8.

Ueber die Reduction der Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen irgend einer Zahl Variabeln auf die Integration eines einzigen Systemes gewöhnlicher Differentialgleichungen.

(Von Herrn Prof. *C. G. J. Jacobi* zu Königsberg in Preufsen.)

1.

Professor *Hamilton* hat in zweien Abhandlungen in den *Philos. Transact.* vom J. 1834. P. II. und vom J. 1835. P. I. das merkwürdige Resultat gefunden, dafs in den Fällen der Mechanik, in welchen der Satz von der lebendigen Kraft gilt, sich die Integralgleichungen der Bewegung, eben so wie die Differentialgleichungen in der ihnen von *Lagrange* gegebnen Form, sämmtlich durch die partiellen Differentialquotienten einer einzigen Function darstellen lassen. Der Gang seiner Betrachtung ist ungefähr der folgende.

Es seien die Differentialgleichungen der Bewegung eines Systems von n materiellen Puncten, welche den Bedingungen $F = 0$, $F_1 = 0$, ... unterworfen sind,

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial F}{\partial x_i} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_i} \dots,$$
$$m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i} + \lambda \frac{\partial F}{\partial y_i} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial y_i} \dots,$$
$$m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i} + \lambda \frac{\partial F}{\partial z_i} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial z_i} \dots,$$

in welchen Gleichungen dem Index i die Werthe $1, 2, \dots n$ zu geben sind, und m_i die Masse eines Punctes bedeutet, dessen rechtwinklige Coordinaten x_i, y_i, z_i sind. Dies ist die *Lagrange*sche Form der Differentialgleichungen, welche ihnen in allen Fällen gegeben werden kann, in welchen der Satz von der lebendigen Kraft gilt:

$$\tfrac{1}{2} \Sigma m_i \left[\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2 \right] = U + h,$$

wo h eine Constante. Die Gröfsen λ, λ_1 etc. sind der Symmetrie wegen eingeführte Factoren, welche vermittelst der Bedingungsgleichungen eliminirt werden müssen. Die Function U, deren partielle Differentiation die angebrachten Kräfte giebt, will ich die **Kräftefunction** nennen.

Hat man die aufgestellten Differentialgleichungen vollständig integrirt, so kennt man die $3n$ Coordinaten als Functionen der Zeit und der willkührlichen Constanten. Es werden diese Werthe in die Kräftefunction U substituirt, und ihr partielles Differentiale nach einer der willkührlichen Constanten, die ich α nennen will, genommen: so hat man

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial \alpha} &= \Sigma\left[\frac{\partial U}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial \alpha}+\frac{\partial U}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial y_i}{\partial \alpha}+\frac{\partial U}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial z_i}{\partial \alpha}\right]\\ &= \Sigma m_i\left[\frac{d^2 x_i}{dt^2}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial \alpha}+\frac{d^2 y_i}{dt^2}\cdot\frac{\partial y_i}{\partial \alpha}+\frac{d^2 z_i}{dt^2}\cdot\frac{\partial z_i}{\partial \alpha}\right],\end{aligned}$$

da die in λ, λ_1, ... multiplicirten Ausdrücke wegen der Bedingungsgleichungen verschwinden.

Den letztern Ausdruck kann man auch so darstellen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial \alpha} &= \frac{d\Sigma m_i\left[\frac{dx_i}{dt}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial \alpha}+\frac{dy_i}{dt}\cdot\frac{\partial y_i}{\partial \alpha}+\frac{dz_i}{dt}\cdot\frac{\partial z_i}{\partial \alpha}\right]}{dt}\\ &\quad -\Sigma m_i\left[\frac{\partial x_i}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x_i}{\partial \alpha\,\partial t}+\frac{\partial y_i}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 y_i}{\partial \alpha\,\partial t}+\frac{\partial z_i}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 z_i}{\partial \alpha\,\partial t}\right].\end{aligned}$$

Der zweite Theil des Ausdruckes rechter Hand vom Gleichheitszeichen läfst sich ebenfalls als ein partielles, nach α genommenes Differentiale darstellen:

$$-\frac{1}{2}\,\frac{\partial\Sigma m_i\left[\frac{\partial x_i}{\partial t}^2+\frac{\partial y_i}{\partial t}^2+\frac{\partial z_i}{\partial t}^2\right]}{\partial \alpha},$$

wodurch die vorstehende Gleichung sich in folgende verwandelt:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\left[U+\frac{1}{2}\Sigma m_i\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}^2+\frac{\partial y_i}{\partial t}^2+\frac{\partial z_i}{\partial t}^2\right)\right]}{\partial \alpha}\\ &= \frac{d\Sigma m_i\left[\frac{\partial x_i}{\partial t}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial \alpha}+\frac{\partial y_i}{\partial t}\cdot\frac{\partial y_i}{\partial \alpha}+\frac{\partial z_i}{\partial t}\cdot\frac{\partial z_i}{\partial \alpha}\right]}{dt}.\end{aligned}$$

Diese merkwürdige Gleichung ist den Analysten, welche sich mit der Variation der Constanten in den Problemen der Mechanik beschäftigt haben, nicht entgangen. Es folgt daraus mit Leichtigkeit eines der Haupttheoreme dieser Theorie. Setzt man nämlich

$$\frac{\partial x}{\partial t}=x',\quad \frac{\partial y}{\partial t}=y',\quad \frac{\partial z}{\partial t}=z',$$

so dafs die vorstehende Gleichung wird:

$$\frac{\partial[U+\frac{1}{2}\Sigma m_i(x_i'^2+y_i'^2+z_i'^2)]}{\partial\alpha}=\frac{d\Sigma m_i\left[x_i'\frac{\partial x_i}{\partial\alpha}+y_i'\frac{\partial y_i}{\partial\alpha}+z_i'\frac{\partial z_i}{\partial\alpha}\right]}{dt},$$

und bedeutet β irgend eine zweite willkührliche Constante, so sehen wir dafs die beiden Ausdrücke

$$\frac{d\Sigma m_i\left[x_i'\frac{\partial x_i}{\partial\alpha}+y_i'\frac{\partial y_i}{\partial\alpha}+z_i'\frac{\partial z_i}{\partial\alpha}\right]}{dt},\qquad \frac{d\Sigma m_i\left[x_i'\frac{\partial x_i}{\partial\beta}+y_i'\frac{\partial y_i}{\partial\beta}+z_i'\frac{\partial z_i}{\partial\beta}\right]}{dt}$$

die partiellen Differentialquotienten eines und desselben Ausdrucks

$$U+\tfrac{1}{2}\Sigma m_i(x_i'^2+y_i'^2+z_i'^2)$$

sind, das eine Mal nach α, das andere Mal nach β genommen. Es wird also das Differential des ersten Ausdrucks nach β genommen gleich dem Differential des zweiten Ausdrucks nach α genommen sein, welches nach Weglassung der sich aufhebenden Terme die Gleichung giebt:

$$\frac{d\Sigma m_i\left[\frac{\partial x_i'}{\partial\beta}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial\alpha}+\frac{\partial y_i'}{\partial\beta}\cdot\frac{\partial y_i}{\partial\alpha}+\frac{\partial z_i'}{\partial\beta}\cdot\frac{\partial z_i}{\partial\alpha}\right]}{dt}$$
$$-\frac{d\Sigma m_i\left[\frac{\partial x_i'}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial\beta}+\frac{\partial y_i'}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial y_i}{\partial\beta}+\frac{\partial z_i'}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial z_i}{\partial\beta}\right]}{dt}=0.$$

Diese Gleichung lehrt, dafs der Ausdruck

$$\Sigma m_i\left[\frac{\partial x_i'}{\partial\beta}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial\alpha}+\frac{\partial y_i'}{\partial\beta}\cdot\frac{\partial y_i}{\partial\alpha}+\frac{\partial z_i'}{\partial\beta}\cdot\frac{\partial z_i}{\partial\alpha}\right]-\Sigma m_i\left[\frac{\partial x_i'}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial\beta}+\frac{\partial y_i'}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial y_i}{\partial\beta}+\frac{\partial z_i'}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial z_i}{\partial\beta}\right]$$

von t unabhängig oder eine blofse Constante ist, welches der berühmte *Lagrange*sche Satz ist. Man beweist auch noch leicht, dafs wenn γ irgend eine dritte willkührliche Constante ist, und man jenen Ausdruck mit (α,β) bezeichnet, die Gleichungen Statt finden:

$$(\alpha,\alpha)=0,\qquad(\alpha,\beta)+(\beta,\alpha)=0,$$
$$\frac{\partial(\beta,\gamma)}{\partial\alpha}+\frac{\partial(\gamma,\alpha)}{\partial\beta}+\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial\gamma}=0.$$

Aber *Hamilton* zieht aus der Gleichung, welche wir fanden:

$$\frac{\partial[U+\frac{1}{2}\Sigma m_i(x_i'^2+y_i'^2+z_i'^2)]}{\partial\alpha}=\frac{d\Sigma m_i\left(x_i'\frac{\partial x_i}{\partial\alpha}+y_i'\frac{\partial y_i}{\partial\alpha}+z_i'\frac{\partial z_i}{\partial\alpha}\right)}{dt},$$

neue Vortheile durch folgendes Verfahren, welches eben sowohl durch die Methode als durch die Resultate, zu welchen es führt, höchst bemerkenswerth ist. Setzt man nämlich:

$$S = \int_0^t [U + \tfrac{1}{2}\Sigma m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2)]\, dt,$$

so ist nach der bekannten Regel der Differentiation unter dem Zeichen:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \int_0^t \frac{\partial [U + \frac{1}{2}\Sigma m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2)]}{\partial \alpha}\, dt,$$

oder der obigen Gleichung zu Folge:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \int_0^t \frac{d\,\Sigma m_i \left(x' \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} + y_i' \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} + z_i' \frac{\partial z_i}{\partial \alpha}\right)}{dt}\, dt.$$

Sind a, b, c die Anfangswerthe von x, y, z und a', b', c' die Anfangswerthe von x', y', z', oder diejenigen Werthe, welche dem Werthe $t = 0$ entsprechen, so giebt diese Gleichung:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \Sigma m_i \left(x_i' \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} + y_i' \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} + z_i' \frac{\partial z_i}{\partial \alpha}\right) - \Sigma m_i \left(a_i' \frac{\partial a_i}{\partial \alpha} + b_i' \frac{\partial b_i}{\partial \alpha} + c_i' \frac{\partial c_i}{\partial \alpha}\right).$$

Die Function S ist eine Function von t und den willkührlichen Constanten; sie wurde dadurch definirt, daſs ihr nach t genommenes Differentiale gleich ist der Summe der Kräftefunction und der halben lebendigen Kraft. Die vorstehende Gleichung lehrt auch ihr Differentiale finden, wenn man bloſs die willkührlichen Constanten als veränderlich betrachtet. Bezeichnet man nämlich durch die Characteristik ∂' das Differentiale, welches man erhält, wenn man gleichzeitig alle willkührlichen Constanten ändert, t aber ungeändert läſst, so giebt die vorstehende Gleichung, wenn man sie mit $\partial \alpha$ multiplicirt, und die Summe aus allen ähnlichen bildet, die man für jede der willkührlichen Constanten erhält,

$$\partial' S = \Sigma m_i (x_i' \partial' x_i + y_i' \partial' y_i + z_i' \partial' z_i) - \Sigma m_i (a_i' \partial' a_i + b_i' \partial' b_i + c_i' \partial' c_i).$$

Dies ist das vollständige Differential von S, wenn man t constant setzt, und es als Function der willkührlichen Constanten betrachtet.

