15.

Note von der geodätischen Linie auf einem Ellipsoid und den verschiedenen Anwendungen einer merkwürdigen analytischen Substitution.

(Von Herrn *C. G. J. Jacobi*, Professor ordin. zu Königsberg in Pr.)

(Gelesen in der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin am 18. April 1839.)

Da die Erdoberfläche nicht die Form einer Umdrehungsfläche besitzt, so hat man öfter versucht, den an einem Punct derselben ausgeführten Triangulirungen ein osculirendes Ellipsoid mit drei ungleichen Haupt-Achsen anzuschliefsen. Dies erhöht das Interesse der Aufgabe, die geodätische Linie auf einem solchen Ellipsoid zu suchen, eine Aufgabe, die von den gröfsten analytischen Schwierigkeiten umringt zu sein scheint. In der That erscheint die Differenzialgleichung 2ter Ordnung, von welcher das Problem abhängt, wenn man die gewöhnlich üblichen Variabeln wählt, in einer so complicirten Form, dafs man leicht von jeder Behandlung derselben abgeschreckt wird. Nach mehreren vergeblichen Versuchen ist es mir jedoch durch Anwendung besonderer Hülfsmittel gelungen, diese Gleichung vollständig zu integriren, d. h. auf Quadraturen zurückzuführen, wie ich der Pariser Akademie der Wissenschaften unter dem 28. December des vorigen Jahres mitgetheilt habe. Ich will jetzt die Form des Resultats näher auseinander setzen. Es sei die Gleichung des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=1,$$

und a die kleinste, b die mittlere, c die gröfste der drei Constanten a, b, c. Da man die drei Coordinaten des Punctes einer gegebenen Oberfläche durch zwei Gröfsen ausdrücken kann, so wähle ich hierzu die Winkel φ und ψ, welche die Coordinaten durch die Formeln bestimmen,

$$x=\sqrt{\left(\frac{a}{c-a}\right)}\sin\varphi\sqrt{(b\cos^2\psi+c\sin^2\psi-a)},$$
$$y=\sqrt{b}\cos\varphi\sin\psi,$$
$$z=\sqrt{\left(\frac{c}{c-a}\right)}\cos\psi\sqrt{(c-a\cos^2\varphi-b\sin^2\varphi)}.$$

Die geodätische Linie auf dem gegebenen Ellipsoid wird dann durch eine Gleichung zwischen den beiden Winkeln φ und ψ bestimmt,

$$\alpha = \int \frac{\sqrt{(a\cos^2\varphi + b\sin^2\varphi)}\, d\varphi}{\sqrt{(c - a\cos^2\varphi - b\sin^2\varphi)}\sqrt{((b-a)\cos^2\varphi - \beta)}}$$

$$- \int \frac{\sqrt{(b\cos^2\psi + c\sin^2\psi)}\, d\psi}{\sqrt{(b\cos^2\psi + c\sin^2\psi - a)}\sqrt{((c-b)\sin^2\psi + \beta)}}.$$

Die Form dieser Gleichung ist, wie man sieht, sehr einfach. Eine Function des Winkels φ wird einer Function des Winkels ψ gleich; die Functionen selbst sind *Abel*sche Integrale und zwar von der Form, welche zunächst auf die elliptischen folgt. Die beiden *Abel*schen Integrale sind, wenn sie auch hier in der trigonometrischen Form verschieden scheinen, doch im Wesen dieselben, so dafs man beide durch einfache Substitutionen in Integrale von derselben Form verwandeln kann, in denen die Werthe, welche die Variable anzunehmen hat, sich nur in verschiedenen Intervallen bewegen. Die Gröfsen α und β sind die beiden willkürlichen Constanten, welche das vollständige Integral der Differenzialgleichung 2ter Ordnung enthalten mufs. Die Constante α wird 0, wenn man die Integrale von denjenigen Werthen von φ und ψ beginnen läfst, welche dem Puncte des Ellipsoids entsprechen, von dem aus man die geodätische Linie zieht. Die andere willkürliche Constante β kommt nur in einem der drei untern dem Integralzeichen als Factoren befindlichen Radicalen vor; sie wird auf algebraischem Wege durch die anfängliche Richtung bestimmt, die man der geodätischen Linie giebt. Man erhält ganz ähnliche Ausdrücke für die Rectification der geodätischen Linie. Für das Umdrehungs-Ellipsoid verwandelt sich das eine der beiden *Abel*schen Integrale in einen Kreisbogen, das andere in ein elliptisches Integral der 3ten Gattung, wodurch man die für das Umdrehungs-Ellipsoid bekannte Gleichung der geodätischen Linie erhält.

