-1}^{1}\frac{\partial x}{u-x}-\left\{\frac{f_1(a_1)}{f'(a_1)}\cdot\frac{1}{u-a_1}+\frac{f_1(a_2)}{f'(a_2)}\cdot\frac{1}{u-a_2}+\cdots+\frac{f_1(a_n)}{f'(a_n)}\cdot\frac{1}{u-a_n}\right\} = \frac{f_2(u)}{f(u)}.$$

Es ist somit $\frac{f_2(u)}{f(u)}$ der Unterschied zwischen dem wahren und dem angenäherten Werthe von $\int_{-1}^{1}\frac{\partial x}{u-x} = \lg\frac{u+1}{u-1}$. Entwickelt man daher in (11.) die linke Seite nach absteigenden Potenzen von u, und setzt den Ueberschufs des wahren Werthes von $\int_{-1}^{1}x^m dx$ über den angenäherten Werth desselben, nämlich

$$(12.)\quad \int_{-1}^{1}x^m\partial x-\left\{\frac{f_1(a_1)}{f'(a_1)}a_1^m+\frac{f_1(a_2)}{f'(a_2)}a_2^m+\cdots+\frac{f_1(a_n)}{f'(a_n)}a_n^m\right\} = k_m,$$

so erhält man:

$$(13.)\quad \frac{k_0}{u}+\frac{k_1}{u^2}+\frac{k_2}{u^3}+\cdots = \frac{f_2(u)}{f(u)}.$$

Setzt man andererseits

$$(14.)\quad \int_{-1}^{1}f(x)\partial x = A_1,$$

und allgemein

$$(15.)\quad \int_{-1}^{1}f(x)x^s\partial x = A_{s+1},$$

ferner

$$\frac{1}{f(u)} = \frac{A'}{u^n}+\frac{A''}{u^{n+1}}+\frac{A'''}{u^{n+2}}+\cdots,$$

so ist

$$(16.)\quad f_2(u) = \frac{A_1}{u}+\frac{A_2}{u^2}+\frac{A_3}{u^3}+\cdots$$

und

$$(17.)\quad \frac{f_2(u)}{f(u)} = \frac{A_1A'}{u^{n+1}}+\frac{A_2A'+A_1A''}{u^{n+2}}+\frac{A_3A'+A_2A''+A_1A'''}{u^{n+3}}+\cdots,$$

mithin $k_0=k_1=k_2=\cdots=k_{n-1}=0$. Die Formel (7.) liefert also allemal den genauen Werth von $\int_{-1}^{1}F(x)\partial x$, so oft $F(x)$ eine ganze Funktion ist, welche den $(n-1)^{\text{ten}}$ Grad nicht übersteigt. Man hat ferner

$$k_n = A_1A',\quad k_{n+1} = A_2A'+A_1A'',\quad k_{n+2} = A_3A'+A_2A''+A_1A''',\quad \text{etc.}$$

Kann man nun $f(u)$ so bestimmen, dafs in der Entwicklung von $f_2(u)$ die m ersten Glieder, also in der Entwicklung von $f(u)\lg\frac{u+1}{u-1}$ die Glieder, welche $\frac{1}{u}, \frac{1}{u^2}, \ldots \frac{1}{u^m}$ enthalten, von selbst wegfallen, so beginnt die Reihe für $\frac{f_2(u)}{f(u)}$ mit dem Term $\frac{k_{m+n}}{u^{m+n+1}}$, und die Formel (7.) ist für alle ganzen Funktionen vom $(m+n-1)^{\text{ten}}$ oder einem niedrigern Grade vollkommen strenge. Gleichzeitig ist

$$k_{n+m} = A_{m+1}A', \qquad k_{n+m+1} = A_{m+2}A' + A_{m+1}A'', \qquad \text{etc.}$$

Es wird sich bald zeigen, dafs der höchste Grad von Genauigkeit, welcher mit der vorausgesetzten Form von $f(x)$ erreicht werden kann, dem Falle entspricht, wo $m=n$ ist. Es ist dies der nämliche Fall, den *Gaufs* in der oben angeführten Abhandlung, und *Jacobi* in gegenwärtigem Journal behandelt haben.

2.

Das Folgende beruht auf diesem Lemma:

Unterwirft man eine ganze Funktion $f(u)$ vom n^{ten} Grade der Bedingung, dafs aus der absteigenden Entwicklung von $f(u)\lg\frac{u+1}{u-1}$ die Terme, welche $\frac{1}{u}, \frac{1}{u^2}, \ldots \frac{1}{u^n}$ enthalten, von selbst wegfallen, so giebt es stets eine Funktion, welche diesen Bedingungen genügt, und dieselbe ist bis auf einen constanten Faktor bestimmt. Verlangt man aufserdem, dafs das Glied mit $\frac{1}{u^{n+1}}$ verschwinde, so wird die Funktion $f(u)$ identisch gleich Null, indem jener constante Faktor den bestimmten Werth Null erhält.

Dasselbe ergiebt sich leicht mittelst der Formeln (10.) und (14.), denen zufolge allgemein der Coefficient von $\frac{1}{u}$ in der absteigenden Entwicklung von $F(u)\lg\frac{u+1}{u-1}$ gleich $\int_{-1}^{1}F(x)\partial x$ ist, vorausgesetzt, dafs $F(u)$ eine rationale ganze Funktion ist. Sei zunächst $f(u)$ so bestimmt, dafs in (10.) $f_2(u)$ die Form

$$f_2(u) = \frac{A_{n+2}}{u^{n+2}} + \frac{A_{n+3}}{u^{n+3}} + \cdots$$

hat, und sei ferner $f(u) = P + Qi$, wo P und Q reelle ganze Funktionen von u sind; so multiplicire man die Gleichung (10.) mit $P - Qi$. Dann ist $(P-Qi)f_1(u)$ wieder eine ganze Funktion von u, während die Entwicklung von $(P-Qi)f_2(u)$ mit dem Term $\frac{1}{u^2}$ beginnt. Also ist der Faktor von $\frac{1}{u}$ gleich Null. Da derselbe aber gleich

$$\int_{-1}^{1} f(u)(P-Qi)\partial u = \int_{-1}^{1}(P^2+Q^2)\partial u$$

ist, und die Elemente dieses Integrals alle positiv sind, so mufs, wenn das ganze Integral gleich Null sein soll, jedes einzelne Element verschwinden, also wie behauptet, $f(u)$ identisch gleich Null sein.

Da somit die, in Bezug auf die unbekannten Coefficienten der Funktion $f(u)$ linearen Gleichungen

$$A_1 = 0, \qquad A_2 = 0, \qquad \ldots \qquad A_n = 0, \qquad A_{n+1} = 0$$

von einander unabhängig sind, indem sich aus ihnen für jede der $(n+1)$ unbekannten Gröfsen ein einziger Werth ergiebt, so folgt, dafs man unter den $(n+1)$ Coefficienten von $f(u)$ wenigstens auf *eine* Art ein System von n derselben so auswählen kann, dafs die n Gleichungen

$$\text{(A.)} \qquad A_1 = 0, \qquad A_2 = 0, \qquad \ldots \qquad A_n = 0$$

in Bezug auf dieses System von Unbekannten von einander unabhängig sind. Denn wäre dies nicht der Fall, so müfste man, wie leicht zu sehen ist, aus den Gleichungen

$$A_1 = \alpha_1, \qquad A_2 = \alpha_2, \qquad \ldots \qquad A_n = \alpha_n, \qquad A_{n+1} = \alpha_{n+1}$$

sämmtliche Unbekannten eliminiren können, was nach dem eben bewiesenen nicht möglich ist.

Da endlich die Gleichungen (A.) linear sind, so bestimmen sie das Verhältnifs von n Coefficienten zum $(n+1)^{\text{ten}}$ auf eine einzige Weise, wodurch obiges Lemma in allen seinen Theilen bewiesen ist.