Ist das System ganz frei, so hat man $6n$ willkührliche Constanten, als deren Functionen S und die $6n$ Gröſsen x, y, z, a, b, c betrachtet werden. Vermittelst der Integralgleichungen kann man die $3n$ Gröſsen a, b, c durch diese $6n$ Constanten ausdrücken, und die $3n$ Gröſsen x, y, z durch diese Constanten und die Zeit t. Man kann daher auch die $6n$ willkührlichen Constanten als Functionen der Zeit und der $6n$ Gröſsen x, y, z, a, b, c betrachten, wodurch auch S eine Function der Zeit t und der $6n$ Gröſsen x, y, z, a, b, c wird. Nimmt man in diesem Sinne die partiellen Differentialquotienten von S, so giebt der vorstehende Ausdruck des vollständigen Differentials von S, sogleich seine nach den Gröfsen x, y, z, a, b, c genommenen partiellen Differentiale, nämlich:

$$\frac{\partial S}{\partial x_i} = m_i x_i' \qquad \frac{\partial S}{\partial a_i} = -m_i a_i'$$
$$\frac{\partial S}{\partial y_i} = m_i y_i' \qquad \frac{\partial S}{\partial b_i} = -m_i b_i'$$
$$\frac{\partial S}{\partial z_i} = m_i z_i' \qquad \frac{\partial S}{\partial c_i} = -m_i c_i'$$

Die vorstehenden $6n$ Gleichungen kann man als die vollständigen Integralgleichungen der vorgelegten Aufgabe betrachten, und zwar sind die Gleichungen links die $3n$ Integrale erster Ordnung (welche *Hamilton* auch Zwischenintegrale nennt), die Gleichungen rechter Hand, die $3n$ endlichen Integrale selber.

Ist das System nicht frei, sondern sind die k Bedingungen gegeben,

$$F = 0, \quad F_1 = 0, \quad \ldots \quad F_{k-1} = 0,$$

welchen die Puncte desselben Genüge leisten müssen; so kann man die $3n$ Functionen x, y, z, welche man sucht, auf $3n - k$ reduciren, und braucht von den $3n$ Differentialgleichungen 2ter Ordnung nur $3n - k$ anzuwenden. Man hat daher nur $6n - 2k$ willkührliche Constanten, für welche man in den Ausdruck von S wieder die $3n - k$ Gröfsen, auf welche man die $3n$ Gröfsen, x, y, z zurückgeführt hat, und ihre Anfangswerthe, auf welche sich durch dieselbe Bedingungsgleichungen die $3n$ Gröfsen a, b, c zurückführen lassen, einführen kann. Zu der Gleichung durch welche wir, wenn man t constant setzt, das vollständige Differentiale von S, im obigen Sinne genommen ausgedrückt haben, und welche sich auch so darstellen läfst,

$$\begin{aligned} 0 = & \Sigma\left(\frac{\partial S}{\partial x_i} - m_i x_i'\right)\partial x_i + \Sigma\left(\frac{\partial S}{\partial a_i} + m_i a_i'\right)\partial a_i \\ & + \Sigma\left(\frac{\partial S}{\partial y_i} - m_i y_i'\right)\partial y_i + \Sigma\left(\frac{\partial S}{\partial b_i} + m_i b_i\right)\partial b_i \\ & + \Sigma\left(\frac{\partial S}{\partial z_i} - m_i z_i'\right)\partial z_i + \Sigma\left(\frac{\partial S}{\partial c_i} + m_i c_i\right)\partial c_i, \end{aligned}$$

sind dann eben so k von den $3n$ Differentialen $\partial x, \partial y, \partial z$ und k von den Differentialen $\partial a, \partial b, \partial c$ vermittelst der Bedingungsgleichungen zu eliminiren und die in die übrigen unabhängigen Differentialen multiplicirten Ausdrücke einzeln $= 0$ zu setzen. Bedeutet F^0 den Ausdruck von F, wenn man darin für die $3n$ Gröfsen x, y, z ihre Anfangswerthe a, b, c setzt, so bewerkstelligt man diese Elimination, indem man die k Gleichungen,

$$\Sigma\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\partial x_i+\frac{\partial F}{\partial y_i}\partial y_i+\frac{\partial F}{\partial z_i}\partial z_i\right)=\partial F=0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

und die k Gleichungen

$$\Sigma\left(\frac{\partial F^0}{\partial a_i}\partial a_i+\frac{\partial F^0}{\partial b_i}\partial b_i+\frac{\partial F^0}{\partial c_i}\partial c_i\right)=\partial F^0=0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

jede mit einem Factor multiplicirt, zu der obigen Gleichung hingefügt, und diese Factoren so bestimmt, daſs die k von den Differentialen ∂x, ∂y, ∂z, und die k von den Differentialen ∂a, ∂b, ∂c, welche man eliminiren will, verschwinden. Da nun auch die in die übrigen unabhängigen Differentialen multiplicirten Ausdrücke verschwinden müssen, so erhält man, wenn man die Factoren mit λ, $\lambda_1, \ldots\ldots$, $-\lambda^0$, $-\lambda_1^0\ldots\ldots$ bezeichnet, das System von $6n$ Gleichungen:

$$\begin{aligned}
m_i x_i' &= \frac{\partial S}{\partial x_i}+\lambda\frac{\partial F}{\partial x_i}+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial x_i}+\ldots\ldots\\
m_i y_i' &= \frac{\partial S}{\partial y_i}+\lambda\frac{\partial F}{\partial y_i}+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial y_i}+\ldots\ldots\\
m_i z_i' &= \frac{\partial S}{\partial z_i}+\lambda\frac{\partial F}{\partial z_i}+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial z_i}+\ldots\ldots\\
m_i a_i' &= -\frac{\partial S}{\partial a_i}+\lambda^0\frac{\partial F^0}{\partial a_i}+\lambda_1^0\frac{\partial F_1^0}{\partial a_i}+\ldots\ldots\\
m_i b_i' &= -\frac{\partial S}{\partial b_i}+\lambda^0\frac{\partial F^0}{\partial b_i}+\lambda_1^0\frac{\partial F_1^0}{\partial b_i}+\ldots\ldots\\
m_i c_i' &= -\frac{\partial S}{\partial c_i}+\lambda^0\frac{\partial F^0}{\partial c_i}+\lambda_1^0\frac{\partial F_1^0}{\partial c_i}+\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

welche jetzt als die vollständigen Integralgleichungen mit Hinzuziehung der Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned}
F&=0, \quad F_1=0, \ \ldots\ldots\\
F_0&=0, \quad F_1^0=0, \ \ldots\ldots
\end{aligned}$$

zu betrachten sind. Die Multiplicatoren werden durch Auflösung einer gleichen Zahl lineärer Gleichungen gefunden, welche man dadurch erhält, daſs man die vorstehenden Gleichungen in die folgenden durch Differentiation ans den Bedingungsgleichungen sich ergebenden substituirt.

$$\begin{aligned}
\frac{dF}{dt} &= \Sigma\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}x_i'+\frac{\partial F}{\partial y_i}y_i'+\frac{\partial F}{\partial z_i}z_i'\right)=0,\\
\frac{dF_1}{dt} &= \Sigma\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_i}x_i'+\frac{\partial F_1}{\partial y_i}y_i'+\frac{\partial F_1}{\partial z_i}z_i'\right)=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

so wie die Gleichungen die man für $t=0$ aus diesen erhält,

$$\Sigma\left(\frac{\partial F^0}{\partial a_i}a_i' + \frac{\partial F^0}{\partial b_i}b_0' + \frac{\partial F^0}{\partial c_i}c_0'\right) = 0$$

$$\Sigma\left(\frac{\partial F_1^0}{\partial a_i}a_i' + \frac{\partial F_1^0}{\partial b_i}b_0' + \frac{\partial F^0}{\partial c_i}c_0'\right) = 0$$

. . . .

Wir sehen, wie auch in dem Falle eines nicht freien Systems die Integralgleichungen eine ganz analoge Form mit derjenigen erhalten haben, in welche *Lagrange* die Differentialgleichungen der Mechanik gebracht hat.

Wenn der Satz von der lebendigen Kraft gilt, so kann man die Function S auch so ausdrücken:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^t [U + \tfrac{1}{2}\Sigma m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2)]\,dt \\ &= \int_0^t \Sigma m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2)\,dt - ht \\ &= 2\int_0^t U\,dt + ht, \end{aligned}$$

wo h eine willkührliche Constante ist. Ich habe aber im Vorhergehenden den Satz von der lebendigen Kraft nicht benutzt, weil diese Resultate, wie Professor *Hamilton* nicht angemerkt hat, auf einen Fall ausgedehnt werden können, für welchen dieser Satz nicht gilt, auf den Fall nämlich, wo die Kräftefunction außer den Coordinaten noch die Zeit t explicite enthält, wie z. B. wenn ein Punct ohne Masse von beweglichen Centren angezogen wird, deren Bewegung bekannt und gegeben ist. Ich werde diese Ausdehnung der Formeln, wo sie statthaft ist, allezeit angeben, da der angegebene Fall der Mechanik in der That seine Anwendung findet.

2.

Die Definition, welche wir von der Function S gegeben haben, setzt die vollständige Integration der Differentialgleichungen des mechanischen Problems bereits voraus. Die vorstehenden Resultate hätten dann nur das Interesse, das System der Integralgleichungen in eine merkwürdige Form gebracht zu haben. Man kann aber noch die Function S auf eine ganz verschiedene, und viel allgemeinere Art definiren. Ich werde mich im Folgenden auf den Fall eines ganz freien Systems beschränken; den Fall, wo irgend welche Verbindungen und Bedingungen zwischen den Puncten Statt finden, werde ich in einer spätern Abhandlung wieder aufnehmen, deren hauptsächlichste Resultate ich bereits an einen andern Ort mitgetheilt habe.

Wir betrachten S wieder als Function der Zeit, der Coordinaten der Puncte und ihrer Anfangswerthe. Differentiiren wir S vollständig nach der Zeit, indem wir auch die Coordinaten als Functionen der Zeit betrachten, so erhalten wir, der Definition von S zufolge:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \Sigma\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}x'_i + \frac{\partial S}{\partial y_i}y'_i + \frac{\partial S}{\partial z_i}z'_i\right) = U + \tfrac{1}{2}\Sigma m_i(x'^2_i + y'^2_i + z'^2_i).$$

Hieraus folgt, da

$$x'_i = \frac{1}{m_i}\cdot\frac{\partial S}{\partial x_i},\quad y'_i = \frac{1}{m_i}\cdot\frac{\partial S}{\partial y_i},\quad z'_i = \frac{1}{m_i}\cdot\frac{\partial S}{\partial z_i},$$

der Ausdruck des partiellen Differentiales von S nach t genommen

$$\frac{\partial S}{\partial t} = U - \tfrac{1}{2}\Sigma m_i(x'^2_i + y'^2_i + z'^2_i),$$

welcher Ausdruck sich, wenn U nicht t explicite enthält, also der Satz von der lebendigen Kraft gilt, in folgenden vereinfacht,

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -h,$$

wo h eine willkührliche Constante ist.

