10.

Über die Elimination der Variabeln aus drei algebraischen Gleichungen vom zweiten Grade mit zwei Variabeln.

(Von Herrn Dr. *Otto Hesse*, Privatdocenten an der Universität zu Königsberg.)

---

1) Wenn man aus zwei gegebenen vollständigen Gleichungen mit einer Variable vom $m$ten und $n$ten Grade diese Variable auf irgend eine Weise eliminirt, so erhält man eine Gleichung zwischen den Coëfficienten der gegebenen Gleichungen, welche erfüllt wird, sobald ein Werth der Variable den beiden gegebenen Gleichungen zugleich genügt. Wenn umgekehrt diese Gleichung zwischen den Coëfficienten erfüllt wird, so braucht nicht immer ein Werth der Variable zu existiren, der den beiden gegebenen Gleichungen zugleich genügt. Durch eine geschickt angestellte Elimination der Variable kann man aber eine Bedingungsgleichung zwischen den Coëfficienten der gegebenen Gleichungen finden, unter welcher jedesmal ein Werth der Variable existirt, welcher den gegebenen Gleichungen zugleich genügt, und die erfüllt wird, wenn ein Werth der Variable die beiden gegebenen Gleichungen zugleich erfüllt. Diese Gleichung, die in allen durch Elimination der Variable entstandenen Gleichungen als Factor enthalten ist, führt den Namen der Endgleichung, während die andern Factoren mit dem Namen der überflüssigen Factoren bezeichnet werden. Durch *Euler* (Mem. d. Berl Akad. an. 1748 und 1760) ist bekannt, dafs die Endgleichung homogen ist und in Rücksicht auf die Coëfficienten der Gleichung vom $m$ten Grade bis auf den $n$ten, in Rücksicht auf die Coëfficienten der Gleichung vom $n$ten Grade bis auf den $m$ten, endlich in Rücksicht auf alle Coëfficienten der gegebenen Gleichungen bis auf den $(m+n)$ten Grad steigt. Unter den bekannten Verfahrungsweisen, die Endgleichung zu bilden, verdient die Zurückführung der Aufgabe auf die Elimination der Unbekannten aus linearen Gleichungen, welche der Herr Professor *Richelot* als einer Entdeckung des Herrn *Sylvester* in dem 21ten Bande dieses Journals erwähnt, und welche ich ohne sie zu kennen im 27ten Bande wieder aufgenommen habe, unstreitig den Vorzug.

Für drei Gleichungen mit zwei Variabeln ist, soviel ich weifs, Ähnliches noch nicht geleistet worden. Ich werde daher im Folgenden die *Euler*sche Methode zu verallgemeinern suchen.

2) Es seien:

$$1.\quad f(x,y)=0, \qquad 2.\quad \varphi(x,y)=0, \qquad 3.\quad \psi(x,y)=0$$

drei vollständige Gleichungen zwischen den beiden Variabeln x und y, vom $m$ten, $n$ten und $p$ten Grade. Diesen Gleichungen wird man im Allgemeinen nicht durch *ein* Wurzelnpaar x und y genügen können, wenn nicht eine bestimmte Relation zwischen den Coëfficienten der gegebenen Gleichungen stattfindet, und wenn diese Relation stattfindet, wird man immer *ein* Wurzelnpaar finden, welches den gegebenen Gleichungen zu gleicher Zeit genügt. Um diese Relation zu finden, welche im Folgenden den Namen der Endgleichung führen wird, suche man die Bedingung zwischen den Coëfficienten der 3ten Gleichung, unter welcher ein Wurzelnpaar der beiden ersten Gleichungen der dritten Gleichung genügt.

Unter der Voraussetzung, dafs $m.n$ die Anzahl der Wurzelnpaare der beiden ersten Gleichungen ist, was *Euler* an dem genannten Orte bewiesen hat, ist die gesuchte Bedingung:

$$4.\quad \Psi=\psi(x_1,y_1).\psi(x_2,y_2)\,\ldots\ldots\,\psi(x_{m.n},\,y_{m.n})=0,$$

wenn man durch x_1, y_1; x_2, y_2; .... $x_{m.n}$, $y_{m.n}$ die Wurzelnpaare der ersten und zweiten Gleichung bezeichnet. Denn wenn ein Wurzelnpaar der beiden ersten Gleichungen zugleich der dritten genügt, so wird auch die Gleichung (4.) erfüllt; und umgekehrt, wenn die Gleichung (4.) erfüllt wird, so giebt es immer ein Wurzelnpaar der beiden ersten Gleichungen, welches der dritten Gleichung genügt. Entwickelt man den linken Theil der Gleichung (4.) nach Potenzen und Producten der Coëfficienten der dritten Gleichung, welche Entwicklung mit Ψ bezeichnet werden mag, so wird die Gleichung $\Psi=0$ in Rücksicht auf die Coëfficienten der dritten Gleichung homogen und vom Grade $m.n$ und die Coëfficienten dieser Potenzen und Producte werden bestimmte Functionen der Wurzeln der beiden ersten Gleichungen sein. Es bleibt also noch übrig, diese Functionen in der Entwicklung Ψ durch die Coëfficienten der beiden ersten Gleichungen auszudrücken, um die gesuchte, von jedem überflüssigen Factor freie Endgleichung zu erhalten.

3) Wenn man auf irgend eine Weise aus den drei gegeben Gleichungen die Variabeln eliminirt, so erhält man eine Gleichung

$$5.\quad P=0,$$

welche immer erfüllt wird, sobald ein Wurzelnpaar den drei gegebenen Gleichungen zugleich genügt. Den drei gegebenen Gleichungen wird aber durch ein Wurzelnpaar genügt, wenn die Gleichung (4.) erfüllt wird. Daraus folgt, dafs die Gleichung (5.) erfüllt wird, wenn die Gleichung (4.) erfüllt wird. Angenommen, dafs man die Gleichung (5.) gefunden habe, und dafs sie in Rücksicht auf die Coëfficienten der dritten Gleichung homogen und vom Grade $m.n$ sei. Da dieselbe für alle Werthe der Coëfficienten der dritten Gleichung erfüllt wird, welche der Gleichung (4.) genugthun, so folgt hieraus, dafs die Ausdrücke P und Ψ nur durch einen von den Coëfficienten der dritten Gleichung unabhängigen Factor von einander verschieden sein können. Bezeichnet man daher das in der Function ψ von den Variabeln x, y freie Glied mit c und den Coëfficienten $c^{m.n}$ in der Entwicklung der Function P mit γ, so wird man

$$6. \quad \frac{P}{\gamma} = \Psi$$

haben, woraus sich durch Gleichsetzung der Coëfficienten gleicher Potenzen und Producte der Coëfficienten der dritten Gleichung auf beiden Seiten der angeführten Gleichung die gesuchten Functionen der Wurzeln, ausgedrückt durch die Coëfficienten der beiden ersten Gleichungen, ergeben. Es kommt also darauf an, aus den drei gegebenen Gleichungen durch eine geschickt angestellte Elimination der Variabeln eine homogene Gleichung $P = 0$ vom mnten Grade in Rücksicht auf die Coëfficienten der dritten Gleichung abzuleiten. Man wird sogleich sehen, wie dies auszuführen sei, wenn die 3te Gleichung vom ersten Grade ist.

4) Es sei die gegebene dritte Gleichung

$$7. \quad \psi_\lambda(x, y) = a_\lambda x + b_\lambda y + c_\lambda = 0$$

lineär. Alsdann geht die Gleichung (4.) in

$$8. \quad \Psi_\lambda = (a_\lambda x_1 + b_\lambda y_1 + c_\lambda)(a_\lambda x_2 + b_\lambda y_2 + c_\lambda) \ldots (a_\lambda x_{m.n} + b_\lambda y_{m.n} + c_\lambda) = 0$$

über. Man eliminirt aber die Variable y aus den gegebenen drei Gleichungen, indem man aus der letzten den Werth

$$y = -\frac{a_\lambda x + c_\lambda}{b_\lambda}$$

in die beiden ersten setzt, wodurch man, wenn man mit b^m und b^n multiplicirt, folgende in Rücksicht auf a_λ, b_λ, c_λ homogene Gleichungen

$$9. \quad b_\lambda^m f\left(x_\lambda, -\frac{a_\lambda x + c_\lambda}{b_\lambda}\right) = 0, \qquad b_\lambda^n \varphi\left(x_\lambda, -\frac{a_\lambda x + c_\lambda}{b_\lambda}\right) = 0$$

erhält. Diese Gleichungen sind in Rücksicht auf a_λ, b_λ, c_λ respective vom $m$ten und vom $n$ten Grade, so wie auch in Rücksicht auf die Variable x.

Eliminirt man daher die noch übrig bleibende Variable x nach der bekannten Methode, so wird man eine Gleichung

$$10. \quad P_\lambda = 0$$

erhalten, welche in Rücksicht auf die Coëfficienten in f, φ, ψ_λ respective vom $n$ten, $m$ten und $m.n$ten, in Rücksicht auf die Coëfficienten in f und φ vom $m+n$ten und in Rücksicht auf alle Coëfficienten homogen und vom Grade $m+n+m.n$ ist. Bezeichnet man daher durch g den Coëfficienten von $c_\lambda^{m.n}$ in der Entwicklung des nach Potenzen und Producten der Gröfsen a_λ, b_λ, c_λ geordneten Ausdrucks P_λ, der in Rücksicht auf die Coëfficienten in f und φ vom $n$ten und vom $m$ten und in Rücksicht auf beiderlei Coëfficienten vom Grade $m+n$ ist, so erhält man:

$$11. \quad \frac{P_\lambda}{g} = \Psi_\lambda.$$

Entwickelt man beide Seiten der Gleichung nach Potenzen und Producten der Gröfsen a_λ, b_λ, c_λ und setzt die Coëfficienten gleicher Potenzen und Producte auf beiden Seiten der Gleichung einander gleich, so erhält man Functionen der Wurzeln der beiden ersten Gleichungen, welche sich in der Entwicklung Ψ der Gleichung (4.) wiederfinden, ausgedrückt durch die Coëfficienten jener beiden Gleichungen. Auf diese Weise kann man aber nur gewisse Functionen der Wurzeln, welche in der Entwicklung Ψ enthalten sind, durch die Coëfficienten der beiden ersten Gleichungen ausdrücken. Um alle jene Functionen der Wurzeln auszudrücken, nehme man statt der linearen Gleichung (7.) nach einander die linearen Gleichungen

$$\psi_1(x,y) = 0, \quad \psi_2(x,y) = 0, \quad \ldots \quad \psi_p(x,y) = 0,$$

welche aus jener entstehen, indem man für den Index λ nach einander die Indices $1, 2, \ldots p$ setzt, und bilde die ihnen entsprechenden Gleichungen (8. bis 11.), welche durch die entsprechenden Indices bezeichnet werden sollen. Endlich nehme man an, dafs die gegebene dritte Gleichung in die linearen Factoren $\psi_1(x,y)$, $\psi_2(x,y)$, $\ldots$ $\psi_p(x,y)$ zerfällbar sei.

5) Wenn die gegebene dritte Gleichung

$$12. \quad \psi_1(x,y).\psi_2(x,y)\ldots.\psi_p(x,y) = 0$$

ist, so geht die Gleichung (4.) in

$$13. \quad \Psi_1 \Psi_2 \ldots \Psi_p = 0$$

über, und wenn ein Wurzelpaar den Gleichungen (1.), (2.), (12.) zugleich genügt, so hat man

$$14. \quad P_1 P_2 \ldots P_p = 0.$$

Dennoch wird die Gleichung (14.) erfüllt für alle Werthe von a_1, b_2, c_1, a_2, b_2, ..., welche der Gleichung (13.) genügen. Es können daher die linken Theile derselben, welche in Rücksicht auf die genannten Gröfsen homogen und von demselben Grade sind, nur durch einen von a_1, b_1, ... unabhängigen Factor sich von einander unterscheiden. Bezeichnet man also durch Ψ_0 und P_0 die linken Theile jener Gleichungen, so hat man

$$15. \quad \frac{P_0}{g^p} = \Psi_0.$$

Entwickelt man beide Theile dieser Gleichung nach Potenzen und Producten der Gröfsen a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, ... und setzt die Coëfficienten gleicher Potenzen und Producte auf beiden Seiten der Gleichung einander gleich, so erhält man gerade die gesuchten Functionen der Wurzeln der beiden ersten Gleichungen, welche in der Entwicklung des linken Theils der Gleichung (4.) vorkommen, ausgedrückt durch die Coëfficienten der Gleichungen (1.) und (2.). Alle diese Ausdrücke haben den gemeinschaftlichen Nenner g^p, welcher in Rücksicht auf die Coëfficienten der ersten und zweiten Gleichung homogen und respective vom np und mpten, und überhaupt vom $(m+n)p$ten Grade ist. Da nun, wie man gesehen hat, die Coëfficienten der Entwicklung von P_λ nach Potenzen und Producten von a_λ, b_λ, c_λ in Rücksicht auf die Coëfficienten der ersten und zweiten Gleichung vom $n$ten und $m$ten Grade sind, so wird P_0 respective vom np und mpten und in Rücksicht auf alle Coëfficienten der ersten und zweiten Gleichung vom Grade $(m+n)p$ sein. Dasselbe gilt von den Zählern der Ausdrücke für die genannten Functionen der Wurzeln der ersten und zweiten Gleichung.

6) Die aus den gegebenen Gleichungen (1.), (2.), (3.) hervorgehende Endgleichung erhält man nun aus der entwickelten Gleichung (4.), wenn man darin die Ausdrücke der Functionen der Wurzeln der beiden ersten Gleichungen substituirt und mit dem gemeinsamen Nenner g^p derselben multiplicirt. Aus dieser Bildungsweise der Endgleichung ergiebt sich aber folgender

Lehrsatz 1.

Die durch Elimination zweier Variabeln aus drei algebraischen Gleichungen vom $m$ten, $n$ten und $p$ten Grade hervorgehende Endgleichung ist in Rücksicht auf alle Coëfficienten dieser Gleichungen homogen und vom Grade $mn+np+pm$, und in Rücksicht auf die Coëfficienten der einzelnen Gleichungen ebenfalls homogen und von den Graden mn, np, pm.

