12.

Démonstration élémentaire d'une proposition générale de la théorie des probabilités.

(Extrait d'un memoire russe sur l'analyse élémentaire de la théorie des probabilités.)

(Par Mr. *P. Tchebichef* à Moscou.)

§. 1. La proposition, dont la demonstration sera l'objet de cette note, est la suivante:

„On peut toujours assigner un nombre d'épreuves tel, qu'il donne „une probabilité, aussi approchante de la certitude qu'on le voudra, et que „le rapport du nombre de répétitions de l'événement E à celui des épreuves „ne s'ecartera pas de la moyenne des chances de E au delà des limites don-„nées, quelques resserées que soient ces limites."

Cette proposition fondamentale de la théorie des probabilités, contenant comme cas particulier la loi de *Jacques Bernoulli*, est déduite par Mr. *Poisson* d'une formule, qu'il obtient en calculant approximativement la valeur d'une intégrale definie, assez compliquée. (V. Recherches sur les probabilités des jugements, chap. IV.) Toute ingénieuse que soit la méthode employée par le celèbre Géometre, il reste à être impossible de montrer la limite de l'erreur que peut admettre son analyse approximative, et par cette incertitude de la valeur de l'erreur, sa demonstration n'est pas rigoureuse. Je vais montrer ici, comment on peut démontrer rigoureusement cette proposition par des considérations tout à fait élémentaires.

§. 2. Supposons que $p_1, p_2, p_3, \dots. p_\mu$ soient les chances de l'événement E dans μ épreuves consécutives, P_m la probabilité que E arrivera au moins m fois dans ces μ épreuves. On parviendra, comme on sait, a l'expression de P_m en dévéloppant le produit

$$(p_1 t+1-p_1)(p_2 t+1-p_2)(p_3 t+1-p_3)\dots.(p_\mu t+1-p_\mu)$$

suivant les puissances de t et prenant la somme des coefficients de t^m, t^{m+1}, $\dots. t^\mu$. De là résultent évidemment ces deux propriétés de P_m: 1) Cette quantité ne contient point de degré de $p_1, p_2, p_3, \dots. p_\mu$ plus haut que l'unité; 2) Elle est une fonction symétrique par rapport à $p_1, p_2, p_3, \dots. p_\mu$. En vertu de la première propriété P_m pourra être mise sous la forme $U+Vp_1+V_1p_2+Wp_1p_2$, où U, V, V_1, W sont independantes de p_1 et p_2; en vertu de la seconde, V et V_1 sont égales. Donc la forme de l'expression P_m est $U+V(p_1+p_2)+Wp_1p_2$; où U, V, W ne contiennent ni p_1 ni p_2. D'après cela il est facile de prouver sur l'expression P_m le théorême suivant:

Théorème. „Si p_1, p_2 ne sont pas égaux, on peut, sans changer les „valeurs de p_1+p_2, p_3, ... p_μ, augmenter celle de P_m en prenant $p_1=p_2$; „ou on peut parvenir à une des équations suivantes: $p_1=0$, $p_1=1$, sans di„minuer la valeur de P_m."

Demonstration. Nous avons vu que l'expression de P_m peut être mise sous la forme $U+V(p_1+p_2)+Wp_1p_2$; ou U, V, W sont independantes de p_1 et p_2. Or la formule $U+V(p_1+p_2)+Wp_1p_2$ présente toujours un des trois cas: $W>0$, $W=0$, $W<0$.

Dans le premier cas la somme p_1+p_2 reste la même, et la valeur de P_m augmente de $\frac{1}{4}W(p_1-p_2)^2$, quand on change p_1, p_2 en $\frac{1}{2}(p_1+p_2)$, $\frac{1}{2}(p_1+p_2)$; car la difference

$$U+V[\tfrac{1}{2}(p_1+p_2)+\tfrac{1}{2}(p_1+p_2)]+W\tfrac{1}{2}(p_1+p_2).\tfrac{1}{2}(p_1+p_2)-\{U+V(p_1+p_2)+Wp_1p_2\}$$

se reduit à $\frac{1}{4}W(p_1-p_2)^2$.

