

14.

Theorie der *Abel'schen* Functionen.(Von Herrn *B. Riemann.*)

In der folgenden Abhandlung habe ich die *Abel'schen* Functionen nach einer Methode behandelt, deren Principien in meiner Inauguraldissertation *) aufgestellt und in einer etwas veränderten Form in den drei vorhergehenden Aufsätzen dargestellt worden sind. Zur Erleichterung der Uebersicht schicke ich eine kurze Inhaltsangabe voraus.

Die erste Abtheilung enthält die Theorie eines Systems von gleichverzweigten algebraischen Functionen und ihren Integralen, soweit für dieselbe nicht die Betrachtung von \mathcal{G} -Reihen maßgebend ist, und handelt im §. 1—5 von der Bestimmung dieser Functionen durch ihre Verzweigungsart und ihre Unstetigkeiten, im §. 6—10 von den rationalen Ausdrücken derselben in zwei durch eine algebraische Gleichung verknüpfte veränderliche Größen, und im §. 11—13 von der Transformation dieser Ausdrücke durch rationale Substitutionen. Der bei dieser Untersuchung sich darbietende Begriff einer *Klasse* von algebraischen Gleichungen, welche sich durch rationale Substitutionen in einander transformiren lassen, dürfte auch für andere Untersuchungen wichtig und die Transformation einer solchen Gleichung in Gleichungen niedrigsten Grades ihrer Klasse (§. 13) auch bei anderen Gelegenheiten von Nutzen sein. Diese Abtheilung behandelt endlich im §. 14—16 zur Vorbereitung der folgenden die Anwendung des *Abel'schen* Additionstheorems für ein beliebiges System allenthalben endlicher Integrale von gleichverzweigten algebraischen Functionen zur Integration eines Systems von Differentialgleichungen.

In der zweiten Abtheilung werden für ein beliebiges System von immer endlichen Integralen gleichverzweigter, algebraischer, $2p+1$ fach zusammenhangender Functionen die *Jacobi'schen* Umkehrungsfunktionen von p veränderlichen Größen durch p fach unendliche \mathcal{G} -Reihen ausgedrückt, d. h. durch Reihen von der Form

*) Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Größe. Göttingen 1851.

$$\mathcal{F}(v_1, v_2, \dots, v_p) = \left(\sum_{\mu}^{\infty} \right)^p e^{\left(\sum_1^p \right)^2 a_{\mu, \mu'} m_{\mu} m_{\mu'} + 2 \sum_1^p v_{\mu} m_{\mu}},$$

worin die Summationen im Exponenten sich auf μ und μ' , die äusseren Summationen auf m_1, m_2, \dots, m_p beziehen. Es ergibt sich, dafs zur allgemeinen Lösung dieser Aufgabe eine — wenn $p > 3$, specielle — Gattung von \mathcal{F} -Reihen ausreicht, in denen zwischen den $\frac{p(p+1)}{2}$ Gröfsen $a_{\frac{p-2}{1} \frac{p-3}{2}}$ Relationen stattfinden, so dafs nur $3p - 3$ willkürlich bleiben. Dieser Theil der Abhandlung bildet zugleich eine Theorie dieser speciellen Gattung von \mathcal{F} -Functionen; die allgemeinen \mathcal{F} -Functionen bleiben hier ausgeschlossen, lassen sich jedoch nach einer ganz ähnlichen Methode behandeln.

Das hier erledigte *Jacobi'sche* Umkehrungsproblem ist für die hyperelliptischen Integrale schon auf mehreren Wegen durch die beharrliche mit so schönem Erfolge gekrönten Arbeiten von *Weierstrafs* gelöst worden, von denen eine Uebersicht im 47. Bande d. J. (S. 289) mitgetheilt worden ist. Es ist jedoch bis jetzt nur von dem Theile dieser Arbeiten, welcher in den §§. 1 und 2 und der ersten die elliptischen Functionen betreffenden Hälfte des §. 3 der angeführten Abhandlung skizzirt wird, die wirkliche Ausführung veröffentlicht (Bd. 52 S. 285 d. J.); in wie weit zwischen den späteren Theilen dieser Arbeiten und meinen hier dargestellten eine Uebereinstimmung nicht blofs in Resultaten, sondern auch in den zu ihnen führenden Methoden stattfindet, wird grofsentheils erst die versprochene ausführliche Darstellung derselben ergeben können.

Die gegenwärtige Abhandlung bildet mit Ausnahme der beiden letzten §§. 26 und 27, deren Gegenstand damals nur kurz angedeutet werden konnte, einen Auszug aus einem Theile meiner von Michaelis 1855 bis Michaelis 1856 zu Göttingen gehaltenen Vorlesungen. Was die Auffindung der einzelnen Resultate betrifft, so wurde ich auf das im §. 1—5, 9 und 12 Mitgetheilte und die dazu nöthigen vorbereitenden Sätze, welche später Behufs der Vorlesungen so, wie es in dieser Abhandlung geschehen ist, weiter ausgeführt wurden, im Herbste 1851 und zu Anfang 1852 durch Untersuchungen über die conforme Abbildung mehrfach zusammenhängender Flächen geführt, ward aber dann durch einen andern Gegenstand von dieser Untersuchung abgezogen. Erst um Ostern 1855 wurde sie wieder aufgenommen und in den Oster- und Michaelisferien jenes Jahres bis zu §. 21 incl. fortgeführt; das Uebrige wurde bis Michaelis 1856 hinzugefügt. Einzelne ergänzende Zusätze sind an manchen Stellen während der Ausarbeitung hinzugekommen.

Erste Abtheilung.

1.

Ist s die Wurzel einer irreductibeln Gleichung n ten Grades, deren Coefficienten ganze Functionen m ten Grades von x sind, so entsprechen jedem Werthe von x n Werthe von s , die sich mit x überall, wo sie nicht unendlich werden, stetig ändern. Stellt man daher (nach S. 103 dieses Bandes) die Verzweigungsart dieser Function durch eine in der x -Ebene ausgebreitete unbegrenzte Fläche T dar, so ist diese in jedem Theile der Ebene n fach, und s ist dann eine einwerthige Function des Orts in dieser Fläche. Eine unbegrenzte Fläche kann entweder als eine Fläche mit unendlich weit entfernter Begrenzung oder als eine geschlossene angesehen werden, und Letzteres soll bei der Fläche T geschehen, so dafs dem Werthe $x = \infty$ in jedem der n Blätter der Fläche ein Punkt entspricht, wenn nicht etwa für $x = \infty$ eine Verzweigung stattfindet.

Jede rationale Function von s und x ist offenbar ebenfalls eine einwerthige Function des Orts in der Fläche T und besitzt also dieselbe Verzweigungsart wie die Function s , und es wird sich unten ergeben, dafs auch das Umgekehrte gilt.

Durch Integration einer solchen Function erhält man eine Function, deren verschiedene Fortsetzungen für denselben Theil der Fläche T sich nur um Constanten unterscheiden, da ihre Derivirte für denselben Punkt dieser Fläche immer denselben Werth wieder annimmt.

Ein solches System von gleichverzweigten algebraischen Functionen und Integralen dieser Functionen bildet zunächst den Gegenstand unserer Betrachtung; statt aber von diesen Ausdrücken dieser Functionen auszugehen, werden wir sie mit Anwendung des *Dirichlet'schen* Principis (S. 111 dieses Bandes) durch ihre Unstetigkeiten definiren.

2.

Zur Vereinfachung des Folgenden heifse eine Function *für einen Punkt der Fläche T unendlich klein von der ersten Ordnung*, wenn ihr Logarithmus bei einem positiven Umlaufe um ein diesen Punkt umgebendes Flächenstück, in welchem sie endlich und von Null verschieden bleibt, um $2\pi i$ wächst. Es ist demnach für einen Punkt, um den die Fläche T sich μ mal windet, wenn dort x einen endlichen Werth a hat, $(x - a)^{\frac{1}{\mu}}$, also $(dx)^{\frac{1}{\mu}}$, wenn aber

$z = \infty$, $\left(\frac{1}{z}\right)^\mu$ unendlich klein von der ersten Ordnung. Der Fall, wo eine Function in einem Punkte der Fläche T unendlich klein oder unendlich groß von der ν ten Ordnung wird, kann so betrachtet werden, als wenn die Function in ν dort zusammenfallenden (oder unendlich nahen) Punkten unendlich klein oder unendlich groß von der ersten Ordnung wird, wie in der Folge bisweilen geschehen soll.

Die Art und Weise, wie jene hier zu betrachtenden Functionen un-
stetig werden, kann dann so ausgedrückt werden. Wird eine von ihnen in
einem Punkte der Fläche T unendlich, so kann sie, wenn r eine beliebige
Function bezeichnet, die in diesem Punkte unendlich klein von der ersten
Ordnung wird, stets durch Subtraction eines endlichen Ausdrucks von der Form

$$A \log r + Br^{-1} + Cr^{-2} + \dots$$

in eine dort stetige verwandelt werden, wie sich aus den bekannten — nach
Cauchy oder durch die *Fourier'sche* Reihe zu beweisenden — Sätzen über
die Entwicklung einer Function in Potenzreihen ergibt.

3.

Man denke sich jetzt eine in der z -Ebene allenthalben n fach ausge-
breitete unbegrenzte und nach dem Obigen als geschlossen zu betrachtende
zusammenhangende Fläche T gegeben und diese in eine einfach zusammen-
hangende T' zerschnitten. Da die Begrenzung einer einfach zusammenhengen-
den Fläche aus *einem* Stücke besteht, eine geschlossene Fläche aber durch
eine ungerade Anzahl von Schnitten eine gerade Zahl von Begrenzungsstücken,
durch eine gerade eine ungerade erhält, so ist zu dieser Zerschneidung eine
gerade Anzahl von Schnitten erforderlich. Die Anzahl dieser Querschnitte
sei $= 2p$. Die Zerschneidung werde zur Vereinfachung des Folgenden so
ausgeführt, dafs jeder spätere Schnitt von einem Punkte eines früheren bis zu
dem anstofsenden Punkte auf der andern Seite desselben geht: wenn sich
dann eine Gröfse längs der ganzen Begrenzung von T' stetig ändert und im
ganzen Schnittsysteme zu beiden Seiten gleiche Aenderungen erleidet, so ist
die Differenz der beiden Werthe, die sie in demselben Punkte des Schnitt-
netzes annimmt, in allen Theilen *eines* Querschnitts derselben Constanten gleich.

Man setze nun $z = x + yi$ und nehme in T eine Function $\alpha + \beta i$ von
 x, y folgendermassen an:

In der Umgebung der Punkte $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ bestimme man sie gleich ge-
gebenen in diesen Punkten unendlich werdenden Functionen von $x + yi$, und

zwar um ε_ν , indem man eine beliebige Function von z , die in ε_ν unendlich klein von der ersten Ordnung wird, durch r_ν bezeichnet, gleich einem endlichen Ausdrücke von der Form

$$A_\nu \log r_\nu + B_\nu r_\nu^{-1} + C_\nu r_\nu^{-2} + \dots = \varphi_\nu(r_\nu),$$

worin $A_\nu, B_\nu, C_\nu \dots$ willkürliche Constanten sind. Man ziehe ferner nach einem beliebigen Punkte von allen Punkten ε , für welche die Größe A von Null verschieden ist, einander nicht schneidende Linien durch das Innere von T' , von ε_ν die Linie l_ν . Man nehme endlich die Function in der ganzen noch übrigen Fläche T so an, daß sie aufser den Linien l und den Querschnitten überall stetig, auf der positiven (linken) Seite der Linie l_ν um $-2\pi i A_\nu$ und auf der positiven Seite des ν ten Querschnitts um die gegebene Constante h_ν größer ist, als auf der andern, und daß das Integral $\int \left(\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 \right) dT$ durch die Fläche T ausgedehnt einen endlichen Werth erhält. Dies ist wie leicht zu sehen immer möglich, wenn die Summe sämtlicher Größen A gleich Null ist, aber auch nur unter dieser Bedingung, weil nur dann die Function nach einem Umlaufe um das System der Linien l den vorigen Werth wieder annehmen kann.

Die Constanten $h^{(1)}, h^{(2)}, \dots, h^{(2p)}$, um welche eine solche Function auf der positiven Seite der Querschnitte größer ist, als auf der andern, sollen die *Periodicitätsmoduln* dieser Function genannt werden.

Nach dem *Dirichlet'schen* Princip kann nun die Function $\alpha + \beta i$ in eine Function ω von $x + yi$ verwandelt werden durch Subtraction einer ähnlichen in T' allenthalben stetigen Function von x, y mit rein imaginären Periodicitätsmoduln, und diese ist bis auf eine additive Constante völlig bestimmt. Die Function ω stimmt dann mit $\alpha + \beta i$ in den Unstetigkeiten im Innern von T' und in den reellen Theilen der Periodicitätsmoduln überein. Für ω können daher die Functionen φ_ν und die reellen Theile ihrer Periodicitätsmoduln willkürlich gegeben werden. Durch diese Bedingungen ist sie bis auf eine additive Constante völlig bestimmt, folglich auch der imaginäre Theil ihrer Periodicitätsmoduln.

Es wird sich zeigen, daß diese Function ω sämtliche im §. 1 bezeichneten Functionen als specielle Fälle unter sich enthält.

4.

Allenthalben endliche Functionen ω . (Integrale erster Gattung.)

Wir wollen jetzt die einfachsten von ihnen betrachten und zwar zuerst diejenigen, die immer endlich bleiben und also im Innern von T' allenthalben stetig sind. Sind w_1, w_2, \dots, w_p solche Functionen, so ist auch

$$\omega = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_p w_p + \text{const.},$$

worin $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ beliebige Constanten sind, eine solche Function. Es seien die Periodicitätsmoduln der Functionen w_1, w_2, \dots, w_p für den ν ten Querschnitt $k_1^{(\nu)}, k_2^{(\nu)}, \dots, k_p^{(\nu)}$. Der Periodicitätsmodul von ω für diesen Querschnitt ist dann $\alpha_1 k_1^{(\nu)} + \alpha_2 k_2^{(\nu)} + \dots + \alpha_p k_p^{(\nu)} = k^{(\nu)}$; und setzt man die Gröfsen α in die Form $\gamma + \delta i$, so sind die reellen Theile der $2p$ Gröfsen $k^{(1)}, k^{(2)}, \dots, k^{(2p)}$ lineare Functionen der Gröfsen $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_p$. Wenn nun zwischen den Gröfsen w_1, w_2, \dots, w_p keine lineare Gleichung mit constanten Coefficienten stattfindet, so kann die Determinante dieser linearen Ausdrücke nicht verschwinden; denn es liefsen sich sonst die Verhältnisse der Gröfsen α so bestimmen, dafs die Periodicitätsmoduln des reellen Theils von ω sämmtlich 0 würden, folglich der reelle Theil von ω und also auch ω selbst nach dem *Dirichlet'schen* Princip eine Constante sein müfste. Es können daher dann die $2p$ Gröfsen α und β so bestimmt werden, dafs die reellen Theile der Periodicitätsmoduln gegebene Werthe erhalten; und folglich kann ω jede immer endlich bleibende Function darstellen, wenn w_1, w_2, \dots, w_p keiner linearen Gleichung mit constanten Coefficienten genügen. Diese Functionen lassen sich aber immer dieser Bedingung gemäfs wählen; denn so lange $\mu < p$, finden zwischen den Periodicitätsmoduln des reellen Theils von $\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_\mu w_\mu + \text{const.}$ lineare Bedingungsgleichungen statt; es ist daher $w_{\mu+1}$ nicht in dieser Form enthalten, wenn man, was nach dem Obigen immer möglich ist, die Periodicitätsmoduln des reellen Theils dieser Function so bestimmt, dafs sie diesen Bedingungsgleichungen nicht genügen.

