1.

Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Curven.

(Vom Herrn Professor *J. Steiner* zu Berlin.)

(Abgedruckt aus dem Monatsbericht der hiesigen Akad. der Wissens. vom August 1848.)*)

In der Gesammtsitzung der Akademie am 10. August 1848 wurde von Herrn *Steiner* eine Abhandlung über „allgemeine Eigenschaften der algebraischen Curven" vorgelegt.

Diese Curven werden darin nach Grad und Classe aufgefafst; das Wesen der Doppel- und Rückkehrpuncte, der Doppel- und Wendetangenten wird erläutert und die gegenseitige Abhängigkeit dieser Elemente und des Grads und der Classe wird nachgewiesen. Bezeichnen g und k beziehlich den Grad und die Classe einer Curve, $K^g = \mathfrak{K}^k$, ferner d und r die Zahl ihrer Doppel- und Rückkehrpuncte, so wie t und w die Zahl ihrer Doppel- und Wendetangenten, so hat man die drei Gleichungen

$$(1.)\qquad g(g-1) = k+2d+3r,$$
$$(2.)\qquad k(k-1) = g+2t+3w,$$
$$(3.)\qquad 3g(g-2) = 6d+8r+w,$$

aus denen, wenn von den darin enthaltenen 6 Gröfsen irgend drei gegeben sind, die drei übrigen gefunden werden; was somit auf 60 Formeln führt.

Bei Bestimmung der Curven durch gegebene Puncte ergiebt sich der folgende bekannte Satz als

Erster Fundamentalsatz:

„*Durch beliebige gegebene* $\frac{1}{2}n(n+3)-1$ *Puncte* a_1 *geht eine unzählige Schaar Curven* n^{ten} *Grads,* A^n, *und alle diese Curven gehen nebstdem nothwendig noch durch andere* $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ *bestimmte Puncte* a_0, *so dafs sie ein Curvenbüschel* $B(A^n)$ *mit* n^2 *gemeinschaftlichen Schnittpuncten* a *bilden.*" Die Puncte a_1 heifsen die *bestimmenden,* die Puncte a_0 die *nothwendigen,* und beide insgesammt, die n^2 Puncte a heifsen die ***Grundpuncte*** des Büschels $B(A^n)$.

*) Dieser Monatsbericht wird vornehmlich aus dem Grunde hier abgedruckt, weil auf die darin enthaltenen Erklärungen und Sätze in der nachher folgenden Abhandlung vielfach verwiesen wird.

Dieser Satz ist für die Betrachtung der Curven einer der wesentlichsten und fruchtbarsten, indem er zahlreiche Folgerungen gewährt. Dahin gehört unter andern die Erzeugung der Curven durch Curvenbüschel niedrigen Grades, ganz analog, wie die Kegelschnitte durch projectivische Strahlbüschel erzeugt werden. Ferner eine grofse Reihe von Sätzen über gegenseitige Berührung der Curven, wobei sich insbesondere verschiedene merkwürdige Eigenschaften der 28 Doppeltangenten der Curven 4^{ten} Grads ergeben.

Über die Polaren werden einige neue weiter gehende Gesichtspuncte aufgestellt, die zu einer Menge neuer Resultate führen.

Werden aus einem beliebigen Puncte P an eine gegebene Curve A^n (die Basis) Tangenten gelegt, so liegen die $n(n-1)$ Berührungspuncte in einer Curve A^{n-1}; und werden aus demselben Punct P an diese neue Curve Tangenten gelegt, so liegen die $(n-1)(n-2)$ Berührungspuncte eben so in einer Curve A^{n-2}; und wird so fortgefahren, so erhält man die aufeinander folgenden Curven A^{n-1}, A^{n-2}, A^{n-3}, ... A^2, A^1, welche *die successiven Polaren* des Puncts P in Bezug auf die Basis A^n, und zwar nach der Reihe die 1^{te}, 2^{te}, 3^{te}, ..., $(n-2)^{\text{te}}$, $(n-1)^{\text{te}}$ Polare genannt, und die in Zeichen wie folgt, dargestellt werden

$$(P)_1 : A^n = A^{n-1};\quad (P)_2 : A^n = A^{n-2};\quad (P)_x : A^n = A^{n-x};\quad (P)_{n-2} : A^n = A^2;$$
$$(P)_{n-1} : A^n = A^1,$$

wobei also z. B. $(P)_x : A^n = A^{n-x}$ heifst: die x^{te} Polare des Puncts P in Bezug auf die Basis A^n ist eine Curve vom $(n-x)^{\text{ten}}$ Grad, $= A^{n-x}$. Die $(n-2)^{\text{te}}$ Polare A^2 ist ein Kegelschnitt und die $(n-1)^{\text{te}}$ Polare A^1 ist eine Gerade.