Differentiirt man nun die Gleichung (10.), und multiplicirt mit u^2-1, so folgt:

$$\text{(18.)} \qquad (u^2-1)\frac{\partial f}{\partial u}\cdot \lg\frac{u+1}{u-1} = 2f + (u^2-1)\frac{\partial f_1}{\partial u} + (u^2-1)\frac{\partial f_2}{\partial u},$$

und eine nochmalige Differentiation giebt:

$$\frac{\partial}{\partial u}\Big((u^2-1)\frac{\partial f}{\partial u}\Big)\lg\frac{u+1}{u-1} = 4\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u}\Big((u^2-1)\frac{\partial f_1}{\partial u}\Big) + \frac{\partial}{\partial u}\Big((u^2-1)\frac{\partial f_2}{\partial u}\Big).$$

Diese beiden Gleichungen haben wieder die Form von (10.). Nimmt man aber jetzt an, dafs $f_2(u)$ die Potenzen $\frac{1}{u}, \frac{1}{u^2}, \ldots \frac{1}{u^n}$ nicht enthält, dafs also

$$f_2 = \frac{A_{n+1}}{u^{n+1}} + \frac{A_{n+2}}{u^{n+2}} + \cdots$$

ist, so folgt

$$\frac{\partial}{\partial u}\Big((u^2-1)\frac{\partial f_2}{\partial u}\Big) = \frac{n(n+1)A_{n+1}}{u^{n+1}} + \cdots,$$

so dafs die Funktion $\frac{\partial}{\partial u}\Big((u^2-1)\frac{\partial f_2}{\partial u}\Big) - n(n+1)f_2$, nach negativen Potenzen von u entwickelt, die Potenzen $\frac{1}{u}, \frac{1}{u^2}, \dots \frac{1}{u^n}, \frac{1}{u^{n+1}}$ nicht enthält. Multiplicirt man daher die Gleichung (10.) mit $n(n+1)$ und subtrahirt sie von der vorstehenden, so folgt

$$\Big\{\frac{\partial}{\partial u}\Big((u^2-1)\frac{\partial f}{\partial u}\Big) - n(n+1)f\Big\}\lg\frac{u+1}{u-1}$$
$$= 4\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u}\Big((u^2-1)\frac{\partial f_1}{\partial u}\Big) - n(n+1)f_1 + \Big\{\frac{\partial}{\partial u}\Big((u^2-1)\frac{\partial f_2}{\partial u}\Big) - n(n+1)f_2\Big\};$$

und da der Faktor von $\lg\frac{u+1}{u-1}$ den $(n+1)^{\text{ten}}$ Grad nicht erreicht, so folgt vermöge des obigen Lemmas, dafs er identisch gleich Null sein mufs. Da ferner auf der rechten Seite die drei ersten Glieder nur positive Potenzen von u enthalten, während das Folgende sich nur aus negativen Potenzen von u zusammensetzt, und da diese beiden Theile für sich verschwinden müssen, so haben wir

$$(19.)\qquad \frac{\partial}{\partial u}\Big((u^2-1)\frac{\partial f}{\partial u}\Big) - n(n+1)f = 0,$$

$$(20.)\qquad \frac{\partial}{\partial u}\Big((u^2-1)\frac{\partial f_2}{\partial u}\Big) - n(n+1)f_2 = 0,$$

$$(21.)\qquad \frac{\partial}{\partial u}\Big((u^2-1)\frac{\partial f_1}{\partial u}\Big) - n(n+1)f_1 + 4\frac{\partial f}{\partial u} = 0.$$

Nach den bekannten Untersuchungen über die Gleichung (19.) folgt hieraus

$$(22.)\qquad f(u) = P_n(u) = \frac{\partial^n (u^2-1)^n}{2^n\Gamma(n+1)\partial u^n}$$
$$= \frac{1.3.5\dots 2n-1}{1.2.3\dots n}u^n - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1.3.5\dots 2n-3}{1.2.3\dots n-2}u^{n-2} + \cdots,$$

und wegen (9.)

$$(23.)\qquad f_2(u) = Q_n(u) = \int_{-1}^{1}\frac{P_n(x)\partial x}{u-x},$$

welche Bezeichnung von der gewöhnlichen nur wenig abweicht. Sodann folgt, dafs die Gleichung

$$(24.)\qquad \frac{\partial}{\partial u}\Big((u^2-1)\frac{\partial U}{\partial u}\Big) = n(n+1)U - 4\frac{\partial P_n(u)}{\partial u}$$

zu ihrem completen Integrale einen Ausdruck von der Form

$$(25.)\qquad U = AP_n(u) + BQ_n(u) + R_n(u)$$

hat, wo $R_n(u)$ eine rationale ganze Funktion vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade, und nichts Anderes, als die bisher durch $f_1(u)$ bezeichnete Funktion ist. Die Funktionen P, Q, R stehen in Folge der Gleichung (10.) in der Relation

$$(26.) \qquad P_n(u) \lg \frac{u+1}{u-1} = Q_n(u) + R_n(u),$$

oder auch

$$(27.) \qquad Q_n(u) = P_n(u) \lg \frac{u+1}{u-1} - R_n(u),$$

so dafs nur noch die Funktion $R_n(u)$ zu bestimmen übrig bleibt. Zuvor will ich aber noch die Formeln

$$(28.) \qquad (u^2-1)P_n'(u) = \frac{n(n+1)}{2n+1}(P_{n+1}(u) - P_{n-1}(u)),$$

$$(29.) \qquad \begin{cases} (2n+1)u P_n(u) = (n+1)P_{n+1}(u) + n P_{n-1}(u), \\ (2n+1)u Q_n(u) = (n+1)Q_{n+1}(u) + n Q_{n-1}(u), \\ (2n+1)u R_n(u) = (n+1)R_{n+1}(u) + n R_{n-1}(u) \end{cases}$$

einschalten, welche sich auf verschiedene Art, unter anderm auch mittelst obigen Lemma's beweisen lassen. Setzt man z. B. in (18.) $P_n(u)$ für $f(u)$ ein, so beginnt die Entwicklung von $(u^2-1)\frac{\partial f_2}{\partial u}$ mit dem Term $-\frac{(n+1)A_{n+1}}{u^n}$. Bedenkt man nun, dafs man setzen kann

$$(u^2-1)P_n'(u) = aP_{n+1}(u) + bP_{n-1}(u) + cP_{n-3}(u) + \cdots,$$

so folgt aus unserm Lemma, dafs auf der rechten Seite alle Coefficienten, mit Ausnahme von a und b, verschwinden. Die Bestimmung der Constanten a und b hat keine Schwierigkeiten. — Zur Herleitung der Gleichungen (29.) hat man nur (26.) mit u zu multipliciren, und ganz ähnliche Betrachtungen anzustellen. Diese Gleichungen stimmen übrigens im Wesentlichen mit denen überein, deren sich *Gaufs* in den artt. 17. und 18. seiner Abhandlung bedient.

Differentiirt man die Gleichung (28.), so folgt wegen (19.)

$$P_{n+1}'(u) - P_{n-1}'(u) = (2n+1)P_n(u),$$

also auch

$$P_{n-1}'(u) - P_{n-3}'(u) = (2n-3)P_{n-2}(u),$$

u. s. f., woraus durch Addition

$$(30.) \qquad P_{n+1}'(u) = (2n+1)P_n(u) + (2n-3)P_{n-2}(u) + (2n-7)P_{n-4}(u) + \cdots$$

folgt. Vermöge dieser Formel geht die Gleichung (24.) in folgende über:

$$(31.) \qquad \frac{\partial}{\partial u}\left((u^2-1)\frac{\partial U}{\partial u}\right) - n(n+1)U$$
$$+ 4\{(2n-1)P_{n-1} + (2n-5)P_{n-3} + (2n-9)P_{n-5} + \cdots\} = 0.$$