Man erhält aus dem Ausdrucke von $\frac{\partial S}{\partial t}$ auch folgende Gleichung:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z_i}\right)^2\right] = U,$$

und dieses ist eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung, welcher die Function S Genüge leisten mufs. Die Function S, wie sie oben definirt worden, ist eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, indem sie aufser einer Constante, die man offenbar zu ihr noch hinzufügen kann (da nicht die Function selber, sondern nur ihre Differentialquotienten in der Gleichung vorkommen), $3n$ willkührliche Constanten, nämlich die Anfangswerthe der Coordinaten enthält, und die Zahl der unabhängigen Variabeln ebenfalls $3n+1$ beträgt. Ich will einen Augenblick bei der Natur der verschiedenen Lösungen einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung verweilen.

Man nennt nach *Lagrange* vollständige Lösung einer partiellen nicht lineären Differentialgleichung erster Ordnung eine solche, welche eine gleiche Zahl willkührlicher Constanten enthält, wie die Zahl der unabhängigen Variabeln beträgt, weil man vermittelst der, nach diesen genommenen partiellen Differentialquotienten der gesuchten Function eine solche Zahl willkührlicher Constanten eliminiren kann, und im Allgemeinen keine gröſsere. Kennt man eine vollständige Lösung, so kann man daraus alle übrigen Lösungen ableiten, deren die partielle Differentialgleichung fähig ist, und welche einen sehr verschiedenen Charakter haben. Man nimmt zu diesem Ende eine Anzahl willkührlicher Relationen zwischen den willkührlichen Constanten an, oder was dasselbe ist, bestimmt einige derselben als willkührliche Functionen der übrigen, differenziirt nach diesen, als unabhängig betrachteten willkührlichen Constanten die vollständige Lösung, und setzt die genommenen partiellen Differentialquotienten einzeln $=0$; wenn man dann vermittelst dieser Gleichungen die willkührlichen Constanten aus der vollständigen Lösung eliminirt, so erhält man die neue Lösung, welche man, da sie willkührliche Functionen enthält, nach *Lagrange* eine allgemeine Lösung nennen kann. Diese allgemeinen Lösungen haben aber einen ganz verschiedenen Character nach der Zahl der willkührlichen Relationen, welche man zwischen den willkührlichen Constanten annimmt. Wenn m die Zahl der unabhängigen Variabeln und also auch die Zahl der willkührlichen Constanten ist, so hat man $m-1$ Classen allgemeiner Lösungen, je nachdem man 1, 2, ... oder $m-1$ Relationen zwischen den m Constanten annimmt, und dann wie oben verfährt. Die allgemeinste Lösung ist diejenige, bei welcher nur eine Relation zwischen den Constanten angenommen, oder eine als Function der übrigen angesehen wird. Der Grad der Allgemeinheit verringert sich mit der Zahl derjenigen willkührlichen Constanten, für die man willkührliche Functionen der übrigen setzt. So ist es allgemeiner oder läſst mehr willkührliches zu, eine willkührliche Constante als willkührliche Function der $m-1$ andern anzunehmen wie in der allgemeinsten Lösung, als zwei willkührliche Constanten als willkührliche Functionen der $m-2$ andern anzunehmen, wie in der nächst folgenden Classe allgemeiner Lösungen. Denn denkt man sich eine willkührliche Function von $m-1$ Gröſsen nach den Potenzen von einer derselben geordnet, so sind die Coëfficienten willkührliche Functionen von $m-2$ Gröſsen, so daſs eine willkührliche Function von $m-1$ Gröſsen unendlich viele Functionen von $m-2$ Gröſsen umfaſst. Als Grenze dieser Classen allgemeiner Lösungen ist der Fall anzusehen, wo man m Relationen zwischen den m Gröſsen annimmt, oder diese als Constanten betrachtet, was aber die vollständige Lösung selber ist.

Da die verschiedenen Arten Lösungen, welche ich allgemeine Lösungen genannt habe, willkührliche Functionen enthalten, so kann man sie so particularisiren, dafs sie jede beliebige Zahl willkührlicher Constanten enthalten, denn in jeder willkührlichen Function kann man so viel willkührliche Constanten anbringen, wie man will. Giebt man den willkührlichen Functionen zusammen m willkührliche Constanten, wenn m die Zahl der unabhängigen Variabeln in der partiellen Differentialgleichung ist, so kann man jede particularisirte allgemeine Lösung mit m willkührlichen Constanten ebenfalls als eine vollständige Lösung ansehn, aus welcher man eben so wie aus der vollständigen Lösung, von welcher man ausgegangen ist, alle Arten Lösungen, deren die gegebene partielle Differentialgleichung fähig ist, ableiten kann. Man kann auf ähnliche Art jede allgemeine Lösung so particularisiren, dafs daraus eine Lösung wird, die zu einer minder allgemeinen Classe gehört. Hat man z. B. eine Lösung, in welcher k Gröfsen als willkührliche Functionen der $m-k$ andern vorkommen, und ist $l > k$, aber zugleich $l < m$, so kann man diese k willkührlichen Functionen von $m-k$ Gröfsen so particularisiren, dafs darin so viel willkührliche Functionen von $m-l$ Gröfsen vorkommen, wie man will; und nimmt man für diese k willkührliche Functionen particuläre Formen, in denen l willkührliche Functionen von $m-l$ Gröfsen vorkommen, so kann man diese Lösung als eine solche betrachten, die zu einer minder allgemeinen Classe gehört, und die man aus der vollständigen Lösung erhalten kann, wenn man darin l willkührliche Constanten als willkührliche Functionen der übrigen betrachtet, und für diese solche Functionen setzt, dafs die nach ihnen genommenen partiellen Differentialquotienten der vollständigen Lösung verschwinden.

3.

Nachdem ich diese bekannten Betrachtungen vorausgeschickt habe, kehre ich zu der hier vorliegenden partiellen Differentialgleichung zurück:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\Sigma \frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z_i}\right)^2\right] = U,$$

von welcher die Function S, wie sie oben definirt worden ist, wenn man noch eine willkührliche Constante zu ihr addirt, ein vollständiges Integral ist. Da es aber unendlich viele vollständige Integrale derselben partiellen

Differentialgleichung von der verschiedensten Form giebt, so ist die Function S durch die partielle Differentialgleichung, der sie Genüge leistet, noch nicht bestimmt. Gleichwohl ist das System der $3n$ gewöhnlichen Differentialgleichung der Bewegung durch die eine partielle Diffentialgleichung vollständig ersetzt. Denn es läſst sich leicht zeigen, daſs jede vollständige Lösung derselben hinreicht, um sämmtliche Integralgleichungen der Bewegung daraus abzuleiten.

In der That sei S irgend eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y_i}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z_i}\right)^2\right]=U,$$

Da die Zahl der unabhängigen Variabeln hier $3n+1$ ist, nämlich die Zeit t und die $3n$ Coordinaten, so muſs die vollständige Lösung $3n+1$ willkührliche Constanten enthalten, von denen man sich immer eine mit S durch bloſse Addition verbunden denken kann. Es seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \ldots \alpha_{3n}$, die $3n$ übrigen, und $\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots \beta_{3n}$, andere willkührliche Constanten, so will ich zeigen, daſs folgende $3n$ endliche Gleichungen zwischen den $3n$ Coordinaten x_i, y_i, z_i und der Zeit t,

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_1}=\beta_1,\quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_2}=\beta_2,\ \ldots\ldots\ \frac{\partial S}{\partial \alpha_{3n}}=\beta_{3n}$$

immer dem vorgelegten System gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$m_i\frac{d^2 x_i}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial x_i},\quad m_i\frac{d^2 y_i}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial y_i},\quad m_i\frac{d^2 z_i}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial z_i},$$

Genüge leisten.

Differenziirt man nämlich die gegebenen endlichen Gleichungen, wodurch die willkührlichen Constanten $\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots \beta_{3n}$, von selber verschwinden, so erhält man die $3n$ Gleichungen:

$$0=\frac{d.\frac{\partial S}{\partial \alpha_1}}{dt}=\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_1\,\partial t}+\Sigma\left(\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_1\,\partial x_i}x_i'+\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_1\,\partial y_i}y_i'+\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_1\,\partial z_i}z_i'\right)$$

$$0=\frac{d.\frac{\partial S}{\partial \alpha_2}}{dt}=\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_2\,\partial t}+\Sigma\left(\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_2\,\partial x_i}x_i'+\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_2\,\partial y_i}y_i'+\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_2\,\partial z_i}z_i'\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$0=\frac{d.\frac{\partial S}{\partial \alpha_{3n}}}{dt}=\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_{3n}\,\partial t}+\Sigma\left(\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_{3n}\partial x_i}x_i'+\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_{3n}\partial y_i}y_i'+\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_{3n}\,\partial z_i}z_i'\right),$$

aus welchen man die Werthe von x_i', y_i', z_i' durch Auflösung bestimmen kann. Vergleicht man aber diese $3n$ Gleichungen mit folgenden

$3n$ identischen Gleichungen, welche aus der gegebenen Gleichung:

$$U = \frac{\partial S}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z_i}\right)^2\right],$$

durch partielle Differentiation nach $\alpha_1, \alpha_2, \ldots. \alpha_{3n}$ hervorgehn,

$$0 = \frac{\partial^2 S}{\partial\alpha_1\,\partial t} + \Sigma\frac{1}{m_i}\left[\frac{\partial^2 S}{\partial\alpha_1\,\partial x_i}\cdot\frac{\partial S}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 S}{\partial\alpha_1\,\partial y_i}\cdot\frac{\partial S}{\partial y_i} + \frac{\partial^2 S}{\partial\alpha_1\,\partial z_i}\cdot\frac{\partial S}{\partial z_i}\right],$$

$$0 = \frac{\partial^2 S}{\partial\alpha_2\,\partial t} + \Sigma\frac{1}{m_i}\left[\frac{\partial^2 S}{\partial\alpha_2\,\partial x_i}\cdot\frac{\partial S}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 S}{\partial\alpha_2\,\partial y_i}\cdot\frac{\partial S}{\partial y_i} + \frac{\partial^2 S}{\partial\alpha_2\,\partial z_i}\cdot\frac{\partial S}{\partial z_i}\right],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$0 = \frac{\partial^2 S}{\partial\alpha_{3n}\,\partial t} + \Sigma\frac{1}{m_i}\left[\frac{\partial^2 S}{\partial\alpha_{3n}\,\partial x_i}\cdot\frac{\partial S}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 S}{\partial\alpha_{3n}\,\partial y_i}\cdot\frac{\partial S}{\partial y_i} + \frac{\partial^2 S}{\partial\alpha_{3n}\,\partial z_i}\cdot\frac{\partial S}{\partial z_i}\right],$$

so sieht man ohne weiteres, dafs die gesuchten Werthe von x_i', y_i', z_i', welche die obigen Gleichungen erfüllen sollen, folgende sind:

$$x_i' = \frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{m_i}\cdot\frac{\partial S}{\partial x_i}, \quad y_i' = \frac{dy_i}{dt} = \frac{1}{m_i}\cdot\frac{\partial S}{\partial y_i}, \quad z_i' = \frac{dz_i}{dt} = \frac{1}{m_i}\cdot\frac{\partial S}{\partial z_i}.$$