Die hier angewandte Art, die drei Coordinaten des Punctes eines Ellipsoids durch zwei Winkel φ und ψ auszudrücken, ist dieselbe, auf welche man geführt wird, wenn man den Punct des Ellipsoids als Intersection der beiden Krümmungslinien bestimmt, auf welchen er liegt, oder, was nach der schönen Bemerkung von ***Karl Dupin*** dasselbe ist, wenn man ihn als Intersection des Ellipsoids mit den beiden durch ihn gehenden Hyperboloiden betrachtet, deren Hauptschnitte mit denen des Ellipsoids die Brennpuncte gemein haben. *Legendre* hat zuerst die hierauf bezüglichen von *Monge* gegebenen Formeln als analytisches Instrument benutzt, um den Inhalt der Oberfläche des Ellipsoids auf die Länge von Ellipsenbogen zurückzuführen, wie einst *Archimedes* den Inhalt der Kugel-Oberfläche auf die Länge der Kreisperipherie zurückgeführt hat *). Früher benutzte schon *Euler* ähnliche, aber auf die Ebene beschränkte Formeln in seiner berühmten Bestimmung der Bewegung eines nach zwei festen Centren nach dem *Neuton*schen Gesetze angezogenen Punctes. Denn die von ihm gewählten Variabeln kommen nach einer Bemerkung *Legendres* darauf hinaus, den angezogenen Punct als Durchschnitt der durch ihn gehenden Ellipse und Hyperbel zu bestimmen, welche die beiden Anziehungscentra zu gemeinschaftlichen Brennpuncten haben.

Man kann eine andere merkwürdige Anwendung der oben angegebenen Art, die Coordinaten des Punctes eines Ellipsoids auszudrücken, auf die Aufgabe machen, die Oberfläche des Ellipsoids so auf einer Karte abzubilden, daſs die unendlich kleinen Theile ähnlich bleiben. In dieser Art hat *Lambert* in seinen Beiträgen das Problem der Kartenprojection aufgefaſst, und *Lagrange* hat in den Schriften dieser Akademie die allgemeine Lösung für alle Rotationsflächen gegeben, welche *Gauſs* in einer von der Kopenhagener Akademie gekrönten und in *Schumachers* astronomischen Abhandlungen abgedruckten Preisschrift auf alle Flächen ausgedehnt hat. Drückt man das Element einer auf der Fläche gezeichneten Curve durch

$$\sqrt{(A\,dt^2 + 2B\,dt\,du + C\,du^2)}$$

aus, wo t und u die beiden Variabeln sind, durch welche man einen Punct der gegebenen Fläche bestimmt, so hat man den quadratischen Ausdruck

$$A\,dt^2 + 2B\,dt\,du + C\,du^2$$

in zwei Factoren,

$$P\,dt + (Q + \sqrt{R})\,du \quad \text{und} \quad P\,dt + (Q - \sqrt{R})\,du,$$

zu zerfällen. Die Lösung des Problems hängt dann nach der von *Gauſs* gegebenen Theorie von der Integration der Gleichung

$$0 = P\,dt + (Q + \sqrt{R})\,du$$

*) Ich habe im 8ten Bande gegenwärtigen Journals gezeigt, daſs man zu den von *Legendre* gefundenen Resultaten auch auf sehr einfachem und elementarem Wege gelangen kann, wenn man die Coordinaten des Puncts eines Ellipsoids durch die beiden Winkel ausdrückt, welche die Richtung der an ihm errichteten Normale bestimmen. Eine andere hierzu führende, eben so neue als elegante und umfassende Methode hat neuerdings *Dirichlet* in einer der Akademie gelesenen Abhandlung angegeben.