7) Obwohl die auseinandergesetzte Eliminationsmethode immer zum Ziele führt, so lassen sich die angewendeten Operationen wegen ihrer Unsymmetrie doch zu wenig verfolgen, als dafs man daraus die wahre Natur der Endgleichung mit Leichtigkeit erforschen könnte. Da die Endgleichung, selbst in dem Falle wo die gegebenen Gleichungen sämmtlich nur vom zweiten Grade sind, aus einer nicht übersehbaren Menge von Termen besteht, welche ***Bézout*** in seiner Theorie der algebraischen Gleichungen nicht ohne Mühe berechnet hat, so wird man es nicht versuchen, aus der Endgleichung selbst Nutzen zu ziehen, vielmehr symmetrische und leicht zu verfolgende Eliminationsmethoden sich schaffen müssen, die eine Einsicht in die Natur der Endgleichung gestatten. Für den Fall dreier Gleichungen vom zweiten Grade mit zwei Variabeln werde ich eine solche Methode entwickeln, und zugleich Folgerungen ziehen, die für die Theorie der Wendepuncte der Curven dritter Ordnung wichtig sind. Denn während die Bestimmung der Wendepuncte der Curven dritter Ordnung auf eine Gleichung vom 9ten Grade führt, bietet die genannte Eliminations-Methode die Mittel, diese Gleichung vom 9ten Grade durch eine vom 4ten und eine Gleichung vom 3ten Grade zu ersetzen. Von den geometrischen Eigenschaften der Curven dritter Ordnung, welche sich aus dieser Eliminations-Methode ergeben, führe ich vorläufig nur diese an: „Dafs die ***Wendepuncte*** aller Curven dritter Ordnung, von denen jede durch sämmtliche Wendepuncte einer und derselben Curve derselben Ordnung hindurchgeht, mit den ***Schnittpuncten*** zusammenfallen."

8) Wenn man durch f_1, f_2, f_3 drei gegebene homogene Functionen vom zweiten und durch φ und ψ zwei gegebene homogene Functionen vom dritten Grade der drei Variabeln x_1, x_2, x_3 bezeichnet, so kann man immer drei lineäre homogene Multiplicatoren $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, $A^{(3)}$ und einen constanten Multiplicator p so bestimmen, dafs

$$p\varphi + A^{(1)}f_1 + A^{(2)}f_2 + A^{(3)}f_3 = \psi$$

ist. Denn wenn man die Coëfficienten gleicher Potenzen und Producte der Variabeln auf beiden Seiten der entwickelten Gleichung einander gleich setzt, so erhält man 10 lineäre Gleichungen zwischen den 9 in $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, $A^{(3)}$ enthaltenen Constanten und der 10ten p. Bestimmt man daraus die unbekannten 10 Constanten, so stellen sich die Werthe derselben als Brüche dar, mit demselben Nenner R. Dieser Nenner ist unabhängig von den Coëfficienten der Variabeln in der Function ψ; er ist homogen und lineär in Rücksicht auf die Coëfficienten in φ; ferner ist er homogen und vom 3ten Grade, sowohl in Rücksicht auf die Coëfficienten in f_1, als in Rücksicht auf die Coëfficienten in f_2 und f_3; endlich ist er homogen und vom 10ten Grade in Rücksicht auf alle in f_1, f_2, f_3 und φ enthaltenen Coëfficienten. Was den Zähler des Werthes der Unbekannten p betrifft, so kann man die Bemerkung machen, dafs er unabhängig von den Coëfficienten in φ ist, homogen aber und vom ersten Grade in Rücksicht auf die Coëfficienten in ψ, homogen und vom dritten Grade sowohl in Rücksicht auf die Coëfficienten in f_1 als in f_2 und f_3; endlich homogen und vom 10ten Grade in Rücksicht auf alle in f_1, f_2, f_3, ψ enthaltenen Coëfficienten.

Die Nenner der unbekannten Coëfficienten lassen sich vermeiden, wenn man $R.\psi$ statt ψ setzt, wodurch die in Rede stehende Gleichung in

$$16. \quad p\varphi + A^{(1)}f_1 + A^{(2)}f_2 + A^{(3)}f_3 = R.\psi$$

übergeht. Denn bestimmt man in der angegebenen Weise die unbekannten Coëfficienten in dieser Gleichung, so werden dieselben gleich den Zählern der unbekannten Coëfficienten in der vorhergehenden Gleichung, und folglich zu ganzen Functionen der in f_1, f_2, f_3, φ und ψ enthaltenen Coëfficienten.

Da die Gröfse R unabhängig von den Coëfficienten in ψ ist, so wird sich dieselbe auch nicht ändern, wenn man für ψ das Product $x_\varkappa . x_\lambda . x_\mu$ setzt, wo $\varkappa$, λ, μ irgend welche gleiche oder ungleiche unter den Zahlen 1, 2, 3 bedeuten. Die andern Multiplicatoren werden sich aber ändern und mögen durch $p_{\varkappa,\lambda,\mu}$, $A^{(1)}_{\varkappa,\lambda,\mu}$, $A^{(2)}_{\varkappa,\lambda,\mu}$, $A^{(3)}_{\varkappa,\lambda,\mu}$ bezeichnet werden, wobei angenommen werden soll, dafs die verschiedenen Zeichen, welche aus den angegebenen durch Permutation der unteren Indices unter einander entstehen, immer für dieselbe Gröfse gelten, so dafs z. B.

$$p_{\varkappa,\lambda,\mu} = p_{\varkappa,\mu,\lambda} = p_{\lambda,\varkappa,\mu} = \dots$$

ist. Dasselbe soll auch künftig für alle ähnlichen Bezeichnungen gelten.

Demnach hat man

$$17. \quad p_{\varkappa,\lambda,\mu}\varphi + A^{(1)}_{\varkappa,\lambda,\mu} f_1 + A^{(2)}_{\varkappa,\lambda,\mu} f_2 + A^{(3)}_{\varkappa,\lambda,\mu} f_3 = R x_\varkappa x_\lambda x_\mu,$$

woraus sich, wenn man für $\varkappa$, λ, μ alle Combinationen der Zahlen 1, 2, 3 mit Wiederholung setzt, 10 verschiedene Gleichungen ergeben. Die Gleichung (17.) stellt also ein System von 10 Gleichungen mit 30 Multiplicatoren A und 10 Multiplicatoren p dar. Nimmt man nun an, dafs die gegebene Function ψ

$$= c_{1,1,1}x_1x_1x_1 + c_{2,2,2}x_2x_2x_2 + c_{3,3,3}x_3x_3x_3 + 3c_{1,1,2}x_1x_1x_2 + 3c_{1,1,3}x_1x_1x_3$$
$$+ 3c_{2,2,1}x_2x_2x_1 + 3c_{2,2,3}x_2x_2x_3 + 3c_{3,3,1}x_3x_3x_1 + 3c_{3,3,2}x_3x_3x_2 + 6c_{1,2,3}x_1x_2x_3$$

sei, welcher Ausdruck kürzer durch $\Sigma c_{\varkappa,\lambda,\mu} x_\varkappa x_\lambda x_\mu$ bezeichnet werden kann, da man aus dem Gliede $c_{\varkappa,\lambda,\mu} x_\varkappa x_\lambda x_\mu$ die ganze Summe erhält, wenn man für $\varkappa$, λ, μ

nach einander die Combinationen der Zahlen 1, 2, 3 mit Wiederholung und ihre Permutationen setzt und addirt, auch wie oben annimmt, dafs $c_{\varkappa,\lambda,\mu} = c_{\varkappa,\mu,\lambda} = \ldots$ sei: so kann man die Multiplicatoren in der Gleichung (16.) durch die 40 Multiplicatoren in dem Systeme von Gleichungen (17.) auf folgende Art ausdrücken:

$$18. \quad \begin{cases} p = \Sigma c_{\varkappa,\lambda,\mu}\,.\,p_{\varkappa,\lambda,\mu}, & A^{(2)} = \Sigma c_{\varkappa,\lambda,\mu}\,.\,A^{(2)}_{\varkappa,\lambda,\mu}, \\ A^{(1)} = \Sigma c_{\varkappa,\lambda,\mu}\,.\,A^{(1)}_{\varkappa,\lambda,\mu}, & A^{(3)} = \Sigma c_{\varkappa,\lambda,\mu}\,.\,A^{(3)}_{\varkappa,\lambda,\mu}. \end{cases}$$

9) Es bleiben noch die 40 Multiplicatoren des durch (17.) dargestellten Systems von Gleichungen zu bestimmen übrig. Da hierzu die Kenntnifs der gegebenen Functionen erforderlich ist, so nehme man an, es sei

$$19. \quad \begin{cases} f_1 = \Sigma a^{(1)}_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa x_\lambda, \quad f_2 = \Sigma a^{(2)}_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa x_\lambda, \quad f_3 = \Sigma a^{(3)}_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa x_\lambda, \\ \varphi = \Sigma b_{\varkappa,\lambda,\mu} x_\varkappa x_\lambda x_\mu, \end{cases}$$

wo $a^{(\mu)}_{\varkappa,\lambda} = a^{\mu}_{\lambda,\varkappa}$ und für $\varkappa$, λ die Combinationen der Zahlen 1, 2, 3 zu zweien mit Wiederholung und ihre Permutationen zu setzen sind. Multiplicirt man nun die Gleichung (17.) mit dem unbestimmten Factor $\pi_{\varkappa,\lambda,\mu}$ und bildet ein System von Gleichungen, indem man für $\varkappa$, λ, μ alle Combinationen der Zahlen 1, 2, 3 mit Wiederholung und die Permutationen derselben setzt, so erhält man durch Addition:

$$20. \quad \varphi \Sigma p_{\varkappa,\lambda,\mu}\pi_{\varkappa,\lambda,\mu} + f_1 \Sigma A^{(1)}_{\varkappa,\lambda,\mu}\pi_{\varkappa,\lambda,\mu} + f_2 \Sigma A^{(2)}_{\varkappa,\lambda,\mu}\pi_{\varkappa,\lambda,\mu} + f_3 \Sigma A^{(3)}_{\varkappa,\lambda,\mu}\pi_{\varkappa,\lambda,\mu} = R\,\Sigma \pi_{\varkappa,\lambda,\mu} x_\varkappa x_\lambda x_\mu.$$

Die 10 unbestimmten Factoren π lassen sich aber so bestimmen, dafs den drei Gleichungen

$$\Sigma A^{(1)}_{\varkappa,\lambda,\mu}\pi_{\varkappa,\lambda,\mu} = 0; \quad \Sigma A^{(2)}_{\varkappa,\lambda,\mu}\pi_{\varkappa,\lambda,\mu} = 0; \quad \Sigma A^{(3)}_{\varkappa,\lambda,\mu}\pi_{\varkappa,\lambda,\mu} = 0$$

Genüge geschieht, worauf die Gleichung (20.) in

$$\varphi \Sigma p_{\varkappa,\lambda,\mu}\pi_{\varkappa,\lambda,\mu} = R\Sigma \pi_{\varkappa,\lambda,\mu} x_\varkappa x_\lambda x_\mu$$

übergeht. Jede der drei ersten Gleichungen zerfällt, da die Gröfsen A lineäre und homogene Functionen der Variabeln sind, von welchen die Bestimmung der Factoren π unabhängig sein mufs, in drei andere, so dafs man zur Bestimmung der 10 Factoren π nur 9 Gleichungen hat. Bemerkt man nun, dafs die letzte Gleichung unabhängig von den besondern Werthen der Variabeln stattfindet, so folgt hieraus, dafs die Gröfsen b den entsprechenden Gröfsen π proportional sind. Setzt man daher einen der Factoren π, z. B. $\pi_{1,1,1}$, der willkürlich bestimmt werden kann, gleich $b_{1,1,1}$, so werden auch die übrigen Gröfsen π den mit gleichen Indices behafteten Gröfsen b gleich sein. Dieses vorausgesetzt, so folgt aus der letzten Gleichung und den drei vorhergehenden:

$$21.\quad \begin{cases} R = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,\mu}\, b_{\varkappa,\lambda,\mu}, \\ \Sigma A^{(1)}_{\varkappa,\lambda,\mu}\, b_{\varkappa,\lambda,\mu} = 0, \quad \Sigma A^{(2)}_{\varkappa,\lambda,\mu}\, b_{\varkappa,\lambda,\mu} = 0, \quad \Sigma A^{(3)}_{\varkappa,\lambda,\mu}\, b_{\varkappa,\lambda,\mu} = 0. \end{cases}$$

Man kann die 10 Factoren π aber auch bestimmen, indem man mit ν irgend eine der Zahlen 1, 2, 3 bezeichnet, nemlich aus den Gleichungen

$$\Sigma p_{\varkappa,\lambda,\mu}\,\pi_{\varkappa,\lambda,\mu} = 0, \qquad \Sigma A^{(1)}_{\varkappa,\lambda,\mu}\,\pi_{\varkappa,\lambda,\mu} = R x_\nu,$$
$$\Sigma A^{(2)}_{\varkappa,\lambda,\mu}\,\pi_{\varkappa,\lambda,\mu} = 0, \qquad \Sigma A^{(3)}_{\varkappa,\lambda,\mu}\,\pi_{\varkappa,\lambda,\mu} = 0,$$

von denen jede, mit Ausnahme der ersten, in drei andere zerfällt. Mit Rücksicht auf diese Gleichungen geht die Gleichung (20.) in

$$f_1 R x_\nu = R\,\Sigma \pi_{\varkappa,\lambda,\mu}\, x_\varkappa x_\lambda x_\mu \quad \text{oder in} \quad f_1 x_\nu = \Sigma \pi_{\varkappa,\lambda,\mu}\, x_\varkappa x_\lambda x_\mu$$

über, woraus man durch Gleichsetzung der Coëfficienten gleicher Potenzen und Producte der Variabeln auf beiden Seiten der Gleichung die gesuchten Werthe der Factoren π erhält. Setzt man diese Werthe der Factoren π in die obigen 4 Gleichungen, so erhält man

$$22.\quad \begin{cases} \Sigma p_{\varkappa,\lambda,\nu}\, a^{(1)}_{\varkappa,\lambda} = 0, \\ \Sigma A^{(1)}_{\varkappa,\lambda,\nu}\, a^{(1)}_{\varkappa,\lambda} = R x_\nu, \quad \Sigma A^{(2)}_{\varkappa,\lambda,\nu}\, a^{(1)}_{\varkappa,\lambda} = 0, \quad \Sigma A^{(3)}_{\varkappa,\lambda,\nu}\, a^{(1)}_{\varkappa,\lambda} = 0; \end{cases}$$

wobei zu beachten ist, dafs die Summenzeichen sich nur auf die verschiedenen Werthe der Indices $\varkappa$, λ, für welche man die Combinationen der Zahlen 1, 2, 3 zu zweien mit Wiederholung und deren Permutationen zu setzen hat, aber nicht auf die verschiedenen Werthe von ν beziehen; welches auch für die folgenden Gleichungen (23.) und (24.) gilt.