Functionen ω , die für einen Punkt der Fläche T unendlich von der ersten Ordnung werden. (Integrale zweiter Gattung.)

Es sei ω nur für einen Punkt ϵ der Fläche T unendlich, und für diesen seien alle Coefficienten in φ aufser B gleich 0. Eine solche Function ist dann bis auf eine additive Constante bestimmt durch die Gröfse B und die reellen Theile ihrer Periodicitätsmoduln. Bezeichnet $t^0(\epsilon)$ irgend eine solche

Function, so können in dem Ausdrucke

$$t(\varepsilon) = \beta t^0(\varepsilon) + \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_p w_p + \text{const.}$$

die Constanten $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ immer so bestimmt werden, daß für ihn die Größe B und die reellen Theile der Periodicitätsmoduln beliebig gegebene Werthe erhalten. Dieser Ausdruck stellt also jede solche Function dar.

Functionen ω , welche für zwei Punkte der Fläche T logarithmisch unendlich werden. (Integrale dritter Gattung.)

Betrachten wir drittens den Fall, wo die Function ω nur logarithmisch unendlich wird, so muß dies, da die Summe der Größen A gleich 0 sein muß, wenigstens für zwei Punkte der Fläche T , ε_1 und ε_2 , geschehen und $A_2 = -A_1$ sein. Ist von den Functionen, bei denen dies statt hat und die beiden letztern Größen $= 1$ sind, irgend eine $\bar{\omega}^0(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, so sind nach ähnlichen Schlüssen, wie oben, alle übrigen in der Form

$$\bar{\omega}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \bar{\omega}^0(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_p w_p + \text{const.}$$

enthalten.

Für die folgenden Bemerkungen nehmen wir zur Vereinfachung an, daß die Punkte ε keine Verzweigungspunkte sind und nicht im Unendlichen liegen. Man kann dann $r_\nu = z - z_\nu$ setzen, indem man durch z_ν den Werth von z in ε_ν bezeichnet. Wenn man dann $\bar{\omega}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ so nach z_1 differentiirt, daß die reellen Theile der Periodicitätsmoduln (oder auch p von den Periodicitätsmoduln) und der Werth von $\bar{\omega}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ für einen beliebigen Punkt der Fläche T constant bleiben, so erhält man eine Function $t(\varepsilon_1)$, die in ε_1 unstetig wie $\frac{1}{z - z_1}$ wird. Umgekehrt ist, wenn $t(\varepsilon_1)$ eine solche Function ist, $\int_{z_2}^{z_3} t(\varepsilon_1) \delta z_1$, durch eine beliebige in T von ε_2 nach ε_3 führende Linie genommen, gleich einer Function $\bar{\omega}(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$. Auf ähnliche Art erhält man durch n successive Differentiationen eines solchen $t(\varepsilon_1)$ nach z_1 Functionen ω , welche im Punkte ε_1 wie $n!(z - z_1)^{-n-1}$ unstetig werden und übrigens endlich bleiben.

Für die ausgeschlossenen Lagen der Punkte ε bedürfen diese Sätze einer leichten Modification.

Offenbar kann nun ein mit constanten Coefficienten aus Functionen w , aus Functionen $\bar{\omega}$ und ihren Derivirten nach den Unstetigkeitswerthen gebildeter linearer Ausdruck so bestimmt werden, daß er im Innern von T' beliebig gegebene Unstetigkeiten von der Form, wie ω , erhält, und die reellen

Theile seiner Periodicitätsmoduln beliebig gegebene Werthe annehmen. Durch einen solchen Ausdruck kann also jede gegebene Function ω dargestellt werden.

5.

Der allgemeine Ausdruck einer Function ω , die für m Punkte der Fläche T , $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$ unendlich groß von der ersten Ordnung wird, ist nach dem Obigen

$$s = \beta_1 t_1 + \beta_2 t_2 + \dots + \beta_m t_m + \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_p w_p + \text{const.},$$

worin t_ν eine beliebige Function $t(\varepsilon_\nu)$ und die Größen α und β Constanten sind. Wenn von den m Punkten ε eine Anzahl ϱ in denselben Punkt η der Fläche T zusammenfallen, so sind die ϱ diesen Punkten zugehörigen Functionen t zu ersetzen durch eine Function $t(\eta)$ und deren $\varrho - 1$ erste Derivirte nach ihrem Unstetigkeitswerthe (§. 2).

Die $2p$ Periodicitätsmoduln dieser Function s sind lineare homogene Functionen der $p + m$ Größen α und β . Wenn $m \geq p + 1$, lassen sich also $2p$ von den Größen α und β als lineare homogene Functionen der übrigen so bestimmen, daß die Periodicitätsmoduln sämmtlich 0 werden. Die Function enthält dann noch $m - p + 1$ willkürliche Constanten, von denen sie eine lineare homogene Function ist, und kann als ein linearer Ausdruck von $m - p$ Functionen betrachtet werden, deren jede nur für $p + 1$ Werthe unendlich von der ersten Ordnung wird.

Wenn $m = p + 1$ ist, so sind die Verhältnisse der $2p + 1$ Größen α und β bei jeder Lage der $p + 1$ Punkte ε völlig bestimmt. Es können jedoch für besondere Lagen dieser Punkte einige der Größen β gleich 0 werden. Die Anzahl dieser Größen sei $= m - \mu$, so daß die Function nur für μ Punkte unendlich von der ersten Ordnung wird. Diese μ Punkte müssen dann eine solche Lage haben, daß von den $2p$ Bedingungsgleichungen zwischen den $p + \mu$ übrigen Größen β und α $p + 1 - \mu$ eine identische Folge der übrigen sind, und es können daher nur $2\mu - p - 1$ von ihnen beliebig gewählt werden. Außerdem enthält die Function noch 2 willkürliche Constanten.

Es sei nun s so zu bestimmen, daß μ möglichst klein wird. Wenn s μ mal unendlich von der ersten Ordnung wird, so ist dies auch mit jeder rationalen Function ersten Grades von s der Fall; man kann daher für die Lösung dieser Aufgabe einen der μ Punkte beliebig wählen. Die Lage der übrigen muß dann so bestimmt werden, daß $p + 1 - \mu$ von den Bedingungsgleichungen zwischen den Größen α und β eine identische Folge der übrigen

sind; es muß also, wenn die Verzweigungswerthe der Fläche T nicht besonderen Bedingungsgleichungen genügen, $p+1-\mu \leq \mu-1$ oder $\mu \geq \frac{1}{2}p+1$ sein.

Die Anzahl der in einer Function s , die nur für m Punkte der Fläche T unendlich von der ersten Ordnung wird und übrigens stetig bleibt, enthaltenen willkürlichen Constanten ist in allen Fällen $= 2m - p + 1$.

Eine solche Function ist die Wurzel einer Gleichung n^{ten} Grades, deren Coefficienten ganze Functionen m^{ten} Grades von z sind.

Sind s_1, s_2, \dots, s_n die n Werthe der Function s für dasselbe z , und bezeichnet σ eine beliebige Größe, so ist $(\sigma - s_1)(\sigma - s_2) \dots (\sigma - s_n)$ eine einwerthige Function von z , die nur für einen Punkt der z -Ebene, der mit einem Punkte ε zusammenfällt, unendlich wird und unendlich von einer so hohen Ordnung, als Punkte ε auf ihn fallen. In der That wird für jeden auf ihn fallenden Punkt ε , der kein Verzweigungspunkt ist, nur *ein* Factor dieses Products von einer um 1 höheren Ordnung unendlich, für einen Punkt ε , um den die Fläche T sich μ mal windet, aber μ Factoren von einer um $\frac{1}{\mu}$ höheren Ordnung. Bezeichnet man nun die Werthe von z in den Punkten ε , wo z nicht unendlich ist, durch $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_r$ und $(z - \zeta_1)(z - \zeta_2) \dots (z - \zeta_r)$ durch a_0 ; so ist $a_0(\sigma - s_1) \dots (\sigma - s_n)$ eine einwerthige Function von z , die für alle endlichen Werthe von z endlich ist und für $z = \infty$ unendlich von der m^{ten} Ordnung wird, also eine ganze Function m^{ten} Grades von z . Sie ist zugleich eine ganze Function n^{ten} Grades von σ , die für $\sigma = s$ verschwindet. Bezeichnet man sie durch F und, wie wir in der Folge thun wollen, *eine ganze Function F n^{ten} Grades von σ und m^{ten} Grades von z durch $F(\sigma, z)$* , so ist s die Wurzel der Gleichung $F(s, z) = 0$.

Diese Function F ist eine Potenz einer unzerfällbaren — d. h. nicht als ein Product aus ganzen Functionen von σ und z darstellbaren — Function. Denn jeder ganze rationale Factor von $F(\sigma, z)$ bildet, da er für einige der Wurzeln s_1, s_2, \dots, s_n verschwinden muß, für $\sigma = s$ eine Function von z , die in einem Theile der Fläche T verschwindet und folglich, da diese Fläche zusammenhangend ist, in der ganzen Fläche 0 sein muß. Zwei unzerfällbare Factoren von $F(\sigma, z)$ könnten aber nur für eine endliche Anzahl von Werthenpaaren zugleich verschwinden, wenn die eine nicht durch Multiplication mit einer Constanten aus der andern erhalten werden könnte. Folglich muß F eine Potenz einer unzerfällbaren Function sein.

Wenn der Exponent ν dieser Potenz > 1 ist, so wird die Verzweigungsart der Function s nicht dargestellt durch die Fläche T , sondern durch eine in der z -Ebene allenthalben $\frac{n}{\nu}$ -fach ausgebreitete Fläche τ , in welcher die Fläche T allenthalben ν -fach ausgebreitet ist. Es kann dann zwar s als eine wie T verzweigte Function betrachtet werden, nicht aber umgekehrt T als verzweigt, wie s .

Eine solche nur in einzelnen Punkten von T unstetige Function, wie s , ist auch $\frac{\partial \omega}{\partial z}$. Denn diese Function nimmt zu beiden Seiten der Querschnitte und der Linien l denselben Werth an, da die Differenz der beiden Werthe von ω in diesen Linien längs denselben constant ist; sie kann nur unendlich werden, wo ω unendlich wird, und in den Verzweigungspunkten der Fläche und ist sonst allenthalben stetig, da die Derivirte einer einädrig und endlich bleibenden Function ebenfalls einädrig und endlich bleibt.

Es sind daher sämmtliche Functionen ω algebraische wie T verzweigte Functionen von z oder Integrale solcher Functionen. Dieses System von Functionen ist bestimmt, wenn die Fläche T gegeben ist und hängt nur von der Lage ihrer Verzweigungspunkte ab.

6.

Es sei jetzt die irreductible Gleichung $F(s, z) = 0$ gegeben und die Art der Verzweigung der Function s oder der sie darstellenden Fläche T zu bestimmen. Wenn für einen Werth β von z μ Zweige der Function zusammenhängen, so dafs einer dieser Zweige sich erst nach μ Umläufen des z um β wieder in sich selbst fortsetzt, so können diese μ Zweige der Function (wie nach *Cauchy* oder durch die *Fourier'sche* Reihe leicht bewiesen werden kann) dargestellt werden durch eine Reihe nach steigenden rationalen Potenzen von $z - \beta$ mit Exponenten vom kleinsten gemeinschaftlichen Nenner μ , und umgekehrt.

Ein Punkt der Fläche T , in welchem nur zwei Zweige einer Function zusammenhängen, so dafs sich um diesen Punkt der erste in den zweiten und dieser in jenen fortsetzt, heifse ein *einfacher Verzweigungspunkt*.

Ein Punkt der Fläche, um welchen sie sich $(\mu + 1)$ mal windet, kann dann angesehen werden als μ zusammengefallene (oder unendlich nahe) einfache Verzweigungspunkte.

Um dies zu zeigen, seien in einem diesen Punkt umgebenden Stücke der z -Ebene s_1, s_2, \dots, s_μ , einädrige Zweige der Function s und in der

Begrenzung desselben, bei positiver Umschreibung auf einander folgend, a_1, a_2, \dots, a_μ einfache Verzweigungspunkte. Durch einen positiven Umlauf um a_1 werde s_1 mit s_2 , um a_2 s_2 mit $s_3, \dots, \text{um } a_\mu$ s_μ mit $s_{\mu+1}$ vertauscht. Es gehen dann nach einem positiven Umlaufe um ein alle diese Punkte (und keinen andern Verzweigungspunkt) enthaltendes Gebiet

$$s_1, s_2, \dots, s_\mu, s_{\mu+1}$$

$$\text{in } s_2, s_3, \dots, s_{\mu+1}, s_1, \text{ über,}$$

und es entsteht daher, wenn sie zusammenfallen, ein $(\mu+1)$ facher Windungspunkt.

Die Eigenschaften der Functionen ω hängen wesentlich davon ab, wie vielfach zusammenhängend die Fläche T ist. Um dies zu entscheiden, wollen wir zunächst die Anzahl der einfachen Verzweigungspunkte der Function s bestimmen.

In einem Verzweigungspunkte nehmen die dort zusammenhängenden Zweige der Function denselben Werth an, und es werden daher zwei oder mehrere Wurzeln der Gleichung

$$F(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

einander gleich. Dies kann nur geschehen, wenn

$$F'(s) = a_0 n s^{n-1} + a_1 \overline{n-1} s^{n-2} + \dots + a_{n-1}$$

oder die einwerthige Function von $z, F'(s_1) F'(s_2) \dots F'(s_n)$, verschwindet. Diese Function wird für endliche Werthe von z nur unendlich, wenn $s = \infty$, also $a_0 = 0$ ist und mufs, um endlich zu bleiben, mit a_0^{n-2} multiplicirt werden. Sie wird dann eine einwerthige, für ein endliches z endliche Function von z , welche für $z = \infty$ unendlich von der $2m(n-1)$ ten Ordnung wird, also eine ganze Function $2m(n-1)$ ten Grades. Die Werthe von z , für welche $F'(s)$ und $F(s)$ gleichzeitig verschwinden, sind also die Wurzeln der Gleichung $2m(n-1)$ ten Grades

$$Q(z) = a_0^{n-2} \prod_i F'(s_i) = 0 \text{ oder auch, da } F'(s_i) = a_0 \prod_{i'} (s_i - s_{i'}), (i \geq i')$$

$$= a_0^{2(n-1)} \prod_{i, i'} (s_i - s_{i'}) = 0, (i \geq i'),$$

welche durch Elimination von s aus $F'(s) = 0$ und $F(s) = 0$ gebildet werden kann.