ab, in welcher *P, Q, R* gegebne Functionen von *t* und *u* sind. Für Rotationsflächen läfst sich diese Gleichung immer integriren und man kommt dann auf die von *Lagrange* gegebenen Formeln. Ich bemerke noch, was man leicht sieht, dafs dasselbe allgemein für conische und cylindrische Flächen der Fall ist. Wenn man daher auch alle speciellen Flächen zweiter Ordnung leicht behandelt, so bietet doch die Aufgabe für die allgemeine Fläche zweiter Ordnung bei der gewöhnlichen Wahl der Variabeln unübersteigliche Hindernisse wegen der ungemein complicirten Form der zu integrirenden Differenzialgleichung. Nimmt man aber den Ausdruck des Elements einer auf einem Ellipsoid befindlichen Curve, welchen ich im 8ten Bandes des gegenwärtigen Journals gegeben habe, so finden sich in der Differenzialgleichung die Variabeln von selbst separirt, und die Aufgabe ist auf blofse Quadraturen zurückgeführt, und zwar auch hier auf *Abel*sche Transcendenten.

Man kann leicht die in den eben angedeuteten Problemen auf drei Variabeln bezüglichen Formeln auf jede Zahl Variabeln ausdehnen, und bekommt dann merkwürdige Amplificationen wichtiger Theoreme. Auf diese Weise habe ich die berühmte von *Legendre* entdeckte Relation zwischen den vollständigen Integralen der ersten und zweiten Gattung zweier elliptischen Integrale, deren Moduln Complemente zu einander sind, auf alle *Abel*schen Integrale ausgedehnt. Aber dieselbe Substitution hat mich auch auf das *Abel*sche Theorem selbst geführt, auf einem Wege und durch Betrachtungen, welche von dem von *Abel* eingeschlagenen gänzlich verschieden sind, und welche von einem mechanischen Problem ausgehen. Die von *Euler* gegebenen Formeln für die Bahn eines von zwei festen Centren angezogenen Punctes enthalten elliptische Transcendenten. Ist die eine Masse oder beide Null, so ist die Bahn eine Ellipse oder gerade Linie, also ihre Gleichung algebraisch. Aber durch das Verschwinden einer oder beider Massen hören die elliptischen Integrale nicht auf elliptische Integrale zu sein, so dafs man die elliptische Bewegung eines Planeten oder selbst die geradlinige Bewegung eines Punctes durch eine Gleichung zwischen elliptischen Integralen erhält. Diese Form ist nicht ohne Interesse; denn wir haben hier für die elliptische Bewegung Formeln, die nur eine geringe Aenderung erleiden, wenn noch ein zweites anziehendes Centrum hinzukommt. Aber abgesehen hiervon, sind zwei Methoden gegeben, dasselbe Problem zu behandeln, von denen die eine die Lösung in transcendenter, die andere in algebraischer Form darstellt, oder es ist eine neue Methode gegeben, das Fundamentaltheorem über die Addition der elliptischen Integrale aufzufinden. In seiner Behandlung des mechanischen Problems in den älteren Schriften dieser Akademie hat *Euler* das früher von ihm gefundene Fundamentaltheorem nur zur Verificirung der für die speciellen Fälle gefundenen Formeln benutzt. Mir schien es von Wichtigkeit, die beiden Methoden mit einander in Verbindung zu setzen, welche die transcendente und die algebraische Form ergeben, um so direct von der einen auf die andere zu kommen. Indem ich die für zwei Variabeln angewandten Formeln auf jede Zahl Variabeln ausdehnte, was, wie ich bemerkt, mit Leichtigkeit geschieht, erhielt ich das *Abel*sche Theorem, und zwar in einer neuen, merkwürdigen und fertigen Form. Zugleich ergab sich ein einfacher Weg von dem System gewöhnlicher Differenzialgleichungen, wie ich dasselbe früher in einer Abhandlung im gegenwärtigen Journal über die *Abel*schen Transcendenten aufgestellt habe, durch Anwendung passender Multiplicationen direct zu den algebraischen Integralen zu gelangen, was mir früher wegen der grofsen Complication des Gegenstandes wohl wünschenswerth, aber schwer zu erreichen schien.

Einer der tiefsinnigsten Mathematiker, Herr *Lamé*, Correspondent dieser Akademie, hat neuerdings die hier erwähnten Substitutionen auf schwierige physikalische Probleme angewendet.

18. April 1839.