Aus den Gleichungen (22.) erhält man ein neues System, wenn man für die oberen Indices (1.), (2.), (3.) respective (2.), (3.), (1.) setzt, nemlich:

$$23.\quad \begin{cases} \Sigma p_{\varkappa,\lambda,\nu}\, a^{(2)}_{\varkappa,\lambda} = 0, \\ \Sigma A^{(1)}_{\varkappa,\lambda,\nu}\, a^{(2)}_{\varkappa,\lambda} = 0, \quad \Sigma A^{(2)}_{\varkappa,\lambda,\nu}\, a^{(2)}_{\varkappa,\lambda} = R x_\nu, \quad \Sigma A^{(3)}_{\varkappa,\lambda,\nu}\, a^{(2)}_{\varkappa,\lambda} = 0; \end{cases}$$

woraus endlich durch dieselbe Veränderung der oberen Indices folgende Gleichungen entstehen:

$$24.\quad \begin{cases} \Sigma p_{\varkappa,\lambda,\mu}\, a^{(3)}_{\varkappa,\lambda} = 0, \\ \Sigma A^{(1)}_{\varkappa,\lambda,\nu}\, a^{(3)}_{\varkappa,\lambda} = 0, \quad \Sigma A^{(2)}_{\varkappa,\lambda,\nu}\, a^{(2)}_{\varkappa,\lambda} = 0, \quad \Sigma A^{(3)}_{\varkappa,\lambda,\nu}\, a^{(3)}_{\varkappa,\lambda} = R x_\nu; \end{cases}$$

welche beiden Systeme auf gleiche Weise wie das System (22.) aus (20.) hätten abgeleitet werden können.

Die Gleichungen (21. bis 24.) enthalten alle Elemente zur Bestimmung der 40 Multiplicatoren p und A, welche in dem durch (17.) dargestellten Systeme enthalten sind. Denn da aus jeder der Gleichungen (22. bis 24.)

drei hervorgehen, indem man für ν nacheinander die Zahlen 1, 2, 3 setzt, so hat man, wenn man die Gleichungen (21.) hinzurechnet, im Ganzen 40 Gleichungen, in welche die zu bestimmenden Multiplicatoren auf lineäre Weise eingehen.

10) Da von den 40 Multiplicatoren p und A nur die 10 Multiplicatoren p in der folgenden Untersuchung eine Rolle spielen, so genügt es, die Gleichungen zusammenzustellen, deren Auflösung die Werthe dieser Multiplicatoren giebt. Sie sind folgende:

$$(25.)\qquad R = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,\mu}.b_{\varkappa,\lambda,\mu};$$

$$26.\quad \begin{cases} 0 = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,1} a^{(1)}_{\varkappa,\lambda}; & 0 = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,1} a^{(2)}_{\varkappa,\lambda}; & 0 = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,1} a^{(3)}_{\varkappa,\lambda}; \\ 0 = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,2} a^{(1)}_{\varkappa,\lambda}; & 0 = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,2} a^{(2)}_{\varkappa,\lambda}; & 0 = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,2} a^{(3)}_{\varkappa,\lambda}; \\ 0 = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,3} a^{(1)}_{\varkappa,\lambda}; & 0 = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,3} a^{(2)}_{\varkappa,\lambda}; & 0 = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,3} a^{(3)}_{\varkappa,\lambda}; \end{cases}$$

woraus sich R als die Determinante der Coëfficienten der Gröfsen p ergiebt.

Nimmt man an, dafs die Functionen f_1, f_2, f_3 für die Werthe der Variabeln $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = 1$ verschwinden, dafs also die drei Gleichungen $f_1(x, y, 1) = 0$, $f_2(x, y, 1) = 0$, $f_3(x, y, 1) = 0$ stattfinden, so geht die Gleichung (27.) in

$$p_{\varkappa,\lambda,\mu}\varphi = R x_\varkappa x_\lambda x_\mu$$

über, woraus für die genannten Werthe der Variabeln die Proportion

$$x_1 x_1 x_1 : x_2 x_2 x_2 : x_3 x_3 x_3 : x_1 x_1 x_2 : \ldots : x_1 x_2 x_3 =$$
$$p_{1,1,1} : p_{2,2,2} : p_{3,3,3} : p_{1,1,2} : \ldots : p_{1,2,3}$$

folgt. In der That sind auch die Verhältnisse der Gröfsen p von der Function φ unabhängig; was schon in No. 8. bemerkt wurde und auch aus der Gleichung (26.) zu entnehmen ist. Beiläufig mag bemerkt werden, dafs die Verhältnisse der Gröfsen p unbestimmt werden müssen, wenn den drei Gleichungen noch ein zweites Werthenpaar x, y genügt. Nimmt man ferner an, dafs φ eine Function sei, welche für die Werthe $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = 1$ ebenfalls verschwindet, so mufs auch R verschwinden. Es wird also unter dieser Annahme $R = 0$ zu dem Resultat der Elimination der Variabeln x, y aus den drei Gleichungen $f_1(x, y, 1) = 0$, $f_2(x, y, 1) = 0$, $f_3(x, y, 1) = 0$. Demnach ist es für die Elimination der Variabeln aus drei gegebenen Gleichungen vom zweiten Grade wichtig, eine passende Function vom dritten Grade zu haben, welche für dasjenige Werthenpaar verschwindet, so den drei gegebenen Gleichungen genügt. Eine solche Function soll in der folgenden Nummer näher untersucht werden.

11) Die drei Functionen f_1, f_2, f_3 kann man, wenn man der Kürze wegen $u^{(\lambda)}_\varkappa$ statt $\frac{df}{dx_\lambda}$ setzt, weil sie homogen und vom zweiten Grade sind,

so darstellen:

$$27.\quad \begin{cases} x_1 u_1^{(1)} + x_2 u_1^{(2)} + x_3 u_1^{(3)} = 2f_1, \\ x_1 u_2^{(1)} + x_2 u_2^{(2)} + x_3 u_2^{(3)} = 2f_2, \\ x_1 u_3^{(1)} + x_2 u_3^{(2)} + x_3 u_3^{(3)} = 2f_3. \end{cases}$$

Betrachtet man die in diesen Gleichungen explicite und lineär vorkommenden Variabeln x_1, x_2, x_3 als die Unbekannten und löset die Gleichungen nach ihnen auf, so stellen sich die Werthe derselben als Brüche dar, mit gleichen Nennern. Dieser gemeinschaftliche Nenner, der mit dem Namen der *Determinante* der Functionen f_1, f_2, f_3 bezeichnet zu werden pflegt, und welcher in dem vorliegenden Falle in Rücksicht auf die in ihm enthaltenen Variabeln vom dritten Grade ist, soll von jetzt an mit dem Zeichen φ bezeichnet werden, unter welchem Zeichen bis dahin eine beliebige Function vom dritten Grade zwischen den Variabeln x_1, x_2, x_3 verstanden wurde. Dieses vorausgesetzt, ist:

$$28.\quad \varphi = u_1^{(1)}\{u_2^{(2)}u_3^{(3)} - u_2^{(3)}u_3^{(2)}\} + u_2^{(1)}\{u_3^{(2)}u_1^{(3)} - u_3^{(3)}u_1^{(2)}\} + u_3^{(1)}\{u_1^{(2)}u_2^{(3)} - u_1^{(3)}u_2^{(2)}\}$$

und wenn man auf die angegebene Art die Gleichungen (27.) auflöset, so erhält man:

$$29.\quad \begin{cases} x_1\varphi = 2f_1\{u_2^{(2)}u_3^{(3)} - u_2^{(3)}u_3^{(2)}\} + 2f_2\{u_3^{(2)}u_1^{(3)} - u_3^{(3)}u_1^{(2)}\} + 2f_3\{u_1^{(2)}u_2^{(3)} - u_1^{(2)}u_2^{(3)}\}, \\ x_2\varphi = 2f_1\{u_2^{(3)}u_3^{(1)} - u_2^{(1)}u_3^{(3)}\} + 2f_2\{u_3^{(3)}u_1^{(1)} - u_3^{(1)}u_1^{(3)}\} + 2f_3\{u_1^{(3)}u_2^{(1)} - u_1^{(1)}u_2^{(3)}\}, \\ x_3\varphi = 2f_1\{u_2^{(1)}u_3^{(2)} - u_2^{(2)}u_3^{(1)}\} + 2f_2\{u_3^{(1)}u_1^{(2)} - u_3^{(2)}u_1^{(1)}\} + 2f_3\{u_1^{(1)}u_2^{(2)} - u_1^{(2)}u_2^{(1)}\}; \end{cases}$$

woraus folgt:

Lehrsatz 2.

Wenn drei homogene Functionen zweiten Grades von drei Variabeln für ein System von Werthen dieser Variabeln verschwinden, so verschwindet auch die Determinante dieser Functionen für dasselbe System von Werthen.

Dieser Lehrsatz gilt nicht allein für drei homogene Functionen vom 2ten Grade von 3 Variabeln, sondern auch für eine beliebige Zahl von homogenen Functionen irgend welcher Grade mit einer gleichen Zahl Variabeln.

Durch partielle Differentiation der ersten Gleichung (29.) nach den Variablen x_1 oder x_2 erhält man, wenn man der Kürze wegen durch φ_λ die Differentiation der Determinante φ, nach x_λ genommen, andeutet:

$$x_1\varphi_1 + \varphi =$$
$$2[u_1^{(1)}\{u_2^{(2)}u_3^{(3)} - u_2^{(3)}u_3^{(2)}\} + u_2^{(1)}\{u_3^{(2)}u_1^{(3)} - u_3^{(3)}u_1^{(2)}\} + u_3^{(1)}\{u_1^{(2)}u_2^{(3)} - u_1^{(3)}u_2^{(2)}\}]$$
$$+ 2f_1\frac{d}{dx_1}\{u_2^{(2)}u_3^{(3)} - u_2^{(3)}u_3^{(2)}\} + 2f_2\frac{d}{dx_1}\{u_3^{(2)}u_1^{(3)} - u_3^{(3)}u_1^{(2)}\} + 2f_3\{u_1^{(2)}u_2^{(3)} - u_1^{(3)}u_2^{(2)}\},$$

$$x_1\varphi_2 =$$
$$2\,[u_1^{(2)}\{u_2^{(2)}u_3^{(3)}-u_2^{(3)}u_3^{(2)}\}+u_2^{(2)}\{u_3^{(2)}u_1^{(3)}-u_3^{(3)}u_1^{(2)}\}+u_3^{(2)}\{u_1^{(2)}u_2^{(3)}-u_1^{(3)}u_2^{(2)}\}]$$
$$+2f_1\frac{d}{dx_2}\{u_2^{(2)}u_3^{(3)}-u_2^{(3)}u_3^{(2)}\}+2f_2\frac{d}{dx_2}\{u_3^{(2)}u_1^{(3)}-u_3^{(3)}u_1^{(2)}\}+2f_3\frac{d}{dx_3}\{u_1^{(2)}u_2^{(3)}-u_1^{(3)}u_2^{(2)}\}.$$

Es ist leicht zu bemerken, dafs in der ersten Gleichung der erste Theil rechts vom Gleichheitszeichen nach (28.) gleich 2φ ist, und dafs in der zweiten Gleichung der entsprechende Theil von selbst verschwindet. Berücksichtigt man dieses, so stellen sich die differenziirten Gleichungen (29.) wie folgt dar:

$$
30.\quad \left\{
\begin{aligned}
x_1\varphi_1-\varphi &= 2f_1\frac{d}{dx_1}\{u_2^{(2)}u_3^{(3)}-u_2^{(3)}u_3^{(2)}\}+2f_2\frac{d}{dx_1}\{u_3^{(2)}u_1^{(3)}-u_3^{(3)}u_1^{(2)}\}\\
&\qquad +2f_3\frac{d}{dx_1}\{u_1^{(2)}u_2^{(3)}-u_1^{(3)}u_2^{(2)}\},\\
x_1\varphi_2 &= 2f_1\frac{d}{dx_2}\{u_2^{(2)}u_3^{(3)}-u_2^{(3)}u_3^{(2)}\}+2f_2\frac{d}{dx_2}\{u_3^{(2)}u_1^{(3)}-u_3^{(3)}u_1^{(2)}\}\\
&\qquad +2f_3\frac{d}{dx_2}\{u_1^{(2)}u_2^{(3)}-u_1^{(3)}u_2^{(2)}\},\\
x_1\varphi_3 &= 2f_1\frac{d}{dx_3}\{u_2^{(2)}u_3^{(3)}-u_2^{(3)}u_3^{(2)}\}+2f_2\frac{d}{dx_3}\{u_3^{(2)}u_1^{(3)}-u_3^{(3)}u_1^{(2)}\}\\
&\qquad +2f_3\frac{d}{dx_3}\{u_1^{(2)}u_2^{(3)}-u_1^{(3)}u_2^{(2)}\},\\
x_2\varphi_1 &= 2f_1\frac{d}{dx_1}\{u_2^{(3)}u_3^{(1)}-u_2^{(1)}u_3^{(3)}\}+2f_2\frac{d}{dx_1}\{u_3^{(3)}u_1^{(1)}-u_3^{(1)}u_1^{(3)}\}\\
&\qquad +2f_3\frac{d}{dx_1}\{u_1^{(3)}u_2^{(1)}-u_1^{(1)}u_2^{(3)}\},\\
x_2\varphi_2-\varphi &= 2f_1\frac{d}{dx_2}\{u_2^{(3)}u_3^{(1)}-u_2^{(1)}u_3^{(3)}\}+2f_2\frac{d}{dx_2}\{u_3^{(3)}u_1^{(1)}-u_3^{(1)}u_1^{(3)}\}\\
&\qquad +2f_3\frac{d}{dx_2}\{u_1^{(3)}u_2^{(1)}-u_1^{(1)}u_2^{(3)}\},\\
x_2\varphi_3 &= 2f_1\frac{d}{dx_3}\{u_2^{(3)}u_3^{(1)}-u_2^{(1)}u_3^{(3)}\}+2f_2\frac{d}{dx_3}\{u_3^{(3)}u_1^{(1)}-u_3^{(1)}u_1^{(3)}\}\\
&\qquad +2f_3\frac{d}{dx_3}\{u_1^{(3)}u_2^{(1)}-u_1^{(1)}u_2^{(3)}\},\\
x_3\varphi_1 &= 2f_1\frac{d}{dx_1}\{u_2^{(1)}u_3^{(2)}-u_2^{(2)}u_3^{(1)}\}+2f_2\frac{d}{dx_1}\{u_3^{(1)}u_1^{(2)}-u_3^{(2)}u_1^{(1)}\}\\
&\qquad +2f_3\frac{d}{dx_1}\{u_1^{(1)}u_2^{(2)}-u_1^{(2)}u_2^{(1)}\},\\
x_3\varphi_2 &= 2f_1\frac{d}{dx_2}\{u_2^{(1)}u_3^{(2)}-u_2^{(2)}u_3^{(1)}\}+2f_2\frac{d}{dx_2}\{u_3^{(1)}u_1^{(2)}-u_3^{(2)}u_1^{(1)}\}\\
&\qquad +2f_3\frac{d}{dx_2}\{u_1^{(1)}u_2^{(2)}-u_1^{(2)}u_2^{(1)}\},\\
x_3\varphi_3-\varphi &= 2f_1\frac{d}{dx_3}\{u_2^{(1)}u_3^{(2)}-u_2^{(2)}u_3^{(1)}\}+2f_2\frac{d}{dx_3}\{u_3^{(1)}u_1^{(2)}-u_3^{(2)}u_1^{(1)}\}\\
&\qquad +2f_3\frac{d}{dx_3}\{u_1^{(1)}u_2^{(2)}-u_1^{(2)}u_2^{(1)}\}.
\end{aligned}
\right.
$$

Diese Gleichungen geben folgenden

Lehrsatz 3.