Wird $F(s, z) = 0$ für $s = \alpha, z = \beta$, so ist

Um in jedem Falle, wenn für $z = \beta$ mehrere Wurzeln der Gleichung $F'(s) = 0$ gleich α werden, zu entscheiden, wie viele einfache Verzweigungspunkte für $(s = \alpha, z = \beta)$ zusammenfallen, und wie viele von diesen sich aufheben, muß man diese Wurzeln (nach dem Verfahren von *Lagrange*) soweit nach steigenden Potenzen von $z - \beta$ entwickeln, bis diese Entwicklungen sämmtlich von einander verschieden werden; wodurch sich die wirklich noch stattfindenden Verzweigungen ergeben. Und man muß dann untersuchen, von welcher Ordnung $F'(s)$ für jede dieser Wurzeln unendlich klein wird, um die Anzahl der ihnen zugehörigen linearen Factoren von $Q(z)$ oder der für $(s = \alpha, z = \beta)$ zusammengefallenen einfachen Verzweigungspunkte zu bestimmen.

Bezeichnet die Zahl ρ , wie oft sich die Fläche T um den Punkt (s, z) windet, so wird im Punkte (z) $F'(s)$ so oft unendlich klein von der ersten Ordnung, als dort einfache Verzweigungspunkte zusammenfallen, $dz^{1-\frac{1}{\rho}}$ so oft, als deren wirklich stattfinden, folglich $F'(s) dz^{\frac{1}{\rho}-1}$ so oft, als von ihnen sich aufheben.

Ist die Anzahl der wirklich stattfindenden einfachen Verzweigungen w , die Anzahl der sich aufhebenden $2r$, so ist

$$w + 2r = 2(n-1)m.$$

Nimmt man an, daß die Verzweigungspunkte nur paarweise und sich aufhebend zusammenfallen, so ist für r Werthenpaare $(s = \gamma_\rho, z = \delta_\rho)$ $F = \frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0$ und $\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial s \partial z}\right)^2$ nicht Null und für w Werthenpaare von s und z $F = 0, \frac{\partial F}{\partial s} = 0, \frac{\partial F}{\partial z}$ nicht Null und $\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}$ nicht Null.

Wir beschränken uns meistens auf die Behandlung dieses Falles, da sich die Resultate auf die übrigen als Grenzfälle desselben leicht ausdehnen lassen, und wir können dies hier um so mehr thun, da wir die Theorie dieser Functionen auf eine von der Ausdrucksform unabhängige, keinen Ausnahmefällen unterworfenen Grundlage gestützt haben.

7.

Es findet nun bei einer einfach zusammenhängenden, über einen endlichen Theil der z -Ebene ausgebreiteten Fläche zwischen der Anzahl ihrer einfachen Verzweigungspunkte und der Anzahl der Umdrehungen, welche die Richtung ihrer Begrenzungslinie macht, die Relation statt, daß die letztere um

eine Einheit größer ist, als die erstere; und aus dieser ergibt sich für eine mehrfach zusammenhängende Fläche eine Relation zwischen diesen Anzahlen und der Anzahl der Querschnitte, welche sie in eine einfach zusammenhängende verwandeln. Wir können diese Relation, welche im Grunde von Mafsverhältnissen unabhängig ist und der *analysis situs* angehört, hier für die Fläche T so ableiten.

Nach dem *Dirichlet'schen* Princip läßt sich in der einfach zusammenhängenden Fläche T' die Function $\log \zeta$ von z so bestimmen, daß ζ für einen beliebigen Punkt im Innern derselben unendlich klein von der ersten Ordnung wird, und $\log \zeta$ längs einer beliebigen sich nicht schneidenden, von dort nach der Begrenzung führenden Linie auf der positiven Seite um $-2\pi i$ größer, als auf der negativen, übrigens aber allenthalben stetig und längs der Begrenzung von T' rein imaginär ist. Es nimmt dann die Function ζ jeden Werth, dessen Modul < 1 , einmal an; die Gesamtheit ihrer Werthe wird folglich durch eine über einen Kreis in der ζ -Ebene einfach ausgebreitete Fläche vertreten. Jedem Punkte von T' entspricht ein Punkt des Kreises, und umgekehrt. Es wird daher für einen beliebigen Punkt der Fläche, wo $z = z'$, $\zeta = \zeta'$, die Function $\zeta - \zeta'$ unendlich klein von der ersten Ordnung, und folglich bleibt dort, wenn die Fläche T' sich $(\mu + 1)$ mal um ihn windet, bei endlichem z'

$$\frac{z - z'}{(\zeta - \zeta')^{\mu+1}} = \frac{\partial z}{\partial \zeta (\zeta - \zeta')^\mu},$$

bei unendlichem z' aber

$$\frac{z^{-1}}{(\zeta - \zeta')^{\mu+1}} = - \frac{\partial z}{z \partial \zeta (\zeta - \zeta')^\mu}$$

endlich. Das Integral $\int \partial \log \frac{\partial z}{\partial \zeta}$, um den ganzen Kreis positiv herumgenommen, ist gleich der Summe der Integrale um die Punkte, wo $\frac{\partial z}{\partial \zeta}$ unendlich oder Null wird, und also $= 2\pi i(w - 2n)$. Bezeichnet s ein Stück der Begrenzung von T' von einem und demselben bestimmten Punkte bis zu einem veränderlichen Punkte der Begrenzung, und σ das entsprechende Stück auf dem Kreisumfange, so ist

$$\log \frac{\partial z}{\partial \zeta} = \log \frac{\partial z}{\partial s} + \log \frac{\partial s}{\partial \sigma} - \log \frac{\partial \zeta}{\partial \sigma},$$

und, durch die ganze Begrenzung ausgedehnt,

$$\int \partial \log \frac{\partial z}{\partial s} = (2p - 1)2\pi i, \quad \int \partial \log \frac{\partial s}{\partial \sigma} = 0, \quad - \int \partial \log \frac{\partial \zeta}{\partial \sigma} = -2\pi i,$$

also

$$\int \partial \log \frac{\partial z}{\partial \zeta} = (2p - 2) 2\pi i.$$

Es ergibt sich demnach $w - 2n = 2(p - 1)$. Da nun $w = 2((n - 1)m - r)$, so ist $p = (n - 1)(m - 1) - r$.

S.

Der allgemeine Ausdruck der wie T verzweigten Functionen s' von z , die für m' beliebig gegebene Punkte von T unendlich von der ersten Ordnung werden und übrigens stetig bleiben, enthält nach dem Obigen $m' - p + 1$ willkürliche Constanten und ist eine lineäre Function derselben (§. 5). Lassen sich also, wie jetzt gezeigt werden soll, rationale Ausdrücke von s und z bilden, die für m' beliebig gegebene, der Gleichung $F = 0$ genügende Werthenpaare von s und z unendlich von der ersten Ordnung werden und lineare Functionen von $m' - p + 1$ willkürlichen Constanten sind, so kann durch diese Ausdrücke jede Function s' dargestellt werden.

Damit der Quotient zweier ganzen Functionen $\chi(s, z)$ und $\psi(s, z)$ für $s = \infty$ und $z = \infty$ beliebige endliche Werthe annehmen kann, müssen beide von gleichem Grade sein; der Ausdruck, durch welchen s' dargestellt werden soll, sei daher von der Form $\frac{\psi(s, z)}{\chi(s, z)}$, und überdies sei $\nu \geq n - 1$, $\mu \geq m - 1$.

Wenn zwei Zweige der Function s ohne zusammenzuhängen einander gleich werden, also für zwei verschiedene Punkte der Fläche T $z = \gamma$ und $s = \delta$ wird, so wird s' allgemein zu reden in diesen beiden Punkten verschiedene Werthe annehmen; soll also $\psi - s'\chi$ allenthalben $= 0$ sein, so muß für zwei verschiedene Werthe von s' $\psi(\gamma, \delta) - s'\chi(\gamma, \delta) = 0$ sein, folglich $\chi(\gamma, \delta) = 0$ und $\psi(\gamma, \delta) = 0$. Es müssen also die Functionen χ und ψ für die r Werthenpaare $s = \gamma_e, z = \delta_e$ (S. 127) verschwinden *).

Die Function χ verschwindet für einen Werth von z , für welchen die einwerthige und für ein endliches z endliche Function von z

$$K(z) = a_0^\nu \chi(s_1) \chi(s_2) \dots \chi(s_n) = 0$$

ist; diese Function wird für ein unendliches z unendlich von der Ordnung

*) Es ist hier, wie gesagt, nur der Fall berücksichtigt, wo die Verzweigungspunkte der Function s nur paarweise und sich aufhebend zusammenfallen. Im Allgemeinen müssen in einem Punkte von T , wo nach der Auffassung im §. 6 sich aufhebende Verzweigungspunkte zusammenfallen, χ und ψ , wenn T sich um diesen Punkt q mal windet, unendlich klein werden, wie $F'(s) dz \frac{1}{\epsilon^{q-1}}$, damit die ersten Glieder in der Entwicklung der darzustellenden Function nach ganzen Potenzen von $(dz) \frac{1}{\epsilon}$ beliebige Werthe annehmen können.

$mv + n\mu$ und ist also eine ganze Function $(mv + n\mu)$ ten Grades. Da für die Werthenpaare (γ, δ) zwei Factoren des Product $\prod_i \chi(s_i)$ unendlich klein von der ersten Ordnung werden, also $K(x)$ unendlich klein von der zweiten Ordnung, so wird χ außerdem noch unendlich klein von der ersten Ordnung für

$$i = mv + n\mu - 2r$$

Werthenpaare von s und z oder Punkte von T .

Ist $\nu > n - 1$, $\mu > m - 1$, so bleibt der Werth der Function χ ungedändert, wenn man

$$\chi(s, z) + \rho(s, z) F(s, z),$$

worin ρ beliebig ist, für $\chi(s, z)$ setzt; es können also $(\nu - n + 1)(\mu - m + 1)$ von den Coefficienten dieses Ausdrucks willkürlich angenommen werden. Werden nun von den $(\mu + 1)(\nu + 1) - (\nu - n + 1)(\mu - m + 1)$ noch übrigen r als lineare Functionen der übrigen so bestimmt, daß χ für die r Werthenpaare (γ, δ) verschwindet, so enthält die Function χ noch

$$\begin{aligned} \varepsilon &= (\mu + 1)(\nu + 1) - (\nu - n + 1)(\mu - m + 1) - r \\ &= n\mu + m\nu - (n - 1)(m - 1) - r + 1 \end{aligned}$$

willkürliche Constanten. Es ist also $i - \varepsilon = (n - 1)(m - 1) - r - 1 = p - 1$.

Nimmt man μ und ν so an, daß $\varepsilon > m'$ ist, so kann man χ so bestimmen, daß es für m' beliebig gegebene Werthenpaare unendlich klein von der ersten Ordnung wird, und dann, wenn $m' > p$, ψ so einrichten, daß $\frac{\psi}{\chi}$ für alle übrigen Werthe endlich bleibt. In der That ist ψ ebenfalls eine lineare homogene Function von ε willkürlichen Constanten, und es lassen sich also, wenn $\varepsilon - i + m' > 1$ ist, $i - m'$ von ihnen als lineare Functionen der übrigen so bestimmen, daß ψ für die $i - m'$ Werthenpaare von s und z , für welche χ noch unendlich klein von der ersten Ordnung wird, ebenfalls verschwindet. Die Function ψ enthält demnach $\varepsilon - i + m' = m' - p + 1$ willkürliche Constanten, und $\frac{\psi}{\chi}$ kann also jede Function s' darstellen.

9.

Da die Functionen $\frac{\partial \omega}{\partial z}$ algebraische wie s verzweigte Functionen von z sind (§. 5), so lassen sie sich zufolge des eben bewiesenen Satzes rational in s und z ausdrücken, und sämtliche Functionen ω als Integrale rationaler Functionen von s und z .

Ist w eine allenthalben endliche Function ω , so wird $\frac{\partial w}{\partial z}$ unendlich von der ersten Ordnung für jeden einfachen Verzweigungspunkt der Fläche T , da dw und $(dz)^{\frac{1}{2}}$ dort unendlich klein von der ersten Ordnung sind, bleibt aber sonst allenthalben stetig und wird für $z = \infty$ unendlich klein von der zweiten Ordnung. Umgekehrt bleibt das Integral einer Function, die sich so verhält, allenthalben endlich.

Um diese Function $\frac{\partial w}{\partial z}$ als Quotient zweier ganzen Functionen von s und z auszudrücken, muſs man (nach §. 8) zum Nenner eine Function nehmen, die verschwindet in den Verzweigungspunkten und für die r Werthenpaare (γ, δ) . Dieser Bedingung genügt man am einfachsten durch eine Function, die nur für diese Werthe 0 wird. Eine solche ist

$$\frac{\partial F}{\partial s} = a_0 n s^{n-1} + a_1 \overline{n-1} s^{n-2} + \dots + a_{n-1}.$$

Diese wird für ein unendliches s unendlich von der $n-2$ ten Ordnung (da a_0 dann unendlich klein von der ersten Ordnung wird) und für ein unendliches z unendlich von der m ten Ordnung. Damit $\frac{\partial w}{\partial z}$ aufser den Verzweigungspunkten endlich und für ein unendliches z unendlich klein von der zweiten Ordnung ist, muſs also der Zähler eine ganze Function $\varphi(s, z)$ sein, die für die r Werthenpaare (γ, δ) (S. 127) verschwindet. Demnach ist

$$w = \int \frac{\varphi(s, z)^{n-2, m-2} \partial z}{\frac{\partial F}{\partial s}} = - \int \frac{\varphi(s, z)^{n-2, m-2} \partial s}{\frac{\partial F}{\partial z}},$$

worin $\varphi = 0$ für $s = \gamma_\rho, z = \delta_\rho, \rho = 1, 2, \dots, r$.

Die Function φ enthält $(n-1)(m-1)$ constante Coefficienten, und wenn r von ihnen als lineare Functionen der übrigen so bestimmt werden, daſs $\varphi = 0$ für die r Werthenpaare $s = \gamma, z = \delta$, so bleiben noch $(m-1)(n-1) - r$ oder p willkürlich, und es erhält φ die Form

$$\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \dots + \alpha_p \varphi_p,$$

worin $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$ besondere Functionen φ , von denen keine eine lineare Function der übrigen ist, und $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ beliebige Constanten sind. Als allgemeiner Ausdruck von w ergibt sich, wie oben auf anderem Wege

$$\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_p w_p + \text{const.}$$

Die nicht allenthalben endlich bleibenden Functionen w und also die Integrale zweiter und dritter Gattung lassen sich nach denselben Principien

rational in s und z ausdrücken, wobei wir indefs hier nicht verweilen, da die allgemeinen Regeln des vorigen §. keiner weitern Erläuterung bedürfen und zur Betrachtung bestimmter Formen dieser Integrale erst die Theorie der ϑ -Functionen Anlaß giebt.

10.