Dans les deux derniers cas on ne changera pas la valeur de la somme p_1+p_2 et on ne diminuera pas celle de $U+V(p_1+p_2)+Wp_1p_2$, en changeant p_1, p_2 en $0, p_1+p_2$ ou en $1, p_1+p_2-1$; car

$$U+V[0+p_1+p_2]+W.0.(p_1+p_2)-\{U+V(p_1+p_2)+Wp_1p_2\}=-Wp_1p_2;$$
$$U+W[1+p_1+p_2-1]+W.1.(p_1+p_2-1)-\{U+V(p_1+p_2)+Wp_1p_2\}=$$
$$-W(1-p_1)(1-p_2).$$

Mais les premières de ces valeurs de p_1, p_2 pourront être admises toutes les fois que p_1+p_2 ne surpasse pas 1; car elles sont alors positives et ne surpassent point l'unité; dans le cas contraire où $p_1+p_2>1$, on pourra changer p_1 en 1, p_2 en p_1+p_2-1, ce qui prouve le théorème énoncé. Le théorème nous conduit encore au suivant.

Théorème. „La plus grande valeur que P_m peut avoir dans le cas „où $p_1+p_2+p_3+\ldots+p_\mu=S$, corespond aux valeurs $p_1, p_2, p_3, \ldots\, p_\mu$ don„nées par les équations

$$p_1=0,\ p_2=0,\ \ldots\ p_\varrho=0,\ p_{\varrho+1}=1,\ p_{\varrho+2}=1,\ \ldots\ p_{\varrho+\sigma}=1;$$
$$p_{\varrho+\sigma+1}=\frac{S-\sigma}{\mu-\varrho-\sigma};\ p_{\varrho+\sigma+2}=\frac{S-\sigma}{\mu-\varrho-\sigma};\ \ldots\ p_\mu=\frac{S-\sigma}{\mu-\varrho-\sigma},$$

„où ϱ, σ designent certains nombres."

Démonstration. Supposons que $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots \pi_\mu$ soit le système de valeurs de $p_1, p_2, p_3, \ldots p_\mu$ qui, verifiant l'équation $p_1+p_2+p_3+\ldots+p_\mu=S$ donnent la plus grande valeur à P_m et renferment en même temps le plus grand nombre possible de valeurs égales à **1** et **0** sous ces conditions. Soyent d'ailleurs $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_\varrho$ celles parmi les quantités $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots \pi_\mu$ qui sont égales à **0**; $\pi_{\varrho+1}, \pi_{\varrho+2}, \ldots \pi_{\varrho+\sigma}$ celles qui sont égales à l'unité; toutes les autres $\pi_{\varrho+\sigma+1}, \pi_{\varrho+\sigma+2}, \ldots \pi_\mu$, étant suivant la supposition différentes de **0** et **1**, doivent être égales entre elles; comme nous allons le prouver toute à l'heure.

En effet, si $\pi_{\varrho+\sigma+1}$ n'est pas égal à $\pi_{\varrho+\sigma+2}$, il est possible, d'après le théorème précédant, ou de rendre P_m plus grand, sans changer la somme $\pi_1+\pi_2+\ldots+\pi_{\varrho+\sigma+1}+\pi_{\varrho+\sigma=2}+\ldots+\pi_\mu$, en prenant $\pi_{\varrho+\sigma+1}=\pi_{\varrho+\sigma+2}$, ou de faire $\pi_{\varrho+\sigma+1}$ égal à **1** ou **0**, sans diminuer la valeur de P_m. Mais le premier est contraire à la supposition que le système $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots \pi_\mu$ donne la plus grande valeur à P_m sous la condition $\pi_1+\pi_2+\pi_3+\ldots+\pi_\mu=S$; le second est contraire à la supposition que de tous les systèmes qui ont cette propriété, $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots \pi_\mu$ est celui qui renferme le plus grand nombre de valeurs égales à **1** et **0**. Donc il faut necessairement que

$$\pi_{\varrho+\sigma+1}=\pi_{\varrho+\sigma+2}=\ldots=\pi_\mu.$$

Mais outres ces équations nous avons

$$\pi_1=0, \pi_2=0, \ldots \pi_\varrho=0, \pi_{\varrho+1}=1; \pi_{\varrho+2}=1, \ldots \pi_{\varrho+\sigma}=1; \pi_1+\pi_2+\pi_3+\ldots+\pi_\mu=S,$$

d'où resultent les équations du théorème proposé.