Um nun zur Bestimmung von $R_n(u)$ überzugehen, bemerke man, dafs die Gleichung (26.) durch Aenderung des Vorzeichens von u und nachfolgende Multiplication mit $(-1)^{n-1}$ folgende Gestalt annimmt:

$$P_n(u)\lg\frac{u+1}{u-1} = (-1)^{n+1}Q_n(-u)+(-1)^{n-1}R_n(-u),$$

woraus durch Vergleichung mit (26.) $R_n(-u)=(-1)^{n-1}R_n(u)$ folgt. Da somit $R_n(u)$ nur die Potenzen u^{n-1}, u^{n-3}, u^{n-5} etc. enthalten kann, so hat es die Form

$$R_n(u) = a_1P_{n-1}(u)+a_3P_{n-3}(u)+a_5P_{n-5}(u)+\cdots.$$

Setzt man dies in (31.) für U ein, so folgt:

$$\begin{aligned}0 = {} & a_1[(n-1)n-n(n+1)]P_{n-1}+a_3[(n-3)(n-2)-n(n+1)]P_{n-3}\\ & \quad +4(2n-1)P_{n-1} \qquad\qquad +4(2n-5)P_{n-3}\\ & \qquad +a_5[(n-5)(n-6)-n(n+1)]P_{n-5}+\cdots\\ & \qquad\quad +4(2n-9)P_{n-5} \qquad +\cdots,\end{aligned}$$

und hieraus

$$a_1=2\frac{2n-1}{1.n},\qquad a_3=2\frac{2n-5}{3(n-1)},\qquad a_5=2\frac{2n-9}{5(n-2)},\qquad \text{u. s. w.}$$

Damit sind die verlangten Funktionen f, f_1, f_2 vollständig bestimmt; es ist nämlich:

$$(32.)\quad \left\{\begin{aligned} f(u) &= P_n(u)=\frac{\partial^n(u^2-1)^n}{2^n\Gamma(n+1)\partial u^n},\\ f_1(u) &= R_n(u)=2\left\{\frac{2n-1}{1.n}P_{n-1}(u)+\frac{2n-5}{3(n-1)}P_{n-3}(u)\right.\\ &\qquad\qquad\left.+\frac{2n-9}{5(n-2)}P_{n-5}(u)+\cdots\right\},\\ f_2(u) &= Q_n(u)=P_n(u)\lg\frac{u+1}{u-1}-R_n(u)=\int_{-1}^{1}\frac{P_n(x)\partial x}{u-x}\\ &= 2\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{2s+1.2s+2\ldots 2s+n}{2s+1.2s+3\ldots 2s+2n+1}\cdot\frac{1}{u^{n+2s+1}}.\end{aligned}\right.$$

Den allgemeinen Ausdruck der Funktion $P_n(u)$ hat ***Gaufs*** in seiner Abhandlung gegeben, doch rührt die elegante, obenstehende Form derselben von ***Jacobi*** her. Auch findet man bei ***Gaufs*** den Ausdruck von $Q_n(u)$ sowohl in Form einer hypergeometrischen Reihe, wie in seiner Reduction auf einen algebraischen und einen transcendenten Theil.

Obgleich auf diese Weise die Coefficienten in der Gleichung (6.) explicite dargestellt sind, so giebt es doch mit Rücksicht darauf, dafs in den

Gröfsen $\frac{f_1(u)}{f'(u)}$ dort für u nur solche Werthe zu substituiren sind, welche $f(u)$ verschwinden machen, noch einfachere Darstellungsweisen für dieselben. Aus den Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial u}((u^2-1)P_n'(u)) = n(n+1)P_n(u),$$

$$\frac{\partial}{\partial u}((u^2-1)R_n'(u)) = n(n+1)R_n(u)-4P_n'(u)$$

folgt durch Elimination von $n(n+1)$:

$$P_n\frac{\partial}{\partial u}((u^2-1)R_n')-R_n\frac{\partial}{\partial u}((u^2-1)P_n')+4P_nP_n' = 0,$$

und hieraus durch theilweise Integration

$$(u^2-1)(P_nR_n'-R_nP_n')+2P_n^2 = a.$$

Für $u=1$ ergiebt sich hieraus $a=2$, also ist identisch

$$(33.)\quad \frac{u^2-1}{2}\{P_n(u)R_n'(u)-R_n(u)P_n'(u)\}+P_n^2(u) = 1,$$

mithin für alle Werthe von u, für welche $P_n(u)=0$ ist:

$$(34.)\quad \frac{1-u^2}{2}P_n'(u)R_n(u) = 1.$$

Daraus folgt für die nämlichen Werthe von u:

$$(35.)\quad \frac{f_1(u)}{f'(u)} = \frac{R_n(u)}{P_n'(u)} = \frac{1-u^2}{2}(R_n(u))^2 = \frac{2}{(1-u^2)(P_n'(u))^2}.$$

Die erste dieser Darstellungen ist von *Gaufs* gegeben; die zweite dagegen hat den Vorzug, dafs sie die Berechnung der Coefficienten $\frac{f_1(u)}{f'(u)}$ blofs von der Funktion $P_n'(u)$ abhängig macht, deren numerischer Werth bei der Auflösung der Gleichung $P_n(u)=0$ gleichzeitig mit der Wurzel u bestimmt wird.

Sind $a_1, a_2, \ldots a_n$ die Wurzeln der Gleichung $P_n(u)=0$, so ist

$$(36.)\quad P_n(u) = \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{1.2.3\ldots n}(u-a_1)(u-a_2)\ldots(u-a_n),$$

folglich nach der zweiten Darstellungsweise

$$(37.)\quad \frac{f_1(a_1)}{f'(a_1)} = \frac{2\left(\frac{1.2.3\ldots n}{1.3.5\ldots 2n-1}\right)^2}{(1-a_1)(1+a_1)[(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n)]^2},$$

so dafs sämmtliche Coefficienten in einfache, leicht zu bildende Faktoren zerlegt sind. Ich bemerke noch folgende Formeln, welche sich unter der Voraussetzung, dafs $P_n(u) = 0$ sei, aus (28.) und (29.) leicht ergeben:

$$(38.) \qquad (1-u^2)P_n'(u) = nP_{n-1}(u) = -(n+1)P_{n+1}(u),$$

$$(39.) \qquad \frac{f_1(u)}{f'(u)} = \frac{2(1-u^2)}{(nP_{n-1}(u))^2} = \frac{2(1-u^2)}{((n+1)P_{n+1}(u))^2}.$$

Diese Ausdrücke treten durch Auflösung in lineare Faktoren in eine interessante Beziehung zum Produkte

$$\frac{R_n(a_1)}{P_n'(a_1)} \cdot \frac{R_n(a_2)}{P_n'(a_2)} \cdots \frac{R_n(a_n)}{P_n'(a_n)}.$$

Dies vorangeschickt haben wir das Resultat, dafs, wenn $F(x)$ eine rationale ganze Funktion von x ist, welche den $(2n-1)^{\text{ten}}$ Grad nicht überschreitet, man die streng richtige Gleichung hat

$$(40.) \qquad \int_{-1}^{1} F(x)\,\partial x = \frac{R_n(a_1)}{P_n'(a_1)}F(a_1) + \frac{R_n(a_2)}{P_n'(a_2)}F(a_2) + \cdots + \frac{R_n(a_n)}{P_n'(a_n)}F(a_n).$$

Läfst sich ferner $F(x)$ in eine nach positiven ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickeln, welche für alle zwischen -1 und 1 liegenden Werthe von x so stark convergirt, dafs man die Reihe, ohne ihren Werth merklich zu ändern, auf ihre $2n$ ersten Glieder reduciren kann, so gilt die Formel (40.) wieder ohne merklichen Fehler. Dasselbe gilt, wenn man vermöge der besondern Beschaffenheit von $F(x)$ alle auf das $2n^{\text{te}}$ folgenden Glieder in den sogenannten Rest der Reihe vereinigen mufs, wofern nur dieser Rest gegen $F(x)$ vernachlässigt werden darf.