Wenn drei homogene Functionen zweiten Grades von drei Variabeln für ein System von Werthen dieser Variabeln verschwinden, so verschwinden auch die partiellen Differentialquotienten der Determinante dieser Functionen, nach den Variabeln genommen, für dasselbe System von Werthen.

Dieser Lehrsatz gilt allgemein für eine beliebige Zahl homogener Functionen mit einer gleichen Zahl von Variabeln, wenn die Functionen sämmtlich von einem und demselben Grade sind.

12) Die Coëfficienten der Entwicklung der Determinante φ nach den Potenzen und Producten der Variabeln wollen wir mit $b_{\varkappa,\lambda,\mu}$, in der Art bezeichnen, wie es in (19.) geschehen ist. Dieses vorausgesetzt, so ist die Bemerkung zu machen, ***dafs φ in R übergeht, wenn man φ nach Poten und Producten der Variabeln entwickelt und für jedes Product $x_\varkappa x_\lambda$ der Entwicklung $p_{\varkappa,\lambda,\mu}$*** setzt. Dieses lehrt die Gleichung (25.). Zweitens bemerke man, ***dafs, wenn man irgend eine der Functionen f_1, f_2 einer der Variabeln x_1, x_2, x_3 multiplicirt, nach Potenzen und Producten der Variabeln entwickelt, und $p_{\varkappa,\lambda,\mu}$ für jedes Product $x_\varkappa$ setzt, der dadurch erhaltene Ausdruck verschwindet.*** Dieses ergiebt sich aus der Ansicht der Gleichungen (26.).

Entwickelt man nun die identischen Gleichungen (30.) nach Potenzen und Producten der Variabeln und setzt für jedes Product $x_\varkappa x_\lambda x_\mu$ das entsprechende $p_{\varkappa,\lambda,\mu}$, so verschwinden, nach der zweiten Bemerkung, die Glieder rechts von den Gleichheitszeichen und man erhält:

$$31.\quad \begin{cases} \tfrac{1}{3}R = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,1} b_{\varkappa,\lambda,1}; & 0 = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,1} b_{\varkappa,\lambda,2}; & 0 = p_{\varkappa,\lambda,1} b_{\varkappa,\lambda,3}; \\ 0 = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,2} b_{\varkappa,\lambda,1}; & \tfrac{1}{3}R = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,2} b_{\varkappa,\lambda,2}; & 0 = p_{\varkappa,\lambda,2} b_{\varkappa,\lambda,3}; \\ 0 = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,3} b_{\varkappa,\lambda,1}; & 0 = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,3} b_{\varkappa,\lambda,2}; & \tfrac{1}{3}R = p_{\varkappa,\lambda,3} b_{\varkappa,\lambda,3}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen beweisen, ***dafs die Ausdrücke φ; $x_1\varphi_1$; $x_2\varphi_2$; $x_3\varphi_3$ in R übergehen, wenn man nach Potenzen und Producten der Variabeln entwickelt und für jedes Product $x_\varkappa x_\lambda x_\mu$ der Entwicklung $p_{\varkappa,\lambda,\mu}$ setzt; und dafs die 6 Ausdrücke $x_2\varphi_1$, $x_3\varphi_1$, $x_3\varphi_2$, $x_1\varphi_2$, $x_1\varphi_3$ und $x_2\varphi_3$ durch dieselbe Operation verschwinden.***

Von diesen Gleichungen, so wie von den Gleichungen (26.), wird im Folgenden häufig Gebrauch gemacht werden.

13) Es sind durch $f_1, f_2, f_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ im Vorhergehenden folgende Ausdrücke bezeichnet worden:

$$
32.\quad \begin{cases}
f_1 = a^{(1)}_{1,1}x_1x_1 + a^{(1)}_{2,2}x_2x_2 + a^{(1)}_{3,3}x_3x_3 + 2a^{(1)}_{2,3}x_2x_3 + 2a^{(1)}_{3,1}x_3x_1 + 2a^{(1)}_{1,2}x_1x_2, \\
f_2 = a^{(2)}_{1,1}x_1x_1 + a^{(2)}_{2,2}x_2x_2 + a^{(2)}_{3,3}x_3x_3 + 2a^{(2)}_{2,3}x_2x_3 + 2a^{(2)}_{3,1}x_3x_1 + 2a^{(2)}_{1,2}x_1x_2, \\
f_3 = a^{(3)}_{1,1}x_1x_1 + a^{(3)}_{2,2}x_2x_2 + a^{(3)}_{3,3}x_3x_3 + 2a^{(3)}_{2,3}x_2x_3 + 2a^{(3)}_{3,1}x_3x_1 + 2a^{(3)}_{1,2}x_1x_2, \\
\tfrac{1}{3}\varphi_1 = b_{1,1,1}x_1x_1 + b_{2,2,1}x_2x_2 + b_{3,3,1}x_3x_3 + 2b_{2,3,1}x_2x_3 + 2b_{3,1,1}x_3x_1 + 2b_{1,2,1}x_1x_2, \\
\tfrac{1}{3}\varphi_2 = b_{1,1,2}x_1x_1 + b_{2,2,2}x_2x_2 + b_{3,3,2}x_3x_3 + 2b_{2,3,2}x_2x_3 + 2b_{3,1,2}x_3x_1 + 2b_{1,2,2}x_1x_2, \\
\tfrac{1}{3}\varphi_3 = b_{1,1,3}x_1x_1 + b_{2,2,3}x_2x_2 + b_{3,3,3}x_3x_3 + 2b_{2,3,3}x_2x_3 + 2b_{3,1,3}x_3x_1 + 2b_{1,2,3}x_1x_2.
\end{cases}
$$

Betrachtet man in diesen Gleichungen die 6 Producte x_1x_1, x_2x_2, … … x_1x_2 als 6 Unbekannte, so erhält man durch Auflösung der Gleichungen nach diesen Unbekannten:

$$
33.\quad \begin{cases}
Rx_1x_1 = q^{(1)}_{1,1}f_1 + q^{(2)}_{1,1}f_2 + q^{(3)}_{1,1}f_3 + p_{1,1,1}\varphi_1 + p_{1,1,2}\varphi_2 + p_{1,1,3}\varphi_3, \\
Rx_2x_2 = q^{(1)}_{2,2}f_1 + q^{(2)}_{2,2}f_2 + q^{(3)}_{2,2}f_3 + p_{2,2,1}\varphi_1 + p_{2,2,2}\varphi_2 + p_{2,2,3}\varphi_3, \\
Rx_3x_3 = q^{(1)}_{3,3}f_1 + q^{(2)}_{3,3}f_2 + q^{(3)}_{3,3}f_3 + p_{3,3,1}\varphi_1 + p_{3,3,2}\varphi_2 + p_{3,3,3}\varphi_3, \\
Rx_2x_3 = q^{(1)}_{2,3}f_1 + q^{(2)}_{2,3}f_2 + q^{(3)}_{2,3}f_3 + p_{2,3,1}\varphi_1 + p_{2,3,2}\varphi_2 + p_{2,3,3}\varphi_3, \\
Rx_3x_1 = q^{(1)}_{3,1}f_1 + q^{(2)}_{3,1}f_2 + q^{(3)}_{3,1}f_3 + p_{3,1,1}\varphi_1 + p_{3,1,2}\varphi_2 + p_{3,1,3}\varphi_3, \\
Rx_1x_2 = q^{(1)}_{1,2}f_1 + q^{(2)}_{1,2}f_2 + q^{(3)}_{1,2}f_3 + p_{1,2,1}\varphi_1 + p_{1,2,2}\varphi_2 + p_{1,2,3}\varphi_3.
\end{cases}
$$

Denn setzt man die Werthe der Unbekannten aus (33.) in (32.), so erhält man durch Gleichsetzung der Coëfficienten von $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ die Gleichungen (26.) und (31.), und durch Gleichsetzung der Coëfficienten von f_1, f_2, f_3 auf beiden Seiten der Gleichungen folgende Gleichungen

$$
34.\quad \begin{cases}
R = \Sigma q^{(1)}_{\varkappa,\lambda}\,.\,a^{(1)}_{\varkappa,\lambda}; & 0 = \Sigma q^{(1)}_{\varkappa,\lambda}\,.\,a^{(2)}_{\varkappa,\lambda}; & 0 = \Sigma q^{(1)}_{\varkappa,\lambda}\,.\,a^{(3)}_{\varkappa,\lambda}; \\
0 = \Sigma q^{(2)}_{\varkappa,\lambda}\,.\,a^{(1)}_{\varkappa,\lambda}; & R = \Sigma q^{(2)}_{\varkappa,\lambda}\,.\,a^{(2)}_{\varkappa,\lambda}; & 0 = \Sigma q^{(2)}_{\varkappa,\lambda}\,.\,a^{(3)}_{\varkappa,\lambda}; \\
0 = \Sigma q^{(3)}_{\varkappa,\lambda}\,.\,a^{(1)}_{\varkappa,\lambda}; & 0 = \Sigma q^{(3)}_{\varkappa,\lambda}\,.\,a^{(2)}_{\varkappa,\lambda}; & R = \Sigma q^{(3)}_{\varkappa,\lambda}\,.\,a^{(3)}_{\varkappa,\lambda};
\end{cases}
$$

$$
35.\quad \begin{cases}
0 = \Sigma q^{(1)}_{\varkappa,\lambda}\,b_{\varkappa,\lambda,1}; & 0 = \Sigma q^{(1)}_{\varkappa,\lambda}\,b_{\varkappa,\lambda,2}; & 0 = \Sigma q^{(1)}_{\varkappa,\lambda}\,b_{\varkappa,\lambda,3}; \\
0 = \Sigma q^{(2)}_{\varkappa,\lambda}\,b_{\varkappa,\lambda,1}; & 0 = \Sigma q^{(2)}_{\varkappa,\lambda}\,b_{\varkappa,\lambda,2}; & 0 = \Sigma q^{(2)}_{\varkappa,\lambda}\,b_{\varkappa,\lambda,3}; \\
0 = \Sigma q^{(3)}_{\varkappa,\lambda}\,b_{\varkappa,\lambda,1}; & 0 = \Sigma q^{(3)}_{\varkappa,\lambda}\,b_{\varkappa,\lambda,2}; & 0 = \Sigma q^{(3)}_{\varkappa,\lambda}\,b_{\varkappa,\lambda,3}.
\end{cases}
$$

Diese beiden Systeme Gleichungen dienen zur Bestimmung der 18 Coëfficienten q. Was die Coëfficienten p der Gleichungen (33.) betrifft, so beträgt die Zahl der von einander verschiedenen nur 10; wegen welchen Umstandes eben die Gleichungen (32.) und ihre Auflösungen (33.) merkwürdig sind.

14) Nimmt man an, dafs für ein System Werthe der Variabeln $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = 1$ die Functionen f_1, f_2, f_3 verschwinden, so folgt aus dem Lehrsatze (3.), dafs für dasselbe System Werthe auch $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ verschwin-

den, und aus (33.), dafs R verschwindet. Es ist demnach $R=0$ das Resultat der Elimination der Variabeln aus den drei Gleichungen $f_1(x,y,1)=0$, $f_2(x,y,1)=0$, $f_3(x,y,1)=0$. Da aber R die Determinante der Coëfficienten der 6 Producte $x_1x_1, x_2x_2, \ldots x_1x_2$ in den Gleichungen (32.), also in Rücksicht auf alle Coëfficienten homogen und vom 6ten Grade, in Rücksicht auf die Coëfficienten in den einzelnen Gleichungen aber lineär ist: so wird man, wenn man für die Coëfficienten b ihre Werthe setzt, welche in Rücksicht auf die Coëfficienten der drei ersten Gleichungen Ausdrücke vom 3ten Grade und in Rücksicht auf die Coëfficienten jeder einzelnen dieser Gleichungen lineäre Ausdrücke sind, die Gleichung $R=0$ in Rücksicht auf die Coëfficienten der drei Gleichungen $f_1(x,y,1)=0$, $f_2(x,y,1)=0$, $f_3(x,y,1)=0$ homogen und vom 12ten Grade, und in Rücksicht auf die Coëfficienten jeder einzelnen Gleichung vom 4ten Grade finden. Die angegebenen Eigenschaften der Determinante R und der Gleichung $R=0$ ergeben sich ebenfalls aus der Zusammensetzung der Determinante aus den Coëfficienten der Gröfsen p in den Gleichungen (25.) und (26.). Dieses sind aber nach Lehrsatz 1. die Criterien für die Endgleichung, welche aus der Elimination der Variabeln aus den genannten drei Gleichungen hervorgeht. Demnach läfst sich die angedeutete Eliminationsmethode in Form eines Lehrsatzes wie folgt ausdrücken:

Lehrsatz 4.

Wenn drei Gleichungen vom dritten Grade $f_1(x,y)=0$, $f_2(x,y)=0$, $f_3(x,y)=0$ *zwischen den Variabeln* x, y *gegeben sind, so erhält man die aus der Elimination dieser Variabeln hervorgehende Endgleichung, wenn man die Determinante* φ *der Functionen*

$$x_3x_3f_1\left(\frac{x_1}{x_3},\frac{x_2}{x_3}\right),\quad x_3x_3f_2\left(\frac{x_1}{x_3},\frac{x_2}{x_3}\right),\quad x_3x_3f_3\left(\frac{x_1}{x_3},\frac{x_2}{x_3}\right)$$

zusammenstellt und aus den 6 Gleichungen

$$x_3x_3f_1\left(\frac{x_1}{x_3},\frac{x_2}{x_3}\right)=0,\quad x_3x_3f_2\left(\frac{x_1}{x_3},\frac{x_2}{x_3}\right)=0,\quad x_3x_3f_3\left(\frac{x_1}{x_3},\frac{x_2}{x_3}\right)=0,$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}=0,\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}=0,\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}=0$$

die 6 Producte $x_1x_1, x_2x_2, \ldots x_1x_2$ *eliminirt, wie wenn sie die Unbekannten wären.*

Da die genannten Producte in die 6 Gleichungen nur lineär eingehen, so ist durch den vorhergehenden Lehrsatz die Elimination der Variabeln aus drei Gleichungen vom zweiten Grade auf die Elimination der Unbekannten aus lineären Gleichungen, oder, was dasselbe ist, auf die Bildung der aus den Coëfficienten linearer Gleichungen zusammengesetzten Determinante zurückgeführt.