§. 3. Passont maintenant à la recherche des valeurs de l'expression de P_m, correspondantes à $p_1=0, p_2=0, \ldots p_\varrho=1, p_{\varrho+1}=1, p_{\varrho+2}=1, \ldots p_{\varrho+\sigma}=1, p_{\varrho+\sigma+1} =\frac{S-\sigma}{\mu-\varrho-\sigma}, p_{\varrho+\sigma+2}=\frac{S-\sigma}{\mu-\varrho-\sigma}, \ldots p_\mu=\frac{S-\sigma}{\mu-\varrho-\sigma}$. De la remarque que nous avons faite par rapport à l'expression P_m, il suit que la valeur de P_m corespondante à $p_1=0,\ p_2=0,\ \ldots\ p_\varrho=0,\ p_{\varrho+1}=1,\ p_{\varrho+2}=1,\ \ldots\ p_{\varrho+\sigma}=1,\ p_{\varrho+\sigma+1} =\frac{S-\sigma}{\mu-\varrho-\sigma}, p_{\varrho+\sigma+2}=\frac{S-\sigma}{\mu-\varrho-\sigma}, \ldots p_\mu=\frac{S-\sigma}{\mu-\varrho-\sigma}$ est la somme des coefficients de $t^m, t^{m-1}, \ldots t^\mu$ dans le développement du produit $t^\sigma\left(\frac{S-\sigma}{\mu-\varrho-\sigma}t+\frac{\mu-S-\varrho}{\mu-\varrho-\sigma}\right)^{\mu-\varrho-\sigma}$, et parconsequent elle est égale à

$$\frac{1.2\ldots.\mu-\varrho-\sigma}{1.2\ldots.m-\sigma.1.2\ldots.m-\varrho}\left(\frac{S-\sigma}{\mu-\varrho-\sigma}\right)^{m-\sigma}\left(\frac{\mu-S-\varrho}{\mu-\varrho-\sigma}\right)^{\mu-m-\varrho}\Big\{1+\frac{\mu-m-\varrho}{m-\sigma+1}\,\frac{S-\sigma}{\mu-S-\varrho}$$
$$+\frac{\mu-m-\varrho}{m-\sigma+1}\,\frac{S-\sigma}{\mu-S-\varrho}\,\frac{\mu-m-\varrho+1}{m-\sigma+2}\,\frac{S-\sigma}{\mu-S-\sigma}+\ldots.$$
$$\ldots.+\frac{\mu-m-\varrho}{m-\sigma+1}\,\frac{S-\sigma}{\mu-S-\varrho}\,\frac{\mu-m-\varrho+1}{m-\sigma+2}\,\frac{S-\sigma}{\mu-S-\varrho}\cdots.\frac{1}{\mu-\varrho-\sigma}\,\frac{S-\sigma}{\mu-S-\varrho}\Big\}.$$

Voilà l'expression qui, en consequence du thèorème précédent, pour certains nombres entiers positifs ϱ et σ, sera la limite supérieure de toutes les valeurs de P_m, dans le cas, où $p_1+p_2+p_3+\ldots.+p_\mu=S$.

En remarquant que la valeur de l'expression

$$1+\frac{\mu-m-\varrho}{m-\sigma+1}\,\frac{S-\sigma}{\mu-S-\sigma}+\frac{\mu-m-\varrho}{m-\sigma+1}\,\frac{S-\sigma}{\mu-S-\varrho}\,\frac{\mu-m-\varrho-1}{m-\sigma+2}\,\frac{S-\sigma}{\mu-S-\varrho}+\ldots.$$
$$\ldots.+\frac{\mu-m-\varrho}{m-\sigma+1}\,\frac{S-\sigma}{\mu-S-\varrho}\,\frac{\mu-m-\varrho-1}{m-\sigma+2}\,\frac{S-\sigma}{\mu-S-\varrho}\cdots.\frac{1}{\mu-S-\varrho}\,\frac{S-\sigma}{\mu-S-\varrho}$$

est plus petite que celle de

$$1+\frac{\mu-m-\varrho}{m-\sigma}\,\frac{S-\sigma}{\mu-S-\varrho}+\left(\frac{\mu-m-\varrho}{m-\sigma}\,\frac{S-\sigma}{\mu-S-\varrho}\right)^2+\ldots.+\left(\frac{\mu-m-\varrho}{m-\sigma}\,\frac{S-\sigma}{\mu-S-\varrho}\right)^{\mu-m-\varrho}$$