Um hiervon eine Anwendung zu geben, werde ich die Interpolationsformel (2.) für den Fall, wo die Gröfsen $a_1, a_2, \ldots a_n$ die Wurzeln der Gleichung $P_n(u) = 0$ sind, in eine andere Form bringen. Ich erinnere zu dem Zwecke an die bekannten Formeln

$$\int_{-1}^{1} P_\mu(x)P_\nu(x)\,\partial x = 0, \qquad \int_{-1}^{1} P_\nu(x)P_\nu(x)\,\partial x = \frac{2}{2\nu+1},$$

von denen sich die erstere aus der Betrachtung des Produktes $P_m(u)\,Q_{m+p}(u)$ unter Anwendung der Gleichung (14.) leicht ergiebt. — Ist nun $\mu+\nu < 2n$ und auch $2\nu < 2n$, so mufs man mittelst der Formel (40.) den genauen Werth dieser Integrale erhalten, und es ist somit

$$(41.) \qquad \Sigma P_\mu(a)P_\nu(a)\frac{R_n(a)}{P_n'(a)} = 0$$

$$(42.) \qquad \Sigma P_\nu(a)P_\nu(a)\frac{R_n(a)}{P_n'(a)} = \frac{2}{2\nu+1},$$

wo die Summen sich auf die Werthe $a = a_1, a_2, \ldots a_n$ beziehen. Will man jetzt die Funktion $F(x)$ durch eine Funktion $f(x)$ vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade ersetzen, welche mit ihr für die Werthe $x = a_1, a_2, \ldots a_n$ übereinstimmen soll, so kann man setzen

$$f(x) = \beta P_0(x) + \beta_1 P_1(x) + \beta_2 P_2(x) + \cdots + \beta_{n-1} P_{n-1}(x),$$

und hat zur Bestimmung der Coefficienten $\beta, \beta_1, \ldots \beta_{n-1}$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} F(a_1) &= \beta P_0(a_1) + \beta_1 P_1(a_1) + \beta_2 P_2(a_1) + \cdots + \beta_{n-1} P_{n-1}(a_1) \\ F(a_2) &= \beta P_0(a_2) + \beta_1 P_1(a_2) + \beta_2 P_2(a_2) + \cdots + \beta_{n-1} P_{n-1}(a_2) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F(a_n) &= \beta P_0(a_n) + \beta_1 P_1(a_n) + \beta_2 P_2(a_n) + \cdots + \beta_{n-1} P_{n-1}(a_n). \end{aligned}$$

Multiplicirt man diese der Reihe nach mit

$$P_\nu(a_1)\frac{R_n(a_1)}{P'_n(a_1)}, \qquad P_\nu(a_2)\frac{R_n(a_2)}{P'_n(a_2)}, \qquad \ldots \qquad P_\nu(a_n)\frac{R_n(a_n)}{P'_n(a_n)}$$

und addirt, so fallen wegen (41.) alle β weg, deren Index von ν verschieden ist: da hingegen nach (42.) der Coefficient von β_ν gleich $\frac{2}{2\nu+1}$ ist, so folgt

$$\beta_\nu = \frac{2\nu+1}{2} \Sigma F(a) P_\nu(a) \frac{R_n(a)}{P'_n(a)},$$

wo die Summe wie oben zu interpretiren ist. Die so bestimmte Funktion $f(x)$ ist mit der durch die Gleichung (2.) definirten $\varphi(x)$ identisch, da beides rationale ganze Funktionen $(n-1)^{\text{te}}$ Grades sind, welche für n Werthe von x mit einander übereinstimmen. Es ist also

$$(43.) \qquad \varphi(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} \frac{2\nu+1}{2} P_\nu(x) \Sigma F(a) P_\nu(a) \frac{R_n(a)}{P'_n(a)}.$$

Ist $F(x)$ eine ganze Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, so fällt diese Formel mit der bekannten Entwicklung zusammen. Setzt man z. B. $F(x) = \frac{P_n(x) - P_n(y)}{x-y}$, so ist $\varphi(x) = F(x)$, ferner $F(a_s) = \frac{P_n(y)}{y - a_s}$, mithin

$$\begin{aligned} \beta_\nu &= \frac{2\nu+1}{2} P_n(y) \Sigma \frac{P_\nu(a)}{y-a} \frac{R_n(a)}{P'_n(a)} \\ &= \frac{2\nu+1}{2} \left\{ P_\nu(y) \Sigma \frac{R_n(a)}{P'_n(a)} \frac{P_n(y)}{y-a} - P_n(y) \Sigma \frac{P_\nu(y) - P_\nu(a)}{y-a} \frac{R_n(a)}{P'_n(a)} \right\}. \end{aligned}$$

In diesem Ausdrucke ist die erste Summe gleich $R_n(y)$; die andere kann, da $\frac{P_\nu(y) - P_\nu(x)}{y-x}$ eine ganze Funktion von x ist, welche den $2n^{\text{ten}}$ Grad nicht erreicht, nach (40.) durch das Integral $\int_{-1}^{1} \frac{P_\nu(y) - P_\nu(x)}{y-x} \partial x = R_\nu(y)$ ersetzt werden. Folglich ist

$$\beta_\nu = \frac{2\nu+1}{2}(P_\nu(y)R_n(y) - P_n(y)R_\nu(y))$$

und

$$\frac{P_n(x)-P_n(y)}{x-y} = \sum_0^{n-1}\frac{2\nu+1}{2}\{P_\nu(y)R_n(y) - P_n(y)R_\nu(y)\}P_\nu(x).$$

Setzt man hier tx und ty statt x und y, so überzeugt man sich leicht, dafs β_ν höchstens vom $(n-\nu-1)^{\text{ten}}$ Grade sein kann.

Die erzeugende Funktion der Ausdrücke

$$\Pi_m = P_n(u)R_{n+m}(u) - P_{n+m}(u)R_n(u),$$

nämlich $v = \sum\limits_0^\infty \Pi_m x^m$, genügt der Differentialgleichung

$$(1-2ux+x^2)\frac{\partial x^n v}{\partial x} + (x-u)x^n v = 2x^n,$$

wie man durch Substitution der Reihe für v mittelst (29.) leicht verifizirt; und es findet sich

$$v = \frac{2}{x^n\sqrt{(1-2ux+x^2)}}\int_0^x \frac{x^n\partial x}{\sqrt{(1-2ux+x^2)}}.$$

Daraus ergiebt sich

$$\Pi_{m+1} = 2\sum_0^m \frac{P_s(u)P_{m-s}(u)}{n+s+1},$$

also wenn $\nu < n$:

$$P_\nu R_n - P_n R_\nu = 2\sum_0^{n-\nu-1}\frac{P_s P_{n-\nu-s-1}}{\nu+s+1},$$

wodurch die oben nachgewiesene Reduktion bewerkstelligt ist.

Eine interessantere, auch in der Folge nützliche Anwendung von (43.) ist folgende. Setzt man in dieser Formel

$$F(x) = \frac{n}{2}\cdot\frac{P_n(x)P_{n-1}(y) - P_n(y)P_{n-1}(x)}{x-y},$$

so erhält man wieder $\varphi(x) = F(x)$, da letztere Funktion in Bezug auf x ganz und vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade ist. Es ist aber

$$F(a_s) = \frac{n}{2}\cdot\frac{P_n(y)P_{n-1}(a_s)}{y-a_s},$$

folglich

$$\beta_\nu = \frac{n}{2}\cdot\frac{2\nu+1}{2}\sum\frac{P_n(y)}{y-a}\,\frac{P_\nu(a)P_{n-1}(a)R_n(a)}{P_n'(a)}.$$

Aus (38.) und (34.) folgt weiter

$$(1-a^2)P_n'(a) = nP_{n-1}(a),\quad (1-a^2)P_n'(a)R_n(a) = nP_{n-1}(a)R_n(a) = 2,$$

mithin

$$\beta_\nu = \frac{2\nu+1}{2}\Sigma\frac{P_n(y)}{y-a}\frac{P_\nu(a)}{P'_n(a)} = \frac{2\nu+1}{2}P_\nu(y).$$

Es ist daher identisch

$$(44.)\qquad \frac{n}{2}\cdot\frac{P_n(x)P_{n-1}(y)-P_n(y)P_{n-1}(x)}{x-y} = \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1}\frac{2\nu+1}{2}P_\nu(x)P_\nu(y),$$

wie man auch durch Multiplication mit $x-y$ und Anwendung von (29.) verificiren kann.

3.