Die Function φ wird aufser für die r Werthenpaare (γ, δ) noch für $m(n-2) + n(m-2) - 2r$ oder $2(p-1)$ der Gleichung $F=0$ genügende Werthenpaare von s und z unendlich klein von der ersten Ordnung. Sind nun

$$\varphi^{(1)} = \alpha_1^{(1)} \varphi_1 + \alpha_2^{(1)} \varphi_2 + \cdots + \alpha_p^{(1)} \varphi_p$$

und

$$\varphi^{(2)} = \alpha_1^{(2)} \varphi_1 + \alpha_2^{(2)} \varphi_2 + \cdots + \alpha_p^{(2)} \varphi_p$$

zwei beliebige Functionen φ , so kann man in dem Ausdrücke $\frac{\varphi^{(2)}}{\varphi^{(1)}}$ den Nenner so bestimmen, daß er für $p-1$ beliebig gegebene der Gleichung $F=0$ genügende Werthenpaare von s und z gleich Null wird, und dann den Zähler so, daß er für $p-2$ von den übrigen Werthenpaaren, für welche $\varphi^{(1)}$ noch gleich 0 wird, gleichfalls verschwindet. Er ist dann noch eine lineare Function von zwei willkürlichen Constanten und folglich ein allgemeiner Ausdruck einer Function, die nur für p Punkte der Fläche T unendlich von der ersten Ordnung wird. Eine Function, die für weniger als p Punkte unendlich wird, bildet einen speciellen Fall dieser Function; es lassen sich daher alle Functionen, die für weniger als $p+1$ Punkte der Fläche T unendlich von der ersten Ordnung werden, in der Form $\frac{\varphi^{(2)}}{\varphi^{(1)}}$ oder in der Form $\frac{dw^{(2)}}{dw^{(1)}}$, wenn $w^{(1)}$ und $w^{(2)}$ zwei allenthalben endliche Integrale rationaler Functionen von s und z sind, darstellen.

11.

Eine wie T verzweigte Function z_1 von z , die für n_1 Punkte dieser Fläche unendlich von der ersten Ordnung wird, ist nach dem Früheren (S. 123) die Wurzel einer Gleichung von der Form $G(z_1, z) = 0$ und nimmt daher jeden Werth für n_1 Punkte der Fläche T an. Wenn man sich also jeden Punkt von T durch einen den Werth von z_1 in diesem Punkte geometrisch repräsentirenden Punkt einer Ebene abgebildet denkt, so bildet die Gesammtheit dieser Punkte eine in der z_1 -Ebene allenthalben n_1 fach ausgebreitete und die Fläche T — bekanntlich in den kleinsten Theilen ähnlich — abbildende Fläche T_1 . Jedem Punkt in der einen Fläche entspricht dann ein Punkt in der an-

dern. Die Functionen ω oder die Integrale wie T verzweigter Functionen von z gehen daher, wenn man für z als unabhängig veränderliche Gröfse z_1 einführt, in Functionen über, welche in der Fläche T_1 allenthalben *einen* bestimmten Werth und dieselben Unstetigkeiten haben, wie die Functionen ω in den entsprechenden Punkten von T , und welche folglich Integrale wie T_1 verzweigter Functionen von z_1 sind.

Bezeichnet s_1 irgend eine andere wie T verzweigte Function von z , die für m_1 Punkte von T und also auch von T_1 unendlich von der ersten Ordnung wird, so findet (§. 5) zwischen s_1 und z_1 eine Gleichung von der Form

$$F_1^{n_1 m_1}(s_1, z_1) = 0$$

statt, worin F_1 eine Potenz einer unzerfällbaren ganzen Function von s_1 und z_1 ist; und es lassen sich, wenn diese Potenz die erste ist, alle wie T_1 verzweigten Functionen von z_1 , folglich alle rationalen Functionen von s und z rational in s_1 und z_1 ausdrücken (§. 8).

Die Gleichung $F(s, z) = 0$ kann also durch eine rationale Substitution in $F_1^{n_1 m_1}(s_1, z_1)$ und diese in jene transformirt werden.

Die Größengebiete (s, z) und (s_1, z_1) sind gleichvielfach zusammenhängend, da jedem Punkte des einen *ein* Punkt des andern entspricht. Bezeichnet daher r_1 die Anzahl der Fälle, in welchen s_1 und z_1 für zwei verschiedene Punkte des Größengebiets (s_1, z_1) beide denselben Werth annehmen und folglich gleichzeitig F_1 , $\frac{\partial F_1}{\partial s_1}$ und $\frac{\partial F_1}{\partial z_1}$ gleich 0 und $\frac{\partial^2 F_1}{\partial s_1^2} \frac{\partial^2 F_1}{\partial z_1^2} - \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial s_1 \partial z_1}\right)^2$ nicht Null ist, so muß $(n_1 - 1)(m_1 - 1) - r_1 = p = (n - 1)(m - 1) - r$ sein.

12.

Man betrachte nun als zu Einer *Klasse* gehörend *alle irreductiblen algebraischen Gleichungen zwischen zwei veränderlichen Größen, welche sich durch rationale Substitutionen in einander transformiren lassen*, so daß $F(s, z) = 0$ und $F_1(s_1, z_1) = 0$ zu derselben Klasse gehören, wenn sich für s und z solche rationale Functionen von s_1 und z_1 setzen lassen, daß $F(s, z) = 0$ in $F_1(s_1, z_1) = 0$ übergeht und zugleich s_1 und z_1 rationale Functionen von s und z sind.

Die rationalen Functionen von s und z bilden, als Functionen von irgend einer von ihnen ζ betrachtet, ein System gleichverzweigter algebraischer Functionen. Auf diese Weise führt jede Gleichung offenbar zu einer Klasse von Systemen gleichverzweigter algebraischer Functionen, welche sich durch

Einführung einer Function des Systems als unabhängig veränderlicher Gröfse in einander transformiren lassen und zwar alle Gleichungen Einer Klasse zu derselben Klasse von Systemen algebraischer Functionen, und umgekehrt führt (§. 11) jede Klasse von solchen Systemen zu Einer Klasse von Gleichungen.

Ist das Gröfsengebiet (s, z) $\overline{2p+1}$ fach zusammenhangend und die Function ζ in μ Punkten desselben unendlich von der ersten Ordnung, so ist die Anzahl der Verzweigungswerthe der gleichverzweigten Functionen von ζ , welche durch die übrigen rationalen Functionen von s und z gebildet werden, $2(\mu + p - 1)$, und die Anzahl der willkürlichen Constanten in der Function ζ $2\mu - p + 1$ (§. 5). Diese lassen sich so bestimmen, dafs $2\mu - p + 1$ Verzweigungswerthe gegebene Werthe annehmen, wenn diese Verzweigungswerthe von einander unabhängige Functionen von ihnen sind; und zwar nur auf eine endliche Anzahl Arten, da die Bedingungsgleichungen algebraisch sind. In jeder Klasse von Systemen gleichverzweigter $\overline{2p+1}$ fach zusammenhangender Functionen giebt es daher eine endliche Anzahl von Systemen μ werthiger Functionen, in welchen $2\mu - p + 1$ Verzweigungswerthe gegebene Werthe annehmen. Wenn andererseits die $2(\mu + p - 1)$ Verzweigungspunkte einer die ζ -Ebene allenthalben μ fach bedeckenden, $\overline{2p+1}$ fach zusammenhangenden Fläche beliebig gegeben sind, so giebt es (§§. 3 — 5) immer ein System wie diese Fläche verzweigter algebraischer Functionen von ζ . Die $3p - 3$ übrigen Verzweigungswerthe in jenen Systemen gleichverzweigter μ werthiger Functionen können daher beliebige Werthe annehmen; und es hängt also eine Klasse von Systemen gleichverzweigter $\overline{2p+1}$ fach zusammenhangender Functionen und die zu ihr gehörende Klasse algebraischer Gleichungen von $3p - 3$ stetig veränderlichen Gröfsen ab, welche die Moduln dieser Klasse genannt werden sollen.

Diese Bestimmung der Anzahl der Moduln einer Klasse $\overline{2p+1}$ fach zusammenhangender algebraischer Functionen gilt jedoch nur unter der Voraussetzung, dafs es $2\mu - p + 1$ Verzweigungswerthe giebt, welche von einander unabhängige Functionen der willkürlichen Constanten in der Function ζ sind. Diese Voraussetzung trifft nur zu, wenn $p > 1$, und die Anzahl der Moduln ist nur dann $= 3p - 3$, für $p = 1$ aber $= 1$. Die directe Untersuchung derselben wird indefs schwierig durch die Art und Weise, wie die willkürlichen Constanten in ζ enthalten sind. Man führe deshalb in einem Systeme gleichverzweigter $\overline{2p+1}$ fach zusammenhangender Functionen, um die Anzahl der

Moduln zu bestimmen, als unabhängig veränderliche Gröfse nicht eine dieser Functionen, sondern ein allenthalben endliches Integral einer solchen Function ein.

Die Werthe, welche die Function w von z innerhalb der Fläche T' annimmt, werden geometrisch repräsentirt durch eine einen endlichen Theil der w -Ebene einfach oder mehrfach bedeckende und die Fläche T' (in den kleinsten Theilen ähnlich) abbildende Fläche, welche durch S bezeichnet werden soll. Da w auf der positiven Seite des ν^{ten} Querschnitts um die Constante $k^{(\nu)}$ gröfser ist, als auf der negativen, so besteht die Begrenzung von S aus Paaren von parallelen Curven, welche denselben Theil des T' begrenzenden Schnittsystems abbilden, und es wird die Ortsverschiedenheit der entsprechenden Punkte in den parallelen, den ν^{ten} Querschnitt abbildenden Begrenzungstheilen von S durch die complexe Gröfse $k^{(\nu)}$ ausgedrückt. Die Anzahl der einfachen Verzweigungspunkte der Fläche S ist $2p - 2$, da dw in $2p - 2$ Punkten der Fläche T unendlich klein von der zweiten Ordnung wird. Die rationalen Functionen von s und z sind dann Functionen von w , welche für jeden Punkt von S einen bestimmten, wo sie nicht unendlich werden, stetig sich ändernden Werth haben und in den entsprechenden Punkten paralleler Begrenzungstheile denselben Werth annehmen. Sie bilden daher ein System gleichverzweigter und $2p$ fach periodischer Functionen von w . Es läfst sich nun (auf ähnlichem Wege, wie in den §§. 3 — 5) zeigen, dafs, die $2p - 2$ Verzweigungspunkte und die $2p$ Ortsverschiedenheiten paralleler Begrenzungstheile der Fläche S als willkürlich gegeben vorausgesetzt, immer ein System wie diese Fläche verzweigter Functionen existirt, welche in den entsprechenden Punkten paralleler Begrenzungstheile denselben Werth annehmen und also $2p$ fach periodisch sind, und die, als Functionen von einer von ihnen betrachtet, ein System gleichverzweigter $\overline{2p + 1}$ fach zusammenhangender algebraischer Functionen bilden, folglich zu einer Klasse von $\overline{2p + 1}$ fach zusammenhangenden algebraischen Functionen führen. In der That ergibt sich nach dem *Dirichlet*-schen Princip, dafs in der Fläche S eine Function von w bis auf eine additive Constante bestimmt ist durch die Bedingungen, im Innern von S beliebig gegebene Unstetigkeiten von der Form wie w in T' anzunehmen und in den entsprechenden Punkten paralleler Begrenzungstheile um Constanten, deren reeller Theil gegeben ist, verschiedene Werthe zu erhalten. Hieraus schliest man, ähnlich wie im §. 5, die Möglichkeit von Functionen, welche nur in einzelnen Punkten von S unstetig werden und in den entsprechenden Punkten paralleler Begrenzungstheile denselben Werth annehmen. Wird eine solche

Function z in n Punkten von S unendlich von der ersten Ordnung und sonst nicht unstetig, so nimmt sie jeden complexen Werth in n Punkten von S an; denn, wenn a eine beliebige Constante ist, so ist $\int \partial \log(z - a)$, um S erstreckt, $= 0$, da die Integration durch parallele Begrenzungstheile sich aufhebt, und es wird daher $z - a$ in S ebenso oft unendlich klein, als unendlich von der ersten Ordnung. Die Werthe, welche z annimmt, werden folglich durch eine über die z -Ebene allenthalben n fach ausgebreitete Fläche repräsentirt, und die übrigen ebenso verzweigten und periodischen Functionen von w bilden daher ein System wie diese Fläche verzweigter $\overline{2p+1}$ fach zusammenhangender algebraischer Functionen von z , w. z. b. w.

Für eine beliebig gegebene Klasse $\overline{2p+1}$ fach zusammenhangender algebraischer Functionen kann man nun in dem als unabhängig veränderliche Gröfse einzuführenden

$$w = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_p w_p + c$$

die Gröfsen α so bestimmen, dafs p von den $2p$ Periodicitätsmoduln gegebene Werthe annehmen, und c wenn $p > 1$ so, dafs einer von den $2p-2$ Verzweigungswerthen der periodischen Functionen von w einen gegebenen Werth erhält. Dadurch ist w völlig bestimmt, und also sind es auch die $3p-3$ übrigen Gröfsen, von denen die Verzweigungsart und Periodicität jener Functionen von w abhängt; und da jedweden Werthen dieser $3p-3$ Gröfsen eine Klasse von $\overline{2p+1}$ fach zusammenhangenden algebraischen Functionen entspricht, so hängt eine solche von $3p-3$ unabhängig veränderlichen Gröfsen ab.

Wenn $p = 1$ ist, so ist kein Verzweigungspunkt vorhanden, und es läfst sich in

$$w = \alpha_1 w_1 + c$$

die Gröfse α_1 so bestimmen, dafs ein Periodicitätsmodul einen gegebenen Werth erhält, und dadurch ist der andere Periodicitätsmodul bestimmt. Die Anzahl der Moduln einer Klasse ist also dann $= 1$.

13.

Nach den obigen (im §. 11 entwickelten) Principien der Transformation mufs man, um eine beliebig gegebene Gleichung $F(s, z) = 0$ durch eine rationale Substitution in eine Gleichung derselben Klasse $F_1(s_1, z_1) = 0$ von möglichst niedrigem Grade zu transformiren, zuerst für z_1 einen rationalen Ausdruck in s und z , $r(s, z)$, so bestimmen, dafs n_1 möglichst klein wird, und

dann s_1 gleich einem andern rationalen Ausdrücke $r'(s, z)$ so, daß m_1 möglichst klein wird und zugleich die zu einem beliebigen Werthe von z_1 gehörigen Werthe von s_1 nicht in Gruppen unter einander gleicher zerfallen, so daß $F_1(s_1, z_1)$ nicht eine höhere Potenz einer unzerfällbaren Function sein kann.