qui est le devéloppement de

$$\frac{1-\left(\frac{\mu-m-\varrho}{m-\sigma}\,\frac{S-\sigma}{\mu-S-\varrho}\right)^{\mu-m-\varrho}}{1-\frac{\mu-m-\varrho}{m-\sigma}\,\frac{S-\sigma}{\mu-S-\varrho}}\quad\text{ou de}\quad\frac{(m-\sigma)(\mu-S-\varrho)}{(m-S)(\mu-\varrho-\sigma)}\left[1-\left(\frac{\mu-m-\varrho}{m-\sigma}\,\frac{S-\sigma}{\mu-S-\varrho}\right)^{\mu-m-\varrho}\right]$$

nous parvenons à ce théorème:

Théorème. „Pour certains nombres entiers et positifs ϱ et γ, la valeur „de l'expression $\frac{1.2\ldots.\mu-\varrho-\sigma}{1.2\ldots.m-\sigma.1.2\ldots.\mu-m-\varrho}\left(\frac{S-\sigma}{\mu-\varrho-\sigma}\right)^{m-\sigma}\left(\frac{\mu-S-\varrho}{\mu-\varrho-\sigma}\right)^{\mu-m-\varrho+1}$ „$.\frac{m-\sigma}{m-S}\left[1-\left(\frac{\mu-m-\varrho}{m-\sigma}\,\frac{S-\sigma}{\mu-S-\varrho}\right)^{\mu-m-\varrho}\right]$ surpasse la valeur P_m de la probabilité „que l'évenement E dans μ épreuves, ayant les chances $p_1, p_2, p_3\ldots.p_\mu$, ar- „rivera au moins m fois, où S est la somme $p_1+p_2+p_3+\ldots.+p_\mu$."

§. 4. Arrêtons nous au cas, où m surpasse $S+1$. Suivant le dernier théorème nous avons

$$P_m<\frac{1.2\ldots.\mu-\varrho-\sigma}{1.2\ldots.m-\sigma.1.2\ldots.\mu-m-\varrho}\left(\frac{S-\sigma}{\mu-\varrho-\sigma}\right)^{m-\sigma}\left(\frac{\mu-S-\varrho}{\mu-\varrho-\sigma}\right)^{\mu-m-\varrho+1}$$
$$.\frac{m-\sigma}{m-S}\left[1-\left(\frac{\mu-m-\varrho}{m-\sigma}\,\frac{S-\sigma}{\mu-S-\varrho}\right)^{\mu-m-\varrho}\right]$$

et à plus forte raison

$$1.\qquad P_m < \frac{1.2\ldots.\mu-\varrho-\sigma}{1.2\ldots.m-\sigma.1.2\ldots.\mu-m-\varrho}\left(\frac{S-\sigma}{\mu-\varrho-\sigma}\right)^{m-\sigma}\left(\frac{\mu-S-\varrho}{\mu-\varrho-\sigma}\right)^{\mu-m-\varrho+1}\cdot\frac{m-\sigma}{m-S}.$$

Mais m étant plus grand que $S+1$, la valeur de l'expression $\frac{1.2\ldots.\mu-\varrho-\sigma}{1.2\ldots.m-\sigma.1.2\ldots.\mu-m-\varrho}\left(\frac{S-\sigma}{\mu-\varrho-\sigma}\right)^{m-\sigma}\left(\frac{\mu-S-\varrho}{\mu-\varrho-\sigma}\right)^{\mu-m-\varrho+1}\cdot\frac{m-\sigma}{m-S}$ augmentera par la diminuation des nombres entiers positifs ϱ et σ. En effet, si nous divisons par cette expression la valeur qu'elle prend après le changement de σ en $\sigma-1$, nous trouvons pour leur rapport

$$\frac{\mu-\varrho-\sigma+1}{m-\sigma}\,\frac{(S-\sigma+1)^{m-\sigma+1}}{(S-\sigma)^{m-\sigma}}\,\frac{(\mu-\varrho-\sigma)^{\mu-\varrho-\sigma+1}}{(\mu-\varrho-\sigma+1)^{\mu-\varrho-\sigma}},\ \text{ou bien}$$