Sei jetzt, um zu dem in 1. angedeuteten allgemeinen Falle überzugehen, $f(u)$ eine Funktion vom $(m+n)^{\text{ten}}$ Grade, welche die Eigenschaft hat, dafs aus der Entwicklung von $f(u)\lg\frac{u+1}{u-1}$ die Terme $\frac{1}{u}, \frac{1}{u^2}, \dots \frac{1}{u^m}$ wegfallen, und sei wie früher

$$(1.)\qquad f_1(u) = \int_{-1}^{1}\frac{f(x)-f(u)}{x-u}\partial x;$$

seien ferner $a_1, a_2, \dots a_{n+m}$ die Wurzeln der Gleichung $f(u)=0$, so giebt der Ausdruck

$$(2.)\qquad \Omega = \sum_{s=1}^{s=n+m}\frac{f_1(a_s)}{f'(a_s)}F(a_s)$$

im Allgemeinen einen genäherten Werth des Integrals $\int_{-1}^{1}F(x)\partial x$, während er diesen Werth genau darstellt, so oft $F(x)$ eine ganze Funktion ist, welche den $(2m+n-1)^{\text{ten}}$ Grad nicht übersteigt.

Zur Bestimmung der Funktion $f(u)$ bietet sich zunächst ein Weg dar durch die Gleichungen 1. (14.), (15.), denen zufolge die erwähnte Eigenschaft von $f(u)$ durch die Gleichungen

$$(3.)\qquad \int_{-1}^{1}f(x)\partial x = 0,\quad \int_{-1}^{1}f(x)x\partial x = 0,\quad \dots\quad \int_{-1}^{1}f(x)x^{m-1}\partial x = 0$$

bedingt wird.

Da diese Gleichungen nach dem in art. 2 Eingangs Bemerkten von einander unabhängig sind, so lassen sich aus ihnen m Coefficienten von $f(u)$ durch die übrigen $(n+1)$ ausdrücken. Geht man also auf die Wurzeln von $f(u)$ zurück, so sind durch die Gleichungen (3.) m dieser Wurzeln durch die übrigen n auf eine einzige Weise bestimmt; letztere dagegen bleiben vollkommen willkürlich. Genau gesprochen besteht also die vorliegende Aufgabe darin, dafs man diejenige Funktion $f(u)$ vom $(n+m)^{\text{ten}}$ Grade bestimmen soll, welche den Gleichungen (3.) Genüge leistet, und für gegebene n Werthe von u verschwindet. Zugleich ist ersichtlich, dafs diese Aufgabe stets eine, und nur eine einzige Lösung zuläfst.

Gegenwärtige Methode gewährt demnach die Möglichkeit, bei der angenährten Integration einer *gegebenen* Funktion alle Vortheile zu vereinigen, welche einerseits aus der Berücksichtigung des numerischen Verlaufs dieser Funktion, und andererseits aus der Anwendung der *Gaufs*ischen Methode entspringen können. Man wird nämlich jene n willkürlichen Wurzeln so wählen, dafs für sie die Funktion $F(x)$ besonders einfache, oder auch solche Werthe annimmt, von denen ein grofser Einflufs auf den Werth des gesuchten Integrals zu erwarten ist.

Man kann aber auch in den Fall kommen, dafs der analytische Ausdruck von $F(x)$ unbekannt ist, während die Werthe $F(a_1), F(a_2), \ldots F(a_n)$ beispielsweise durch Beobachtungen bestimmt worden sind. Kann man es alsdann dahin bringen, auch noch die Werthe von $F(x)$ für die übrigen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ zu bestimmen, so gewährt die Formel (2.), abgesehen von den Beobachtungsfehlern, einen höhern Grad von Genauigkeit, als sich mit jenen n und irgend welchen andern m Zwischenwerthen im Allgemeinen würde erreichen lassen.

Seien also $a_1, a_2, \ldots a_n$ die gegebenen Wurzeln von $f(x)$, und

$$(4.)\qquad y = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n),$$

so kann man setzen

$$(5.)\qquad f(x) = y(A_m x^m + A'_m x^{m-1} + \cdots + A_m^{(m)}).$$

Setzt man ferner

$$(6.)\qquad \int_{-1}^{1} y x^s \partial x = Y_s,$$

so gehen die Gleichungen (3.) in folgende über:

$$\begin{aligned}
0 &= A_m Y_m + A'_m Y_{m-1} + \cdots A_m^{(m)} Y_0 \\
0 &= A_m Y_{m+1} + A'_m Y_m + \cdots + A_m^{(m)} Y_1 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0 &= A_m Y_{2m-1} + A'_m Y_{2m-2} + \cdots A_m^{(m)} Y_{m-1},
\end{aligned}$$

und hieraus ergiebt sich, wenn $y_1, y_2, \ldots y_m$ die Werthe von y für $x = x_1, x_2, \ldots x_m$ vorstellen, und man von einem constanten Faktor absieht

$$\begin{aligned}
(7.)\qquad f(x) = y\int_{-1}^{1(m)} & y_1 y_2 \ldots y_m (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_m) \\
& \Pi(x_1, x_2, \ldots x_m)\, x_1^0 x_2^1 \ldots x_m^{m-1}\, \partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_m,
\end{aligned}$$

wo $\Pi(x_1, x_2, \dots x_m) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)\dots$ ist. Ist $i_1, i_2, \dots i_m$ irgend eine Permutation der Zahlen 1, 2, ... m, so ist dies auch gleich

$$y\int_{-1}^{1(m)} y_1 y_2 \dots y_m (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_m)$$
$$\Pi(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots x_{i_m})\, x_{i_1}^0 x_{i_2}^1 \dots x_{i_m}^{m-1} \partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_m.$$

Bringt man aber in Π die Indices wieder in die frühere Ordnung, so erhält $x_{i_1}^0, x_{i_2}^1, \dots x_{i_m}^{m-1}$ dasselbe Vorzeichen, welches es in der Determinante

$$\Sigma \pm x_1^0 x_2^1 \dots x_m^{m-1} = \Pi(x_1, x_2, \dots x_m)$$

hat. Folglich ist auch

$$(8.) \qquad \Gamma(m+1).f(x)$$
$$= y\int_{-1}^{1(m)} y_1 y_2 \dots y_m (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_m)[\Pi(x_1, x_2, \dots x_m)]^2 \partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_m.$$

Dies ist der allgemeine Ausdruck der Funktion $f(x)$, und es steht seiner Anwendung nichts im Wege, als die zahlreichen und unbequemen Integrationen, welche er involvirt. Ich werde daher für einige besondere Fälle seine entwickelte Form hersetzen. Es ist für

$$(9.)\begin{cases} m=0 & f(x) = y \\ m=1 & f(x) = y\{xY_0 - Y_1\} \\ m=2 & f(x) = y\{x^2[Y_1^2 - Y_0Y_2] - x[Y_1Y_2 - Y_0Y_3] + [Y_2^2 - Y_1Y_3]\} \\ m=3 & f(x) = y\{x^3[Y_2^3 - Y_1Y_2Y_3 + Y_3^2Y_0 - Y_1Y_2Y_3 + Y_1^2Y_4 - Y_0Y_2Y_4] \\ & \quad -x^2[Y_2^2Y_3 - Y_1Y_3^2 + Y_0Y_3Y_4 - Y_1Y_2Y_4 + Y_1^2Y_5 - Y_0Y_2Y_5] \\ & \quad +x[Y_0Y_4^2 - Y_0Y_3Y_5 + Y_1Y_2Y_5 - Y_1Y_3Y_4 + Y_2Y_3^2 - Y_2^2Y_4] \\ & \quad -[Y_3^3 - Y_2Y_3Y_4 + Y_1Y_4^2 - Y_2Y_3Y_4 + Y_2^2Y_5 - Y_1Y_3Y_5]\} \\ & \quad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \end{cases}$$