Bewegt sich der Pol P in irgend einer Linie L (Directrix), so wird jede seiner Polaren, wie etwa die x^{te}, eine continuirliche Schaar Curven A^{n-x}, oder $S(A^{n-x})$, durchlaufen, die irgend eine Curve umhüllen, welche die x^{te} ***Polar-Enveloppe E_x des bewegten Pols P, oder schlechthin die x^{te} Polare der Leitlinie L in Bezug auf die Basis A^n*** genannt wird. In Zeichen wird dies wie folgt ausgedrückt:

$$(4.)\qquad (L)_x : A^n = S(A^{n-x}) = E_x.$$

Ist die Directrix L eine gegebene Curve, etwa vom r^{ten} Grad, $= D^r$, so ist auch der Grad jeder ihrer Polaren E_1, E_2, ... E_{n-1} bestimmt, nämlich es ist allgemein

$$(5.)\qquad (D^r)_x : A^n = E_x^{r(r+2x-3)(n-x)};$$

d. h.: *„Die x^{te} Polare der Curve D^r in Bezug auf die Basis A^n ist eine Curve E_x vom $r(r+2x-3)(n-x)^{ten}$ Grad;"* oder: *„Bewegt sich der Pol P in der Curve D^r, so ist seine x^{te} Polar-Enveloppe E_x eine Curve vom genannten Grade."*

Für die erste und letzte Polare, also für $x=1$ und $x=n-1$ hat man insbesondere

$$(6.)\qquad (D^r)_1 : A^n = E_1^{r(r-1)(n-1)};$$

und

$$(7.)\qquad (D^r)_{n-1} : A^n = E_{n-1}^{r(r+2n-5)};$$

ist dagegen $r=1$, also die Directrix eine Gerade D^1, so hat man (5.):

$$(8.)\qquad (D^1)_x : A^n = E_x^{2(x-1)(n-x)},$$

und für $x=1$ und $x=n-1$ kommt

$$(9.)\qquad (D^1)_1 : A^n = E_1^0;$$

und

$$(10.)\qquad (D^1)_{n-1} : A^n = E_{n-1}^{2(n-2)} = \mathfrak{C}^{n-1},$$

d. h.: *„Bewegt sich der Pol P auf einer Geraden D^1* (9.), *so ist seine erste Polar-Enveloppe vom Nullten Grad, E_1^0, was anzeigt, dafs die $S(A^{n-1})$ sich in $(n-1)^2$ Puncten a schneiden, auf welche sich die Enveloppe reducirt, oder dafs die Schaar Polaren A^{n-1} in ein Büschel $B(A^{n-1})$ übergehen;"* und (10.) *„die $(n-1)^{te}$ Polare einer Geraden D^1 in Bezug auf die Basis A^n ist eine Curve vom $2(n-2)^{ten}$ Grad und von der $(n-1)^{ten}$ Classe $\mathfrak{C}^{n-1}$."*

Für die Betrachtung der Polaren dient der folgende, allgemein bekannte, Satz als

Zweiter Fundamentalsatz:

„Nimmt man, in Bezug auf dieselbe Basis A^n, von zwei beliebigen Puncten P und Q die ersten Polaren, seien diese P^{n-1} und Q^{n-1}, und nimmt sodann verwechselt die erste Polare von P in Bezug auf die Curve Q^{n-1} und die erste Polare von Q in Bezug auf P^{n-1}, so sind diese beiden Polaren eine und dieselbe Curve R^{n-2}; oder in Zeichen:

$$(11.)\qquad (Q)_1 : [(P)_1 : A^n] = (P)_1 : [(Q)_1 : A^n] = R^{n-2}."$$

Dieser Satz ist ebenso folgenreich, wie der obige. Durch wiederholte Anwendung desselben folgt zunächst, dafs

$$(12.)\qquad (Q)_y : [(P)_x : A^n] = (P)_x : [(Q)_y : A^n] = R^{n-x-y}.$$

Eine andere Folgerung ist:

1*

„Liegt der Punct Q in der x^{ten} Polare von P, also in P^{n-x}, so geht die $(n-x)^{te}$ Polare von Q, also Q^x, durch den Punct P." Ebenso folgt daraus der schöne Reciprocitätssatz:

„Hat die x^{te} Polare eines Puncts P, also P^{n-x}, einen Doppelpunct Q, so hat auch umgekehrt die $(n-x-1)^{te}$ Polare des letztern, d. i. Q^{x+1}, jenen Punct P zum Doppelpunct."