Wenn das Größengebiet (s, z) $2p+1$ fach zusammenhängend ist, so ist der kleinste Werth, den n_1 annehmen kann, allgemein zu reden, $\geq \frac{p}{2} + 1$ (§. 5) und die Anzahl der Fälle, in denen s_1 und z_1 für zwei verschiedene Punkte des Größengebiets beide denselben Werth annehmen,

$$r = (n_1 - 1)(m_1 - 1) - p.$$

In einer Klasse von algebraischen Gleichungen zwischen zwei veränderlichen Gröfsen haben demnach, wenn ihre Moduln nicht besonderen Bedingungsgleichungen genügen, die Gleichungen niedrigsten Grades folgende Form:

für $p = 1,$	$F(s, z) = 0,$	$r = 0$
$p = 2,$	$F(s, z) = 0,$	$r = 0$
$p = 2\mu - 3,$	$F(s, z) = 0,$	$r = (\mu - 2)^2$
$p > 2$	$F(s, z) = 0,$	$r = (\mu - 1)(\mu - 3).$

Von den Coefficienten der Potenzen von s und z in den ganzen Functionen F müssen r als lineare homogene Functionen der übrigen so bestimmt werden, daß $\frac{\partial F}{\partial s}$ und $\frac{\partial F}{\partial z}$ für r der Gleichung $F = 0$ genügende Werthenpaare gleichzeitig verschwinden. Die rationalen Functionen von s und z , als Functionen von einer von ihnen betrachtet, stellen dann alle Systeme $2p+1$ fach zusammenhängender algebraischer Functionen dar.

14.

Ich benutze nun nach *Jacobi* (dieses Journal Bd. 9 Nr. 32 §. 8) das *Abel'sche* Additionstheorem zur Integration eines Systems von Differentialgleichungen; ich werde mich dabei auf das beschränken, was in dieser Abhandlung später nöthig ist.

Führt man in einem allenthalben endlichen Integrale w einer rationalen Function von s und z als unabhängig veränderliche Gröfse eine rationale Function von s und z , ζ , ein, die für m Werthenpaare von s und z unend-

lich von der ersten Ordnung wird, so ist $\frac{\partial w}{\partial z}$ eine einwerthige Function von ζ . Bezeichnet man die m Werthe von w für dasselbe ζ durch $w^{(1)}, w^{(2)}, \dots, w^{(m)}$, so ist

$$\frac{\partial w^{(1)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial w^{(2)}}{\partial \zeta} + \dots + \frac{\partial w^{(m)}}{\partial \zeta}$$

eine einwerthige Function von ζ , deren Integral allenthalben endlich bleibt, und folglich ist auch $\int \partial(w^{(1)} + w^{(2)} + \dots + w^{(m)})$ allenthalben einwerthig und endlich, mithin constant. Auf ähnliche Weise findet sich, wenn $\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \dots, \omega^{(m)}$ die demselben ζ entsprechenden Werthe eines beliebigen Integrals ω einer rationalen Function von s und z bezeichnen, $\int \partial(\omega^{(1)} + \omega^{(2)} + \dots + \omega^{(m)})$ bis auf eine additive Constante aus den Unstetigkeiten von ω und zwar als Summe von einer rationalen Function und mit constanten Coefficienten versehenen Logarithmen rationaler Functionen von ζ .

Mittelst dieses Satzes lassen sich, wie jetzt gezeigt werden soll, folgende p gleichzeitige Differentialgleichungen zwischen den $p+1$ der Gleichung $F(s, z) = 0$ genügenden Werthenpaaren von s und z , $(s_1, z_1), (s_2, z_2), \dots, (s_{p+1}, z_{p+1})$

$$\frac{\varphi_\pi(s_1, z_1) \partial z_1}{\partial F(s_1, z_1)} + \frac{\varphi_\pi(s_2, z_2) \partial z_2}{\partial F(s_2, z_2)} + \dots + \frac{\varphi_\pi(s_{p+1}, z_{p+1}) \partial z_{p+1}}{\partial F(s_{p+1}, z_{p+1})} = 0$$

für $\pi = 1, 2, \dots, p$, allgemein oder vollständig (complete) integriren.

Durch diese Differentialgleichungen sind p von den Größenpaaren (s_μ, z_μ) als Functionen des einen noch übrigen völlig bestimmt, wenn für einen beliebigen Werth des letzteren die Werthe der übrigen gegeben werden. Wenn man also diese $p+1$ Größenpaare als Functionen *einer* veränderlichen Größe ζ so bestimmt, daß sie für denselben Werth 0 dieser Größe *beliebig* gegebene Anfangswerthe $(s_1^0, z_1^0), (s_2^0, z_2^0), \dots, (s_{p+1}^0, z_{p+1}^0)$ annehmen und den Differentialgleichungen genügen, so hat man dadurch die Differentialgleichungen allgemein integrirt. Nun läßt sich die Größe $\frac{1}{\zeta}$ als einwerthige und folglich rationale Function von (s, z) immer so bestimmen, daß sie nur für alle oder einige von den $p+1$ Werthenpaaren (s_μ^0, z_μ^0) unendlich und für diese nur unendlich von der ersten Ordnung wird, da sich in dem Ausdrucke

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=p+1} \beta_\mu t(s_\mu^0, z_\mu^0) + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \alpha_\mu w_\mu + \text{const.}$$

die Verhältnisse der Größen α und β immer so bestimmen lassen, daß die

Periodicitätsmoduln sämmtlich 0 werden. Es genügen dann, wenn kein $\beta = 0$ ist, den zu lösenden Differentialgleichungen die $p+1$ Zweige der $p+1$ werthigen gleichverzweigten Functionen s und z von $\zeta, (s_1, z_1), (s_2, z_2), \dots, (s_{p+1}, z_{p+1})$, welche für $\zeta = 0$ die Werthe $(s_1^0, z_1^0), (s_2^0, z_2^0), \dots, (s_{p+1}^0, z_{p+1}^0)$ annehmen. Wenn aber von den Gröfsen β einige, etwa die $p+1-m$ letzten, gleich 0 werden, so werden die zu lösenden Differentialgleichungen befriedigt durch die m Zweige der m werthigen Functionen s und z von $\zeta, (s_1, z_1), (s_2, z_2), \dots, (s_m, z_m)$, welche für $\zeta = 0$ gleich $(s_1^0, z_1^0), (s_2^0, z_2^0), \dots, (s_m^0, z_m^0)$ werden, und durch constante also ihren Anfangswerthen $s_{m+1}^0, \dots, z_{p+1}^0$ gleiche Werthe der Gröfsen $s_{m+1}, z_{m+1}; \dots; s_{p+1}, z_{p+1}$. Im letzteren Falle sind von den p linearen homogenen Gleichungen $\sum_{\mu=1}^{\mu=m} \frac{\varphi_{\pi}(s_{\mu}, z_{\mu}) \partial z_{\mu}}{\partial F(s_{\mu}, z_{\mu})} = 0$ für $\pi = 1, 2, \dots, p$ zwischen

den Gröfsen $\frac{\partial z_{\mu}}{\partial F(s_{\mu}, z_{\mu})} \frac{\partial s_{\mu}}{\partial s_{\mu}}$ $p+1-m$ eine Folge der übrigen; es ergeben sich

hieraus $p+1-m$ Bedingungsgleichungen, welche, damit dieser Fall eintritt, zwischen den Functionen $(s_1, z_1), \dots, (s_m, z_m)$ und also auch zwischen ihren Anfangswerthen $(s_1^0, z_1^0), \dots, (s_m^0, z_m^0)$ erfüllt sein müssen, und es können daher von diesen, wie oben (§. 5) gefunden, nur $2m-p-1$ beliebig gegeben werden.

15.

Es sei nun $\int \frac{\varphi_{\pi}(s, z) \partial z}{\partial F(s, z)} + \text{const.}$, durch das Innere von T' integrirt,

gleich w_{π} und der Periodicitätsmodul von w_{π} für den ν ten Querschnitt gleich $k_{\pi}^{(\nu)}$, so dafs sich die Functionen w_1, w_2, \dots, w_p des Gröfsenpaars (s, z) beim Uebertritt des Punkts (s, z) von der negativen auf die positive Seite des ν ten Querschnitts gleichzeitig um $k_1^{(\nu)}, k_2^{(\nu)}, \dots, k_p^{(\nu)}$ ändern. Zur Abkürzung mag ein System von p Gröfsen (b_1, b_2, \dots, b_p) einem andern (a_1, a_2, \dots, a_p) *congruent nach $2p$ Systemen zusammengehöriger Moduln* genannt werden, wenn es aus ihm durch gleichzeitige Aenderungen sämmtlicher Gröfsen um zusammengehörige Moduln erhalten werden kann. Ist der Modul der π ten Gröfse im ν ten Systeme $= k_{\pi}^{(\nu)}$, so heifst demnach

$$(b_1, b_2, \dots, b_p) \equiv (a_1, a_2, \dots, a_p),$$

wenn $b_{\pi} = a_{\pi} + \sum_{\nu=1}^{\nu=2p} m_{\nu} k_{\pi}^{(\nu)}$ für $\pi = 1, 2, \dots, p$ und m_1, m_2, \dots, m_{2p} ganze Zahlen sind.

Da sich p beliebige Gröfsen a_1, a_2, \dots, a_p immer und nur auf eine Weise in die Form $a_\pi = \sum_{\nu=1}^{\nu=2p} \xi_\nu k_\pi^{(\nu)}$ setzen lassen, so dafs die $2p$ Gröfsen ξ reell sind, und durch Aenderung dieser Gröfsen ξ um ganze Zahlen alle congruenten Systeme und nur diese sich ergeben, so erhält man aus jeder Reihe congruenter Systeme eins und nur eins, wenn man in diesen Ausdrücken jede Gröfse ξ alle Werthe von einem beliebigen Werthe bis zu einem um 1 gröfseren, einen der beiden Grenzwerte eingeschlossen, stetig durchlaufen läfst.

Dieses festgesetzt, folgt aus den obigen Differentialgleichungen oder aus den p Gleichungen $\sum_{\mu=1}^{\mu=p+1} dw_\pi^{(\mu)} = 0$ für $\pi = 1, 2, \dots, p$ durch Integration

$$(\sum w_1^{(\mu)}, \sum w_2^{(\mu)}, \dots, \sum w_p^{(\mu)}) \equiv (c_1, c_2, \dots, c_p),$$

worin c_1, c_2, \dots, c_p constante von den Werthen (s^0, \mathfrak{z}^0) abhängige Gröfsen sind.

16.

Drückt man ζ als Quotienten zweier ganzen Functionen von s und \mathfrak{z} , $\frac{\chi}{\psi}$, aus, so sind die Gröfsenpaare $(s_1, \mathfrak{z}_1), \dots, (s_m, \mathfrak{z}_m)$ die gemeinschaftlichen Wurzeln der Gleichungen $F=0$ und $\frac{\chi}{\psi} = \zeta$. Da die ganze Function

$$\chi - \zeta\psi = f(s, \mathfrak{z})$$

für alle Werthenpaare, für welche χ und ψ gleichzeitig verschwinden, ebenfalls, was auch ζ sei, verschwindet, so können die Gröfsenpaare $(s_1, \mathfrak{z}_1), \dots, (s_m, \mathfrak{z}_m)$ auch defnirt werden als gemeinschaftliche Wurzeln der Gleichung $F=0$ und einer Gleichung $f(s, \mathfrak{z})=0$, deren Coefficienten so sich ändern, dafs alle übrigen gemeinschaftlichen Wurzeln constant bleiben. Wenn $m < p+1$, kann ζ in der Form $\frac{\varphi^{(1)}}{\varphi^{(2)}}$ dargestellt werden (§. 10) und f in der Form

$$\varphi^{(1)} - \zeta\varphi^{(2)} = \varphi^{(3)}.$$

Die allgemeinsten Werthe der den p Gleichungen

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=p} dw_\pi^{(\mu)} = 0 \text{ für } \pi = 1, 2, \dots, p$$

genügenden Functionenpaare $(s_1, \mathfrak{z}_1), \dots, (s_p, \mathfrak{z}_p)$ werden daher gebildet durch p gemeinschaftliche Wurzeln der Gleichungen $F=0$ und $\varphi=0$, welche so sich ändern, dafs die übrigen gemeinschaftlichen Wurzeln constant bleiben. Hieraus folgt leicht der später nöthige Satz, dafs die Aufgabe, $p-1$ von den $2p-2$ Gröfsenpaaren $(s_1, \mathfrak{z}_1), \dots, (s_{2p-2}, \mathfrak{z}_{2p-2})$ als Functionen der $p-1$ übrigen so zu bestimmen, dafs die p Gleichungen $\sum_{\mu=1}^{\mu=2p-2} dw_\pi^{(\mu)} = 0$ für $\pi = 1, 2, \dots, p$

erfüllt werden, völlig allgemein gelöst wird, wenn man für diese $2p-2$ Größenpaare die von den r Wurzeln $s = \gamma_\rho$, $z = \delta_\rho$ (§. 6) verschiedenen gemeinschaftlichen Wurzeln der Gleichungen $F = 0$ und $\varphi = 0$ oder die $2p-2$ Werthenpaare nimmt, für welche dw unendlich klein von der zweiten Ordnung wird, und dafs diese Aufgabe daher nur *eine* Lösung zuläfst. Solche Größenpaare sollen *durch die Gleichung $\varphi = 0$ verknüpft* heißen. In Folge der Gleichungen $\sum_1^{2p-2} dw_\pi^{(\mu)} = 0$ wird $(\sum_1^{2p-2} w_1^{(\mu)}, \sum_1^{2p-2} w_2^{(\mu)}, \dots, \sum_1^{2p-2} w_p^{(\mu)})$, die Summen über solche Größenpaare ausgedehnt, congruent einem constanten Größensysteme (c_1, c_2, \dots, c_p) , worin c_π nur von der additiven Constante in der Function w_π oder dem Anfangswerthe des sie ausdrückenden Integrals abhängt.

Zweite Abtheilung.

17.

Für die ferneren Untersuchungen über Integrale von algebraischen, $2p+1$ fach zusammenhängenden Functionen ist die Betrachtung einer p fach unendlichen \mathcal{G} -Reihe von großem Nutzen, d. h. einer p fach unendlichen Reihe, in welcher der Logarithmus des allgemeinen Gliedes eine ganze Function zweiten Grades der Stellenzeiger ist. Es sei in dieser Function für ein Glied, dessen Stellenzeiger m_1, m_2, \dots, m_p sind, der Coefficient des Quadrats m_μ^2 gleich $a_{\mu, \mu}$, des doppelten Products $m_\mu m_{\mu'}$ gleich $a_{\mu, \mu'} = a_{\mu', \mu}$, der doppelten Gröfse m_μ gleich v_μ , und das constante Glied $= 0$. Die Summe der Reihe, über alle ganzen positiven oder negativen Werthe der Größen m ausgedehnt, werde als Function der p Größen v betrachtet und durch $\mathcal{G}(v_1, v_2, \dots, v_p)$ bezeichnet, so dafs

$$(1.) \quad \mathcal{G}(v_1, v_2, \dots, v_p) = \left(\sum_{-\infty}^{\infty} \right)^p e^{\left(\sum_1^p \right)^2 a_{\mu, \mu'} m_\mu m_{\mu'} + 2 \sum_1^p v_\mu m_\mu},$$

worin die Summationen im Exponenten sich auf μ und μ' , die äußeren Summationen auf m_1, m_2, \dots, m_p beziehen. Damit diese Reihe convergirt, muß der reelle Theil von $\left(\sum_1^p \right)^2 a_{\mu, \mu'} m_\mu m_{\mu'}$ wesentlich negativ sein oder, als eine Summe von positiven oder negativen Quadraten reeller linearer von einander unabhängiger Functionen der Größen m dargestellt, aus p negativen Quadraten zusammengesetzt sein.