Differentiirt man die vorstehenden Gleichungen aufs neue, so erhält man die Gleichungen:

$$m_i\frac{d^2x_i}{dt^2} = \Sigma\left[\frac{\partial^2 S}{\partial x_i\,\partial x_k}x_k' + \frac{\partial^2 S}{\partial x_i\,\partial y_k}y_k' + \frac{\partial^2 S}{\partial x_i\,\partial z_k}z_k'\right] + \frac{\partial^2 S}{\partial x_i\,\partial t},$$

$$m_i\frac{d^2y_i}{dt^2} = \Sigma\left[\frac{\partial^2 S}{\partial y_i\,\partial x_k}x_k' + \frac{\partial^2 S}{\partial y_i\,\partial y_k}y_k' + \frac{\partial^2 S}{\partial y_i\,\partial z_k}z_k'\right] + \frac{\partial^2 S}{\partial y_i\,\partial t},$$

$$m_i\frac{d^2z_i}{dt^2} = \Sigma\left[\frac{\partial^2 S}{\partial z_i\,\partial x_k}x_k' + \frac{\partial^2 S}{\partial z_i\,\partial y_k}y_k' + \frac{\partial^2 S}{\partial z_i\,\partial z_k}z_k'\right] + \frac{\partial^2 S}{\partial z_i\,\partial t},$$

wo man in den Summen rechts für k die Werthe $1, 2, \ldots. n$ zu setzen hat, während i unverändert bleibt. Wenn man in diese Gleichungen für x_k', y_k', z_k' die gefundenen Werthe substituirt, so verwandeln sie sich in folgende:

$$m_i\frac{d^2x_i}{dt^2} = \Sigma\frac{1}{m_k}\left[\frac{\partial^2 S}{\partial x_i\,\partial x_k}\cdot\frac{\partial S}{\partial x_k} + \frac{\partial^2 S}{\partial x_i\,\partial y_k}\cdot\frac{\partial S}{\partial y_k} + \frac{\partial^2 S}{\partial x_i\,\partial z_k}\cdot\frac{\partial S}{\partial z_k}\right] + \frac{\partial^2 S}{\partial x_i\,\partial t},$$

$$m_i\frac{d^2y_i}{dt^2} = \Sigma\frac{1}{m_k}\left[\frac{\partial^2 S}{\partial y_i\,\partial x_k}\cdot\frac{\partial S}{\partial x_k} + \frac{\partial^2 S}{\partial y_i\,\partial y_k}\cdot\frac{\partial S}{\partial y_k} + \frac{\partial^2 S}{\partial y_i\,\partial z_k}\cdot\frac{\partial S}{\partial z_k}\right] + \frac{\partial^2 S}{\partial y_i\,\partial t},$$

$$m_i\frac{d^2z_i}{dt^2} = \Sigma\frac{1}{m_k}\left[\frac{\partial^2 S}{\partial z_i\,\partial x_k}\cdot\frac{\partial S}{\partial x_k} + \frac{\partial^2 S}{\partial z_i\,\partial y_k}\cdot\frac{\partial S}{\partial y_k} + \frac{\partial^2 S}{\partial z_i\,\partial z_k}\cdot\frac{\partial S}{\partial z_k}\right] + \frac{\partial^2 S}{\partial z_i\,\partial t}.$$

Es sind aber die Ausdrücke rechts die partiellen Differentialquotienten des Ausdrucks

$$U = \tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_k}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z_k}\right)^2\right] + \frac{\partial S}{\partial t},$$

nach x_i, y_i, z_i genommen, wodurch wir die Differentialgleichungen bekommen:

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i},$$

welches die vorgelegten Differentialgleichungen sind. Wir haben also folgendes Theorem.

Theorem.

Es seien die Differentialgleichungen der Bewegung eines freien Systemes von n materiellen Puncten folgende $3n$ Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i},$$

wo U eine gegebene Function der $3n$ Coordinaten $x_1, y_1, z_1;\ x_2, y_2, z_2;\ \dots$ $\dots\ x_n, y_n, z_n$ und der Zeit t bedeutet, und für i alle Werthe $1, 2, \dots n$ zu setzen sind; es sei ferner S irgend ein vollständiges Integral der partiellen Differentialgleichung:

$$U = \frac{\partial S}{\partial t} + \tfrac{1}{2} \Sigma \frac{1}{m_i} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z_i}\right)^2 \right],$$

welches aufser einer mit S blofs durch Addition verbundenen willkührlichen Constanten noch $3n$ andre willkührliche Constanten

$$\alpha_1, \ \alpha_2, \ \dots \ \alpha_{3n}$$

enthalte: so sind die vollständigen endlichen Integrale der vorgelegten $3n$ gewöhnlichen Differentialgleichungen 2ter Ordnung mit $6n$ willkührlichen Constanten:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \dots \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_{3n}} = \beta_{3n},$$

wo die Gröfsen

$$\beta_1, \ \beta_2, \ \dots \ \beta_{3n}$$

neue $3n$ willkührliche Constanten sind; es sind ferner die nach den Coordinaten-Achsen zerlegten Geschwindigkeiten,

$$x_i' = \frac{1}{m_i} \cdot \frac{\partial S}{\partial x_i}, \quad y_i' = \frac{1}{m_i} \cdot \frac{\partial S}{\partial y_i}, \quad z_i' = \frac{1}{m_i} \cdot \frac{\partial S}{\partial z_i}.$$

4.

Eine der vollständigen Lösungen der im Vorigen betrachteten partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung ist die zu Anfang definirte Function S, und zwar eine solche, in welcher die $3n$ willkührlichen Constanten, die S enthält, gerade die Anfangswerthe der $3n$ Gröfsen x_i, y_i, z_i sind, welche wir mit a_i, b_i, c_i bezeichnet haben. Für den hauptsächlich vorkommenden Fall, welchen *Hamilton* allein betrachtet, wo die Kräftefunction die Zeit t nicht explicite enthält, giebt derselbe noch eine zweite partielle Differentialgleichung erster Ordnung, welcher diese Function S Genüge leistet. Für diesen Fall gilt der Satz von der lebendigen Kraft, welchen man so darstellen kann:

$$U - \tfrac{1}{2}\Sigma m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) = U_0 - \tfrac{1}{2}\Sigma m_i(a_i'^2 + b_i'^2 + c_i'^2),$$

wo wieder a_i', b_i', c_i' die Anfangswerthe von x_i', y_i', z_i' bedeuten, und U_0 der Werth von U ist, wenn man darin für x_i, y_i, z_i ihre Anfangswerthe a_i, b_i, c_i setzt. Es ist aber:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = U - \tfrac{1}{2}\Sigma m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2),$$

und daher, wenn der Satz von der lebendigen Kraft gilt, auch

$$\frac{\partial S}{\partial t} = U_0 - \tfrac{1}{2}\Sigma m_i(a_i'^2 + b_i'^2 + c_i'^2).$$

Für die *Hamilton*'sche Function S wurde aber

$$m_i a_i' = -\frac{\partial S}{\partial a_i}, \quad m_i b_i' = -\frac{\partial S}{\partial b_i}, \quad m_i c_i' = -\frac{\partial S}{\partial c_i},$$

wodurch sich die vorstehende Gleichung in folgende verwandelt,

$$\frac{\partial S}{\partial t} = U_0 - \tfrac{1}{2}\Sigma \frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial a_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial b_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial c_i}\right)^2\right].$$

Dieses ist die zweite partielle Differentialgleichung, welcher die *Hamilton*sche Function S Genüge leistet, und wodurch sie von allen andern vollständigen Lösungen der ersten unterschieden wird. Aber wir haben gesehen, dafs jede vollständige Lösung dieser ersten durchaus hinreichend ist, um die sämmtlichen vollständigen Integrale der vorgelegten Differentialgleichungen der Bewegung zu finden.

Ich weifs daher nicht, warum *Hamilton*, um die vollständigen Integrale der vorgelegten Differentialgleichungen angeben zu können, die Erfindung einer Function S, von $6n+1$ Variabeln, nämlich den $3n$ Gröfsen x_i, y_i, z_i, den $3n$ Gröfsen a_i, b_i, c_i und der Gröfse t fordert, welche zu gleicher Zeit den beiden partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\Sigma \frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z_i}\right)^2\right] = U,$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\Sigma \frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial a_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial b_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial c_i}\right)^2\right] = U_0,$$

Genüge leistet, während es, wie wir gesehen haben, vollkommen hinreicht, irgend eine Function der $3n+1$ Gröfsen t, x_i, y_i, z_i zu kennen, welche der einen Gleichung

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y_i}\right)^3 + \left(\frac{\partial S}{\partial z_i}\right)^2\right] = U$$

Genüge leistet, und außer einer mit ihr durch Addition verbundenen noch $3n$ andere willkührliche Constanten enthält. *Hamilton* scheint mir dadurch seine schöne Entdeckung in ein falsches Licht gesetzt zu haben, außerdem daß sie dadurch zu gleicher Zeit unnöthig complicirt und beschränkt wird. Auch ist hier der Übelstand, daß, da man eine Function nicht durch zwei partielle Differentialgleichungen definiren kann, denen sie gleichzeitig genügen soll, ohne zu beweisen, daß eine solche Function auch wirklich möglich ist, seine Theorie, wie er es ausgesprochen hat, nicht an sich, sondern nur mit dem Beweise, den er liefert, verständlich sein kann. Wenn dadurch, daß er gerade diese besondere Function S nimmt, die willkührlichen Constanten die Anfangswerthe der Coordinaten und der nach den Coordinaten-Achsen zerlegten Geschwindigkeiten werden, so ist dies kein wesentliches Interesse, da die Einführung dieser Constanten die Form der Integralgleichungen in der Regel complicirter machen, auch man die vollständigen Integralgleichungen aus jeder andern Form in diese bringen kann. Vielleicht ist auch *Hamilton* dadurch, daß er immer gleichzeitig zwei partielle Differentialgleichungen vor Augen hat, verhindert worden, die allgemeinen Vorschriften, welche *Lagrange* in den Vorlesungen über die Functionenrechnung für die Integration einer nicht lineären partiellen Differentialgleichung erster Ordnung zwischen drei Variabeln giebt, auf sein Theorem anzuwenden, wodurch ihm, wie ich in einer andern Abhandlung zeigen werde, Resultate von größter Wichtigkeit für die Mechanik entgangen sind. Ich bemerke noch, daß die Forderung, daß die Function S, nachdem sie der ersten partiellen Differentialgleichung genügt, noch der zweiten genügen solle, auch noch dadurch eine Beschränkung herbeiführt, daß sie den Fall ausschließt, wo die Kräftefunction U die Zeit t auch explicite enthält, weil für diesen die zweite partielle Differentialgleichung nicht mehr gültig ist.