Für gewisse Anwendungen ist es nöthig, die Gleichung (2.) in eine andere Form zu bringen. Sei

$$y = (x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_n) = A(x),$$
$$f(x) = yB(x) = yA_m(x - b_1)(x - b_2)\dots(x - b_m),$$

so dafs die Gröfsen $b_1, b_2, \dots b_m$ mit den früher durch $a_{n+1}, a_{n+2}, \dots a_{n+m}$ bezeichneten zusammenfallen. Sei ferner

$$(10.) \qquad \varphi(x) = \Sigma \frac{F(a)}{A'(a)} \frac{A(x)}{x-a},$$

$$(11.) \qquad \psi(x) = \Sigma \frac{F(a)}{A'(a)} \frac{A(x)B(x)}{(x-a)B(a)} + \Sigma \frac{F(b)}{B'(b)} \frac{A(x)B(x)}{(x-b)A(b)},$$

so ist die rechte Seite von (2.) nichts anderes als das von $x = -1$ bis

$x = 1$ genommene Integral von $\psi(x)$. Man kann aber diese Funktion auch in die Form

$$(12.)\qquad \psi(x) = \varphi(x) + \Sigma \frac{F(b)-\varphi(b)}{A(b)B'(b)} \frac{A(x)B(x)}{x-b}$$

bringen, indem beide Ausdrücke für $x = a_1, a_2, \dots a_n, b_1, b_2, \dots b_m$ mit $F(x)$ übereinstimmen, und somit als Funktionen des $(n+m-1)^{\text{ten}}$ Grades identisch sein müssen. Dies festgestellt, erhalten wir statt der Gleichung (2.) folgende:

$$(13.)\qquad \Omega = \Sigma \frac{A_1(a)}{A'(a)} F(a) + \Sigma \frac{F(b)-\varphi(b)}{A(b)B'(b)} \int_{-1}^{1} \frac{A(x)B(x)}{x-b} \partial x,$$

welche für die Anwendung gegenwärtiger Methode einen neuen Gesichtspunkt darbietet. Betrachtet man nämlich

$$\int_{-1}^{1} \varphi(x)\partial x = \Sigma \frac{A_1(a)}{A'(a)} F(a)$$

als erste Annäherung an den Werth von $\int_{-1}^{1} F(x)\partial x$, so stellt sich der Ausdruck

$$\Delta = \Sigma \frac{F(b)-\varphi(b)}{A(b)B'(b)} \int_{-1}^{1} \frac{A(x)B(x)}{x-b} \partial x$$

als die Correction dar, welche man an jener anzubringen hat, um einen genauern Werth zu erhalten.

So aufgefafst kommt also unsere Methode darauf hinaus, die Wurzeln $b_1, b_2, \dots b_m$ so auszuwählen, dafs die mittelst derselben berechnete Correction Δ eine höhere Genauigkeit erreicht, als sich im Allgemeinen mittelst irgend welcher anderer m Wurzeln würde erzielen lassen.

Ist $k_s^{(m)}$ der bei der Integration von x^s begangene Fehler, so hat man nach art. 1 $k_0^{(m)} = k_1^{(m)} = \dots = k_{2m+n-1}^{(m)} = 0$,

$$\frac{k_{2m+n}^{(m)}}{u^{2m+n+1}} + \frac{k_{2m+n+1}^{(m)}}{u^{2m+n+2}} + \dots = \frac{f_2(u)}{f(u)} = \frac{1}{f(u)} \sum_0^{\infty} \frac{1}{u^{m+s+1}} \int_{-1}^{1} x^{m+s} f(x)\partial x,$$

also

$$k_{2m+n}^{(m)} = \lim_{u=\infty} \frac{u^{m+1} f_2(u)}{\frac{f(u)}{u^{m+n}}} = \frac{1}{A_m} \int_{-1}^{1} x^m f(x)\partial x.$$

Aus (7.) folgt aber weiter, dafs

$$\int_{-1}^{1} x^m f(x)\partial x$$

$$= \int_{-1}^{1(m+1)} y_1 y_2 \dots y_{m+1} \Pi(x_1, x_2, \dots x_{m+1}) x_1^0 x_2' \dots x_{m+1}^m \partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_{m+1}$$

der Coefficient der höchsten Potenz von x in

$$\gamma \int_{-1}^{1(m+1)} y_1 y_2 \dots y_{m+1} (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{m+1}) \\ \Pi(x_1, x_2, \dots x_{m+1}) x_1^0 x_2^1 \dots x_{m+1}^m \partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_{m+1},$$

also nach der Bezeichnung der Formel (5.) gleich A_{m+1} ist. Folglich hat man allgemein

$$k_{2m+n}^{(m)} = \frac{A_{m+1}}{A_m},$$

also z. B.

$$k_n^{(0)} = Y_0, \qquad k'_{n+2} = \frac{\begin{vmatrix} Y_1 & Y_0 \\ Y_2 & Y_1 \end{vmatrix}}{Y_0}, \qquad k''_{n+4} = \frac{\begin{vmatrix} Y_2 & Y_1 & Y_0 \\ Y_3 & Y_2 & Y_1 \\ Y_4 & Y_3 & Y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Y_1 & Y_0 \\ Y_2 & Y_1 \end{vmatrix}}, \quad \text{etc.}$$

4.

Obgleich die Entwicklungen des vorigen art. für alle in der Praxis vorkommenden Fälle ausreichen dürften, so werde ich doch eine zweite Herleitung derselben nicht übergehen, da die gesuchten Ausdrücke auf einem andern Wege eine vollkommnere Gestalt annehmen.

Ist $f(x)$ eine ganze Funktion vom $(n+m)^{\text{ten}}$ Grade, so kann man stets setzen

$$f(x) = AP_{n+m}(x) + A_1 P_{n+m-1}(x) + \dots + A_{n+m-1} P_1(x) + A_{n+m} P_0(x).$$

Sollen nun aus der Entwicklung von $f(x) \lg \frac{x+1}{x-1}$ die Terme $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \dots \frac{1}{x^m}$ ausfallen, so sieht man aus den früher entwickelten Eigenschaften der Funktionen P, dafs $f(x)$ die Funktionen $P_0, P_1, \dots P_{m-1}$ nicht enthalten darf, und es ist daher der allgemeinste Ausdruck der Funktion $(n+m)^{\text{ten}}$ Grades, welche jener Bedingung genügt, dieser:

$$f(x) = AP_{n+m}(x) + A_1 P_{n+m-1}(x) + \dots + A_n P_m(x).$$

Diese Funktion soll ferner für $x = a_1, a_2, \dots a_n$ verschwinden. Wenn man daher von einem willkürlichen constanten Faktor absieht, so erhält man

$$(1.) \qquad f(x) = \Sigma \pm P_{n+m}(x) P_{n+m-1}(a_1) P_{n+m-2}(a_2) \dots P_m(a_n),$$

und es handelt sich darum, diese Determinante durch das Produkt

$$(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$$

wirklich zu dividiren. Für $n=1$ gelingt dies mittelst der Formel (44.)

art. 2. Setzt man nämlich dort $m+1$ statt n und a_1 statt y, so ergiebt sich

$$(2.)\quad \frac{P_{m+1}(x)P_m(a_1)-P_m(x)P_{m+1}(a_1)}{x-a_1} = \frac{2}{2m+1}\cdot\frac{2m+1}{m+1}\sum_0^m \frac{2\nu+1}{2}P_\nu(x)P_\nu(a_1).$$

Ich werde jetzt einen Hülfssatz beibringen, durch welchen man von vorstehender Formel zur Division der Gleichung (1.) durch den Ausdruck

$$(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$$

gelangen kann.