Die Function \mathcal{G} hat die Eigenschaft, dafs es Systeme von gleichzeitigen Aenderungen der p Größen v giebt, durch welche $\log \mathcal{G}$ nur um eine lineare

Function der Größen v geändert wird, und zwar $2p$ von einander unabhängige Systeme (d. h. von denen keins eine Folge der übrigen ist). Denn man hat, die ungeändert bleibenden Größen v unter dem Functionszeichen \mathcal{F} weglassend, für $\mu = 1, 2, \dots, p$

$$(2.) \quad \mathcal{F} = \mathcal{F}(v_\mu + \pi i) \quad \text{und}$$

$$(3.) \quad \mathcal{F} = e^{2v_\mu + a_{\mu,\mu}} \mathcal{F}(v_1 + a_{1,\mu}, v_2 + a_{2,\mu}, \dots, v_p + a_{p,\mu}),$$

wie sich sofort ergibt, wenn man in der Reihe für \mathcal{F} den Stellenzeiger m_μ in $m_\mu + 1$ verwandelt, wodurch sie, während ihr Werth ungeändert bleibt, in den Ausdruck zur Rechten übergeht.

Die Function \mathcal{F} ist durch diese Relationen und durch die Eigenschaft, allenthalben endlich zu bleiben, bis auf einen constanten Factor bestimmt. Denn in Folge der letzteren Eigenschaft und der Relationen (2.) ist sie eine einwerthige für endliche v endliche Function von $e^{2v_1}, e^{2v_2}, \dots, e^{2v_p}$ und folglich in eine p fach unendliche Reihe von der Form

$$\left(\sum_{-\infty}^{\infty}\right)^p A_{m_1, m_2, \dots, m_p} e^{2\sum_1^p v_\mu m_\mu}$$

mit den constanten Coefficienten A entwickelbar. Aus den Relationen (3.) ergibt sich aber

$$A_{m_1, \dots, m_\nu+1, \dots, m_p} = A_{m_1, \dots, m_\nu, \dots, m_p} e^{2\sum_1^p a_{\mu,\nu} m_\mu + a_{\nu,\nu}}$$

folglich

$$A_{m_1, \dots, m_p} = \text{const.} e^{\left(\sum_1^p\right)^2 a_{\mu,\mu'} m_\mu m_{\mu'}}, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Man kann daher diese Eigenschaften der Function zu ihrer Definition verwenden. Die Systeme gleichzeitiger Aenderungen der Größen v , durch welche sich $\log \mathcal{F}$ nur um eine lineare Function von ihnen ändert, sollen *Systeme zusammengehöriger Periodicitätsmoduln der unabhängig veränderlichen Größen* in dieser \mathcal{F} -Function genannt werden.

18.

Ich substituire nun für die p Größen v_1, v_2, \dots, v_p p immer endlich bleibende Integrale u_1, u_2, \dots, u_p rationaler Functionen einer veränderlichen Größe z und einer $2p+1$ fach zusammenhängenden algebraischen Function s dieser Größe, und für die zusammengehörigen Periodicitätsmoduln der Größen v zusammengehörige (d. h. an demselben Querschnitte stattfindende) Periodicitäts-

moduln dieser Integrale, so dafs $\log \vartheta$ in eine Function *einer* Veränderlichen z übergeht, welche sich, wenn s und z nach beliebiger stetiger Aenderung von z den vorigen Werth wieder annehmen, um lineare Functionen der Gröfsen u ändert.

Es soll zunächst gezeigt werden, dafs eine solche Substitution für jede $2p+1$ fach zusammenhängende Function s möglich ist. Die Zerschneidung der Fläche T mufs zu diesem Zwecke so durch $2p$ in sich zurücklaufende Schnitte $a_1, a_2, \dots, a_p, b_1, b_2, \dots, b_p$ geschehen, dafs folgende Bedingungen erfüllt werden. Wenn man u_1, u_2, \dots, u_p so wählt, dafs der Periodicitätsmodul von u_μ an dem Schnitte a_μ gleich πi , an den übrigen Schnitten a gleich 0 ist, und man den Periodicitätsmodul von u_μ an dem Schnitte b_ν durch $a_{\mu,\nu}$ bezeichnet, so mufs $a_{\mu,\nu} = a_{\nu,\mu}$ und der reelle Theil von $\sum_{\mu,\mu'} a_{\mu,\mu'} m_\mu m_{\mu'}$ für alle reellen (ganzen) Werthe der p Gröfsen m negativ sein.

19.

Die Zerlegung der Fläche T werde nicht wie bisher nur durch in sich zurücklaufende Querschnitte, sondern folgendermassen ausgeführt. Man mache zuerst einen in sich zurücklaufenden die Fläche nicht zerstückelnden Schnitt a_1 und führe dann einen Querschnitt b_1 von der positiven Seite von a_1 auf die negative zum Anfangspunkte zurück, worauf die Begrenzung aus *einem* Stücke bestehen wird. Einen dritten die Fläche nicht zerstückelnden Querschnitt kann man demzufolge (wenn die Fläche noch nicht einfach zusammenhängend ist) von einem beliebigen Punkte dieser Begrenzung bis zu einem beliebigen Begrenzungspunkte, also auch zu einem früheren Punkte dieses Querschnitts führen. Man thue das Letztere, so dafs dieser Querschnitt aus einer in sich zurücklaufenden Linie a_2 und einem dieser Linie voraufgehenden Theile c_1 besteht, welcher das frühere Schnittsystem mit ihr verbindet. Den folgenden Querschnitt b_2 ziehe man von der positiven Seite von a_2 auf die negative zum Anfangspunkte zurück, worauf die Begrenzung wieder aus *einem* Stücke besteht. Die weitere Zerschneidung kann daher, wenn nöthig, wieder durch zwei in demselben Punkte anfangende und endende Schnitte a_3 und b_3 und eine das System der Linien a_2 und b_2 mit ihnen verbindende Linie c_2 geschehen. Wird dieses Verfahren fortgesetzt, bis die Fläche einfach zusammenhängend ist, so erhält man ein Schnittnetz, welches aus p Paaren von zwei in einem und demselben Punkte anfangenden und endenden Linien a_1 und b_1, a_2 und b_2, \dots, a_p und b_p besteht und aus $p-1$ Linien $c_1, c_2, \dots, c_{p-1},$

welche jedes Paar mit dem folgenden verbinden. Es möge c_ν von einem Punkte von b_ν nach einem Punkte von $a_{\nu+1}$ gehen. Das Schnittnetz wird als so entstanden betrachtet, daß der $(2\nu-1)$ te Querschnitt aus $c_{\nu-1}$ und der von dem Endpunkte von $c_{\nu-1}$ zu diesem zurückgezogenen Linie a_ν besteht, und der 2ν te durch die von der *positiven* auf die *negative* Seite von a_ν gezogene Linie b_ν gebildet wird. Die Begrenzung der Fläche besteht bei dieser Zerschneidung nach einer geraden Anzahl von Schnitten aus *einem*, nach einer ungeraden aus zwei Stücken.

Ein allenthalben endliches Integral w einer rationalen Function von s und z nimmt dann zu beiden Seiten einer Linie c denselben Werth an. Denn die ganze früher entstandene Begrenzung besteht, wie bemerkt, aus *einem* Stücke und bei der Integration längs derselben von der einen Seite der Linie c bis auf die andere wird $\int \partial w$ durch jedes früher entstandene Schnittelement zweimal, in entgegengesetzter Richtung, erstreckt. Eine solche Function ist daher in T allenthalben aufser den Linien a und b stetig. Die durch diese Linien zerschnittene Fläche T möge durch T'' bezeichnet werden.

20.

Es seien nun w_1, w_2, \dots, w_p von einander unabhängige solche Functionen, und der Periodicitätsmodul von w_μ an dem Querschnitte a_ν gleich $A_\mu^{(\nu)}$ und an dem Querschnitte b_ν gleich $B_\mu^{(\nu)}$. Es ist dann das Integral $\int w_\mu dw_\mu$, um die Fläche T'' positiv herum ausgedehnt, $= 0$, da die Function unter dem Integralzeichen allenthalben endlich ist. Bei dieser Integration wird jede der Linien a und b zweimal, einmal in positiver und einmal in negativer Richtung durchlaufen, und es muß während jener Integration, wo sie als Begrenzung des positiverseits gelegenen Gebiets dient, für w_μ der Werth auf der positiven Seite oder w_μ^+ , während dieser der Werth auf der negativen oder w_μ^- genommen werden. Es ist also dies Integral gleich der Summe aller Integrale $\int (w_\mu^+ - w_\mu^-) dw_\mu$ durch die Linien a und b . Die Linien b führen von der positiven zur negativen Seite der Linien a , und folglich die Linien a von der negativen zur positiven Seite der Linien b . Das Integral durch die Linie a , ist daher $= \int A_\mu^{(\nu)} dw_\mu = A_\mu^{(\nu)} \int dw_\mu = A_\mu^{(\nu)} B_\mu^{(\nu)}$, und das Integral durch die Linie $b_\nu = \int B_\mu^{(\nu)} dw_\mu = -B_\mu^{(\nu)} A_\mu^{(\nu)}$. Das Integral $\int w_\mu dw_\mu$, um die Fläche T'' positiv herum erstreckt, ist also $= \sum_\nu (A_\mu^{(\nu)} B_\mu^{(\nu)} - B_\mu^{(\nu)} A_\mu^{(\nu)})$, und diese Summe

folglich $= 0$. Diese Gleichung gilt für je zwei von den Functionen w_1, w_2, \dots, w_p und liefert also $\frac{p(p-1)}{1.2}$ Relationen zwischen deren Periodicitätsmoduln.

Nimmt man für die Functionen w die Functionen u oder wählt man sie so, daß $A_\mu^{(\nu)}$ für ein von μ verschiedenes ν gleich 0 und $A_\nu^{(\nu)} = \pi i$ ist, so gehen diese Relationen über in $B_{\mu'}^\mu \pi i - B_\mu^{\mu'} \pi i = 0$ oder in $a_{\mu, \mu'} = a_{\mu', \mu}$.

21.

Es bleibt noch zu zeigen, daß die Größen a die zweite oben nöthig gefundene Eigenschaft besitzen.

Man setze $w = \mu + \nu i$ und den Periodicitätsmodul dieser Function an dem Schnitte a_ν gleich $A^{(\nu)} = \alpha_\nu + \gamma_\nu i$ und an dem Schnitte b_ν gleich $B^{(\nu)} = \beta_\nu + \delta_\nu i$. Es ist dann das Integral $\int \left(\left(\frac{\partial \mu}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial y} \right)^2 \right) dT$ oder $\int \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial \nu}{\partial y} - \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial \nu}{\partial x} \right) dT^*$ durch die Fläche T'' gleich dem Begrenzungsintegral $\int \mu d\nu$ um T'' positiv herum erstreckt, also gleich der Summe der Integrale $\int (\mu^+ - \mu^-) d\nu$ durch die Linien a und b . Das Integral durch die Linie a , ist $= \alpha_\nu \int d\nu = \alpha_\nu \delta_\nu$, das Integral durch die Linie b_ν gleich $\beta_\nu \int d\nu = -\beta_\nu \gamma_\nu$ und folglich

$$\int \left(\left(\frac{\partial \mu}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial y} \right)^2 \right) dT = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} (\alpha_\nu \delta_\nu - \beta_\nu \gamma_\nu).$$

Diese Summe ist daher stets positiv.

Hieraus ergibt sich die zu beweisende Eigenschaft der Größen a , wenn man für w setzt $u_1 m_1 + u_2 m_2 + \dots + u_p m_p$. Denn es ist dann $A_\nu = m_\nu \pi i$, $B_\nu = \sum_{\mu} a_{\mu, \nu} m_\mu$, folglich α_ν stets $= 0$ und $\int \left(\left(\frac{\partial \mu}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial y} \right)^2 \right) dT = -\sum \beta_\nu \gamma_\nu = -\pi \sum_{\mu, \nu} a_{\mu, \nu} m_\mu m_\nu$, welcher also für alle reellen Werthe der Größen m positiv ist.

22.

Setzt man nun in der \mathcal{G} -Reihe (1.) §. 16 für $a_{\mu, \mu'}$ den Periodicitätsmodul der Function u_μ an dem Schnitt $b_{\mu'}$ und, durch e_1, e_2, \dots, e_p beliebige Constanten bezeichnend, $u_\mu - e_\mu$ für v_μ , so erhält man eine in jedem Punkte

*) Dies Integral drückt den Inhalt der Fläche aus, welche die Gesammtheit der Werthe, die w innerhalb T'' annimmt, auf der w -Ebene repräsentirt.

von T' eindeutig bestimmte Function von z ,

$$\mathcal{F}(u_1 - e_1, u_2 - e_2, \dots, u_p - e_p),$$

welche aufer den Linien b stetig und endlich und auf der positiven Seite der Linie b_ν ($e^{-2(u_\nu - e_\nu)}$) mal so groß, als auf der negativen, ist, wenn man den Functionen u in den Linien b selbst den Mittelwerth von den Werthen zu beiden Seiten beilegt. Für wie viele Punkte von T' oder Werthenpaare von s und z diese Function unendlich klein von der ersten Ordnung wird, kann durch Betrachtung des Begrenzungsintegrals $\int d \log \mathcal{F}$, um T' positiv herum erstreckt, gefunden werden; denn dieses Integral ist gleich der Anzahl dieser Punkte multiplicirt mit $2\pi i$. Andererseits ist dies Integral gleich der Summe der Integrale $\int (d \log \mathcal{F}^+ - d \log \mathcal{F}^-)$ durch sämmtliche Schnittlinien a , b und c . Die Integrale durch die Linien a und c sind $= 0$, das Integral durch b_ν aber gleich $-2 \int du_\nu = 2\pi i$, die Summe aller also $= p 2\pi i$. Die Function \mathcal{F} wird daher unendlich klein von der ersten Ordnung in p Punkten der Fläche T' , welche durch $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_p$ bezeichnet werden mögen.

Durch einen positiven Umlauf des Punktes (s, z) um einen dieser Punkte wächst $\log \mathcal{F}$ um $2\pi i$, durch einen positiven Umlauf um das Schnittpaar a_ν und b_ν um $-2\pi i$. Um daher die Function $\log \mathcal{F}$ allenthalben eindeutig zu bestimmen, führe man von jedem Punkte η einen Schnitt durch das Innere nach je einem Linienpaar, von η_ν den Schnitt l_ν nach a_ν und b_ν , und zwar nach ihrem gemeinschaftlichen Anfangs- und Endpunkte, und nehme in der dadurch entstandenen Fläche T^* die Function allenthalben stetig an. Sie ist dann auf der positiven Seite der Linien l um $-2\pi i$, auf der positiven Seite der Linie a_ν um $g_\nu 2\pi i$ und auf der positiven Seite der Linie b_ν um $-2(u_\nu - e_\nu) - h_\nu 2\pi i$ größer, als auf der negativen, wenn g_ν und h_ν ganze Zahlen bezeichnen.