5.

Man kann der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, durch welche man das System der Differentialgleichungen der Bewegung ersetzt hat, verschiedene Formen geben, indem man theils für die zu suchende Function eine andere nimmt, theils die Variabeln ändert. *Hamilton* hat mehrere Beispiele hiervon gegeben, von denen ich hier nur eines auseinandersetzen werde, weil die übrigen von geringerem Interesse zu sein scheinen.

Es sei:

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m_i[x_i'^2+y_i'^2+z_i'^2]-U = H.$$

Wenn U nicht t explicite enthält, also der Satz von der lebendigen Kraft gilt, so hat man

$$H = h,$$

wo h eine Constante. Es sei die Function S nach der von *Hamilton* gegebenen Definition bestimmt, und zu dem oben gegebenen Ausdruck von $\partial' S$ nach $\frac{\partial S}{\partial t}\partial t$ hinzugefügt, so hat man das vollständige Differential von S, wenn man allen $6n+1$ Gröfsen t, x_i, y_i, z_i, a_i, b_i, c_i, die es enthält, unendlich kleine von einander unabhängige Incremente giebt. Da wir

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H$$

fanden, so wird, wenn man sich der Characteristik der Variationsrechnung bedient, diese vollständige Variation von S,

$$\delta S = -H\delta t+\Sigma m_i[x_i'\delta x_i+y_i'\delta y_i+z_i'\delta z_i]$$
$$-\Sigma m_i[a_i'\delta a+b_i'\delta b+c_i\delta c].$$

Man setze

$$V = S+H.t,$$

so folgt aus der vorstehenden Variation von S der Ausdruck der Variation von V,

$$\delta V = t\delta H+\Sigma m_i[x_i'\delta x_i+y_i'\delta y_i+z_i'\delta z_i]$$
$$-\Sigma m_i[a_i'\delta a_i+a_i'\delta b_i+c_i'\delta b].$$

Denkt man sich vermittelst der Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y_i}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z_i}\right)^2\right]-U = H,$$

die Gröfse t aus S eliminirt, so wird S und mithin auch V eine Function von H, den $3n$ Gröfsen x_i, y_i, z_i und den $3n$ Gröfsen a_i, b_i, c_i, und die vorstehende Gleichung giebt den Ausdruck von δV, durch die Variation dieser $6n+1$ Gröfsen. Betrachtet man daher V als Function von H, den Coordinaten x_i, y_i, z_i und ihren Anfangswerthen a_i, b_i, c_i, so werden die partiellen Differentialquotienten von V nach diesen Gröfsen genommen:

$$\frac{\partial V}{\partial H} = t,$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = m_i x'_i, \qquad \frac{\partial V}{\partial a_i} = -m_i a'_i,$$

$$\frac{\partial V}{\partial y_i} = m_i y'_i, \qquad \frac{\partial V}{\partial b_i} = -m_i b'_i,$$

$$\frac{\partial V}{\partial z_i} = m_i z'_i, \qquad \frac{\partial V}{\partial c_i} = -m_i c'_i.$$

Diese Werthe geben die partielle Differentialgleichung:

$$\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z_i}\right)^2\right] = U + H,$$

wo man, wenn U auch t explicite enthält, in U für t das partielle Differentiale $\frac{\partial V}{\partial H}$ zu setzen hat. Wenn aber, wie es insgemein der Fall ist, U nicht t explicite enthält, sondern eine bloſse Function der Coordinaten ist, so enthält die partielle Differentialgleichung das partielle Differential von V nach H genommen gar nicht, weshalb H bei ihrer Integration als Constante betrachtet wird.

Wenn U nicht t explicite enthält, also H eine Constante ist, so hat man, wenn man für S die *Hamilton*'sche Function nimmt,

$$V = S + Ht = \int_0^t [H + \tfrac{1}{2}\Sigma m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) + U]\,dt,$$

oder da

$$H = \tfrac{1}{2}\Sigma m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) - U,$$

wird

$$V = \int_0^t \Sigma m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2)\,dt = 2Ht + 2\int_0^t U\,dt.$$

In demselben Falle, wo H eine Constante ist, erhält man für $t = 0$ auch

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m_i(a_i'^2 + b_i'^2 + c_i'^2) = U_0 + H$$

oder

$$\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial a_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial b_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial c_i}\right)^2\right] = U_0 + H,$$

welches eine zweite partielle Differentialgleichung ist, welcher die Function V Genüge leistet. *Hamilton* definirt die Function V durch diese **beiden** partiellen Differentialgleichungen: aber um die vollständigen Integrale der Differentialgleichungen der Bewegung zu finden, reicht es wieder vollkommen hin, wenn man nur irgend ein vollständiges Integral V der erstern kennt.

Wenn nämlich U die Gröfse t explicite enthält, so betrachte man irgend eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y_i}+\left(\frac{\partial V}{\partial z_i}\right)^2\right]=U+H,$$

wo, wie erwähnt, in U für t zu setzen ist $\frac{\partial V}{\partial H}$. Solche Lösung wird, da hier $3n+1$ unabhängige Variabeln sind, aufser einer mit V durch Addition verbundenen Constante, noch $3n$ andere $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{3n}$, enthalten. Die $3n$ endlichen vollständigen Integrale des Systems von $3n$ gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial x_i},\quad m_i\frac{d^2y_i}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial y_i},\quad m_i\frac{d^2z_i}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial z_i},$$

mit $6n$ willkührlichen Constanten, werden dann

$$\frac{\partial V}{\partial\alpha_1}=\beta_1,\quad \frac{\partial V}{\partial\alpha_2}=\beta_2,\quad \ldots\ldots \quad \frac{\partial V}{\partial\alpha_{3n}}=\beta_{3n},$$

wo $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{3n}$ die neuen $3n$ willkührlichen Constanten sind; die $3n$ Zwischenintegrale mit nur $3n$ willkührlichen Constanten werden ferner,

$$\frac{\partial V}{\partial x_i}=m_ix'_i,\quad \frac{\partial V}{\partial y_i}=m_iy'_i,\quad \frac{\partial V}{\partial z_i}=m_iz'_i.$$

Die Gröfse H kann man in diesen Gleichungen vermittelst der Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial H}=t$$

durch t ersetzen. Der Beweis hiervon ist ganz so, wie der für die Function S geführte.

Wenn aber die Function U nicht t explicite enthält, so enthält die partielle Differentialgleichung eine unabhängig Variable weniger, weil H in diesem Falle eine Constante h wird; die Zahl der willkührlichen Constanten einer vollständigen Lösung ist daher, aufser der mit V durch Addition verbundenen nur $3n-1$, die wir $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{3n-1}$ nennen wollen. Die $3n$ endlichen vollständigen Integralgleichungen der Bewegung werden dann:

$$\frac{\partial V}{\partial\alpha_1}=\beta_1,\quad \frac{\partial V}{\partial\alpha_2}=\beta_2,\quad \ldots\ldots \frac{\partial V}{\partial\alpha_{3n-1}}=\beta_{3n-1}$$

zu denen man noch die Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial h}=t+\tau$$

zu fügen hat, wo $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{3n-1}, \tau$ neue $3n$ willkührliche Constanten sind, so dafs hier wieder $6n$ willkührliche Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{3n-1}, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{3n-1}, h, \tau$ gefunden werden; die

$3n$ **Zwischenintegrale endlich werden wieder:**

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = m_i x'_i, \quad \frac{\partial V}{\partial y_i} = m_i y'_i, \quad \frac{\partial V}{\partial z_i} = m_i z'_i.$$

Der Beweis, der hier etwas modificirt werden mufs, ist, wie folgt.

Die Differentation der Gleichungen:

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \; \dots \; \frac{\partial V}{\partial \alpha_{3n-1}} = \beta_{3n-1}$$

giebt folgende $3n-1$ Gleichungen

$$\Sigma\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_1 \partial x_i} x'_i + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_1 \partial x_i} y'_i + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_1 \partial z_i} z'_i\right) = 0$$

$$\Sigma\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_2 \partial x_i} x'_i + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_2 \partial y_i} y'_i + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_2 \partial z_i} z'_i\right) = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\Sigma\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_{3n-1} \partial x_i} x'_i + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_{3n-1} \partial y_i} y'_i + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_{3n-1} \partial z_i} z'_i\right) = 0,$$

durch welche, da in ihnen kein Term vorkommt, welcher nicht in eine der $3n$ Gröfsen x'_i, y'_i, z'_i multiplicirt ist, die Verhältnisse dieser $3n$ Gröfsen bestimmt werden. Differentiirt man die gegebene partielle Differentialgleichung

$$\Sigma \frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z_i}\right)^2\right] = U + h$$

nach $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{3n-1}$, so erhält man die $3n-1$ Gleichungen:

$$\Sigma \frac{1}{m_i}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_1 \partial x_i}\cdot\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_1 \partial y_i}\cdot\frac{\partial V}{\partial y_i} + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_1 \partial z_i}\cdot\frac{\partial V}{\partial z_i}\right] = 0,$$

$$\Sigma \frac{1}{m_i}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_2 \partial x_i}\cdot\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_2 \partial y_i}\cdot\frac{\partial V}{\partial y_i} + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_2 \partial z_i}\cdot\frac{\partial V}{\partial z_i}\right] = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\Sigma \frac{1}{m_i}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_{3n-1} \partial x_i}\cdot\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_{3n-1} \partial y_i}\cdot\frac{\partial V}{\partial y_i} + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_{3n-1} \partial z_i}\cdot\frac{\partial V}{\partial z_i}\right] = 0.$$

Vergleicht man diese $3n-1$ Gleichungen mit den vorigen $3n-1$ Gleichungen, so sieht man zunächst, dafs die $3n$ Gröfsen x'_i, y'_i, z'_i sich respective wie die $3n$ Gröfsen $\frac{\partial V}{m_i \partial x_i}$, $\frac{\partial V}{m_i \partial y_i}$, $\frac{\partial V}{m_i \partial z_i}$ verhalten. Differentiirt man nun ferner die Gleichung:

$$\frac{\partial V}{\partial h} = t + \tau,$$

so erhält man:

$$\Sigma\left[\frac{\partial^2 V}{\partial h \partial x_i} x'_i + \frac{\partial^2 V}{\partial h \partial y_i} y'_i + \frac{\partial^2 V}{\partial h \partial z_i} z'_i\right] = 1,$$

und wenn man die gegebene partielle Differentialgleichung partiell nach h

differentiirt:

$$\Sigma\left[\frac{\partial^2 V}{\partial h\,\partial x_i}\cdot\frac{\partial V}{\partial x_i}+\frac{\partial^2 V}{\partial h\,\partial y_i}\cdot\frac{\partial V}{\partial y_i}+\frac{\partial^2 V}{\partial h\,\partial z_i}z_i'\right]=1.$$