$$\frac{S-\sigma+1}{m-\sigma}\left(\frac{S-\sigma+1}{S-\sigma}\right)^{m-\sigma}\left(\frac{\mu-\varrho-\sigma}{\mu-\varrho-\sigma+1}\right)^{\mu-\varrho-\sigma+1}$$

qui étant mis sous là forme $\frac{1}{1+\frac{m-S+1}{S-\sigma+1}}e^{-(m-\varrho)\lg(1-\frac{1}{S-\sigma+1})+(\mu-\tau-\sigma+1)\lg(1-\frac{1}{\mu-\varrho-\sigma+1})}$ se reduit à

$$\frac{1}{1+\frac{m-S+1}{S-\sigma+1}}e^{\frac{m-S+1}{S-\sigma+1}+\frac{1}{2}\left\{\frac{m-\sigma}{(S-\varrho+1)^2}-\frac{1}{\mu-\varrho-\sigma+1}\right\}+\frac{1}{3}\left\{\frac{m-\sigma}{(S-\sigma+1)^3}-\frac{1}{(\mu-\varrho-\sigma+1)^2}\right\}+\ldots.}$$

Or cette valeur est évidemment plus grande que 1; car $\frac{1}{1+\frac{m-S+1}{S-\sigma+1}}e^{\frac{m-S+1}{S-\sigma+1}}$ est égal à $\dfrac{1+\frac{m-S+1}{S-\sigma+1}+\frac{1}{2}\left(\frac{m-S+1}{S-\sigma+1}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{m-S+1}{S-\sigma+1}\right)^3+\ldots.}{1+\frac{m-S+1}{S-\sigma+1}}$, et ceci surpasse l'unité, parceque, m étant plus grand que $S+1$ par supposition, $m-S-1$ est une valeur positive. Quant aux valeurs de $\frac{m-\sigma}{(S-\sigma+1)^2}-\frac{1}{\mu-\varrho-\sigma+1}$, $\frac{m-\sigma}{(S-\sigma+1)^3}-\frac{1}{(\mu-\varrho-\sigma+1)^2}$, ..., elles toutes sont positives; car par supposition, $m-\sigma$ surpassera $S-\sigma+1$, et $S-\sigma+1$ ne peut surpasser $\mu-\varrho-\sigma+1$; car sans cela $\frac{S-\sigma}{m-\varrho-\sigma}$, qui est la valeur de la probabilité (voyez §. 2.), serait plus grand que l'unité. Donc nous nous convaincrons qu'avec la diminuation de σ la valeur de l'expression $\frac{1.2\ldots.\mu-\varrho-\sigma}{1.2\ldots.m-\sigma.1.2\ldots.\mu-m-\varrho}\left(\frac{S-\sigma}{\mu-\varrho-\sigma}\right)^{m-\sigma}\left(\frac{\mu-S-\varrho}{\mu-\varrho-\sigma}\right)^{\mu-m-\varrho+1}$ $\frac{m-\sigma}{m-S}$ augmente. Le même a lieu par rapport à ϱ. Delà nous concluons pour $m>S+1$ que la valeur de l'expression

$$\frac{1.2\ldots.\mu-\varrho-\sigma}{1.2\ldots.m-\sigma.1.2\ldots.\mu-m-\varrho}\left(\frac{S-\sigma}{\mu-\varrho-\sigma}\right)^{m-\sigma}\left(\frac{m-S-\varrho}{\mu-\varrho-\sigma}\right)^{\mu-m-\varrho+1}\cdot\frac{m-\sigma}{m-S},$$

dans l'inégalité (1), ne peut surpasser sa valeur corespondante à $\varrho=0$, $\sigma=0$, qui est égale à $\frac{1.2\ldots.\mu}{1.2\ldots.m.1.2\ldots.\mu-m}\left(\frac{S}{\mu}\right)^m\left(\frac{\mu-S}{\mu}\right)^{\mu-m+1}\cdot\frac{m}{m-S}$.

Nous pourrons donc par l'inégalité (1) conclure celle ci:

$$P_m < \frac{1.2\ldots.\mu}{1.2\ldots.m.1.2\ldots.\mu-m}\left(\frac{S}{\mu}\right)^m\left(\frac{\mu-S}{m}\right)^{\mu-m}\cdot\frac{m}{m-S},$$

où m est supposé plus grand que $S+1$.