Die Lage der Punkte η und die Werthe der Zahlen g und h hängen von den Größen e ab, und diese Abhängigkeit läßt sich auf folgendem Wege näher bestimmen. Das Integral $\int \log \mathcal{F} du_\mu$, um T^* positiv herum erstreckt, ist $= 0$, da die Function $\log \mathcal{F}$ in T^* stetig bleibt. Dieses Integral ist aber auch gleich der Summe der Integrale $\int (\log \mathcal{F}^+ - \log \mathcal{F}^-) du_\mu$ durch sämmtliche Schnittlinien l , a , b und c und findet sich, wenn man den Werth von u_μ im Punkte η_ν durch $\alpha_\mu^{(\nu)}$ bezeichnet, $= 2\pi i (\sum_\nu \alpha_\mu^{(\nu)}) + h_\mu \pi i + \sum_\nu g_\nu a_{\nu, \mu} - e_\mu + k_\mu$,

worin k_μ von den Gröfsen e, g, h und der Lage der Punkte η unabhängig ist. Dieser Ausdruck ist also $= 0$.

Die Gröfse k_μ hängt von der Wahl der Function u_μ ab, welche durch die Bedingung, an dem Schnitte a_μ den Periodicitätsmodul πi , an den übrigen Schnitten a den Periodicitätsmodul 0 anzunehmen, nur bis auf eine additive Constante bestimmt ist. Nimmt man für u_μ eine um die Constante c_μ gröfsere Function und zugleich e_μ um c_μ gröfser, so bleiben die Function \mathcal{G} und folglich die Punkte η und die Gröfsen g, h ungeändert, der Werth von u_μ im Punkte η_ν aber wird $\alpha_\mu^{(\nu)} + c_\mu$. Es geht daher k_μ in $k_\mu - (p-1)c_\mu$ über und verschwindet, wenn $c_\mu = \frac{k_\mu}{p-1}$ genommen wird.

Man kann folglich, wie für die Folge geschehen soll, die additiven Constanten in den Functionen u oder die Anfangswerthe in den sie ausdrückenden Integralen so bestimmen, dafs man durch die Substitution von $u_\mu - \sum \alpha_\mu^{(\nu)}$ für v_μ in $\log \mathcal{G}(v_1, \dots, v_p)$ eine Function erhält, welche in den Punkten η logarithmisch unendlich wird und, durch T^* stetig fortgesetzt, auf der positiven Seite der Linien l um $-2\pi i$, der Linien a um 0 und der Linie b , um $-2(u_\nu - \sum_1^p \alpha_\nu^{(\mu)})$ gröfser wird, als auf der negativen. Zur Bestimmung dieser Anfangswerthe werden sich später leichtere Mittel darbieten, als der obige Integraalausdruck für k_μ .

23.

Setzt man $(u_1, u_2, \dots, u_p) \equiv (\alpha_1^{(p)}, \alpha_2^{(p)}, \dots, \alpha_p^{(p)})$ nach den $2p$ Modulsystemen der Functionen u (§. 15), also

$$(v_1, v_2, \dots, v_p) \equiv \left(-\sum_1^{p-1} \alpha_1^{(\nu)}, -\sum_1^{p-1} \alpha_2^{(\nu)}, \dots, -\sum_1^{p-1} \alpha_p^{(\nu)}\right),$$

so wird $\mathcal{G} = 0$. Wird umgekehrt $\mathcal{G} = 0$ für $v_\mu = r_\mu$, so ist (r_1, r_2, \dots, r_p) einem Gröfsensysteme von der Form $\left(-\sum_1^{p-1} \alpha_1^{(\nu)}, -\sum_1^{p-1} \alpha_2^{(\nu)}, \dots, -\sum_1^{p-1} \alpha_p^{(\nu)}\right)$ congruent. Denn setzt man $v_\mu = u_\mu - \alpha_\mu^{(p)} + r_\mu$, indem man η_p beliebig wählt, so wird die Function \mathcal{G} aufser in η_p noch in $p-1$ andern Punkten unendlich klein von der ersten Ordnung, und bezeichnet man diese durch $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{p-1}$, so ist $\left(-\sum_1^{p-1} \alpha_1^{(\nu)}, -\sum_1^{p-1} \alpha_2^{(\nu)}, \dots, -\sum_1^{p-1} \alpha_p^{(\nu)}\right) \equiv (r_1, r_2, \dots, r_p)$.

Die Function \mathcal{G} bleibt ungeändert, wenn man sämmtliche Gröfsen v in's Entgegengesetzte verwandelt; denn verwandelt man in der Reihe für $\mathcal{G}(v_1, v_2, \dots, v_p)$ sämmtliche Indices m in's Entgegengesetzte, wodurch der

Werth der Reihe ungeändert bleibt, da $-m$, dieselben Werthe wie m , durchläuft, so geht $\mathcal{G}(v_1, v_2, \dots, v_p)$ über in $\mathcal{G}(-v_1, -v_2, \dots, -v_p)$.

Nimmt man nun die Punkte $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{p-1}$ beliebig an, so wird $\mathcal{G}(-\sum_1^{p-1} \alpha_1^{(\nu)}, \dots, -\sum_1^{p-1} \alpha_p^{(\nu)}) = 0$ und folglich, da die Function \mathcal{G} wie eben bemerkt gerade ist, auch $\mathcal{G}(\sum_1^{p-1} \alpha_1^{(\nu)}, \dots, \sum_1^{p-1} \alpha_p^{(\nu)}) = 0$. Es lassen sich also die $p-1$ Punkte $\eta_p, \eta_{p+1}, \dots, \eta_{2p-2}$ so bestimmen, dafs

$$\left(\sum_1^{p-1} \alpha_1^{(\nu)}, \dots, \sum_1^{p-1} \alpha_p^{(\nu)}\right) \equiv \left(-\sum_p^{2p-2} \alpha_1^{(\nu)}, \dots, -\sum_p^{2p-2} \alpha_p^{(\nu)}\right)$$

und folglich

$$\left(\sum_1^{2p-2} \alpha_1^{(\nu)}, \dots, \sum_1^{2p-2} \alpha_p^{(\nu)}\right) \equiv (0, 0, \dots, 0)$$

ist. Die Lage der $p-1$ letzten Punkte hängt dann von der Lage der $p-1$ ersten so ab, dafs bei beliebiger stetiger Aenderung derselben $\sum_1^{2p-2} d\alpha_\pi^{(\nu)} = 0$ für $\pi = 1, 2, \dots, p$, und folglich sind (§. 16) die Punkte η solche $2p-2$ Punkte, für welche ein dw unendlich klein von der zweiten Ordnung wird, oder wenn man den Werth des Größenpaars (s, \mathfrak{x}) im Punkte η_ν durch (σ_ν, ζ_ν) bezeichnet, so sind $(\sigma_1, \zeta_1), \dots, (\sigma_{2p-2}, \zeta_{2p-2})$ durch die Gleichung $\varphi = 0$ verknüpfte Werthenpaare (§. 16).

Bei den hier gewählten Anfangswerthen der Integrale u wird also

$$\left(\sum_1^{2p-2} u_1^{(\nu)}, \dots, \sum_1^{2p-2} u_p^{(\nu)}\right) \equiv (0, 0, \dots, 0)$$

wenn die Summationen über sämtliche von den Größenpaaren $(\gamma_\rho, \delta_\rho)$ (§. 6.) verschiedene gemeinschaftliche Wurzeln der Gleichung $F = 0$ und der Gleichung $c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \dots + c_p\varphi_p = 0$ erstreckt werden, wobei die Constanten Größen c beliebig sind.

Sind $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$ m Punkte, für welche eine rationale Function ξ von s und \mathfrak{x} , die m mal unendlich von der ersten Ordnung wird, denselben Werth annimmt, und $u_\pi^{(\mu)}, s_\mu, \mathfrak{x}_\mu$ die Werthe von u_π, s, \mathfrak{x} im Punkte ε_μ , so ist (§. 15) $(\sum_1^m u_1^{(\mu)}, \sum_1^m u_2^{(\mu)}, \dots, \sum_1^m u_p^{(\mu)})$ congruent einem constanten, d. h. vom Werthe der Größe ξ unabhängigen Größensysteme (b_1, b_2, \dots, b_p) , und es kann dann für jede beliebige Lage eines Punktes ε die Lage der übrigen so bestimmt werden, dafs $(\sum_1^m u_1^{(\mu)}, \dots, \sum_1^m u_p^{(\mu)}) \equiv (b_1, \dots, b_p)$. Man kann daher, wenn $m = p$,

$(u_1 - b_1, \dots, u_p - b_p)$ und, wenn $m < p$, $(u_1 - \sum_1^{p-m} \alpha_1^{(v)} - b_1, \dots, u_p - \sum_1^{p-m} \alpha_p^{(v)} - b_p)$ für jede beliebige Lage des Punkts (s, z) und der $p - m$ Punkte η auf die Form $(-\sum_1^{p-1} \alpha_1^{(v)}, \dots, -\sum_1^{p-1} \alpha_p^{(v)})$ bringen, indem man einen der Punkte ε mit (s, z) zusammenfallen läßt, und folglich ist

$$\mathcal{F}(u_1 - \sum_1^{p-m} \alpha_1^{(v)} - b_1, \dots, u_p - \sum_1^{p-m} \alpha_p^{(v)} - b_p)$$

für jedwede Werthe des Größenpaars (s, z) und der $p - m$ Größenpaare (σ_v, ζ_v) gleich 0.

24.

Aus der Untersuchung des §. 22 folgt als Corollar, daß ein beliebig gegebenes Größensystem (e_1, \dots, e_p) immer einem und nur einem Größensysteme von der Form $(\sum_1^p \alpha_1^{(v)}, \dots, \sum_1^p \alpha_p^{(v)})$ congruent ist, wenn die Function $\mathcal{F}(u_1 - e_1, \dots, u_p - e_p)$ nicht identisch verschwindet; denn es müssen dann die Punkte η die p Punkte sein, für welche diese Function 0 wird. Wenn aber $\mathcal{F}(u_1^{(p)} - e_1, \dots, u_p^{(p)} - e_p)$ für jeden Werth von (s_p, z_p) verschwindet, so läßt sich $(u_1^{(p)} - e_1, \dots, u_p^{(p)} - e_p) \equiv (-\sum_1^{p-1} u_1^{(v)}, \dots, -\sum_1^{p-1} u_p^{(v)})$ setzen (§. 23), und es lassen sich also für jeden Werth des Größenpaars (s_p, z_p) die Größenpaare $(s_1, z_1), \dots, (s_{p-1}, z_{p-1})$ so bestimmen, daß

$$(\sum_1^p u_1^{(v)}, \dots, \sum_1^p u_p^{(v)}) \equiv (e_1, \dots, e_p)$$

und folglich, bei stetiger Aenderung von (s_p, z_p) , $\sum_1^p du_\pi^{(v)} = 0$ ist für $\pi = 1, 2, \dots, p$. Die p Größenpaare (s_v, z_v) sind daher p von den Größenpaaren $(\gamma_\rho, \delta_\rho)$ verschiedene Wurzeln einer Gleichung $\varphi = 0$, deren Coefficienten so sich ändern, daß die übrigen $p - 2$ Wurzeln constant bleiben. Bezeichnet man die Werthe von u_π für diese $p - 2$ Werthenpaare von s und z durch $u_\pi^{(p+1)}, u_\pi^{(p+2)}, \dots, u_\pi^{(2p-2)}$, so ist $(\sum_1^{2p-2} u_1^{(v)}, \dots, \sum_1^{2p-2} u_p^{(v)}) \equiv (0, 0, \dots, 0)$ und folglich $(e_1, \dots, e_p) \equiv (-\sum_{p+1}^{2p-2} u_1^{(v)}, \dots, -\sum_{p+1}^{2p-2} u_p^{(v)})$. Umgekehrt ist, wenn diese Congruenz stattfindet,

$$\mathcal{F}(u_1^{(p)} - e_1, \dots, u_p^{(p)} - e_p) = \mathcal{F}(\sum_p^{2p-2} u_1^{(v)}, \dots, \sum_p^{2p-2} u_p^{(v)}) = 0.$$

Ein beliebig gegebenes Größensystem (e_1, \dots, e_p) ist also nur einem Größensysteme von der Form $(\sum_1^p \alpha_1^{(v)}, \dots, \sum_1^p \alpha_p^{(v)})$ congruent, wenn es nicht einem Größensysteme von der Form $(-\sum_1^{p-2} \alpha_1^{(v)}, \dots, -\sum_1^{p-2} \alpha_p^{(v)})$ congruent ist, und unendlich vielen, wenn dieses stattfindet.

Da $\vartheta(u_1 - \sum_1^p \alpha_1^{(\mu)}, \dots, u_p - \sum_1^p \alpha_p^{(\mu)}) = \vartheta(\sum_1^p \alpha_1^{(\mu)} - u_1, \dots, \sum_1^p \alpha_p^{(\mu)} - u_p)$, so ist ϑ eine ganz ähnliche Function wie von (s, z) auch von jedem der p Größenspaare (σ_μ, ζ_μ) . Diese Function von (σ_μ, ζ_μ) wird $= 0$ für das Werthenpaar (s, z) und für die den übrigen $p-1$ Größenspaaren (σ, ζ) durch die Gleichung $\varphi = 0$ verknüpften $p-1$ Punkte. Denn bezeichnet man den Werth von u_π in diesen Punkten mit $\beta_\pi^{(1)}, \beta_\pi^{(2)}, \dots, \beta_\pi^{p-1}$, so ist

$$(\sum_1^p \alpha_1^{(\mu)}, \dots, \sum_1^p \alpha_p^{(\mu)}) \equiv (\alpha_1^{(\mu)} - \sum_1^{p-1} \beta_1^{(v)}, \dots, \alpha_p^{(\mu)} - \sum_1^{p-1} \beta_p^{(v)})$$

und folglich $\vartheta = 0$, wenn η_μ mit einem dieser Punkte oder mit dem Punkte (s, z) zusammenfällt.

25.

Aus den bisher entwickelten Eigenschaften der Function ϑ ergibt sich der Ausdruck von $\log \vartheta$ durch Integrale algebraischer Functionen von (s, z) , $(\sigma_1, \zeta_1), \dots, (\sigma_p, \zeta_p)$.