Vergleicht man diese beiden Gleichungen mit einander, so sieht man, daſs wenn sich, wie bewiesen worden, die $3n$ Gröſsen x_i', y_i', z_i' respective wie die $3n$ Gröſsen $\frac{1}{m_i}\cdot\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{1}{m_i}\cdot\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{1}{m_i}\cdot\frac{\partial V}{\partial z_i}$ verhalten, die $3n$ Gröſsen x_i', y_i', z_i' den $3n$ Gröſsen $\frac{1}{m_i}\cdot\frac{\partial V}{\partial x_i}$, $\frac{1}{m_i}\cdot\frac{\partial V}{\partial y_i}$, $\frac{1}{m_i}\cdot\frac{\partial V}{\partial z_i}$ auch respective gleich sein müssen, welches die $3n$ Gleichungen giebt:

$$x_i'=\frac{1}{m_i}\cdot\frac{\partial V}{\partial x_i},\quad y_i'=\frac{1}{m_i}\cdot\frac{\partial V}{\partial y_i},\quad z_i'=\frac{1}{m_i}\cdot\frac{\partial V}{\partial z_i}.$$

Differentiirt man diese Gleichungen aufs neue, und setzt in den Differentialen für x_i', y_i', z_i' die vorstehenden Werthe, so erhält man;

$$m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}=\Sigma\frac{1}{m_k}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x_i\,\partial x_k}\cdot\frac{\partial V}{\partial x_k}+\frac{\partial^2 V}{\partial x_i\,\partial y_k}\cdot\frac{\partial V}{\partial y_k}+\frac{\partial^2 V}{\partial x_i\,\partial z_k}\cdot\frac{\partial V}{\partial z_k}\right],$$

$$m_i\frac{d^2y_i}{dt^2}=\Sigma\frac{1}{m_k}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial y_i\,\partial x_k}\cdot\frac{\partial V}{\partial x_k}+\frac{\partial^2 V}{\partial y_i\,\partial y_k}\cdot\frac{\partial V}{\partial y_k}+\frac{\partial^2 V}{\partial y_i\,\partial z_k}\cdot\frac{\partial V}{\partial z_k}\right],$$

$$m_i\frac{d^2z_i}{dt^2}=\Sigma\frac{1}{m_k}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial z_i\,\partial x_k}\cdot\frac{\partial V}{\partial x_k}+\frac{\partial^2 V}{\partial z_i\,\partial y_k}\cdot\frac{\partial V}{\partial y_k}+\frac{\partial^2 V}{\partial z_i\,\partial z_k}\cdot\frac{\partial V}{\partial z_k}\right],$$

in welchen Summen i unverändert bleibt, während k die Werthe $1, 2, \ldots n$ erhält. Die Ausdrücke rechter Hand sind hier die partiellen Differentialquotienten des Ausdrucks

$$\Sigma\frac{1}{m_k}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x_k}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y_k}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z_k}\right)^2\right]=U-h$$

nach x_i, y_i, z_i genommen. Man kann daher dafür die einfacheren Ausdrücke setzen:

$$m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial x_i},\quad m_i\frac{d^2y_i}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial y_i},\quad m_i\frac{d^2z_i}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial z_i},$$

welches die zu beweisenden Gleichungen sind.

In den Anwendungen scheint die Function S dann vorzugsweise brauchbar, wenn die Kräftefunction U die Zeit t auch explicite involvirt. Dagegen bietet die Function V und die gleichzeitige Einführung der Gröſse H statt der Zeit t groſse Vortheile in dem häufiger vorkommenden Fall, wo U eine bloſse Function der Coordinaten ist. Denn da in diesem letztern Falle, vermittelst des Satzes von der Erhaltung der lebendigen Kraft H eine Constante wird, so enthält die partielle Differentialgleichung eine Variable und die zu suchende vollständige Lösung eine willkührliche Constante weniger. Die Function V, welche *Hamilton* zur Erfindung der vollständigen Integralgleichungen der Bewegung fordert, und welche gleichzeitig zweien partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung genügen mufs, hat daher hier noch den wesentlichen Nachtheil, dafs sie eine Gröfse mehr als nöthig ist enthält, nämlich aufser h und den $3n$ Coordinaten noch ihre $3n$ Anfangswerthe, während man nur irgend eine Lösung der einen partiellen Differentialgleichung braucht, welche aufser h und den $3n$ Coordinaten $3n-1$ willkührliche Constanten enthält.

6.

Wenn die Kräftefunction die Zeit t nicht explicite enthält, so kann man aus den Differentialgleichungen der Bewegung die Gröfse t leicht herausschaffen, indem man sie als ein System von $6n-1$ Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen den $6n$ Variabeln x_i, y_i, z_i, x'_i, y'_i, z'_i darstellt. Nennt man nämlich $q_1, q_2, \ldots q_{3n}$ die Coordinaten der n Puncte, $q'_1, q'_2, \ldots q'_{3n}$ ihre nach den Coordinaten-Achsen zerlegten und respective mit ihrer Masse multiplicirten Geschwindigkeiten, so kann man die Differenzialgleichungen der Bewegung:

$$m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial x_i},\qquad m_i\frac{d^2y_i}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial y_i},\qquad m_i\frac{d^2z_i}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial z_i}$$

durch die Proportion darstellen:

$$dq_1:dq_2\ldots:dq_{3n}:dq'_1:dq'_2\ldots:dq'_{3n}=\frac{1}{\mu_1}q'_1:\frac{1}{\mu_2}q'_2\ldots:\frac{1}{\mu_{3n}}q'_{3n}:\frac{\partial U}{\partial q_1}:\frac{\partial U}{\partial q_2}\ldots:\frac{\partial U}{\partial q_{3n}},$$

wo von den Gröfsen $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{3n}$ je drei, die sich auf Coordinaten eines Punctes beziehn, der Masse dieses Punctes gleich zu setzen sind. Diese Proportion vertritt die Stelle von $6n-1$ Gleichungen; die Zahl dieser Gleichungen, so wie der Variabeln, kann aber noch um eine verringert werden, wenn man durch den im gedachten Falle geltenden Satz der lebendigen Kraft:

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu_1}q'^2_1+\frac{1}{\mu_2}q'^2_2\ldots+\frac{1}{\mu_{3n}}q'^2_{3n}\right)=U+h$$

eine der Variabeln eliminirt. Hat man diese Gleichungen vollständig integrirt, und dadurch alle $6n$ Variabeln $q_1, q_2, \ldots q_{3n}, q'_1, q'_2, \ldots q'_{3n}$ durch eine von ihnen, z. B. q_1 ausgedrückt, so erhält man schliefslich die Zeit durch eine Quadratur, vermittelst der Gleichungen:

$$dt=\mu_1\frac{dq_1}{q'_1},\qquad t=\mu_1\int\frac{dq_1}{q'_1}.$$

Um die von *Hamilton* angegebene Function V zu finden, braucht man diese Quadratur nicht auszuführen, sondern erhält sie ohne t zu kennen, unmittelbar durch eine Quadratur, wenn man die $6n$ Variabeln $q_1, q_2, \ldots \ldots q_{2n}, q'_1, q'_2, \ldots\ldots q'_{3n}$ durch eine von ihnen ausgedrückt hat. Man kann nämlich die Function

$$V = \int_0^t \Sigma m_i [x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2]\, dt = \int_0^t \left(\frac{1}{\mu_1} q_1'^2 + \frac{1}{\mu_2} q_2'^2 \ldots\ldots + \frac{1}{\mu_{3n}} q_{3n}'^2\right) dt$$

auch so darstellen

$$V = \int (q_1 d q_1 + q'_2 d q_2 \ldots\ldots + q'_{3n} d q_{3n}),$$

aus welchem Ausdruck t ganz herausgegangen ist. Wenn q_1^0 den Werth von q_1 für $t = 0$ bedeutet, so dafs

$$t = \int_{q_1^0}^{q} \frac{\mu_1 d q_1}{q'_1},$$

so hat man das Integral für V ebenfalls so zu nehmen, dafs es für $q_1 = q_1^0$ verschwindet.

Das für t angegebene Integral ist das partielle Differential des für V gefundenen, nach h genommen, wie sich aus der Gleichung:

$$\frac{\partial V}{\partial h} = t$$

ergiebt. Durch solche partielle Differentiation eines Integrals nach einer Constante kommt man in der Regel wieder auf ein neues Integral. Es giebt aber einen sehr bemerkenswerthen Fall, welcher auch unter andern der Fall des Weltsystems ist, in welchem beide Integrale t und V unmittelbar auf einander zurückgeführt werden können. Dies ist der Fall, wenn die Kräftefunction eine homogene Function der Coordinaten ist.

Es sei die Kräftefunction U eine Function der $3n$ Coordinaten x_i, y_i, z_i von der Dimension ε, so hat man bekanntlich:

$$\Sigma \left[x_i \frac{\partial U}{\partial x_i} + y_i \frac{\partial U}{\partial y_i} + z_i \frac{\partial U}{\partial z_i}\right] = \varepsilon U,$$

und daher vermittelst der Differentialgleichungen der Bewegung:

$$\Sigma m_i \left[x_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} + y_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} + z_i \frac{d^2 z_i}{dt^2}\right] = \varepsilon U.$$

Der Ausdruck linker Hand wird ein vollständiges Differential, wenn man dazu die lebendige Kraft

$$\Sigma m_i \left[\frac{dx_i}{dt} \cdot \frac{dx_i}{dt} + \frac{dy_i}{dt} \cdot \frac{dy_i}{dt} + \frac{dz_i}{dt} \cdot \frac{dz_i}{dt}\right] = 2U + 2h$$

addirt. Man erhält dann durch Integration von $t = 0$ bis $t = t$:

$$\Sigma m_i [x_i x'_i + y_i y'_i + z_i z'_i] - \Sigma m_i [a_i a'_i + b_i b'_i + c_i c'_i] = (2+\varepsilon) \int_0^t U dt + 2ht.$$

Es ist aber anderseits:

$$V = \int_0^t \Sigma m_i[x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2]\,dt = 2\int_0^t U\,dt + 2ht,$$

und daher

$$\Sigma m_i[x_i x_i' + y_i y_i' + z_i z_i'] - \Sigma m_i[a_i a_i' + b_i b_i' + c_i c_i'] = \frac{2+\varepsilon}{2}.V - \varepsilon h t,$$

welches die Gleichung ist, vermittelst welcher die Functionen V und t auf einander zurückgeführt werden. Man kann aus dieser Formel, da der Theil linker Hand ein vollständiges Differential ist, auch noch das abermalige Integral

$$\int V\,dt$$

finden. Setzt man

$$R = \Sigma m_i(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2), \qquad R' = \frac{dR}{dt},$$

und nennt R_0, R_0' die Anfangswerthe von R, R', so kann man die vorstehende Gleichung auch so schreiben:

$$R' - R_0' = (2+\varepsilon)V - 2\varepsilon h t,$$

woraus durch Integration:

$$R - R_0 - R_0' t = (2+\varepsilon)\int_0^t V\,dt - \varepsilon h.t^2.$$

Für den Fall des Weltsystems ist die Kräftefunction U von der Dimension -1, und daher $\varepsilon = -1$. Man hat daher für diesen Fall:

$$R' - R_0' = V + 2ht.$$

Wenn die Kräftefunction von der Dimension -2 ist, so kann man vermittelst der vorstehenden Formeln nicht mehr die Function V auf die Function t zurückführen, weil dann $\varepsilon = -2$, und daher der in V multiplicirte Term verschwindet. In diesem besonderen Falle hat man aber zwei neue Integrale der Differentialgleichungen der Bewegung:

$$R' - R_0' = 4ht, \qquad R - R_0 - R_0' t = 2ht^2,$$

welche zwei willkührliche Constanten R_0, R_0' enthalten. Es ist dies der Fall, wenn das System materieller Puncte gegenseitigen Anziehungen unterworfen ist, die sich wie die Kuben der Distanzen verhalten.