§. 5. Mais on sait, que la valeur du produit $1.2\ldots.x-1.x$ est plus petite que $2{,}53\,x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x+\frac{1}{12x}}$ et plus grande que $2{,}50x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x}$ *). Suivant

---

*) Voici comment on parvient très simplement à ce résultat.

En divisant respectivement les valeurs des expressions $\frac{1.2\ldots.x-x.x}{x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x+\frac{1}{12x}}}$, $\frac{1.2\ldots(x-1)x}{x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x}}$, correspondantes à $x=n+1$, par leurs valeurs, correspondantes à $x=n$, on trouve pour leur rapports $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}}.e^{-1+\frac{1}{12}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)}$, $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}}.e^{-1}$, ce qui se reduit à $e^{(n+\frac{1}{2})\lg\frac{n}{n+1}-1+\frac{1}{12}\left(\frac{1}{n}-\frac{n}{n+1}\right)}$, $e^{(n+\frac{1}{2})\lg\frac{n}{n+1}-1}$ et enfin à

$$e^{\left(\frac{1}{12}-\frac{3}{2.4.5}\right)\frac{1}{(n+1)^4}+\left(\frac{1}{12}-\frac{4}{2.5.6}\right)\frac{1}{(n+1)^5}+\ldots},\quad e^{-\frac{1}{12}\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{12}\frac{1}{(n+1)^3}-\ldots}$$

La première quantité étant plus grande que l'unité, la seconde plus petite, il est clair qu'en augmantant x, la valeur de $\frac{1.2\ldots.x-1.x}{x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x+\frac{1}{12x}}}$ augmentera aussi, et celle de $\frac{1.2\ldots.x-1.x}{x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x}}$ diminuera.

Donc pour toutes les valeurs de x, moindres que s, on aura

$$\frac{1.2\ldots.x-1.x}{x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x+\frac{1}{12x}}} < \frac{1.2\ldots.s-1.s}{s^{s+\frac{1}{2}}e^{-s+\frac{1}{12s}}},\quad \frac{1.2\ldots.x-1.x}{x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x}} > \frac{1.2\ldots.s-1.s}{s^{s+\frac{1}{2}}e^{-s}}$$

et par consequent

$$(A)\qquad 1.2\ldots.x-1.x < Te^{-\frac{1}{12s}}x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x+\frac{1}{12x}},\quad 1.2\ldots.x-1.x > Tx^{x+\frac{1}{2}}e^{-x},$$

où T designe la valeur de l'expression $\frac{1.2\ldots.s-1.s}{s^{s+\frac{1}{2}}e^{-s}}$.

Mettons $s=\infty$ et nommons T_0 la valeur de $\frac{1.2\ldots.s-1.s}{s^{s+\frac{1}{2}}e^{-s}}$ pour $s=\infty$, il suit de (A) que pour toutes les valeurs finies de x on aura

$$1.2\ldots.x-1.x < T_0x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x+\frac{1}{12x}},\quad 1.2\ldots.x-1.x > T_0x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x},$$

où T_0 est une constante.

En faisant dans ces inégalités $x=10$, on trouvera que S_0 est plus grand que 2,20 et plus petit que 2,53; par consequent les inégalités précédentes donnent

$$1.2\ldots.x-1.x < 2{,}53x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x+\frac{1}{12x}},\quad 1.2\ldots.x-1.x > 2{,}50x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x}.$$

ceci la valeur de l'expression $\frac{1.2\ldots.\mu}{1.2\ldots.m.1.2\ldots.\mu-m}\left(\frac{S}{\mu}\right)^m\left(\frac{\mu-S}{\mu}\right)^{\mu-m}\frac{m}{m-S}$ est plus petite que $\frac{2{,}53e^{\frac{1}{12\mu}}}{2{,}50^2}\cdot\frac{\mu^{\mu+\frac{1}{2}}}{m^{m+\frac{1}{2}}(\mu-m)^{\mu-m+\frac{1}{2}}}\cdot\left(\frac{S}{\mu}\right)^m\left(\frac{\mu-S}{\mu}\right)^{\mu-m}\cdot\frac{m}{m-S}$ et à plus forte raison plus petite que $\frac{\frac{1}{2}\mu^{\mu+\frac{1}{2}}}{m^{m+\frac{1}{2}}(\mu-m)^{\mu-m+\frac{1}{2}}}\left(\frac{S}{\mu}\right)^m\left(\frac{S-\mu}{\mu}\right)^{\mu-m}\cdot\frac{m}{m-S}$; car pour la plus grande valeur de $e^{\frac{1}{12\mu}}$, qui est $e^{\frac{1}{12}}$, le produit $\frac{2{,}50}{2{,}53^2}e^{\frac{1}{12\mu}}$ est encore plus petit que $\frac{1}{2}$. Donc on a suivant (2):