15) Bisher bedeuteten die Zeichen f_1, f_2, f_3 ganz beliebige homogene Functionen zweiten Grades von den Variabeln x_1, x_2, x_3, und φ die Determinante jener Functionen. Von nun an sollen mit denselben Zeichen die partiellen Differentialquotienten von der homogenen Function

$$f = \Sigma a_{\varkappa,\lambda,\mu} x_\varkappa x_\lambda x_\mu$$

dritten Grades, nach den Variabeln x_1, x_2, x_3 genommen, und mit φ die Determinante jener partiellen Differentialquotienten bezeichnet werden; welche Determinante wir der Kürze wegen die *Determinante der Function* f nennen wollen. Dieses vorausgesetzt, so gelten die in den vorhergehenden Nummern entwickelten Gleichungen, wenn man überall $3a_{\varkappa,\lambda,\mu}$ statt $a^{\mu}_{\varkappa,\lambda}$ setzt, wodurch das System (32.) übergeht in:

$$32.^*\begin{cases}\frac{1}{3}f_1 = a_{1,1,1}x_1x_1+a_{2,2,1}x_2x_2+a_{3,3,1}x_3x_3+2a_{2,3,1}x_2x_3+2a_{3,1,1}x_3x_1+2a_{1,2,1}x_1x_2,\\ \frac{1}{3}f_2 = a_{1,1,2}x_1x_1+a_{2,2,2}x_2x_2+a_{3,3,2}x_3x_3+2a_{2,3,2}x_2x_3+2a_{3,1,2}x_3x_1+2a_{1,2,2}x_1x_2,\\ \frac{1}{3}f_3 = a_{1,1,3}x_1x_1+a_{2,2,3}x_2x_2+a_{3,3,3}x_3x_3+2a_{2,3,3}x_2x_3+2a_{3,1,3}x_3x_1+2a_{1,2,3}x_1x_2,\\ \frac{1}{3}\varphi_1 = b_{1,1,1}x_1x_1+b_{2,2,1}x_2x_2+b_{3,3,1}x_3x_3+2b_{2,3,1}x_2x_3+2b_{3,1,1}x_3x_1+2b_{1,2,1}x_1x_2,\\ \frac{1}{3}\varphi_2 = b_{1,1,2}x_1x_1+b_{2,2,2}x_2x_2+b_{3,3,2}x_3x_3+2b_{2,3,2}x_2x_3+2b_{3,1,2}x_3x_1+2b_{1,2,2}x_1x_2,\\ \frac{1}{3}\varphi_3 = b_{1,1,3}x_1x_1+b_{2,2,3}x_2x_2+b_{3,3,3}x_3x_3+2b_{2,3,3}x_2x_3+2b_{3,1,1}x_3x_1+2b_{1,2,3}x_1x_2.\end{cases}$$

Löset man dieses in Rücksicht auf die 6 Producte x_1x_1, x_2x_2, ... x_1x_3 lineäre System von Gleichungen nach diesen Producten auf, als ob sie die Unbekannten wären, so erhält man die Gleichung (33.). Zur Bestimmung von R und der 18 Gröfsen q, welche letztere enthalten, dienen dann die Gleichungen (35.) und folgende:

$$34.^*\begin{cases}\frac{1}{3}R = \Sigma q^{(1)}_{\varkappa,\lambda}a_{\varkappa,\lambda,1}; & 0 = \Sigma q^{(1)}_{\varkappa,\lambda}a_{\varkappa,\lambda,2}; & 0 = \Sigma q^{(1)}_{\varkappa,\lambda}a_{\varkappa,\lambda,3};\\ 0 = \Sigma q^{(2)}_{\varkappa,\lambda}a_{\varkappa,\lambda,1}; & \frac{1}{3}R = \Sigma q^{(2)}_{\varkappa,\lambda}a_{\varkappa,\lambda,2}; & 0 = \Sigma q^{(2)}_{\varkappa,\lambda}a_{\varkappa,\lambda,3};\\ 0 = \Sigma q^{(3)}_{\varkappa,\lambda}a_{\varkappa,\lambda,1}; & 0 = \Sigma q^{(3)}_{\varkappa,\lambda}a_{\varkappa,\lambda,2}; & \frac{1}{3}R = \Sigma q^{(3)}_{\varkappa,\lambda}a_{\varkappa,\lambda,3}.\end{cases}$$

Zwischen den 10 Gröfsen p und R hat man die Relationen (31.) und

$$26.^*\begin{cases}0 = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,1}a_{\varkappa,\lambda,1}; & 0 = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,1}a_{\varkappa,\lambda,2}; & 0 = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,1}a_{\varkappa,\lambda,3};\\ 0 = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,2}a_{\varkappa,\lambda,1}; & 0 = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,2}a_{\varkappa,\lambda,2}; & 0 = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,2}a_{\varkappa,\lambda,3};\\ 0 = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,3}a_{\varkappa,\lambda,1}; & 0 = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,3}a_{\varkappa,\lambda,2}; & 0 = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,3}a_{\varkappa,\lambda,3}.\end{cases}$$

Nachdem man die Werthe von R und der 10 Gröfsen p gefunden, kann man sich die Aufgabe stellen: Die Werthe der Gröfsen b zu bestimmen, welche nur den Gleichungen (31.) genügen. Da die Zahl der zu bestimmenden Gröfsen b gleich 10, dagegen die Zahl der bestimmenden Gleichungen 9 ist, so werden die gesuchten Gröfsen sämmtlich eine willkürliche Constante enthalten. Bezeichnet man diese willkürliche Constante mit m, so wird der allgemeine Ausdruck der gesuchten Gröfsen, welcher, für $b_{\varkappa,\lambda,\mu}$ in (31.) gesetzt, diesen Gleichungen genügt,

$$b_{\varkappa,\lambda,\mu}+m a_{\varkappa,\lambda,\mu}$$

sein; was aus (26.) und (31.) erhellet. Hieraus folgt: *dafs jede homogene Function* $\psi=\Sigma c_{\varkappa,\lambda,\mu}x_\varkappa x_\lambda x_\mu$ *dritten Grades von den Variabeln* x_1, x_2, x_3, *deren Coëfficienten* c *statt* b *in die Gleichungen* (31.) *gesetzt diesen Gleichungen genügen, von der Form* $\psi=\varphi+mf$ *oder, wenn man in der Gleichung* (31.) R *eine beliebige Gröfse bedeuten läfst, von der Form* $\psi=mf+n\varphi$ *ist.* In der folgenden Nummer soll nachgewiesen werden, dafs die Determinante der Determinante von der Function f diese Eigenschaft hat.

16) Wenn man der Kürze wegen durch $v_\varkappa^{(\lambda)}$ den partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\varkappa\partial x_\lambda}$ zweiter Ordnung bezeichnet, so ist

$$36.\quad\begin{cases}0=\frac{d}{dx_1}(v_2^{(2)}v_3^{(3)}-v_2^{(3)}v_3^{(2)})+\frac{d}{dx_2}(v_3^{(2)}v_1^{(3)}-v_3^{(3)}v_1^{(2)})+\frac{d}{dx_3}v_1^{(2)}v_2^{(3)}-v_1^{(3)}v_2^{(2)}),\\ 0=\frac{d}{dx_1}(v_2^{(3)}v_3^{(1)}-v_2^{(1)}v_3^{(3)})+\frac{d}{dx_2}(v_3^{(3)}v_1^{(1)}-v_3^{(1)}v_1^{(3)})+\frac{d}{dx_3}v_1^{(3)}v_2^{(1)}-v_1^{(1)}v_2^{(3)}),\\ 0=\frac{d}{dx_1}(v_2^{(1)}v_3^{(2)}-v_2^{(2)}v_3^{(1)})+\frac{d}{dx_2}(v_3^{(1)}v_1^{(2)}-v_3^{(2)}v_1^{(1)})+\frac{d}{dx_3}v_1^{(1)}v_2^{(2)}-v_1^{(2)}v_2^{(1)}).\end{cases}$$

Diese Gleichungen gelten auch allgemein für jede beliebige homogene Function φ 3ter Ordnung von drei Variabeln. Aus diesen identischen Gleichungen geht ein System von 9 Gleichungen durch Differentiation nach den drei Variabeln hervor, welches in der vorliegenden Untersuchung eine Anwendung finden wird.

Bezeichnet man ferner mit $\psi=\Sigma c_{\varkappa,\lambda,\mu}x_\varkappa x_\lambda x_\mu$ die Determinante der partiellen Differentialquotienten der Function φ, welche kürzer *die Determinante der Function* φ oder *die Determinante der Determinante der Function* f genannt wird; so ist klar, dafs, wenn man statt der Gröfsen a die entsprechenden Gröfsen b setzt, dadurch f in φ, φ in ψ, $f_\varkappa$ in $\varphi_\varkappa$, $\varphi_\varkappa$ in $\psi_\varkappa$ und $u_\varkappa^{(\lambda)}$, welches $=\frac{\partial_2 f}{\partial x_\varkappa\partial x_\lambda}$ ist, in $v_\varkappa^{(\lambda)}$ übergeht. Macht man diese Änderung in den Gleichungen (30.), entwickelt hierauf beide Seiten der Gleichungen nach Potenzen und Producten der Variabeln und setzt für jedes Product $x_\varkappa x_\lambda x_\mu$ der Entwicklung $p_{\varkappa,\lambda,\mu}$, so verschwinden, weil dadurch die Ausdrücke $x_1\varphi_1$, $x_2\varphi_2$, $x_3\varphi_3$ den Werth R und $x_2\varphi_1$, $x_3\varphi_1$, $x_3\varphi_2$, $x_1\varphi_2$, $x_1\varphi_3$, $x_2\varphi_3$ den Werth 0 annehmen, mit Rücksicht auf die durch Differentation der Gleichungen (36.)

abgeleiteten Gleichungen die Theile rechterhand der sämmtlichen Gleichungen und man erhält:

$$37.\quad\begin{cases} \frac{1}{3}P = \Sigma p_{x,\lambda,1}c_{x,\lambda,1}, & 0 = \Sigma p_{x,\lambda,1}c_{x,\lambda,2}, & 0 = \Sigma p_{x,\lambda,1}c_{x,\lambda,3}, \\ 0 = \Sigma p_{x,\lambda,2}c_{x,\lambda,1}, & \frac{1}{3}P = \Sigma p_{x,\lambda,2}c_{x,\lambda,2}, & 0 = \Sigma p_{x,\lambda,2}c_{x,\lambda,3}, \\ 0 = \Sigma p_{x,\lambda,3}c_{x,\lambda,1}, & 0 = \Sigma p_{x,\lambda,3}c_{x,\lambda,2}, & \frac{1}{3}P = \Sigma p_{x,\lambda,3}c_{x,\lambda,3}, \end{cases}$$

$$P = \Sigma p_{x,\lambda,\mu}c_{x,\lambda,\mu}.$$

Diese Gleichungen beweisen, dafs die Gleichung (31.) erfüllt wird, wenn man c statt b setzt und statt R eine bestimmte andere Gröfse P; woraus denn nach der obigen Bemerkung folgt:

$$38.\quad c_{x,\lambda,\mu} = m a_{x,\lambda,\mu} + n b_{x,\lambda,\mu},$$

und dafs die Determinante ψ der Function φ von der Form

$$39.\quad \psi = mf + n\varphi$$

ist; was sich auf folgende Art ausdrücken läfst:

Lehrsatz 5.

Die Determinante der Determinante einer gegebenen homogenen Function dritten Grades von drei Variabeln ist gleich der Summe der gegebenen Function und ihrer Determinante, jede mit einem passenden constanten Factor multiplicirt.

Es ist noch zu bemerken, dafs

$$40.\quad P = nR$$

ist; welche Gleichung man erhält, wenn man die Werthe von $c_{x,\lambda,\mu}$ aus (38.) in (37.) setzt und die Gleichungen (26.*) und (31.) zu Hülfe nimmt.

17) Nimmt man an, dafs die Gröfsen $p_{x,\lambda,\mu}$ in $q_{x,\lambda,\mu}$ und R in S übergehen, wenn man für die Gröfsen a die entsprechenden Gröfsen b setzt, so gehen die Gleichungen (26.*) in

$$41.\quad\begin{cases} 0 = \Sigma q_{x,\lambda,1}b_{x,\lambda,1}; & 0 = \Sigma q_{x,\lambda,1}b_{x,\lambda,2}; & 0 = \Sigma q_{x,\lambda,1}b_{x,\lambda,3}; \\ 0 = \Sigma q_{x,\lambda,2}b_{x,\lambda,1}; & 0 = \Sigma q_{x,\lambda,2}b_{x,\lambda,2}; & 0 = \Sigma q_{x,\lambda,2}b_{x,\lambda,3}; \\ 0 = \Sigma q_{x,\lambda,3}b_{x,\lambda,1}; & 0 = \Sigma q_{x,\lambda,3}b_{x,\lambda,2}; & 0 = \Sigma q_{x,\lambda,3}b_{x,\lambda,3} \end{cases}$$

über und man erhält aus (31.):

$$42.\quad\begin{cases} \frac{1}{3}S = \Sigma q_{x,\lambda,1}c_{x,\lambda,1}; & 0 = \Sigma q_{x,\lambda,1}c_{x,\lambda,2}; & 0 = \Sigma q_{x,\lambda,1}c_{x,\lambda,3}; \\ 0 = \Sigma q_{x,\lambda,2}c_{x,\lambda,1}; & \frac{1}{3}S = \Sigma q_{x,\lambda,2}c_{x,\lambda,2}; & 0 = \Sigma q_{x,\lambda,2}c_{x,\lambda,3}; \\ 0 = \Sigma q_{x,\lambda,3}c_{x,\lambda,1}; & 0 = \Sigma q_{x,\lambda,3}c_{x,\lambda,2}; & \frac{1}{3}S = \Sigma q_{x,\lambda,3}c_{x,\lambda,3}. \end{cases}$$

