18.

Beweis eines Lehrsatzes, die Bernoullischen Zahlen betreffend.

(Von Hrn. Professor *Staudt* in Erlangen.)

---

1. **B**ezeichnet man die Summe der $m$ten Potenzen der x ersten positiven ganzen Zahlen durch $S^m(x)$, so ist, was auch a, b, n für positive ganze Zahlen sein mögen:

$$S^n(ab) \equiv bS^n(a) + naS^{n-1}(a).S'(b-1), \text{ mod. } a^2.$$

Setzt man nämlich in der Congruenz:

$$(f+ga)^n \equiv f^n + naf^{n-1}g, \text{ mod. } a^2$$

für f nach und nach die Werthe 1, 2, 3 .... a, und für g nach und nach die Werthe 0, 1, 2, 3 .... $b-1$, so geht durch Addition der obige Satz hervor. Für den Beweis des nächstfolgenden Satzes ist schon die Congruenz $S^n(ab) \equiv bS^n(a)$, mod. a hinreichend.

2. Wenn $a, b, c, \dots l$ Primzahlen zu einander sind, so ist

$$\frac{S^n(abc\dots l)}{abc\dots l} - \frac{S^n(a)}{a} - \frac{S^n(b)}{b} - \frac{S^n(c)}{c} \dots - \frac{S^n(l)}{l} = \text{ einer ganzen Zahl.}$$

Nach dem Vorigen ist nämlich $S^n|(abc\dots l) - bc\dots lS^n(a) - ac\dots lS^n(b) - ab\dots lS^n(c)\dots - abc\dots S^n(l)$ durch jede von den Zahlen $a, b, c, \dots l$ und also auch durch ihr Product theilbar.

3. Wenn a, n beliebige positive ganze Zahlen sind, so ist

$$2S^{2n+1}(a) \equiv (2n+1)aS^{2n}(a), \text{ mod. } a^2.$$

Es folgt dieser Satz aus der Congruenz

$$v^{2n+1} + (a-v)^{2n+1} \equiv (2n+1)av^{2n}, \text{ mod. } a^2,$$

wenn für v nach und nach die Werthe 0, 1, 2, 3, ... a gesetzt werden. Die Congruenz $2S^{2n+1}(a) \equiv 0$, mod. a gilt auch noch, wenn $n=0$ ist.

4. Wenn a, b, n beliebige positive ganze Zahlen sind, so ist

$$S^{2n}(ab) \equiv bS^{2n}(a), \text{ mod. } a^2.$$

Folgt aus 1. und 3.:

5. Wenn a, r, n positive ganze Zahlen sind, so ist

$$\frac{S^{2n}(a^r)}{a^r} - \frac{S^{2n}(a)}{a} = \text{ einer ganzen Zahl.}$$

Für $r=1$ ist der Satz offenbar. Da ferner, wenn ϱ eine positive ganze

Zahl bedeutet, nach dem Vorigen $S^{2n}(a^{\varrho+1}) \equiv a\,S^{2n}(a^{\varrho})$, mod. $a^{2\varrho}$, und also $\frac{S^{2n}(a^{\varrho+1})}{a^{\varrho+1}} - \frac{S^{2n}(a^{\varrho})}{a^{\varrho}} =$ einer ganzen Zahl ist, so ergiebt sich der Satz für ein anderes r, wenn für ϱ nach und nach die Zahlen 1, 2, 3, ... $r-1$ gesetzt werden.

6. Wenn $a, b, c, \dots l$ Primzahlen zu einander, $n, \alpha, \beta, \gamma, \dots \lambda$ aber beliebige positive ganze Zahlen sind, so ist nach 2. und 5.

$$\frac{S^{2n}(a^{\alpha}.b^{\beta}.c^{\gamma}\dots l^{\lambda})}{a^{\alpha}.b^{\beta}.c^{\gamma}\dots l^{\lambda}} - \frac{S^{2n}(a)}{a} - \frac{S^{(2n)}(b)}{b} - \frac{S^{2n}(c)}{c} \dots - \frac{S^{2n}(l)}{l} = \text{einer ganzen Zahl.}$$

7. Wenn a eine Primzahl und n eine beliebige positive ganze Zahl bezeichnet, so ist entweder $\frac{S^{n}(a)}{a} + \frac{1}{a}$ oder $\frac{S^{n}(a)}{a}$ einer ganzen Zahl gleich, je nachdem nämlich n durch $a-1$ theilbar oder nicht theilbar ist.