$$P_m < \frac{\frac{1}{2}\mu^{\mu+\frac{1}{2}}}{m^{m+\frac{1}{2}}(\mu-m)^{\mu-m+\frac{1}{2}}}\left(\frac{S}{\mu}\right)^m\left(\frac{\mu-S}{\mu}\right)^{\mu-m+1}\cdot\frac{m}{m-S},$$

ou, ce qui est le même:

$$P_m < \frac{1}{2(m-S)}\sqrt{\frac{m(\mu-m)}{\mu}}\left(\frac{S}{\mu}\right)^m\left(\frac{\mu-S}{\mu-m}\right)^{\mu-m+1}.$$

Cette inégalité offre le théorème suivant:

Théorème. „Si les chances de l'événement E dans μ épreuves consé-„cutives sont $p_1, p_2, p_3, \ldots. p_\mu$, et que leur somme est S, la valeur de l'expres-„sion $\frac{1}{2(m-S)}\sqrt{\frac{m(\mu-m)}{\mu}}\left(\frac{S}{\mu}\right)^m\left(\frac{\mu-S}{\mu-m}\right)^{\mu-m+1}$ pour un m plus grand que $S+1$, „surpasse toujours la probabilité que E arrivera au moins m fois dans ces „μ épreuves."

En changeant $m, p_1, p_2, p_3, \ldots. p_\mu, S$ en $\mu-n, 1-p_1, 1-p_2, 1-p_3, \ldots. 1-p_\mu, \mu-S$, il suit de ce théorème que si la somme $1-p_1 + 1-p_2 + 1-p_3 + \ldots. + 1-p_\mu$ est égale à $\mu-S$, la valeur de l'expression $\frac{1}{2(\mu-n)}\sqrt{\frac{n(\mu-n)}{\mu}}\left(\frac{\mu-S}{\mu-n}\right)^{\mu-n}\left(\frac{S}{n}\right)^{n+1}$ pour $\mu-n > \mu-S+1$ surpasse celle de la probabilité que l'événement contraire à E arrivera au moins $\mu-n$ fois dans μ épreuves, où $p_1, p_2, p_3, \ldots. p_\mu$ sont les chances de E. En observant que les conditions

$$1-p_1+1-p_2+1-p_3+\ldots.+1-p_\mu=S-\mu;\quad \mu-n>\mu-S+1$$

se reduisent à

$$p_1+p_2+p_3+\ldots.+p_\mu=S,\quad n<S-1,$$

et que l'événement contraire à E n'arrive pas moins que $\mu-n$ fois dans μ épreuves, si E ne se présente dans ces épreuves plus de n fois, nous arrivons au théorème suivant:

Théorème. „Si les chances de l'événement E dans μ épreuves consé-„cutives sont $p_1, p_2, p_3, \ldots. p_\mu$, et que leur somme est S_1, la valeur de l'ex-

„pression $\frac{1}{2(S-n)}\sqrt{\frac{n(\mu-n)}{m}}\left(\frac{\mu-S}{\mu-n}\right)^{\mu-n}\left(\frac{S}{n}\right)^{n+1}$, pour un n plus petit que $S-1$, sur- „passera toujours celle de la probabilité que E n'arrivera dans ces épreuves „plus de n fois.