Setzt man für t den Ausdruck

$$t = \frac{\partial V}{\partial h},$$

so hat man nach den obigen Formeln:

$$R' - R_0' = (2+\varepsilon)V - 2\varepsilon h\frac{\partial V}{\partial h},$$

woraus durch Integration nach h:

$$\int h^{-\frac{2+3\varepsilon}{2\varepsilon}}(R'-R'_0)\partial h = -2\varepsilon h^{-\frac{2+\varepsilon}{2\varepsilon}} V + K,$$

wo K eine von h unabhängige Gröfse ist. Kennt man daher V für einen speciellen Werth von h, z. B. für $h=0$, so kann man V auch durch Integration nach h finden. Ist $\varepsilon = -1$, so wird die obige Formel:

$$\int (R'-R'_0)\frac{\partial h}{\sqrt{h}} = 2\sqrt{h}.V + K.$$

Es mufs hier $R'-R'_0$ durch die Anfangs- und Endwerthe der Coordinaten und durch h ausgedrückt, und bei der Integration blofs h als variabel gesetzt werden.

Ich will bei dieser Gelegenheit noch folgende Bemerkungen hinzufügen. Man erhält aus den obigen Formeln das zweite Differentiale von R, nach der Zeit genommen, durch die Kräftefunction ausgedrückt vermittelst der Gleichung;

$$\tfrac{1}{2}\frac{d^2 R}{dt^2} = (2+\varepsilon)U + 2h,$$

oder wenn $\varepsilon = -1$,

$$\tfrac{1}{2}\frac{d^2 R}{dt^2} = U + 2h.$$

Nach einer bekannten, von *Lagrange* öfters angewandten algebraischen Umformung kann, wenn M die Summe der Massen, X, Y, Z die Coordinaten des Schwerpunctes bedeuten, oder

$$MX = \Sigma m_i x_i, \quad MX = \Sigma m_i y_i, \quad MY = \Sigma m_i z_i,$$

die Gröfse MR folgendermafsen ausgedrückt werden,

$$MR = \Sigma m_i \Sigma m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)$$
$$= \Sigma m_i m_k [(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2] + M^2(X^2 + Y^2 + Z^2),$$

oder, wenn $r_{i,k}$ die Distanz der Massen m_i und m_k bedeutet,

$$MR = \Sigma m_i m_k r_{i,k}^2 + M^2(X^2 + Y^2 + Z^2),$$

wo man die Summe auf je zwei Puncte des Systems auszudehnen hat. Der Schwerpunct eines Systems Körper, welche nur ihren gegenseitigen Anziehungen unterworfen sind, bewegt sich gleichförmig in einer geraden Linie, so dafs

$$X = \alpha t + \beta, \quad Y = \alpha' t + \beta, \quad Z = \alpha'' t + \beta.$$

Man erhält daher für diesen Fall, wenn

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2,$$

vermittelst der angegebenen Umformung von MR die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\frac{d^2.\Sigma.m_i m_k r_{i,k}^2}{dt^2} = MU + 2Uh - U^2 r^2,$$

wo γ die Geschwindigkeit des Schwerpunctes bedeutet. Substituirt man den für das *Newton*sche Attractionsgesetz Statt findenden Ausdruck der Kräftefunction U, wie wir ihn oben gegeben haben, so hat man:

$$\tfrac{1}{2}\frac{d^2\Sigma m_i m_k r_{i,k}^2}{M dt^2} = \Sigma\frac{m_i m_k}{r_{i,k}} + 2h - M\gamma^2,$$

oder, da nach dem Satze von der lebendigen Kraft:

$$\Sigma m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) - 2\Sigma\frac{m_i m_k}{r_{i,k}} = 2h,$$

die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\frac{d^2\Sigma m_i m_k r_{i,k}^2}{M dt^2} = \Sigma m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) - M\gamma^2 - \Sigma\frac{m_i m_k}{r_{i,k}}.$$

Der Ausdruck

$$\frac{1}{M}\Sigma m_i m_k r_{i,k}^2 = \Sigma m_i(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - M(X^2 + Y^2 + Z^2)$$

ist gleich der Summe der Massen des Systems respective multiplicirt in das Quadrat ihrer Distanz von seinem Schwerpunct. Man beweist dies aus der vorstehenden Gleichung, indem man den Anfangspunct der Coordinaten im Schwerpunct annimmt, wodurch $X = Y = Z = 0$. Eben so beweist man, daſs

$$\Sigma m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) - M\gamma^2$$

die relative lebendige Kraft um den Schwerpunct ist, d. i. die Summe der Masse des Systems, respective multiplicirt in das Quadrat ihrer Geschwindigkeit um seinen Schwerpunct. Wenn das System stabil ist, so darf der Ausdruck:

$$\Sigma m_i m_k r_{i,k}^2,$$

während t ins Unendliche wächst, weder unendlich noch 0 werden; woraus leicht folgt, daſs sein zweites Differential von keiner Zeit an immer dasselbe Zeichen behalten darf. Die beiden Gleichungen:

$$\tfrac{1}{2}\frac{d^2\Sigma m_i m_k r_{i,k}^2}{M dt^2} = \Sigma\frac{m_i m_k}{r_{i,k}} + 2h - M\gamma^2 = \Sigma m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) - M\gamma^2 - \Sigma\frac{m_i m_k}{r_{i,k}}$$

lehren also, daſs, wenn die Bewegung um den Schwerpunct des Systems stabil sein soll, 1) die Constante $2h - M\gamma^2$ negativ sein muſs, d. h. weil

$$2h - M\gamma^2 = \Sigma m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) - M\gamma^2 - 2\Sigma\frac{m_i m_k}{r_{i,k}},$$

daſs die relative lebendige Kraft um den Schwerpunct immer kleiner bleiben muſs, als die doppelte Kräftefunction;

2) dafs die **relative lebendige Kraft um den Schwerpunct abwechselnd immer gröfser und kleiner werden mufs, als die Kräftefunction**; 3) dafs die **Kräftefunction sowohl als die relative lebendige Kraft abwechselnd gröfser und kleiner werden mufs als die Constante** $M\gamma^2 - 2h$.

Wenn man die lebendige Kraft und die Kräftefunction in Reihen nach den Cosinus und Sinus von der Zeit proportionalen Winkeln entwickelt, so mufs, wenn das System stabil sein soll, die Constante $M\gamma^2 - 2h$ der wahre constante Term in beiden Reihen sein. Denn ein von diesem verschiedener Werth des constanten Termes würde in dem Ausdruck von

$$\Sigma m_i m_k r_{i,k}^2$$

Terme erzeugen, die in das Quadrat der Zeit multiplicirt sind, und daher mit der Zeit in's Unendliche wachsen.

7.

Um das Vorhergehende an einem Beispiel zu erläutern, will ich die Function V für einen einfachen und vielbehandelten Fall, die elliptische Bewegung eines Planeten angeben. Da man nach dem sogenannten *Lambert*schen Theorem den Ausdruck der Zwischenzeit t durch die Anfangs- und Endwerthe der Coordinaten kennt, so kann man dem vorigen §. zufolge auch den Ausdruck für V sogleich ohne eine neue Integration daraus finden. Es sei r der *radius vector*, $r' = \frac{dr}{dt}$, E die excentrische Anomalie, r_0, r'_0, E_0 die Anfangswerthe von r, r', E; es sei ferner k^2 die anziehende Kraft für die Raumeinheit, e die Excentricität, a die halbe grofse Axe. Setzt man mit *Gaufs* (*Theoria motus pag.* 120)

$$\frac{E-E_0}{2} = g, \quad \frac{E+E_0}{2} = G,$$

und führt einen neuen Hülfswinkel h vermittelst der Gleichung

$$e \cos G = \cos h$$

ein; setzt man ferner:

$$h+g = \varepsilon, \quad h-g = \varepsilon',$$

so wird der Ausdruck der Zwischenzeit:

$$\frac{k}{a^{\frac{3}{2}}} t = \varepsilon - \sin\varepsilon - (\varepsilon' - \sin\varepsilon').$$

Der Satz von der lebendigen Kraft giebt:

$$\tfrac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) = k^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right),$$

so daſs die obige Constante h hier $\frac{-k^2}{2a}$ und $\frac{k^2}{r}$ die Kräftefunction U ist. Setzt man daher in der im vorigen §. gefundenen Formel

$$R'-R'_0 = V+2ht,$$

für R, h ihre Werthe,

$$R = r^2, \quad h = \frac{-k^2}{2a},$$

so erhält man

$$V = 2(rr'-r_0r'_0)+\frac{k^2}{a}.t.$$

Ich habe hier in den Ausdrücken von V, R, h die Masse des bewegten Planeten, die eigentlich als Factor diese Gröſsen officirt, da sie aus der Rechnung herausgeht, fortgelassen.

Die bekannten Formeln der elliptischen Bewegung geben,

$$rr' = k\sqrt{a}.e\sin E,$$

und daher

$$rr'-r_0r'_0 = k\sqrt{a}.e(\sin E-\sin E_0)$$

$$= Rk\sqrt{a}.e\sin g\cos G = 2k\sqrt{a}.\sin g\cos h = k\sqrt{a}(\sin\varepsilon-\sin\varepsilon').$$

Benutzt man diesen Ausdruck und den *Lambert*schen Ausdruck der Zeit t, so erhält man für V einen ganz ähnlichen Ausdruck, wie für t,

$$V = k\sqrt{a}[\varepsilon+\sin\varepsilon-(\varepsilon'+\sin\varepsilon')],$$

welcher sich von dem Ausdrucke von $\frac{k^2}{a}t$ nur in dem Zeichen der Sinus unterscheidet. Nennt man ϱ die Sehne der Bahn, welche den Anfangs- und Endpunct verbindet, so hat man nach den von *Gauſs* am angeführten Orte gegebenen Formeln:

$$\sin^2\tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{r+r_0+\varrho}{4a}, \quad \sin^2\tfrac{1}{2}\varepsilon' = \frac{r+r_0-\varrho}{4a},$$

wo

$$r^2 = x^2+y^2+z^2, \quad r_0^2 = x_0^2+y_0^2+z_0^2,$$
$$\varrho^2 = (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2.$$

Vermittelst dieser Formeln wird V, so wie t, durch die Coordinaten des Anfangspunctes und Endpunctes und die groſse Achse ausgedrückt. Der hier gegebene Ausdruck von V kommt mit demjenigen überein, welchen *Hamilton* auf anderm Wege gefunden hat.