Im ersten Falle ist nämlich für jedes x, welches durch a nicht theilbar ist, $x^{n} \equiv 1$ und also $S^{n}(a) \equiv a-1 \equiv -1$, mod. a. Im letzten Falle aber gilt die Congruenz $x^{n+1} \equiv x$, mod. a nicht für jeden Werth von x. Da aber, wenn x durch a nicht theilbar ist, die Zahlen $x, 2x, 3x, \dots ax$, den Zahlen 1, 2, 3, ... a, wenn auch in veränderter Ordnung, congruent sind, so ist auch $x^{n}S^{n}(a) \equiv S^{n}(a)$ und also $S^{n}(a) \equiv 0$, mod. a.

8. Wenn u, n beliebige positive ganze Zahlen sind, und $a, b, c, \dots h$ diejenigen verschiedenen Primfactoren von u bezeichnen, für welche $a-1$, $b-1$, $c-1$, ... $h-1$ Theiler von $2n$ werden, so ist nach 6. und 7.

$$\frac{S^{2n}(u)}{u} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \dots + \frac{1}{h} = \text{einer ganzen Zahl.}$$

Nach 3. ist also

$$\frac{2\,S^{2n-1}(u)}{u^{2}} + \frac{2n+1}{a} + \frac{2n+1}{b} + \frac{2n+1}{c} \dots + \frac{2n+1}{h} = \text{einer ganzen Zahl.}$$

9. Wenn $m \geqq 3$ und x durch jede Primzahl theilbar ist, welche nicht gröfser als m ist, so ist auch x^{m-2} durch m theilbar.

Es sei irgend ein Primfactor a in m αmal enthalten, so enthält x^{m-2} denselben wenigstens $(m-2)$mal, und es ist nur zu beweisen, dafs $m \geqq a+2$ ist. Ist nun $\alpha = 1$, so ist der Annahme gemäfs $m \geqq \alpha + 2$. Ist aber $\alpha > 1$, so ist $a^{\alpha} > \alpha + 2$, und also noch weit mehr $m > \alpha + 2$.

10. Wenn $B^{(n)}$ die $n$te *Bernoulli*sche Zahl bezeichnet, und $\alpha, \beta, \gamma, \dots \lambda$ diejenigen Theiler von n sind, für welche $2\alpha+1$, $2\beta+1$, $2\gamma+1$, ... $2\lambda+1$ Primzahlen werden, so ist:

$$B^{(n)} \pm \left(\tfrac{1}{2} + \frac{1}{2\alpha+1} + \frac{1}{2\beta+1} + \frac{1}{2\gamma+1} \cdots + \frac{1}{2\lambda+1}\right) = \text{einer ganzen Zahl,}$$

wo $\pm$ gilt, wenn n $\begin{matrix}\text{ungerade}\\ \text{gerade}\end{matrix}$ ist.

Es sei x das Product aus allen Primzahlen, welche nicht gröfser als $2n+1$ sind, so ist, wenn der Satz für jede Zahl gilt, welche $<n$ ist, $\frac{S^{2n}(x)}{x} \mp B^{(n)} = \frac{1}{2}x^{2n-1} \mp 2n_2 B^{(n-1)} x . \frac{1}{3}x \pm 2n_4 B^{(n-2)} x . \frac{1}{5}x^3 \ldots + \frac{x^{2n}}{2n+1} =$ einer ganzen Zahl. Nach 8. ist aber auch $\frac{S^{2n}(x)}{x} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\alpha+1} + \frac{1}{2\beta+1} + \frac{1}{2\gamma+1} \cdots + \frac{1}{2\lambda+1}$ eine ganze Zahl, woraus hervorgeht, dafs der Satz für n gilt, wenn er für jede kleinere Zahl gilt. Nun gilt er für $n=1$: also allgemein.

Anmerkung. Nach dem neuesten Blatte von *Schumachers* Astronomischen Nachrichten ist von Herrn *Thomas Clausen* eine Abhandlung über die *Bernoulli*schen Zahlen zu erwarten, in welcher unter andern auch obiges Theorem, welches ich bereits vor mehreren Jahren dem Herrn Hofrath *Gaufs* mitgetheilt habe, abgehandelt wird. Es gab mir dies Veranlassung, den Beweis, welchen ich davon fand, zu veröffentlichen.

Erlangen, den 16ten August 1840.