Bezeichnet man die in (1.) rechts stehende Determinante durch Δ, so bilde man die Funktion

$$(3.)\quad U = \frac{P_{n+m-1}(a_1)\frac{\partial\Delta}{\partial P_{n+m}(a_1)}}{(x-a_2)(x-a_3)\dots(x-a_n)} + \frac{P_{n+m-1}(a_2)\frac{\partial\Delta}{\partial P_{n+m}(a_2)}}{(x-a_3)\dots(x-a_n)(x-a_1)} + \cdots + \frac{P_{n+m-1}(a_n)\frac{\partial\Delta}{\partial P_{n+m}(a_n)}}{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{n-1})},$$

also

$$(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)\,U$$
$$= (x-a_1)P_{n+m-1}(a_1)\frac{\partial\Delta}{\partial P_{n+m}(a_1)} + (x-a_2)P_{n+m-1}(a_2)\frac{\partial\Delta}{\partial P_{n+m}(a_2)} + \cdots + (x-a_n)P_{n+m-1}(a_n)\frac{\partial\Delta}{\partial P_{n+m}(a_n)}.$$

Nun ist nach den bekannten Eigenschaften der Determinanten

$$P_{n+m-1}(x)\frac{\partial\Delta}{\partial P_{n+m}(x)} + P_{n+m-1}(a_1)\frac{\partial\Delta}{\partial P_{n+m}(a_1)} + \cdots + P_{n+m-1}(a_n)\frac{\partial\Delta}{\partial P_{n+m}(a_n)} = 0,$$

mithin vorstehendes gleich

$$-\left\{xP_{n+m-1}(x)\frac{\partial\Delta}{\partial P_{n+m}(x)} + a_1P_{n+m-1}(a_1)\frac{\partial\Delta}{\partial P_{n+m}(a_1)} + \cdots\right\}.$$

Transformirt man hier die Faktoren der Partialdeterminanten mittelst der Formel (29. art. 2)

$$uP_{n+m-1}(u) = \frac{n+m}{2n+2m-1}P_{n+m}(u) + \frac{n+m-1}{2n+2m-1}P_{n+m-2}(u),$$

so zerstören sich alle Glieder, welche Faktoren von der Form

$$\frac{n+m-1}{2n+2m-1}P_{n+m-2}(u)$$

erhalten, und dieser Ausdruck ergiebt sich gleich

$$-\frac{n+m}{2n+2m-1}\left\{P_{n+m}(x)\frac{\partial\Delta}{\partial P_{n+m}(x)} + P_{n+m}(a_1)\frac{\partial\Delta}{\partial P_{n+m}(a_1)} + \cdots\right\} = -\frac{n+m}{2n+2m-1}\Delta.$$

Daraus folgt die Formel

$$(4.)\qquad \frac{\Delta}{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)} = -\frac{2n+2m-1}{n+m}U.$$

Da die partiellen Determinanten $\frac{\partial\Delta}{\partial P_{n+m}(a_s)}$ von derselben Art wie Δ selber, aber eine Ordnung niedriger sind, so reducirt sich durch (4.) die Herstellung des Quotienten zur Linken auf die von n andern Quotienten derselben Gattung, in denen Zähler und Nenner um eine Ordnung niedriger sind.

Mittelst der Formeln (2.) und (4.) erhält man

$$\frac{\Sigma\pm P_{m+2}(x)P_{m+1}(a_1)P_m(a_2)}{(x-a_1)(x-a_2)}$$
$$=\frac{2m+3}{m+2}\left\{P_{m+1}(a_1)\frac{\Sigma\pm P_{m+1}(x)P_m(a_2)}{x-a_2}-P_{m+1}(a_2)\frac{\Sigma\pm P_{m+1}(x)P_m(a_1)}{x-a_1}\right\}$$
$$=\frac{2}{2m+1}\cdot\frac{2m+1.2m+3}{m+1.m+2}\sum_0^m\frac{2\nu+1}{2}P_\nu(x)\Sigma\pm P_{m+1}(a_1)P_\nu(a_2).$$

Ebenso ergiebt sich

$$\frac{\Sigma\pm P_{m+3}(x)P_{m+2}(a_1)P_{m+1}(a_2)P_m(a_3)}{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}$$
$$=\frac{2m+5}{m+3}\left\{P_{m+2}(a_1)\frac{\Sigma\pm P_{m+2}(x)P_{m+1}(a_2)P_m(a_3)}{(x-a_2)(x-a_3)}+P_{m+2}(a_2)\frac{\Sigma\pm P_{m+2}(x)P_{m+1}(a_3)P_m(a_1)}{(x-a_3)(x-a_1)}\right.$$
$$\left.+P_{m+2}(a_3)\frac{\Sigma\pm P_{m+2}(x)P_{m+1}(a_1)P_m(a_2)}{(x-a_1)(x-a_2)}\right\}$$
$$=\frac{2}{2m+1}\cdot\frac{2m+1.2m+3.2m+5}{m+1.m+2.m+3}\sum_0^m\frac{2\nu+1}{2}P_\nu(x)\Sigma\pm P_{m+2}(a_1)P_{m+1}(a_2)P_\nu(a_3).$$

Man kann auf diese Weise fortfahren, und es hat nicht die geringste Schwierigkeit, durch Induktion folgende allgemeine Formel nachzuweisen:

$$(5.)\qquad f(x)=\Sigma\pm P_{m+n}(x)P_{m+n-1}(a_1)\dots P_m(a_n)\times$$
$$=\frac{2}{2m+1}\cdot\frac{2m+1.2m+3\dots 2m+2n-1}{m+1.m+2\dots m+n}(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$$
$$\sum_0^m\frac{2\nu+1}{2}P_\nu(x)\Sigma\pm P_{m+n-1}(a_1)\dots P_{m+1}(a_{n-1})P_\nu(a_n).$$

Es ergiebt sich ferner unter Beibehaltung der frühern Bezeichnung

$$(6.)\qquad\begin{cases}f_1(x)=\Sigma\pm R_{m+n}(x)P_{m+n-1}(a_1)\dots P_m(a_n),\\ f_2(x)=\Sigma\pm Q_{m+n}(x)P_{m+n-1}(a_1)\dots P_m(a_n),\end{cases}$$

welche Determinanten durch Permutation der an den Funktionalzeichen befindlichen Indices zu bilden sind.

Setzt man zur Abkürzung

$$\Sigma \pm P_{m+n-1}(a_1) P_{m+n-2}(a_2) \dots P_m(a_n) = \mathfrak{A}_m,$$

so erhält man für den bei der Integration von x^{2m+n} begangenen Fehler $k_{2m+n}^{(m)}$, welcher mit dem in art. 3 bestimmten identisch sein mufs, in folgender Weise einen neuen Ausdruck. Da nämlich nach art. 1

$$\frac{k_{2m+n}^{(m)}}{u^{2m+n+1}} + \frac{k_{2m+n+1}^{(m)}}{u^{2m+n+2}} + \dots = \frac{f_2(u)}{f(u)}$$

ist, so folgt, dafs $k_{2m+n}^{(m)}$ die Gränze ist, welcher sich

$$u^{2m+n+1} \frac{Q_m(u) \dfrac{\partial f(x)}{\partial P_m(x)}}{P_{m+n}(u) \dfrac{\partial f(x)}{\partial P_{m+n}(x)}}$$

mit wachsendem u nähert. Man erhält

$$(7.) \quad k_{2m+n}^{(m)} = \frac{2}{2m+1} \cdot \frac{1.2 \dots m}{1.3 \dots 2m-1} \cdot \frac{1.2 \dots m+n}{1.3 \dots 2m+2n-1} \cdot \frac{\dfrac{\partial f(x)}{\partial P_m(x)}}{\dfrac{\partial f(x)}{\partial P_{m+n}(x)}}$$

$$= (-1)^n \frac{2}{2m+1} \cdot \frac{1.2 \dots m}{1.3 \dots 2m-1} \cdot \frac{1.2 \dots m+n}{1.3 \dots 2m+2n-1} \cdot \frac{\mathfrak{A}_{m+1}}{\mathfrak{A}_m}.$$

Bezeichnet man den Coefficienten von x^s in $P_s(x)$, nämlich $\frac{1.3 \dots 2s-1}{1.2 \dots s}$ durch γ_s, und setzt vorstehenden Ausdruck dem in art. 3 gefundenen gleich, so folgt:

$$\frac{A_{m+1}}{A_m} = \frac{2(-1)^n}{(2m+1)\gamma_m \gamma_{m+n}} \frac{\mathfrak{A}_{m+1}}{\mathfrak{A}_m},$$

mithin

$$\frac{A_m}{A_0} = \frac{(-1)^{mn} 2^m}{1.2 \dots 2m-1} \cdot \frac{1}{\gamma_0 \gamma_1 \dots \gamma_{m-1} \cdot \gamma_n \gamma_{n+1} \dots \gamma_{m+n-1}} \cdot \frac{\mathfrak{A}_m}{\mathfrak{A}_0}.$$