Die GröÙe $\log \vartheta(u_1^{(2)} - \sum_1^p \alpha_1^{(\mu)}, \dots) - \log \vartheta(u_1^{(1)} - \sum_1^p \alpha_1^{(\mu)}, \dots)$ ist, als Function von (σ_μ, ζ_μ) betrachtet, eine Function von der Lage des Punkts η_μ , welche im Punkte ε_1 , wie $-\log(\zeta_\mu - z_1)$, im Punkte ε_2 , wie $\log(\zeta_\mu - z_2)$ unstetig wird und auf der positiven Seite einer von ε_1 nach ε_2 zu ziehenden Linie um $2\pi i$, auf der positiven Seite der Linie b_ν um $2(u_\nu^{(1)} - u_\nu^{(2)})$ größer ist, als auf der negativen, auÙer den Linien b und der Verbindungslinie von ε_1 und ε_2 aber allenthalben stetig bleibt. Bezeichnet nun $\pi^{(\mu)}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ irgend eine Function von (σ_μ, ζ_μ) , welche auÙer den Linien b ebenso unstetig ist und auf der einen Seite einer solchen Linie ebenfalls um eine Constante größer ist, als auf der andern, so unterscheidet sie sich (§. 3) von dieser nur um eine von (σ_μ, ζ_μ) unabhängige GröÙe, und folglich ist sie von $\sum_1^p \pi^{(\mu)}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ nur um eine von sämmtlichen GröÙen (σ, ζ) unabhängige und also bloÙs von (s_1, z_1) und (s_2, z_2) abhängende GröÙe verschieden. $\pi^{(\mu)}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ drückt den Werth einer Function $\pi(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ des §. 4 für $(s, z) = (\sigma_\mu, \zeta_\mu)$ aus, deren Periodicitätsmoduln an den Schnitten a gleich 0 sind. Ändert man diese Function

um die Constante c , so ändert sich $\sum_1^p \pi^{(\mu)}(\epsilon_1, \epsilon_2)$ um pc ; man kann daher, wie für die Folge geschehen soll, die additive Constante in der Function $\pi(\epsilon_1, \epsilon_2)$ oder den Anfangswerth in dem sie darstellenden Integrale dritter Gattung so bestimmen, dafs $\log \mathcal{G}^{(2)} - \log \mathcal{G}^{(1)} = \sum_1^p \pi^{(\mu)}(\epsilon_1, \epsilon_2)$. Da \mathcal{G} von jedem der Größenpaare (σ, ζ) auf ähnliche Art, wie von (s, z) abhängt, so kann die Aenderung von $\log \mathcal{G}$, wenn irgend eins der Größenpaare $(s, z), (\sigma_1, \zeta_1), \dots, (\sigma_p, \zeta_p)$ eine endliche Aenderung erleidet, während die übrigen constant bleiben, durch eine Summe von Functionen π ausgedrückt werden. Offenbar kann man also, indem man nach und nach die einzelnen Größenpaare $(s, z), (\sigma_1, \zeta_1), \dots, (\sigma_p, \zeta_p)$ ändert, $\log \mathcal{G}$ ausdrücken durch eine Summe von Functionen π und $\log \mathcal{G}(0, 0, \dots, 0)$ oder dem Werth von $\log \mathcal{G}$ für ein beliebiges anderes Werthensystem. Die Bestimmung von $\log \mathcal{G}(0, 0, \dots, 0)$ als Function der $3p-3$ Moduln des Systems rationaler Functionen von s und z (§. 12) erfordert ähnliche Betrachtungen, wie sie von *Jacobi* in seinen Arbeiten über elliptische Functionen zur Bestimmung von $\theta(0)$ angewandt worden sind. Man kann dazu gelangen, indem man mit Hülfe der Gleichungen

$$4 \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial a_{\mu, \mu}} = \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial v_{\mu}^2} \quad \text{und} \quad 2 \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial a_{\mu, \mu'}} = \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial v_{\mu} \partial v_{\mu'}},$$

wenn μ von μ' verschieden ist, die Differentialquotienten von $\log \mathcal{G}$ nach den Größen a in

$$d \log \mathcal{G} = \sum \frac{\partial \log \mathcal{G}}{\partial a_{\mu, \mu'}} da_{\mu, \mu'}$$

durch Integrale algebraischer Functionen ausdrückt. Für die Ausführung dieser Rechnung scheint jedoch eine ausführlichere Theorie der Functionen, welche einer linearen Differentialgleichung mit algebraischen Coefficienten genügen, nöthig, die ich nach den hier angewandten Principien nächstens zu liefern beabsichtige.

Ist (s_2, z_2) unendlich wenig von (s_1, z_1) verschieden, so geht $\pi(\epsilon_1, \epsilon_2)$ über in $\partial z_1 t(\epsilon_1)$, worin $t(\epsilon_1)$ ein Integral zweiter Gattung einer rationalen Function von s und z ist, welches in ϵ_1 wie $\frac{1}{z-z_1}$ unstetig wird und an den Schnitten a den Periodicitätsmodul 0 hat; und es ergibt sich, dafs der Periodicitätsmodul eines solchen Integrals an dem Schnitte b , gleich $2 \frac{\partial u_v^{(1)}}{\partial z_1}$ ist und die Integrationsconstante sich so bestimmen läfst, dafs die Summe der

Werthe von $t(\varepsilon_1)$ für die p Werthenpaare $(\sigma_1, \zeta_1), \dots, (\sigma_p, \zeta_p)$ gleich $\frac{\partial \log \vartheta^{(1)}}{\partial z_1}$ wird. Es ist dann $\frac{\partial \log \vartheta^{(1)}}{\partial \zeta_\mu}$ gleich der Summe der Werthe von $t(\eta_\mu)$ für die den $p-1$ von (σ_μ, ζ_μ) verschiedenen Größenpaaren (σ, ζ) durch die Gleichung $\varphi = 0$ verknüpften $p-1$ Werthenpaare und für das Werthenpaar (s, z) , und man erhält für

$$\frac{\partial \log \vartheta^{(1)}}{\partial z_1} \partial z_1 + \sum_1^p \frac{\partial \log \vartheta^{(1)}}{\partial \zeta_\mu} d\zeta_\mu = d \log \vartheta^{(1)},$$

einen Ausdruck, welchen *Weierstrafs* für den Fall, wenn s nur eine zweiwerthige Function von z ist, gegeben hat (d. J. Bd. 47 S. 300 Form. 35).

Die Eigenschaften von $\pi(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ und $t(\varepsilon_1)$ als Functionen von (s_1, z_1) und (s_2, z_2) ergeben sich aus den Gleichungen

$$\pi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{1}{p} (\log \vartheta(u_1^{(2)} - pu_1, \dots) - \log \vartheta(u_1^{(1)} - pu_1, \dots))$$

und

$$t(\varepsilon_1) = \frac{1}{p} \frac{\partial \log \vartheta(u_1^{(1)} - pu_1, \dots)}{\partial z_1},$$

welche in den obigen Ausdrücken für $\log \vartheta^{(2)} - \log \vartheta^{(1)}$ und $\frac{\partial \log \vartheta^{(1)}}{\partial z_1}$ als specielle Fälle enthalten sind.

26.

Es soll jetzt die Aufgabe behandelt werden, algebraische Functionen von z als Quotienten zweier Producte von gleichvielen Functionen $\vartheta(u_1 - e_1, \dots)$ und Potenzen der Größen e^μ darzustellen.

Ein solcher Ausdruck erlangt bei den Uebergängen von (s, z) über die Querschnitte constante Factoren, und diese müssen Wurzeln der Einheit sein, wenn er algebraisch von z abhängen und also bei stetiger Fortsetzung für dasselbe z nur eine endliche Anzahl von Werthen annehmen soll. Sind alle diese Factoren μ te Wurzeln der Einheit, so ist die μ te Potenz des Ausdrucks eine einwerthige und folglich rationale Function von s und z .

Umgekehrt läßt sich leicht zeigen, daß jede algebraische Function r von z , die innerhalb der ganzen Fläche T' stetig fortgesetzt, allenthalben nur *einen* bestimmten Werth annimmt und beim Ueberschreiten eines Querschnitts einen constanten Factor erlangt, sich auf mannigfaltige Art als Quotient zweier Producte von ϑ -Functionen und Potenzen der Größen e^μ ausdrücken läßt. Man bezeichne einen Werth von u_μ für $r = \infty$ durch β_μ und für $r = 0$ durch γ_μ und nehme $\log r$, indem man von jedem Punkte, wo r unendlich von

der ersten Ordnung wird, nach je einem Punkte, wo r unendlich klein von der ersten Ordnung wird, eine Linie durch das Innere von T' zieht, aufer diesen Linien in T' allenthalben stetig an. Ist dann $\log r$ auf der positiven Seite der Linie a_ν um $g_\nu 2\pi i$ und auf der positiven Seite der Linie b_ν um $-h_\nu 2\pi i$ größer, als auf der negativen, so ergiebt sich durch die Betrachtung des Begrenzungsintegrals $\int \log r du_\mu$

$$\sum \gamma_\mu - \sum \beta_\mu = \sum g_\nu \pi i + \sum h_\nu a_{\mu,\nu}$$

für $\mu = 1, 2, \dots, p$, worin g_ν und h_ν nach dem oben Bemerkten rationale Zahlen sein müssen und die Summen auf der linken Seite der Gleichung über sämtliche Punkte, wo r unendlich klein oder unendlich groß von der ersten Ordnung wird, auszudehnen sind, indem man einen Punkt, wo r unendlich klein oder unendlich groß von einer höheren Ordnung wird, als aus mehreren solchen Punkten bestehend betrachtet (§. 2). Wenn diese Punkte bis auf p gegeben sind, so lassen sich diese p immer und allgemein zu reden nur auf eine Weise so bestimmen, daß die $2p$ Factoren $e^{g_\nu 2\pi i}$, $e^{-h_\nu 2\pi i}$ gegebene Werthe annehmen (§§. 15, 24).

Wenn man nun in dem Ausdrücke

$$\frac{P}{Q} e^{-2\sum h_\nu u_\nu},$$

worin P und Q Producte von gleichvielen Functionen $\mathcal{F}(u_1 - \sum \alpha_i^{(\pi)}, \dots)$ mit demselben (s, z) und verschiedenen (σ, ζ) sind, die Werthenpaare von s und z , für welche r unendlich wird, für Größenpaare (σ, ζ) in den \mathcal{F} -Functionen des Nenners und die Werthenpaare, für welche r verschwindet, für Größenpaare (σ, ζ) in den \mathcal{F} -Functionen des Zählers substituirt und die übrigen Größenpaare (σ, ζ) im Nenner und im Zähler gleich annimmt, so stimmt der Logarithme dieses Ausdrucks in Bezug auf die Unstetigkeiten im Innern von T' mit $\log r$ überein und ändert sich beim Ueberschreiten der Linien a und b , wie $\log r$, nur um rein imaginäre längs diesen Linien constante Größen; er unterscheidet sich also von $\log r$ nach dem *Dirichlet'schen* Princip nur um eine Constante und der Ausdruck selbst von r nur durch einen constanten Factor. Bei dieser Substitution darf selbstredend keine der \mathcal{F} -Functionen identisch, für jeden Werth von z , verschwinden. Dieses würde geschehen (§. 23), wenn sämtliche Werthenpaare, für welche eine einwerthige Function von (s, z) verschwindet, für Größenpaare (σ, ζ) in einer und derselben \mathcal{F} -Function substituirt würden.

27.

Als Quotient zweier ϑ -Functionen, multiplicirt mit Potenzen der Gröfsen e^u , läfst sich demnach eine einwerthige oder rationale Function von (s, z) nicht darstellen. Alle Functionen r aber, die für dasselbe Werthenpaar von s und z mehrere Werthe annehmen und nur für p oder weniger Werthenpaare unendlich von der ersten Ordnung werden, sind in dieser Form darstellbar und umfassen alle in dieser Form darstellbaren algebraischen Functionen von z . Man erhält, abgesehen von einem constanten Factor, jede und jede nur einmal, wenn man in

$$\frac{\vartheta(v_1 - g_1 \pi i - \sum_v h_v a_{1,v}, \dots)}{\vartheta(v_1, \dots, v_p)} e^{-2 \sum_v v_v h_v}$$

für h_v und g_v rationale ächte Brüche und $u_v = \sum_1^p \alpha_v^{(\mu)}$ für v_v setzt.

Diese Gröfse ist zugleich eine algebraische Function von jeder der Gröfsen ζ und die (im vor. §.) entwickelten Principien reichen völlig hin, um sie durch die Gröfsen $z, \zeta_1, \dots, \zeta_p$ algebraisch auszudrücken.

In der That: Als Function von (s, z) nimmt sie, durch die ganze Fläche T' stetig fortgesetzt, allenthalben *einen* bestimmten Werth an, wird unendlich von der ersten Ordnung für die Werthenpaare $(\sigma_1, \zeta_1), \dots, (\sigma_p, \zeta_p)$ und erlangt an dem Schnitte a_v beim Uebergange von der positiven zur negativen Seite den Factor $e^{g_v 2\pi i}$, an dem Schnitte b_v den Factor $e^{-h_v 2\pi i}$; und jede andere dieselben Bedingungen erfüllende Function von (s, z) unterscheidet sich von ihr nur durch einen von (s, z) unabhängigen Factor. Als Function von (σ_μ, ζ_μ) nimmt sie, durch die ganze Fläche T' stetig fortgesetzt, allenthalben *einen* bestimmten Werth an, wird unendlich von der ersten Ordnung für das Werthenpaar (s, z) und für die den übrigen $p-1$ Gröfsenpaaren (σ, ζ) durch die Gleichung $\varphi = 0$ verknüpften $p-1$ Werthenpaare $(\sigma_1^{(\mu)}, \zeta_1^{(\mu)}), \dots, (\sigma_{p-1}^{(\mu)}, \zeta_{p-1}^{(\mu)})$ und erlangt an dem Schnitte a_v den Factor $e^{-g_v 2\pi i}$, an dem Schnitte b_v den Factor $e^{h_v 2\pi i}$; und jede andere dieselben Bedingungen erfüllende Function von (σ_μ, ζ_μ) unterscheidet sich von ihr nur durch einen von (σ_μ, ζ_μ) unabhängigen Factor. Bestimmt man also eine algebraische Function von $z, \zeta_1, \dots, \zeta_p$

$$f((s, z); (\sigma_1, \zeta_1), \dots, (\sigma_p, \zeta_p))$$

so, dafs sie als Function von jeder dieser Gröfsen dieselben Eigenschaften besitzt, so unterscheidet sie sich von dieser nur durch einen von sämmtlichen

Größen $\alpha, \zeta_1, \dots, \zeta_p$ unabhängigen Factor und wird also $= Af$, wenn A diesen Factor bezeichnet. Um diesen Factor zu bestimmen, drücke man in f die von (σ_μ, ζ_μ) verschiedenen Größenpaare (σ, ζ) durch $(\sigma_1^{(\mu)}, \zeta_1^{(\mu)}), \dots, (\sigma_{p-1}^{(\mu)}, \zeta_{p-1}^{(\mu)})$ aus, wodurch er in

$$g((\sigma_\mu, \zeta_\mu); (s, \alpha), (\sigma_1^{(\mu)}, \zeta_1^{(\mu)}), \dots, (\sigma_{p-1}^{(\mu)}, \zeta_{p-1}^{(\mu)}))$$

übergehe; offenbar erhält man dann den inversen Werth der darzustellenden Function und also einen Ausdruck, welcher $= \frac{1}{Af}$ sein muß, wenn man in Ag für (σ_μ, ζ_μ) das Größenpaar (s, α) und für die Größenpaare $(s, \alpha), (\sigma_1^{(\mu)}, \zeta_1^{(\mu)}), \dots, (\sigma_{p-1}^{(\mu)}, \zeta_{p-1}^{(\mu)})$ die Werthenpaare von (s, α) substituirt, für welche die darzustellende Function und also $f=0$ wird. Hieraus ergibt sich A^2 und also A bis auf das Vorzeichen, welches durch directe Betrachtung der \mathcal{D} -Reihen in dem darzustellenden Ausdrücke gefunden werden kann.

Göttingen, 1857.