Durch Substitution der Werthe von $c_{x,\lambda,\mu}$ aus (38.) in diesen Gleichungen erhält man, mit Rücksicht auf (41.):

$$43.\quad\begin{cases}\frac{1}{3}\varrho R = q_{\varkappa,\lambda,1}a_{\varkappa,\lambda,1}; & 0=\Sigma q_{\varkappa,\lambda,1}a_{\varkappa,\lambda,2}; & 0=\Sigma q_{\varkappa,\lambda,1}a_{\varkappa,\lambda,3};\\ 0=q_{\varkappa,\lambda,2}a_{\varkappa,\lambda,1}; & \frac{1}{3}\varrho R=\Sigma q_{\varkappa,\lambda,2}a_{\varkappa,\lambda,2}; & 0=\Sigma q_{\varkappa,\lambda,2}a_{\varkappa,\lambda,3},\\ 0=q_{\varkappa,\lambda,3}a_{\varkappa,\lambda,1}; & 0=\Sigma q_{\varkappa,\lambda,3}a_{\varkappa,\lambda,2}; & \frac{1}{3}\varrho R=\Sigma q_{\varkappa,\lambda,3}a_{\varkappa,\lambda,3};\end{cases}$$

$$44.\quad m\varrho R = S.$$

Aus den Gleichungen (41.) ist ersichtlich, *dafs, wenn man die Function φ, oder die **Producte** einer der **Functionen** φ_1, φ_2, φ_3 und einer der **Variabeln** x_1, x_2, x_3, nach **Potenzen** und **Producten** der Variabeln entwickelt und $q_{\varkappa,\lambda,\mu}$ für jedes **Product** $x_\varkappa x_\lambda x_\mu$ setzt, die dadurch entstehenden Ausdrücke verschwinden.*

Eben so geht aus den Gleichungen (43.) hervor, *dafs die nach Potenzen und **Producten** der Variabeln entwickelten Ausdrücke f, $x_1 f_1$, $x_2 f_2$, $x_3 f_3$ den **Werth** ϱR annehmen, wenn man $q_{\varkappa,\lambda,\mu}$ für $x_\varkappa x_\lambda x_\mu$ setzt, und dafs auf gleiche Weise die 6 Ausdrücke $x_2\varphi_1$, $x_3\varphi_2$, $x_3\varphi_2$, $x_1\varphi_2$, $x_1\varphi_3$, $x_2\varphi_3$ verschwinden.*

Auf gleiche Weise, wie die Systeme (35.) und (34.*) die Gröfsen $q^\mu_{\varkappa,\lambda}$ bestimmen, ergeben sich aus (41.) und (43.) die Gröfsen der Werthe $\frac{1}{\varrho}q_{\varkappa,\lambda,\mu}$. Mit andern Worten: die beiden letzten Systeme erhält man aus den beiden ersten, wenn man $\frac{1}{\varrho}\cdot q_{\varkappa,\lambda,\mu}$ für $q^\mu_{\varkappa,\lambda}$ setzt, woraus

$$45.\quad q^\mu_{\varkappa,\lambda} = \frac{1}{\varrho}\cdot q_{\varkappa,\lambda,\mu}$$

folgt. Setzt man diese Werthe von $q^\mu_{\varkappa,\lambda}$ in (33.), so erhält man

$$33.^*\quad\begin{cases}Rx_1x_1 = \frac{1}{\varrho}q_{1,1,1}f_1+\frac{1}{\varrho}q_{1,1,2}f_2+\frac{1}{\varrho}q_{1,1,3}f_3+p_{1,1,1}\varphi_1+p_{1,1,2}\varphi_2+p_{1,1,3}\varphi_3,\\ Rx_2x_2 = \frac{1}{\varrho}q_{2,2,1}f_1+\frac{1}{\varrho}q_{2,2,2}f_2+\frac{1}{\varrho}q_{2,2,3}f_3+p_{2,2,1}\varphi_1+p_{2,2,2}\varphi_2+p_{2,2,3}\varphi_3,\\ Rx_3x_3 = \frac{1}{\varrho}q_{3,3,1}f_1+\frac{1}{\varrho}q_{3,3,2}f_2+\frac{1}{\varrho}q_{3,3,3}f_3+p_{3,3,1}\varphi_1+p_{3,3,2}\varphi_2+p_{3,3,3}\varphi_3,\\ Rx_2x_3 = \frac{1}{\varrho}q_{2,3,1}f_1+\frac{1}{\varrho}q_{2,3,2}f_2+\frac{1}{\varrho}q_{2,3,3}f_3+p_{2,3,1}\varphi_1+p_{2,3,2}\varphi_2+p_{2,3,3}\varphi_3,\\ Rx_3x_1 = \frac{1}{\varrho}q_{3,1,1}f_1+\frac{1}{\varrho}q_{3,1,2}f_2+\frac{1}{\varrho}q_{3,1,3}f_3+p_{3,1,1}\varphi_1+p_{3,1,2}\varphi_2+p_{3,1,3}\varphi_3,\\ Rx_1x_2 = \frac{1}{\varrho}q_{1,2,1}f_1+\frac{1}{\varrho}q_{1,2,2}f_2+\frac{1}{\varrho}q_{1,2,3}f_3+p_{1,2,1}\varphi_1+p_{1,2,2}\varphi_2+p_{1,2,3}\varphi_3.\end{cases}$$

Wenn man also in dem Systeme (32.*) die 6 Producte x_1x_1, x_2x_2, ... x_1x_2 als die Unbekannten betrachtet, so erhält man durch Auflösung der Gleichungen nach diesen Unbekannten die Gleichungen (33.*). Das Merkwürdige an diese Gleichungen besteht vorzüglich darin, dafs, während die einen nur 20 verschiedene Coëfficienten a und b enthalten, die andern ebenfalls nur 20 verschiedene Coëfficienten p und $\frac{1}{\varrho}.q$ haben.

Wenn man in den Gleichungen (41.) und (43.), durch welche die Gröfsen $\frac{1}{\varrho}q_{\varkappa,\lambda,\mu}$ vollständig bestimmt sind, für $b_{\varkappa,\lambda,\mu}$ die Gröfsen $a_{\varkappa,\lambda,\mu}$ setzt, wodurch gleichzeitig $b_{\varkappa,\lambda,\mu}$ in $ma_{\varkappa,\lambda,\mu}+nb_{\varkappa,\lambda,\mu}$ und R in $S=m\varrho R$ übergehen, so werden die so geänderten Gleichungen erfüllt, wenn man $\frac{1}{\varrho}q_{\varkappa,\lambda,\mu}$ in $m\varrho p_{\varkappa,\lambda,\mu}-nq_{\varkappa,\lambda,\mu}$ verändert. Dieses beweiset, dafs durch die Veränderung von $a_{\varkappa,\lambda,\mu}$ in $b_{\varkappa,\lambda,\mu}$, $\frac{1}{\varrho}q_{\varkappa,\lambda,\mu}$ in $m\varrho p_{\varkappa,\lambda,\mu}-nq_{\varkappa,\lambda,\mu}$ übergeht.

Es bedeutet $\frac{R}{3^6}$ die aus den Coëfficienten der 6 Potenzen und Producte der Variabeln in Gleichung (32.*) gebildete Determinante. Diese geht in $\frac{S}{3^6}$ über, wenn man in ihr $b_{\varkappa,\lambda,\mu}$ für $a_{\varkappa,\lambda,\mu}$ und $ma_{\varkappa,\lambda,\mu}+nb_{\varkappa,\lambda,\mu}$ für $b_{\varkappa,\lambda,\mu}$ setzt. Ändert man daher die Coëfficienten in (32.*) auf die angegebene Art, und bildet hierauf aus den geänderten Coëfficienten die Determinante, so erhält man ebenfalls $\frac{S}{3^6}$. Dieselbe Gröfse erhält man aber auch, wenn man $a_{\varkappa,\lambda,\mu}$ in $b_{\varkappa,\lambda,\mu}$ und $b_{\varkappa,\lambda,\mu}$ in $ma_{\varkappa,\lambda,\mu}$ übergehen läfst und aus den so geänderten Coëfficienten die Determinante bildet. Diese wird aber $=\frac{m^3R}{3^6}$. Mithin ist $S=m^3R$; welcher Werth, in (44.) gesetzt,

$$46.\qquad \varrho = m^2$$

giebt. Hieraus folgt nun, mit Rücksicht auf die obigen Bemerkungen, dafs

Wenn $a_{\varkappa,\lambda,\mu}$ in $b_{\varkappa,\lambda,\mu}$ übergeht, so geht gleichzeitig $b_{\varkappa,\lambda,\mu}$ in $ma_{\varkappa,\lambda,\mu}+nb_{\varkappa,\lambda,\mu}$, f in φ, $f_\varkappa$ in $\varphi_\varkappa$, φ in $mf+n\varphi$, $\varphi_\varkappa$ in $mf_\varkappa+n\varphi_\varkappa$, $p_{\varkappa,\lambda,\mu}$ in $q_{\varkappa,\lambda,\mu}$, $\frac{1}{\varrho}q_{\varkappa,\lambda,\mu}$ oder $\frac{1}{m^2}q_{\varkappa,\lambda,\mu}$ in $m^3p_{\varkappa,\lambda,\mu}-nq_{\varkappa,\lambda,\mu}$ und R in m^3R über.

18) Wenn man eine Function F aus einer gegebenen homogenen Function f vom 3ten Grade von den Variabeln x_1, x_2, x_3 und ihrer Determinante φ wie folgt zusammensetzt:

$$47.\qquad F = d.f+\delta.\varphi,$$

wo d und δ beliebige Constanten bedeuten, und nun mit F_1, F_2, F_3 die partiellen Differentialquotienten der Function F nach den Variabeln genommen bezeichnet, so erhalten die Ausdrücke F, x_1F_1, x_2F_2, x_3F_3, wenn man sie nach Potenzen und Producten der Variabeln entwickelt und $p_{\varkappa,\lambda,\mu}$ für $x_\varkappa x_\lambda x_\mu$ setzt, die Werthe $\delta.R$; und auf gleiche Weise erhalten die Ausdrücke x_2F_1, x_3F_1, x_3F_2, x_1F_2, x_1F_3, x_2F_3 die Werthe 0. Eben so gehen die Ausdrücke F, x_1F_1, x_2F_2, x_3F_3, wenn man sie entwickelt und $\frac{1}{\varrho}q_{\varkappa,\lambda,\mu}$ für $x_\varkappa x_\lambda x_\mu$

setzt, in $d.R$ über, während die Ausdrücke x_2F_1, x_3F_1, x_3F_2, x_1F_2, x_1F_3, x_2F_3 verschwinden.

Die Determinante der Function F werde durch

$$48. \quad \Phi = \Sigma B_{\varkappa,\lambda,\mu} x_\varkappa x_\lambda x_\mu$$

bezeichnet; in welchem Ausdruck die Gröfsen $B_{\varkappa,\lambda,\mu}$ ganze homogene Functionen 3ter Ordnung in Rücksicht auf die Coëfficienten in F, also ganze homogene Functionen 3ter Ordnung in Rücksicht auf die Constanten d und δ sein werden. Bezeichnet man ferner mit Φ_1, Φ_2, Φ_3 die partiellen Differentialquotienten der Determinante Φ, nach den Variabeln genommen, und setzt der Kürze wegen $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_\varkappa \partial x_\lambda} = v_\varkappa^{(\lambda)}$, so gelten die Gleichungen (36.) und (30.), wenn man in den letzteren f in F, φ in Φ und u in v verändert. Entwickelt man nun die auf diese Weise veränderten Gleichungen (30.) und setzt $p_{\varkappa,\lambda,\mu}$ für $x_\varkappa x_\lambda x_\mu$, so verschwinden, mit Berücksichtigung der durch Differentiation aus (36.) abgeleiteten 9 Gleichungen, die rechtseitigen Theile sämmtlicher Gleichungen und man erhält:

$$49. \left\{\begin{array}{lll} \frac{1}{3}T = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,1} B_{\varkappa,\lambda,1}; & 0 = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,1} B_{\varkappa,\lambda,2}; & 0 = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,1} B_{\varkappa,\lambda,3}; \\ 0 = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,2} B_{\varkappa,\lambda,1}; & \frac{1}{3}T = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,2} B_{\varkappa,\lambda,2}; & 0 = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,2} B_{\varkappa,\lambda,3}; \\ 0 = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,3} B_{\varkappa,\lambda,1}; & 0 = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,3} B_{\varkappa,\lambda,2}; & \frac{1}{3}T = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,3} B_{\varkappa,\lambda,3}; \end{array}\right.$$

$$T = \Sigma p_{\varkappa,\lambda,\mu} B_{\varkappa,\lambda,\mu};$$

woraus mit Rücksicht auf No. 15. folgt, dafs die Determinante Φ von der Form

$$50. \quad \Phi = Df + \varDelta.\varphi$$

ist, wo D und $\varDelta$ zu bestimmende Constanten bedeuten. Bezeichnet man mit $\Phi(p)$ und $\Phi\left(\frac{1}{\varrho}q\right)$ die Ausdrücke, in welche Φ übergeht, wenn man $p_{\varkappa,\lambda,\mu}$ oder $\frac{1}{\varrho}q_{\varkappa,\lambda,\mu}$ in der Entwicklung von Φ für $x_\varkappa x_\lambda x_\mu$ setzt, so hat man

$$51. \quad RD = \Phi\left(\frac{1}{\varrho}.q\right); \quad R\varDelta = \Phi(p);$$

wobei zu bemerken ist, da D verschwindet, wenn δ verschwindet, dafs D den Factor δ haben, oder, da sowohl $\Phi(p)$ als auch $\Phi\left(\frac{1}{\varrho}.q\right)$ ganze homogene Functionen 3ten Grades in Rücksicht auf d und δ sind, dafs in D das mit d^3 multiplicirte Glied fehlen mufs.

Das Vorhergehende läfst sich nun kurz wie folgt ausdrücken:

Lehrsatz 6.

Wenn man eine gegebene homogene Function dreier Variabeln vom dritten Grade und ihre Determinante, die erstere mit d, die andere

mit δ multiplicirt und addirt, so ist die Determinante der Summe der beiden Functionen von derselben Form, nämlich gleich der Summe der gegebenen Function und ihrer Determinante, jede mit einem andern homogenen Factor 3ten Grades in Rücksicht auf d und δ multiplicirt.

Mit Hülfe dieses Lehrsatzes läfst sich leicht folgende Aufgabe lösen:

Aufgabe 1.

Es ist eine homogene Function dritten Grades von drei Variabeln gegeben: man soll eine andere homogene Function 3ten Grades von denselben Variabeln bestimmen, deren Determinante die gegebene Function ist.

Aus dem Lehrsatz (5.) folgt, dafs, wenn f die gegebene Function ist, die gesuchte Function $df+\delta\varphi$ sein wird, wo d und δ aus den Gleichungen

$$D = 1 \quad \text{und} \quad \Delta = 0$$

zu bestimmen sind. Die Aufgabe führt also auf eine cubische Gleichung und bietet 9 Auflösungen dar.

