

## 11.

**Combinatorische Aufgabe.**

(Von Herrn Professor Dr. J. Steiner zu Berlin.)

a) Welche Zahl,  $N$ , von Elementen hat die Eigenschaft, daß sich die Elemente so zu dreien ordnen lassen, daß je zwei in *einer*, aber *nur in einer* Verbindung vorkommen? Wie viele wesentlich verschiedene Anordnungen, d. h. solche, die nicht durch eine bloße Permutation der Elemente auseinander hervorgehen, giebt es bei jeder Zahl?

b) Wenn ferner die Elemente sich so zu vieren verbinden lassen sollen, daß jede drei freien Elemente, d. h. solche, welche nicht schon einen der vorigen Dreier (*a.*) bilden, immer in *einem* aber *nur in einem* Vierer vorkommen, und daß auch keine 3 Elemente eines solchen Vierers einem der vorigen Dreier angehören; so entsteht daraus keine neue Bedingung für die Zahl  $N$ .

c) Sollen die Elemente sich weiter so zu Fünfern combiniren lassen, daß je vier unter sich noch freie Elemente, d. h. welche keinen der zuvor gebildeten Vierer (*b.*) ausmachen, noch einen der früheren Dreier (*a.*) enthalten, immer in einem, aber nur in einem Fünfer vorkommen, und daß ein solcher Fünfer keinen der schon gebildeten Dreier noch Vierer enthält: welche neue Modification erleidet dann die Zahl  $N$ ?

d) Und sollen die Elemente sich ähnlicher Weise so zu Sechsern verbinden lassen, daß zu je fünf unter sich noch freien Elementen ein bestimmtes sechstes gehört, aber keiner der so gebildeten Sechser einen der früheren Dreier oder Vierer oder Fünfer enthält; welche Beschränkung erleidet dann die Zahl  $N$ ?

e) Eben so sollen Siebner gebildet werden, so daß zu je sechs unter sich freien Elementen ein bestimmtes siebentes gehört, aber ein solcher Siebner weder einen der vorigen Dreier, noch Vierer, noch Fünfer, noch Sechser enthält. Und so soll fortgefahren werden, bis etwa für die Zahl  $N$  die Unmöglichkeit höherer Verbindungen dieser Art eintritt. Zudem soll auf jeder Stufe die allgemeine Form der Zahl  $N$ , für welche die geforderten Combinationen möglich sind, angegeben, so wie umgekehrt gezeigt werden, ob bei jeder Zahl von der

aufgefundenen Form, die geforderten Verbindungen auch in der That möglich sind. — Wenn z. B. in Rücksicht der ersten Bedingung (a.) allein die Zahl  $N$  von der Form  $6n+1$  oder  $6n+3$  sein muß, so ist zu beweisen, daß für jede Zahl von einer dieser zwei Formen auch in der That die  $N$  Elemente sich auf die geforderte Art zu  $\frac{1}{6}N(N-1)$  Dreieren verbinden lassen. Nämlich aus den gestellten Bedingungen folgt leicht, daß

$$\begin{aligned} \text{die Zahl der Dreier} &= \frac{N(N-1)}{2 \cdot 3}, \\ - \quad - \quad - \quad \text{Vierer} &= \frac{N(N-1)(N-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}, \\ - \quad - \quad - \quad \text{Fünfer} &= \frac{N(N-1)(N-3)(N-7)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}, \\ - \quad - \quad - \quad \text{Sechser} &= \frac{N(N-1)(N-3)(N-7)(N-15)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}, \\ - \quad - \quad - \quad \text{Siebner} &= \frac{N(N-1)(N-3)(N-7)(N-15)(N-31)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} \end{aligned}$$

u. s. w. ist.

Auf die vorstehende Aufgabe wurde ich vor etwa sechs Jahren gelegentlich durch eine geometrische Betrachtung (bei Untersuchungen über die Doppeltangenten der Curven vierten Grades) geführt. Diese Betrachtung gab wohl einiges Licht über die Natur der verlangten Combinationen, aber sie genügte doch nicht, den Gegenstand vollständig aufzuklären. Der für die Mathematik leider zu früh verstorbene *Dr. Eisenstein*, welchem die Aufgabe vor längerer Zeit mitgetheilt worden, sagte mir später, daß er aus dem Falle (a.), den er vorerst allein in Betracht zog, einige Anwendungen auf Beispiele der Wahrscheinlichkeitsrechnung machen könne. — Man kann die Aufgabe auch figurlich so stellen, daß man sich unter den  $N$  Elementen eben so viele in einer Ebene beliebig liegende Punkte denkt, welche unter analogen Bedingungen zu Dreiecken (a.), Vierecken (b.), Fünfecken (c.), u. s. w. verbunden werden sollen.

Berlin, im November 1852.