Die Doppelpuncte der Polaren spielen eine wesentliche Rolle, wie aus dem folgenden Beispiel zu ersehen ist.

„Der Ort desjenigen Puncts P, dessen erste Polare, P^{n-1}, einen Doppelpunct Q hat, ist eine Curve vom $3(n-2)(n-2)^{ten}$ Grad

$$= P_0^{3(n-2)^2}$$

und der Ort des Doppelpuncts Q ist eine Curve vom $3(n-2)^{ten}$ Grad

$$= Q_0^{3(n-2)};\text{"}$$

diese letztere Curve Q_0 ist also zugleich auch der Ort desjenigen Puncts Q, dessen $(n-2)^{te}$ Polare, Q^2, einen Doppelpunct P hat, und jene erste Curve P_0 ist der Ort dieses Doppelpuncts. Die Polare Q^2 ist somit ein Kegelschnitt, der aus zwei Geraden besteht, die sich in P schneiden. Die Curven P_0 und Q_0 werden, nebst andern, *conjugirte Kern-Curven* der Basis A^n genannt. Sie haben unter andern folgende Eigenschaften:

„Die Curve Q_0 geht durch die $3n(n-2)$ Wendepuncte der Basis A^n, wogegen die Curve P_0 alle Wendetangenten derselben berührt." — *„Die Curve P_0 ist von der $3(n-1)(n-2)^{ten}$ Classe; und von gleicher Classe ist, im Allgemeinen, diejenige Curve R_0, welche von der Geraden PQ umhüllt wird; diese Curve R_0 berührt ebenfalls die Wendetangenten der Basis A^n;"* etc. — *„Die $(n-1)^{te}$ Polare von jeder beliebigen Curve D^r, d. i. $D^{r(r+2n-5)}$* (7.), *berührt die Kerncurve P_0 in $3r(n-2)$ Puncten;"* etc. — *„Die Kerncurve P_0 hat*

$3(n-2)(4n-9)$ *Wendetangenten,*
$\frac{3}{2}(n-2)[(3n^2+1)(n-4)+28]$ *Doppeltangenten,*
$12(n-2)(n-3)$ *Rückkehrpuncte, und*
$\frac{3}{2}(n-2)[3(n-2)^3-14(n-2)+11]$ *Doppelpuncte."*

„Sind P_1 und P_2 irgend zwei solche Puncte, deren erste Polaren P_1^{n-1} und P_2^{n-1} einander in irgend einem Puncte X berühren sollen, so mufs die Gerade P_1P_2 allemal die Curve P_0 in irgend einem Puncte P berühren, und so ist der Punct X der zu P reciproke Pol Q und die Gerade PQ ist die gemeinsame Tangente jener Polaren im Puncte $X = Q$.

Also können alle ersten Polaren P_1^{n-1}, P_2^{n-1}, ... einander nur in solchen Puncten Q berühren, welche in der Kerncurve Q_0 liegen, und somit zugleich Doppelpuncte von einzelnen derselben sind. Jeder Tangente PP_1 der Curve P_0 entspricht ein Büschel erste Polaren (9.), *$B(P_1^{n-1})$, die sich in einem und demselben Puncte Q berühren, welcher der reciproke Pol zum Berührungspunct P der Tangente ist. Ist PP_1 insbesondere eine Wendetangente der Kerncurve P_0, so osculiren sich ihre Polaren $B(P_1^{n-1})$ in Q; und ist PP_1 eine Doppeltangente von P_0, so berühren sich die Polaren $B(P_1^{n-1})$ in zwei verschiedenen Puncten Q. Ist ferner insbesondere P ein Doppelpunct der Curve P_0, so hat seine erste Polare P^{n-1} zwei Doppelpuncte Q, und somit giebt es eben so viele erste Polaren, welche zwei Doppelpuncte haben, als die Kerncurve P_0 Doppelpuncte hat;*" u. s. w.