19) Wenn man mit f eine beliebige Function der n Variabeln $x_1, x_2, \dots x_n$ bezeichnet, so kann man unter der Annahme folgender lineären Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_1^{(1)}x_1+a_1^{(2)}x_2+\dots+a_1^{(n)}x_n &= y_1,\\ a_2^{(1)}x_1+a_2^{(2)}x_2+\dots+a_2^{(n)}x_n &= y_2,\\ &\dots\\ a_n^{(1)}x_1+a_n^{(2)}x_2+\dots+a_n^{(n)}x_n &= y_n, \end{aligned}$$

sowohl f als $\frac{\partial f}{\partial x_\varkappa}$ als Functionen der Variabeln $y_1, y_2, \dots y_n$ betrachten. Die Determinanten der Function f seien φ oder φ', je nachdem man $x_1, x_2, \dots x_n$ oder $y_1, y_2, \dots y_n$ als die Variabeln betrachtet. Bezeichnet man nun die aus den Coëfficienten der Variabeln $x_1, x_2, \dots x_n$ in den angegebenen lineären Gleichungen gebildete Determinante mit r, so ist

$$52. \qquad \varphi = r^2\varphi'.$$

Denn wenn n^2 Gröfsen $u_\varkappa^\lambda$ mit n^2 Gröfsen $a_\varkappa^\lambda$ und n^2 Gröfsen $w_\varkappa^\lambda$, wo $\varkappa, \lambda$ die Zahlen 1, 2, ... n bedeuten, in der Verbindung

$$u_\varkappa^\lambda = a_1^\lambda w_1^\varkappa + a_2^\lambda w_2^\varkappa + \dots + a_n^\lambda w_n^\varkappa$$

stehen, so ist bekanntlich die aus den Gröfsen $u_\varkappa^\lambda$ gebildete Determinante $\Sigma\pm u_1^{(1)}u_2^{(2)}\dots u_n^{(n)}$ gleich dem Product zweier Determinanten, von denen die eine r aus den Gröfsen $a_\varkappa^\lambda$, die andere $\Sigma\pm w_1^{(1)}w_2^{(2)}\dots w_n^{(n)}$ aus den Gröfsen $w_\varkappa^\lambda$ zusammengesetzt ist. Diese Relation findet man in der Abhandlung des Herrn Professor *Jacobi*, „De formatione et proprietatibus determinantium"

Bd. 22. dieses Journals S. 310 bewiesen. Ist ferner

$$w_\varkappa^\lambda = a_1^\lambda v_1^\varkappa + a_2^\lambda v_2^\varkappa + \dots + a_n^\lambda v_n^\varkappa,$$

so läfst sich wiederum die Determinante $\Sigma \pm w_1^{(1)} w_2^{(2)} \dots w_n^{(n)}$ als das Product von r und der aus den Gröfsen $v_\varkappa$ gebildeten Determinante $\Sigma \pm v_1^{(1)} v_2^{(2)} \dots v_n^{(n)}$ darstellen. Mithin ist

$$\Sigma \pm u_1^{(1)} u_2^{(2)} \dots u_n^{(n)} = r^2 \Sigma \pm v_1^{(1)} v_2^{(2)} \dots v_n^{(n)}.$$

Die dieser vorhergehenden beiden Gleichungen finden aber Statt, wenn man die Variabeln $x_1, x_2, \dots x_n$ als Functionen der Variabeln $y_1, y_2, \dots y_n$ betrachtet, wie sie durch die obigen n lineären Gleichungen gegeben sind, und setzt:

$$u_\varkappa^\lambda = \frac{\partial^2 f}{\partial x_\varkappa \partial x_\lambda}; \quad w_\lambda^\varkappa = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x_\varkappa}\right)}{\partial y_\lambda}; \quad v_\varkappa^\lambda = \frac{\partial^2 f}{\partial y_\varkappa \partial y_\lambda}.$$

Diese Werthe von $u_\varkappa^\lambda$ und $v_\varkappa^\lambda$ in die letzte Gleichung gesetzt, welche aus den beiden vorhergehenden folgt, lassen dieselbe in (52.) übergehen. Dieser Gleichung wird man sich bei der Lösung der folgenden Aufgabe mit Vortheil bedienen.

20) Aufgabe 2.

Eine beliebige gegebene homogene Function $f = \Sigma a_{\varkappa,\lambda,\mu} x_\varkappa x_\lambda x_\mu$ dritten Grades von den Variabeln x_1, x_2, x_3 durch Substitutionen von der Form

$$53. \quad \begin{cases} x_1 = x_1^{(1)} y_1 + x_1^{(2)} y_2 + x_1^{(3)} y_3, \\ x_2 = x_2^{(1)} y_1 + x_2^{(2)} y_2 + x_2^{(3)} y_3, \\ x_3 = x_3^{(1)} y_1 + x_3^{(2)} y_2 + x_3^{(3)} y_3 \end{cases}$$

in eine andere zu transformiren von der Form:

$$54. \quad f = y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 + 6\pi y_1 y_2 y_3.$$

Diese Aufgabe verlangt die Bestimmung von 10 Gröfsen: der 9 Coëfficienten der Substitutionen und der Gröfse π. Die 10 Gleichungen, aus welchen die genannten Unbekannten zu bestimmen sind, erhält man, wenn man die Function f der Variabeln x_1, x_2, x_3 in der Gleichung (54.) vermittels der Substitutionen (53.) als eine Function der Variabeln y_1, y_2, y_3 darstellt, nach Potenzen und Producten dieser Variabeln entwickelt und die Coëfficienten gleicher Potenzen und Producte auf beiden Seiten der entwickelten Gleichung einander gleich setzt. Dadurch bekommt man aber Gleichungen von sehr complicirter Art. Dasselbe gilt von den Gleichungen, die sich ergeben, wenn man die Substitutionen (53.) nach y_1, y_2, y_3 auflöset, die Werthe von y_1, y_2, y_3 in den Theil rechts der Gleichung (53.) setzt und die Coëfficienten gleicher Potenzen und Producte der Variabeln y_1, y_2, y_3 auf beiden Seiten der entwickelten Gleichung einander gleich setzt.

Eine dritte Art die Aufgabe zu behandeln ist folgende. Man bilde die Determinante φ' des Theils rechts der Gleichung (54.)

$$55.\quad p' = -6^3\pi^2(y_1^2+y_2^2+y_3^2)+6^3(1+2\pi^3)y_1y_2y_3,$$

bezeichne mit φ, wie vorhin, die Determinante von f, und mit r diejenige aus den Coëfficienten der nach y_1, y_2, y_3 aufgelöseten Gleichungen (53.). Alsdann gilt für den vorliegenden Fall die Gleichung (52.):

$$\varphi = r^2\varphi'.$$

Multiplicirt man die Gleichung (54.) mit $6^3\pi^2 r^2$ und addirt sie zu dieser Gleichung, so erhält man

$$6^3.\pi^2.r^2.f+\varphi = 6^3r^2(1+8\pi^3)y_1y_2y_3,$$

welche Gleichung, wenn man der Kürze wegen

$$56.\quad d = \frac{\pi^2}{1+8\pi^3};\quad \delta = \frac{1}{6^3r^2(1+8\pi^3)}$$

setzt, in

$$57.\quad d.f+\delta.\varphi = y_1y_2y_3$$

übergeht. Diese Gleichung läfst sich in Worten wie folgt ausdrücken:

Lehrsatz 7.

Eine gegebene homogene Function dritten Grades von drei Variabeln, so wie ihre Determinante, lassen sich mit solchen constanten Factoren multipliciren, dafs die Summe in drei lineäre Factoren zerlegbar ist.

Ferner ist zu bemerken, dafs die vorliegende Aufgabe mit folgender übereinkommt: ***Eine gegebene homogene Function dritten Grades von drei Variabeln, und ihre Determinante, mit solchen Factoren zu multipliciren, dafs ihre Summe in lineäre Factoren zerlegbar sei.***

Um diese constanten Factoren zu finden, bemerke man, dafs sowohl der Theil links der Gleichung (57.), als seine nach x_1, x_2, x_3 genommenen partiellen Differentialquotienten für die Werthe $x_1^{(\varkappa)}$, $x_2^{(\varkappa)}$, $x_3^{(\varkappa)}$ der Variabeln x_1, x_2, x_3, wo $\varkappa$ eine der Zahlen 1, 2, 3 bedeutet, verschwinden, weil der Theil rechts der Gleichung und seine nach x_1, x_2, x_3 genommenen partiellen Differentialquotienten für die nach (53.) entsprechenden Werthe $y_2=0$, $y_3=0$ oder $y_3=0$, $y_1=0$ oder $y_1=0$, $y_2=0$ verschwinden Man hat daher, mit Beibehaltung der frühern Bezeichnungen, für die Werthe $x_1=x_1^{(\varkappa)}$, $x_2=x_2^{(\varkappa)}$, $x_3=x_3^{(\varkappa)}$:

$$58.\quad d.f_1+\delta.\varphi_1=0;\quad d.f_2+\delta.\varphi_2=0;\quad d.f_3+\delta.\varphi_3=0;$$

woraus nach Lehrsatz 3. folgt:

59. $\quad D.f_1 + \Delta.\varphi_1 = 0; \quad D.f_2 + \Delta.\varphi_2 = 0; \quad D.f_3 + \Delta.\varphi_3 = 0.$

Eliminirt man endlich f_1 oder f_2 oder f_3, so erhält man zwischen d und δ die Bedingungsgleichung

60. $\quad D.\delta - \Delta.d = 0.$

Diese Gleichung ist homogen in Rücksicht auf d und δ und vom 4ten Grade, weil, wie sich in No. 18. zeigte, D und Δ homogen und vom dritten Grade sind. Demnach läfst sich der Lehrsatz 7. wie folgt vervollständigen.

Lehrsatz 8.

Eine gegebene homogene Function 3ten Grades von drei Variabeln und ihre Determinante lassen sich auf 4 verschiedene Arten mit solchen constanten Factoren multipliciren, dafs die Summe jedesmal in lineäre Factoren zerlegbar ist.

Wenn man die Elimination der Variabeln x_1, x_2, x_3 aus (58.) und (59.) auf die Weise ausgeführt hätte, dafs man in der Entwicklung derselben nach Potenzen und Producten der Variabeln diese Potenzen und Producte als die Unbekannten eliminirte, so würde man eine homogene Gleichung vom 12ten Grade in Rücksicht auf d und δ erhalten haben; woraus man schliefsen könnte, dafs es nicht 4 sondern 12 Arten der Zerlegung in lineäre Factoren gebe. Von diesen 12 Arten fallen aber immer je drei in eine zusammen, weil die aus der genannten Elimination hervorgehende Endgleichung von der Form $(D.\delta - \Delta.d)^3 = 0$ ist; was aus dem Vorhergehenden erhellt.

Dividirt man die Gleichung (60.) durch δ^4, so wird man eine Gleichung 4ten Grades in Rücksicht auf die Unbekannte $\frac{d}{\delta}$ erhalten, deren Wurzeln

$$\left(\frac{d}{\delta}\right)_1, \quad \left(\frac{d}{\delta}\right)_2, \quad \left(\frac{d}{\delta}\right)_3, \quad \left(\frac{d}{\delta}\right)_4$$

sind. Diese 4 Wurzeln sind zu bestimmen, wenn man die vorgelegte Aufgabe vollständig lösen will. Ist es geschehn und läfst man d und δ irgend zwei Gröfsen bedeuten, deren Quotient $\frac{d}{\delta}$ einer der gefundenen Wurzeln gleich ist, so bleiben noch die Gleichungen (58.) aufzulösen, aus denen man die Verhältnisse der Unbekannten $x_1 : x_2 : x_3$ festzustellen hat. Es ist aber oben angedeutet worden, dafs diese Gleichungen erfüllt werden, wenn man für x_1, x_2, x_3 entweder $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$, $x_3^{(1)}$ oder $x_1^{(2)}$, $x_2^{(2)}$, $x_3^{(2)}$ oder $x_1^{(3)}$, $x_2^{(3)}$, $x_3^{(3)}$

setzt. Man wird daher drei verschiedene Systeme von Verhältnissen der Unbekannten zu einander aus den Gleichungen (58.) ziehen können, welche jenen Gleichungen genügen. Löset man aber zwei von den Gleichungen (58.) auf, so ergeben sich, da sie vom zweiten Grade sind, 4 solcher Systeme, von denen eines, welches der Gleichung (58.) nicht genügt, auszusondern ist. Wie die Unbequemlichkeit der Aussonderung des 4ten, überflüssigen Systems durch einen eleganten Calcul vermieden werden könne, soll in dem nächstfolgenden Paragraph auseinandergesetzt werden. Hat man nun auf irgend eine Weise die drei verschiedenen Systeme von Verhältnissen der Unbekannten gefunden, welche sämmtlichen Gleichungen (58.) genügen; so wird jedes derselben einem Systeme der Verhältnisse der unbekannten Coëfficienten $x_1^{(x)}:x_2^{(x)}:x_3^{(x)}$ gleich sein. Damit die Unbekannten aber den gesuchten Coëfficienten der Substitutionen selbst gleich werden, hat man sie so zu bestimmen, dafs sie noch der Gleichung

$$f = 1$$

genügen. Nachdem auf diese Weise die gesuchten Coëfficienten der Substitutionen bestimmt worden sind, bleibt noch übrig, den Werth der Gröfse π in der Gleichung (54.) anzugeben. Dieser ergiebt sich aus der genannten Gleichung, wenn man den Theil links derselben durch die gefundenen Substitutionen als eine Function der Variabeln y_1, y_2, y_3 darstellt, den Coëfficienten von $y_1 y_2 y_3$ der Entwicklung heraushebt und ihn durch die Zahl 6 dividirt.

Die vorgelegte Aufgabe läfst vier wesentlich von einander verschiedene Auflösungen zu, da man auf die angegebene Art jede der vier Wurzeln der Gleichung (60.) verwenden kann.