Es ist ferner $A_0 = 1$, und wie sich leicht findet

$$\mathfrak{A}_0 = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \gamma_0 \gamma_1 \dots \gamma_{n-1} \Pi(a_1, a_2, \dots a_n),$$

folglich

$$(8.) \quad \mathfrak{A}_m = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}n(2m+n-1)} . 1.2 \dots m}{2^m} \gamma_0 \gamma_1 \dots \gamma_m \cdot \gamma_0 \gamma_1 \dots \gamma_{m+n-1} \Pi(a_1, a_2, \dots a_n) A_m.$$

Setzt man in diese Gleichung die Ausdrücke für $\mathfrak{A}_m$ und $1.2 \dots m A_m$ ein, indem man letztern aus art. 3 (8.) entnimmt, so folgt

$$\Sigma \pm P_{m+n-1}(a_1) \dots P_m(a_n)$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{1}{2}n(2m+n-1)}}{2^m} \gamma_0 \gamma_1 \dots \gamma_m \cdot \gamma_0 \gamma_1 \dots \gamma_{m+n-1} \Pi(a_1, a_2, \dots a_n)$$

$$\int_{-1}^{1(m)} y_1 y_2 \dots y_m [\Pi(x_1, x_2, \dots x_m)]^2 \partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_m.$$

Dehnt man diese Formel auf $n+1$ Argumente $x, a_1, \dots a_n$ aus, so ergiebt sich

$$(9.)\qquad \Sigma \pm P_{m+n}(x) P_{m+n-1}(a_1) \dots P_m(a_n)$$
$$= \frac{(-1)^{\frac{1}{2}n(2m+n-1)}}{2^m} \gamma_0\gamma_1 \dots \gamma_m \cdot \gamma_0\gamma_1 \dots \gamma_{m+n} \Pi(a_1, \dots a_n, x)$$
$$\int_{-1}^{1\,(m)} y_1 y_2 \dots y_m (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_m)[\Pi(x_1,\dots x_m)]^2 \partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_m,$$

wodurch der Zusammenhang zwischen den Formeln des gegenwärtigen und des vorigen art. dargelegt ist.

Ich werde jetzt noch einen dritten Ausdruck für $f(x)$ herleiten, der ebenfalls eigenthümlicher Natur ist. Integrirt man die Gleichung (1.) $m$mal hinter einander nach x von -1 bis x, ebenso $m$mal nach $a_1, a_2, \dots a_n$ von -1 bis a_1, -1 bis a_2, $\dots$ -1 bis a_n, und wendet dann in jedem Term der Determinante den *Jacobi*schen Satz

$$\int_{-1}^{x\,(m)} P_n(x)\partial x^m = (x^2-1)^m \frac{\Gamma(n-m+1)}{\Gamma(n+m+1)} \frac{\partial^m P_n(x)}{\partial x^m}$$

an, so erhält man

$$\int_{-1}^{x, a_1, \dots a_n\,(m(n+1))} f(x)(\partial x\, \partial a_1 \dots \partial a_n)^m$$
$$= \Sigma \pm \int_{-1}^{x\,(m)} P_{n+m}(x)\partial x^m \int_{-1}^{a_1\,(m)} P_{n+m-1}(a_1)\partial a_1^m \dots \int_{-1}^{a_n\,(m)} P_m(a_n)\partial a_n^m$$
$$= \frac{\Gamma(1)\Gamma(2)\dots\Gamma(n+1)}{\Gamma(2m+1)\Gamma(2m+2)\dots\Gamma(2m+n)} [(x^2-1)(a_1^2-1)\dots(a_n^2-1)]^m$$
$$\Sigma \pm P_{n+m}^{(m)}(x) P_{n+m-1}^{(m)}(a_1) \dots P_m^{(m)}(a_n).$$

In dieser Determinante kann man aber zufolge eines bekannten Satzes alle Elemente auf ihren ersten Term reduciren. Schreibt man darauf die gemeinsamen Faktoren aller Elemente derselben Vertikalreihen heraus, so ergiebt sich vorstehendes

$$= c[(x^2-1)(a_1^2-1)\dots(a_n^2-1)]^m \Sigma \pm x^n a_1^{n-1} \dots a_n^0$$
$$= c[(x^2-1)(a_1^2-1)\dots(a_n^2-1)]^m \Pi(a_n, a_{n-1}, \dots a_1, x),$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist

$$c = \frac{1}{[2^m\Gamma(m+1)]^{n+1}} \cdot \frac{(2m)_0(2m+2)_1(2m+4)_2\dots(2m+2n)_n}{m_0(m+1)_1(m+2)_2\dots(m+n)_n},$$

und μ_ν wie üblich den Coefficienten von x^ν in der Entwicklung von $(1+x)^\mu$ bezeichnet. Es ist demnach auch

$$(10.)\qquad \Sigma \pm P_{n+m}(x) P_{m+n-1}(a_1)\dots P_m(a_n)$$
$$= c\frac{\partial^{m(n+1)}}{(\partial x\, \partial a_1 \dots \partial a_n)^m} \{[(x^2-1)(a_1^2-1)\dots(a_n^2-1)]^m \Pi(a_n, a_{n-1}, \dots a_1, x)\},$$

oder wenn man

$$(11.)\quad \frac{\partial^{mn}}{(\partial a_1\,\partial a_2 \ldots \partial a_n)^m}\{[(a_1^2-1)(a_2^2-1)\ldots(a_n^2-1)]^m \Pi(a_n, a_{n-1}, \ldots a_1, x)\} = V$$

setzt:

$$(12.)\qquad \Sigma \pm \boldsymbol{P}_{m+n}(x)\boldsymbol{P}_{m+n-1}(a_1)\ldots \boldsymbol{P}_m(a_n) = c\frac{\partial^m (x^2-1)^m V}{\partial x^m}.$$

Ist nun der Ausdrnck V reell oder so beschaffen, dafs er durch Multiplication mit einer constanten Gröfse reell gemacht werden kann, so schliefst man aus dieser Gleichung nach bekannten Methoden, dafs zum Mindesten m Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ reell und zwischen den Gränzen -1 und $+1$ gelegen sein müssen. Sind also z. B. die gegebenen n Wurzeln $a_1, a_2, \ldots a_n$ reell und aufserhalb jener Gränzen belegen, so müssen die übrigen m Wurzeln echte Brüche sein. — Sind ferner alle Wurzeln der Gleichung $V = 0$ reell, so sind es auch alle Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$, und die Anzahl der aufserhalb der Gränzen -1 und 1 liegenden Wurzeln ist in beiden dieselbe.

Hieraus ist es ersichtlich, dafs man gegenwärtiges Verfahren zur angenäherten Integration von $F(x)$ mit grofsem Vortheil z. B. dann wird anwenden können, wenn sich $F(x)$ für n bestimmte, aufserhalb des Integrationsintervalls, und für beliebig viele innerhalb desselben willkürlich vertheilte Werthe von x annähernd oder genau ermitteln läfst *).

---

*) Während die vorstehende Abhandlung des Herrn *Christoffel* bereits dem Druck übergeben war, kam der Redaktion dieser Zeitschrift eine von Herrn *C. Gustav Bauer* in München verfafste und als Habilitationsschrift besonders herausgegebene Abhandlung „Von den Integralen gewisser Differentialgleichungen, welche in der Theorie der Anziehung vorkommen" durch die Güte des Herrn Verfassers zu. Von den *Laplace*schen Kugelfunktionen ausgehend beschäftigt sich dieselbe mit den nämlichen Funktionen P, Q, R, welche in der *Christoffel*schen Arbeit eine so wesentliche Rolle spielen, und in einem Anhang enthält sie die Anwendung jener Funktionen auf die *Gaufs*ische mechanische Quadratur. Bei so naher Berührung des Gegenstandes der Untersuchung konnte es nicht fehlen, dafs die beiden gelehrten Herrn Verfasser, trotz der Verschiedenheit ihrer Ausgangspunkte und Methoden, doch in einigen ihrer Ergebnisse zusammentrafen. Zu diesen gehört die schöne in Gleichung $(32.)_2$ pag. 68 enthalte Entwicklung der Funktionen R, welche indessen Herr *Christoffel* bereits in seiner 1856 hier erschienenen Inaugural-Dissertation „De motu permanenti electricitatis" pag. 53 veröffentlicht hat.

B.