Die gesammten ersten Polaren P^{n-1}, P_1^{n-1}, P_2^{n-1}, ... bilden ein sogenanntes Netz, welches durch irgend drei derselben (die nicht zu einem Büschel gehören) bestimmt ist, und wodurch dann auch die Basis A^n bestimmt wird. Haben die drei gegebenen Curven gemeinschaftliche Puncte [1, 2, 3, ... bis höchstens $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)-2$], so sind dieselben Doppelpuncte der Kerncurve Q_0. *Daher ist z. B. der Ort der Doppelpuncte (oder der Berührungspuncte) aller Curven P^x, welche durch dieselben gegebenen* $\frac{1}{2}x(x+3)-2$ *Puncte d gehen, eine Curve $Q^{3(x-1)}$, welche die Puncte d zu Doppelpuncten hat. Sollen die Curven P^x durch* $\frac{1}{2}x(x+3)-1$ *Puncte d gehen, so bilden sie ein Büschel $B(P^x)$ und dann haben sie zusammen* $3(x-1)^2$ *Doppelpuncte.*

Über die obigen Polaren (Polar-Enveloppen) wird bemerkt, dafs wenn man eine derselben zur Directrix annimmt, ihr ebenfalls eine Reihe Polarcurven entsprechen, von denen die eine vorzugsweise ihre ***reciproke Polare*** genannt wird. Nämlich wird von der x^{ten} Polare einer Curve D^r, also von (5.)

$$E_x^{r(r+2x-3)(n-x)},$$

die $(n-x)^{\text{te}}$, d. i. die reciproke Polare genommen, so müfste diese die gegebene Curve D^r sein; nach der allgemeinen Formel (5.) ist sie aber, wenn $r(r+2x-3)(n-x)=s$ gesetzt wird, eine Curve vom $s[s+2(n-x)-3]x^{\text{ten}}$ Grad. Hier ist also der scheinbare Widerspruch noch auffallender, als bei der gewöhnlichen Polarität, wo die Basis nur ein Kegelschnitt, und für welchen Fall er durch ***Poncelet*** aufgeklärt worden. Hier wird das Paradoxon wie folgt erklärt.

Die erste Polare von D^r, in Bezug auf die Basis A^n, ist $E_1^{r(r-1)(n-1)}$, und für die $(n-1)^{\text{te}}$ Polare von dieser giebt die Formel (7.)

$$E_{n-1}^{r(r-1)(n-1)[r(r-1)(n-1)+2n-5]}$$

statt dafs sie, vermöge der Reciprocität, blofs die ursprüngliche Curve D^r geben sollte. Dieses Wundersame klärt sich nun dadurch auf: dafs die Curve E_{n-1}

1) aus $(n-1)^2$ Mal der Curve D^r nebst deren $3r(r-2)$ Wendetangenten und $\frac{1}{2}r(r-2)(r^2-9)$ Doppeltangenten, wobei noch jede Wendetangente als eine 3fache und jede Doppeltangente als eine 2fache Gerade zu zählen ist, also aus $(n-1)^2 \times (D^r+2d+3w)$, und
2) aus den $3r(r-1)(n-1)(n-2)$ gemeinschaftlichen Tangenten der Curve D^r und der Kerncurve P_0

besteht.

Eine gegebene Curve Q^q kann von den Curven eines in derselben Ebene gegebenen Büschels $B(P^p)$ in $q(q+2p-3)$ Puncten R berührt werden, welche allemal mit den $3(p-1)^2$ Doppelpuncten des Büschels $B(P^p)$ zusammen in einer Curve R^{q+2p-3} liegen. — Sind in derselben Ebene irgend zwei Curvenbüschel $B(P^p)$ und $B(Q^q)$ gegeben, so ist der Ort des Puncts R, in welchem sich je zwei Curven beider Büschel berühren, eine Curve vom $(2p+2q-3)^{\text{ten}}$ Grad; und die Anzahl derjenigen Puncte R_1, in welchen sich zwei Curven P^p und Q^q beider Büschel osculiren, ist

$$= 3[(p+q)(p+q-6)+2pq+5].$$

Sind in einer Ebene drei beliebige Curven-Büschel $B(P^p)$, $B(Q^q)$ und $B(R^r)$ gegeben, so ist die Zahl derjenigen Puncte, in welchen je drei dieser Curven einander berühren, im Allgemeinen

$$= 4(pq+pr+qr)-6(p+q+r-1).$$

Für die Curven 3^{ten} und 4^{ten} Grads insbesondere ergeben sich aus der obigen allgemeinen Betrachtung viele, zum Theil ganz neue interessante Eigenschaften, wie leicht zu ermessen. Namentlich treten hier wiederum eigenthümliche Relationen der 28 Doppeltangenten der Curve 4^{ten} Grads hervor, ein Gegenstand, über welchen bisherige Bemühungen noch wenig ermittelt haben. Über die Curve 3^{ten} Grads bieten sich noch mehr specielle Fälle dar; dabei wird nachgewiesen, dafs das eigentliche Wesen vieler ihrer Eigenschaften vornehmlich auf der sogenannten *Involution* beruht.

Durch verschiedene Correlationssysteme werden theils analoge Resultate, wie durch die Polarität, theils aber auch neue Sätze über Curven gewonnen.