§. 6. Mais la répétition de l'événement E ne peut présenter qu'un de ces trois cas: ou l'événement reviendra au moins m fois, ou pas plus de n fois, ou enfin plus que n fois et moins que m fois. Donc la probabilité du dernier cas sera déterminée par la différence de l'unité et des probabilités de deux premiers. Donc, en consequence des deux derniers théorèmes, résulte le suivant:

Théorème. „Si les chances de l'événement E dans μ épreuves consé- „cutives sont $p_1, p_2, p_3, \ldots p_\mu$, et que leur somme est S, la probabilité que „le nombre de répétitions de l'événement E dans ces μ épreuves sera moins „que m et plus grand que n, surpassera, pour un m plus grand que $S-1$ et pour un n plus petit que $S-1$, la valeur de l'expression

$$1-\frac{1}{2(m-S)}\sqrt{\frac{m(\mu-m)}{\mu}}\left(\frac{S}{m}\right)^m\left(\frac{\mu-S}{\mu-m}\right)^{\mu-m+1}-\frac{1}{2(S-n)}\sqrt{\frac{n(\mu-n}{\mu}}\left(\frac{\mu-S}{\mu-n}\right)^{\mu-n}\left(\frac{S}{n}\right)^{n+1}.$$

Pour déduire de ce théorème la proposition enoncée au commencement de la note, nous remarquons que le rapport du nombre des répétitions de l'événement E dans μ épreuves au nombre μ, n'atteint pas les limites $\frac{S}{\mu}+z$ et $\frac{S}{\mu}-z$, si E dans ces épreuves arrive moins que $S+\mu z$ fois et plus que $S-\mu z$ fois. Mais la probabilité que ceci a lieu, surpassera (d'après le dernier théorème) pour $z>\frac{1}{\mu}$, la valeur de l'expression

$$1-\frac{1}{2\mu z}\sqrt{\frac{(S+\mu z)(\mu-S-\mu z)}{\mu}}\left(\frac{S}{S+\mu z}\right)^{S+\mu z}\left(\frac{\mu-S}{\mu-S-\mu z}\right)^{\mu-S-\mu z+1}$$
$$-\frac{1}{2\mu z}\sqrt{\frac{(S-\mu z)(\mu-S+\mu z)}{\mu}}\left(\frac{\mu-S}{\mu-S+\mu z}\right)^{\mu-S+\mu z}\left(\frac{S}{S-\mu z}\right)^{S-\mu z+1},$$

qui peut être mise sous la forme

$$2.\quad 1-\frac{1-p}{2z\sqrt{\mu}}\sqrt{\frac{p+z}{1-p-z}}H^\mu-\frac{p}{2z\sqrt{\mu}}\sqrt{\frac{1-p+z}{p-z}}H_1^\mu.$$

Fésant pour abréger $\frac{S}{\mu}=p$ et

$$3.\quad \left(\frac{p}{p+z}\right)^{p+z}\left(\frac{1-p}{1-p-z}\right)^{1-p-z}=H;\quad \left(\frac{1-p}{1-p-z}\right)^{1-p+z}\left(\frac{p}{p-2}\right)^{p-z}=H_1,$$

les équations (3.) nous donneront pour les logarithmes naturels de H, H_1 les series suivantes:

$$-\frac{z^2}{2p}\left(1-\tfrac{1}{3}\frac{z}{p}\right)-\frac{z^4}{12p^3}\left(1-\tfrac{3}{5}\frac{z}{p}\right)-\ldots\ldots-\frac{z^2}{2(1-p)}-\frac{z^3}{6(1-p)^2}-\ldots\ldots \text{ et}$$

$$-\frac{z^2}{2p}-\frac{z^3}{6p^2}-\ldots\ldots-\frac{z^2}{2(1-p)}\left(1-\tfrac{1}{3}\frac{z}{1-p}\right)-\frac{z^4}{12(1-p)^2}\left(1-\tfrac{3}{5}\frac{z}{1-p}\right),$$

d'où il est clair que H, H_1 sont des valeurs plus petites que 1. Il suit delà que l'expression (2) s'approche indéfiniment de 1 par l'accroissement de μ, de manière qu'on rendra sa difference de 1 bien plus petite que Q, en prenant pour μ un nombre quelconque plus grand que

$$\frac{\lg\left[Q.\frac{z}{1-p}\sqrt{\frac{1-p-z}{p+z}}\right]}{\lg H} \quad \text{et} \quad \frac{\lg\left[Q.\frac{z}{p}\sqrt{\frac{p-z}{1-p+z}}\right]}{\lg H}.$$

Nous sommes dont parvenus à la demonstration rigoureuse de la proposition qui est l'objet de cette note.