21) Nachdem man die Wurzeln der biquadratischen Gleichung (60.) berechnet und zwei Gröfsen d und δ bestimmt hat, deren Quotient $\frac{d}{\delta}$ gleich einer jener Wurzeln ist, so bleibt noch übrig, die drei verschiedenen Verhältnisse der Unbekannten $x_1 : x_2 : x_3$ zu bestimmen, welche sämmtlichen Gleichungen (58.) genügen. Dieses kann auf folgende Weise geschehen. Man setze die Werthe von φ_1, φ_2, φ_3 aus (58.) in die Gleichungen (33.*). Diese Gleichungen lassen sich, wenn man α, β, γ für $\boldsymbol{R}x_1$, $\boldsymbol{R}x_2$, $\boldsymbol{R}x_3$ setzt, wie folgt darstellen:

$$61.\quad\begin{cases}\alpha x_1=\left(\frac{1}{\varrho}q_{1,1,1}-\frac{d}{\delta}p_{1,1,1}\right)f_1+\left(\frac{1}{\varrho}q_{1,1,2}-\frac{d}{\delta}p_{1,1,2}\right)f_2+\left(\frac{1}{\varrho}q_{1,1,3}-\frac{d}{\delta}p_{1,1,3}\right)f_3,\\ \alpha x_2=\left(\frac{1}{\varrho}q_{1,2,1}-\frac{d}{\delta}p_{1,2,1}\right)f_1+\left(\frac{1}{\varrho}q_{1,2,2}-\frac{d}{\delta}p_{1,2,2}\right)f_2+\left(\frac{1}{\varrho}q_{1,2,3}-\frac{d}{\delta}p_{1,2,3}\right)f_3,\\ \alpha x_3=\left(\frac{1}{\varrho}q_{1,3,1}-\frac{d}{\delta}p_{1,3,1}\right)f_1+\left(\frac{1}{\varrho}q_{1,3,2}-\frac{d}{\delta}p_{1,3,2}\right)f_2+\left(\frac{1}{\varrho}q_{1,3,3}-\frac{d}{\delta}p_{1,3,3}\right)f_3,\\ \beta x_1=\left(\frac{1}{\varrho}q_{2,1,1}-\frac{d}{\delta}p_{2,1,1}\right)f_1+\left(\frac{1}{\varrho}q_{2,1,2}-\frac{d}{\delta}p_{2,1,2}\right)f_2+\left(\frac{1}{\varrho}q_{2,1,3}-\frac{d}{\delta}p_{2,1,3}\right)f_3,\\ \beta x_2=\left(\frac{1}{\varrho}q_{2,2,1}-\frac{d}{\delta}p_{2,2,1}\right)f_1+\left(\frac{1}{\varrho}q_{2,2,2}-\frac{d}{\delta}p_{2,2,2}\right)f_2+\left(\frac{1}{\varrho}q_{2,2,3}-\frac{d}{\delta}p_{2,2,3}\right)f_3,\\ \beta x_3=\left(\frac{1}{\varrho}q_{2,3,1}-\frac{d}{\delta}p_{2,3,1}\right)f_1+\left(\frac{1}{\varrho}q_{2,3,2}-\frac{d}{\delta}p_{2,3,2}\right)f_2+\left(\frac{1}{\varrho}q_{2,3,3}-\frac{d}{\delta}p_{2,3,3}\right)f_3,\\ \gamma x_1=\left(\frac{1}{\varrho}q_{3,1,1}-\frac{d}{\delta}p_{3,1,1}\right)f_1+\left(\frac{1}{\varrho}q_{3,1,2}-\frac{d}{\delta}p_{3,1,2}\right)f_2+\left(\frac{1}{\varrho}q_{3,1,3}-\frac{d}{\delta}p_{3,1,3}\right)f_3,\\ \gamma x_2=\left(\frac{1}{\varrho}q_{3,2,1}-\frac{d}{\delta}p_{3,2,1}\right)f_1+\left(\frac{1}{\varrho}q_{3,2,2}-\frac{d}{\delta}p_{3,2,2}\right)f_2+\left(\frac{1}{\varrho}q_{3,2,3}-\frac{d}{\delta}p_{3,2,3}\right)f_3,\\ \gamma x_3=\left(\frac{1}{\varrho}q_{3,3,1}-\frac{d}{\delta}p_{3,3,1}\right)f_1+\left(\frac{1}{\varrho}q_{3,3,2}-\frac{d}{\delta}p_{3,3,2}\right)f_2+\left(\frac{1}{\varrho}q_{3,3,3}-\frac{d}{\delta}p_{3,3,3}\right)f_3.\end{cases}$$

Durch Auflösung des ersten, zweiten und letzten Systems von 3 Gleichungen nach f_1, f_2, f_2 erhält man:

$$62.\quad\begin{cases}f_1=\alpha(a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+a_{1,3}x_3),\\ f_2=\alpha(a_{2,1}x_1+a_{2,2}x_2+a_{2,3}x_3),\\ f_3=\alpha(a_{3,1}x_1+a_{3,2}x_2+a_{3,3}x_3),\\ f_1=\beta(b_{1,1}x_1+b_{1,2}x_2+b_{1,3}x_3),\\ f_2=\beta(b_{2,1}x_1+b_{2,2}x_2+b_{2,3}x_3),\\ f_3=\beta(b_{3,1}x_1+b_{3,2}x_2+b_{3,3}x_3),\\ f_1=\gamma(c_{1,1}x_1+c_{1,2}x_2+c_{1,3}x_3),\\ f_2=\gamma(c_{2,1}x_1+c_{2,2}x_2+c_{2,3}x_3),\\ f_3=\gamma(c_{3,1}x_1+c_{3,2}x_2+c_{3,3}x_3);\end{cases}$$

wobei zu bemerken ist, dafs $a_{\varkappa,\lambda}=a_{\lambda,\varkappa}$ und eben so $b_{\varkappa,\lambda}=b_{\lambda,\varkappa}$ und $c_{\varkappa,\lambda}=c_{\lambda,\varkappa}$. Zieht man nun das zweite System der Gleichungen (62.) von dem ersten ab, so erhält man:

$$63.\quad\begin{cases}\left(\frac{\alpha}{\beta}a_{1,1}-b_{1,1}\right)x_1+\left(\frac{\alpha}{\beta}a_{1,2}-b_{1,2}\right)x_2+\left(\frac{\alpha}{\beta}a_{1,3}-b_{1,3}\right)x_3=0,\\ \left(\frac{\alpha}{\beta}a_{2,1}-b_{2,1}\right)x_1+\left(\frac{\alpha}{\beta}a_{2,2}-b_{2,2}\right)x_2+\left(\frac{\alpha}{\beta}a_{2,3}-b_{2,3}\right)x_3=0,\\ \left(\frac{\alpha}{\beta}a_{3,1}-b_{3,1}\right)x_1+\left(\frac{\alpha}{\beta}a_{3,2}-b_{3,2}\right)x_2+\left(\frac{\alpha}{\beta}a_{3,3}-b_{3,3}\right)x_3=0;\end{cases}$$

woraus sich durch Elimination der Unbekannten x_1, x_2, x_3 eine Gleichung dritten Grades in Rücksicht auf $\frac{\alpha}{\beta}$ wie

$$64.\qquad W = 0$$

ergiebt. Die Wurzeln dieser Gleichung seien:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{(1)},\quad \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{(2)},\quad \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{(3)}.$$

Setzt man dieselben nach einander in (63.) und bestimmt für jede die entsprechenden Verhältnisse der Unbekannten, so werden solche gleich den Verhältnissen der Coëfficienten $x_1^{(x)}$, $x_2^{(x)}$, $x_3^{(x)}$ der Substitutionen sein, wenn man sie aus den angegebenen Gleichungen (63.) und der Gleichung $f = 1$ bestimmt.

Es ist im Vorhergehenden angedeutet worden, dafs die vorgelegte Aufgabe 4 wesentlich von einander verschiedene Lösungen zuläfst. Man erhält zwar aus den gefundenen Auflösungen andere, wenn man für die Variabeln y_1, y_2, y_3 dieselben Variabeln mit den dritten Wurzeln der Einheit multiplicirt setzt. Diese werden aber nicht als wesentlich verschieden zu betrachten sein. Jede der 4 verschiedenen Auflösungen verlangt die Kenntnifs einer Wurzel der biquadratischen Gleichung (60.) und der vollständigen Auflösung der dieser Wurzel entsprechenden cubischen Gleichung (64.). Die vollständige Lösung der Aufgabe verlangt also die Auflösung einer biquadratischen Gleichung und 4 von den Wurzeln derselben abhängigen cubischen Gleichungen. In der folgenden Nummer soll aber dargethan werden, wie aus der einen Auflösung der Aufgabe die übrigen abgleitet werden können, ohne die Auflösung einer höheren Gleichung. Die Ausziehung der dritten Wurzel aus der Einheit wird hiebei nicht für eine Auflösung einer cubischen Gleichung gerechnet. Dieses vorausgesetzt, so erhellet, dafs die vollständige Lösung der Aufgabe in der That nur die Kenntnifs einer Wurzel der biquadratischen Gleichung (60.) und die vollständige Auflösung der von dieser Wurzel abhängigen cubischen Gleichung (64.) verlangt.

22) Aufgabe 3.

Die gegebene Function

$$f = y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 + 6\pi y_1 y_2 y_3$$

durch Substitutionen von der Form

$$\begin{aligned} y_1 &= y_1^{(1)} z_1 + y_1^{(2)} z_2 + y_1^{(3)} z_3,\\ y_2 &= y_2^{(1)} z_1 + y_2^{(2)} z_2 + y_2^{(3)} z_3,\\ y_3 &= y_3^{(1)} z_1 + y_3^{(2)} z_2 + y_3^{(3)} z_3 \end{aligned}$$

in andere von derselben Form

$$66.\qquad f = z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 + 6\Pi . z_1 z_2 z_3$$

zu transformiren.

Wenn man diese Aufgabe auf dem in No. 20. angegebenen Wege zu lösen unternimmt, so wird man finden, dafs die Bestimmung der Verhältnisse der Coëfficienten $y_1^{(x)}$, $y_2^{(x)}$, $y_3^{(x)}$ auf die Lösung der Gleichungen

58. $y_1^2-\lambda y_2 y_3 = 0;\quad y_2^2-\lambda y_3 y_1 = 0;\quad y_3^2-\lambda y_1 y_2 = 0$

führt, welche in der vorhergehenden Aufgabe den Gleichungen (58.) entsprechen. Durch Elimination der Variabeln y_1, y_2, y_3 erhält man die der Gleichung (60.) entsprechende Gleichung 60.* $\lambda^3 = 1$.

Bezeichnet man nun durch k' und k'' die beiden imaginären dritten Wurzeln der Einheit, so giebt (58.*):

für $\lambda = 1$,	für $\lambda = k'$,	für $\lambda = k''$,
$y_1:y_2:y_3 = 1:1:1$,	$y_1:y_2:y_3 = 1:k':k'$,	$y_1:y_2:y_3 = 1:k'':k''$,
$y_1:y_2:y_3 = 1:k':k''$,	$y_1:y_2:y_3 = 1:1:k''$,	$y_1:y_2:y_3 = 1:1:k'$,
$y_1:y_2:y_3 = 1:k'':k'$,	$y_1:y_2:y_3 = 1:k'':1$,	$y_1:y_2:y_3 = 1:k':1$;

woraus folgende drei Substitutionen hervorgehen, durch welche die gegebene Function f der Variabeln y_1, y_2, y_3 in andere von derselben Form transformirt wird:

Erste Substitution.

$$67.\ \begin{cases} 3(1+2\pi)y_1 = z_1+z_2+z_3 & \text{oder}\quad z_1=(1+2\pi)\{y_1+y_2+y_3\}, \\ 3(1+2\pi)y_2 = z_1+k'z_2+k''z_3 & -\quad z_2=(1+2\pi)\{y_1+k''y_2+k'y_3\}, \\ 3(1+2\pi)y_3 = z_1+k''z_2+k'z_3 & -\quad z_3=(1+2\pi)\{y_1+k'y_2+k''y_3\}. \end{cases}$$

Zweite Substitution.

$$68.\ \begin{cases} 3(1+2k''\pi)y_1 = z_1+z_2+z_3 & \text{oder}\quad k'z_1=(1+2k''\pi)\{k'y_1+y_2+y_3\}, \\ 3(1+2k''\pi)y_2 = k'z_1+z_2+k''z_3 & -\quad z_2=(1+2k''\pi)\{y_1+y_2+k'y_3\}, \\ 3(1+2k''\pi)y_3 = k'z_1+k''z_2+z_3 & -\quad z_3=(1+2k''\pi)\{y_1+k'y_2+y_3\}. \end{cases}$$

Dritte Substitution.

$$69.\ \begin{cases} 3(1+2k'\pi)y_1 = z_1+z_2+z_3 & \text{oder}\quad k''z_1=(1+2k'\pi)\{k''y_1+y_2+y_3\}, \\ 3(1+2k'\pi)y_2 = k''z_1+z_2+k'z_3 & -\quad z_2=(1+2k'\pi)\{y_1+y_2+k''y_3\}, \\ 3(1+2k'\pi)y_3 = k''z_1+k'z_2+z_3 & -\quad z_3=(1+2k'\pi)\{y_1+k''y_2+y_3\}. \end{cases}$$

Die verschiedenen Substitutionen, durch welche eine gegebene Function $f = \Sigma a_{\varkappa,\lambda,\mu}x_\varkappa x_\lambda x_\mu$ der Variabeln x_1, x_2, x_3 in andere von der Form

$$z_1^3+z_2^3+z_3^3+6\Pi z_1 z_2 z_3$$

transformirt wird, erhält man nun, wenn man in den Substitutionen (53.), deren Coëfficienten in No. 20. und 21. bestimmt worden sind, für y_1, y_2, y_3 entweder z_1, z_2, z_3 oder die Werthe von y_1, y_2, y_3 aus den vorhergehenden drei Substitutionen setzt. Aus diesen Substitutionen ergeben sich endlich noch andere, wenn man die Variabeln z_1, z_2, z_3 einzeln mit den dritten Wurzeln der Einheit multiplicirt und diese Producte statt der Variabeln z_1, z_2, z_3 setzt. (Die Fortsetzung im nächsten Heft.)

Königsberg, den 16. Januar 1844.

Crelle, Journal d. Math. Bd. XXVIII Heft 1.

Fac-simile einer Handschrift von Hevel.

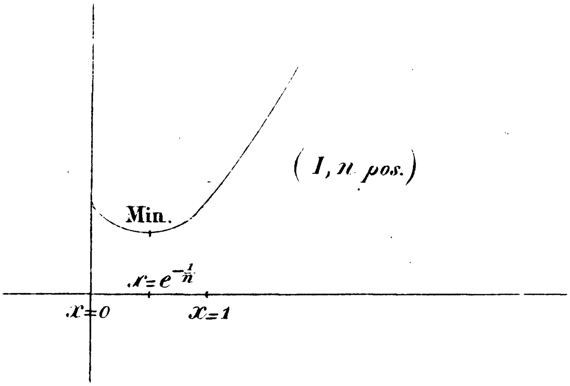
Clarissime atque Doctissime Vir.

Dn. Dn.
Johan Wallis
Londinum.

Quod adeo humanissimis me compellare literis, deque opere Selenographico tam praeclare sentire, nec non autem ipsum tam singulari ornare elogio es dignatus; non solum inde tuum erga me propensissimum amorem, atque summam benevolentiam cognosco, sed etiam gratias Tibi ago ingentes. Inprimis vero te magnopere hoc nomine complector, quod tam sponte operam tuam mihi in promovendis Mathematicarum artium studiis, inque computandis praesertim Longitudinum tabulis deferas. Quod cum in eandem sententiam, a nemine factum fuerit; hucusque jam sollicitus fui de istis tabulis componendis: ac praesertim quia occupationes meae, tam publicae quam privatae, sunt tam variae, ut vix potuerim cogitare futurum, quo is longe longeque operosissimus labor, a me solo cum fructu possit suscipi. Iam vero, praecepto, a te mihi offerri auxilium, et judicio tuo meam operam in rei literariae commodum vergere posse, spondeo suo tempore me non tergiversaturum. etc:

J. Hevelius.

1.



2.