Wenn man in den angegebenen Ausdruck von V alle Gröſsen auſser k und a variirt, so erhält man

$$\delta V = 2k\sqrt{a}[\cos^2\tfrac{1}{2}\varepsilon.\delta\varepsilon-\cos^2\tfrac{1}{2}\varepsilon'.\delta\varepsilon'].$$

Es ist aber

$$\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon.\delta\varepsilon = \frac{\delta r + \delta r_0 + \delta\varrho}{4a}, \quad \sin\tfrac{1}{2}\varepsilon'\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon'.\delta\varepsilon' = \frac{\delta r + \delta r_0 - \delta\varrho}{4a}.$$

Bemerkt man daher die Gleichung:

$$\operatorname{cotang}\tfrac{1}{2}\varepsilon - \operatorname{cotang}\tfrac{1}{2}\varepsilon' = -\frac{\sin\frac{1}{2}(\varepsilon-\varepsilon')}{\sin\frac{1}{2}\varepsilon\sin\frac{1}{2}\varepsilon'} = \frac{-\sin g}{\sin\frac{1}{2}\varepsilon\sin\frac{1}{2}\varepsilon'},$$

$$\operatorname{cotang}\tfrac{1}{2}\varepsilon + \operatorname{cotang}\tfrac{1}{2}\varepsilon' = \frac{\sin\frac{1}{2}(\varepsilon+\varepsilon')}{\sin\frac{1}{2}\varepsilon\sin\frac{1}{2}\varepsilon'} = \frac{\sin h}{\sin\frac{1}{2}\varepsilon\sin\frac{1}{2}\varepsilon'},$$

so erhält man

$$\delta V = \frac{k[\sin h\,\delta\varrho - \sin g(\delta r + \delta r_0)]}{2\sqrt{a}\sin\frac{1}{2}\varepsilon\sin\frac{1}{2}\varepsilon'}.$$

Für den Nenner kann man in diesem Ausdruck zufolge der obigen Formeln auch setzen:

$$2\sqrt{a}\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon' = \frac{\sqrt{[(r+r_0)^2-\varrho^2)]}}{2\sqrt{a}}.$$

Führt man in diese Formel den von beiden *radii vectores* r und r_0 gebildeten Winkel ein, den wir mit *Gaufs* $2f$ nennen wollen, so hat man:

$$r^2 + r_0^2 - \varrho^2 = 2rr_0\cos 2f,$$

und daher

$$2\sqrt{a}\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon' = \frac{\cos f}{\sqrt{a}}\sqrt{(rr_0)}.$$

Hiernach erhalten wir für die Variation von V den Ausdruck:

$$\delta V = \frac{k\sqrt{a}\,[\sin h\,\delta\varrho - \sin g(\delta r + \delta r_0)]}{\cos f\sqrt{(rr_0)}},$$

in welcher Formel man auch einen der Winkel g, h durch den andern vermittelst der Gleichung

$$\varrho = 2a\sin g\sin h,$$

welche sich aus den obigen Formeln leicht ableitet, ersetzen kann.

Der vorstehende Ausdruck der Variation von V ergiebt sogleich die Werthe der nach den Coordinaten-Achsen zerlegten Geschwindigkeiten des Anfangs- und Endpunctes. Man erhält nämlich, wenn man ϱ, r, r_0 durch die Coordinaten ausdrückt,

$$x' = \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{k\sqrt{a}}{\cos f\sqrt{(rr_0)}}\left[\frac{x-x_0}{\varrho}\sin h - \frac{x}{r}\sin g\right],$$

$$y' = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{k\sqrt{a}}{\cos f\sqrt{(rr_0)}}\left[\frac{y-y_0}{\varrho}\sin h - \frac{y}{r}\sin g\right],$$

$$z' = \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{k\sqrt{a}}{\cos f\sqrt{(rr_0)}}\left[\frac{z-z_0}{\varrho}\sin h - \frac{z}{r}\sin g\right],$$

$$x'_0 = -\frac{\partial V}{\partial x_0} = \frac{k\sqrt{a}}{\cos f\sqrt{(rr_0)}}\left[\frac{x-x_0}{\varrho}\sin h + \frac{x_0}{r_0}\sin g\right],$$
$$y'_0 = -\frac{\partial V}{\partial y_0} = \frac{k\sqrt{a}}{\cos f\sqrt{(rr_0)}}\left[\frac{y-y_0}{\varrho}\sin h + \frac{y_0}{r_0}\sin g\right],$$
$$z'_0 = -\frac{\partial V}{\partial z_0} = \frac{k\sqrt{a}}{\cos f\sqrt{(rr_0)}}\left[\frac{z-z_0}{\varrho}\sin h + \frac{z_0}{r_0}\sin g\right].$$

Nennt man b die halbe kleine Achse, und bemerkt die von *Gaufs* ebenfalls gegebene Gleichung:

$$b\sin g = \sin f\sqrt{(rr_0)},$$

und setzt den halben Parameter $\frac{b^2}{a} = p$, so leitet man aus diesen Formeln auch noch leicht die folgenden ab,

$$x'-x'_0 = -\frac{k\,\text{tang}\,f}{\sqrt{p}}\left(\frac{x}{r}+\frac{x_0}{r_0}\right),$$
$$y'-y'_0 = -\frac{k\,\text{tang}\,f}{\sqrt{p}}\left(\frac{y}{r}+\frac{y_0}{r_0}\right),$$
$$z'-z'_0 = -\frac{k\,\text{tang}\,f}{\sqrt{p}}\left(\frac{z}{r}+\frac{z_0}{r_0}\right),$$

woraus nach einigen Reductionen:

$$\sqrt{[(x'-x'_0)^2+(y'-y'_0)^2+(z'-z'_0)^2]} = \frac{2k\sin f}{\sqrt{p}},$$

welche Formeln ich ihrer Einfachheit wegen hinzugefügt habe. Ich bemerke noch, dafs die Gröfsen $\frac{x}{r}+\frac{x^0}{r^0}$, $\frac{y}{r}+\frac{y^0}{r^0}$, $\frac{z}{r}+\frac{z^0}{r^0}$ gleich sind der Gröfse $2\cos f$ multiplicirt in die Cosinusse der Winkel, welche die den Winkel der *radii vectores* halbirende Linie mit den Coordinaten-Achsen bildet.

Den für V gefundenen Ausdruck kann man vermittelst der Gleichung

$$t = \frac{\partial V}{\partial h} = -\frac{\partial V}{\partial.\frac{k^2}{2a}} = \frac{2a^2}{k^2}.\frac{\partial V}{\partial a}$$

prüfen. Nimmt man die partiellen Differentialen nach a, so erhält man aus dem Ausdrucke

$$V = k\sqrt{a}\,[\varepsilon+\sin\varepsilon-(\varepsilon'+\sin\varepsilon')]$$

die Gleichung:

$$\frac{\partial V}{\partial a} = 2k\sqrt{a}\left[\cos^2\tfrac{1}{2}\varepsilon\frac{\partial\varepsilon}{\partial a}-\cos^2\tfrac{1}{2}\varepsilon'\frac{\partial\varepsilon'}{\partial a}\right]+\frac{1}{2a}V.$$

Aus den Gleichungen

$$\sin^2\tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{r+r_0+\varrho}{4a}, \qquad \sin^2\tfrac{1}{2}\varepsilon' = \frac{r+r_0-\varrho}{4a}$$

folgt aber:

$$\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial a} = \frac{-\sin\frac{1}{2}\varepsilon}{a}, \qquad \cos\tfrac{1}{2}\varepsilon'\,\frac{\partial\varepsilon'}{\partial a} = \frac{-\sin\frac{1}{2}\varepsilon'}{a},$$

wodurch die vorige Gleichung sich in folgende verwandelt:

$$\frac{\partial V}{\partial a} = \frac{-k}{\sqrt{a}}(\sin\varepsilon - \sin\varepsilon') + \frac{V}{2a} = \frac{k}{2\sqrt{a}}[\varepsilon - \varepsilon' - (\sin\varepsilon - \sin\varepsilon')] = \frac{k^2}{2a^2}t,$$

was zu beweisen war.

Die partielle Differentialgleichung, auf deren vollständige Integration die Bewegung eines sich gegenseitig anziehenden und von festen Puncten angezogenen Systemes Puncte zurückgeführt werden kann, war

$$\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z_i}\right)^2\right] = U + h.$$

Für unsern Fall folgt hieraus die partielle Differentialgleichung, auf deren vollständige Integration die Bewegung eines Planeten um die Sonne zurückkommt:

$$\tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right] = k^2\left[\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}} - \frac{1}{2a}\right] = k^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right).$$

Ich will jetzt zeigen, dafs der für V angegebene Ausdruck in der That dieser partiellen Differentialgleichung Genüge leistet.

Benutzt man nämlich die oben für $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ gefundenen Werthe, und bemerkt die Gleichungen:

$$x(x - x_0) + y(y - y_0) + z(z - r_0) = r^2 - r r_0 \cos 2f, \qquad \sin g \sin h = \frac{\varrho}{2a},$$

so erhält man

$$\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right] = \frac{k^2 a}{\cos^2 f . r r_0}\left[\sin^2 h + \sin^2 g - \frac{r - r_0 \cos 2f}{a}\right].$$

Es ist aber

$$\begin{aligned}\sin^2 h + \sin^2 g &= 2\left[\sin^2\frac{\varepsilon}{2}\cos^2\frac{\varepsilon'}{2} + \sin^2\frac{\varepsilon'}{2}\cos^2\frac{\varepsilon}{2}\right]\\ &= 2\left[\sin^2\frac{\varepsilon}{2} + \sin^2\frac{\varepsilon'}{2}\right] - 4\sin^2\frac{\varepsilon}{2}\sin^2\frac{\varepsilon'}{2},\end{aligned}$$

oder nach den oben angegebnen Formeln:

$$\sin^2 h + \sin^2 g = \frac{r + r_0}{a} - \frac{\cos^2 f . r r_0}{a^2},$$

und daher

$$a(\sin^2 h + \sin^2 g) - (r - r_0\cos 2\varphi) = r_0\cos^2 f\left[2 - \frac{r}{a}\right],$$

wodurch man erhält:

$$\tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right] = k^2\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right],$$

wie verlangt wurde. Gleichzeitig sehn wir auf diese Weise, dafs die für x', y', z' gegebenen Werthe der Gleichung für die lebendige Kraft genügen.

Für die parabolische Bewegung verschwindet die Constante, die im Satze von der Erhaltung der lebendigen Kraft zur Kräftefunction hinzukommt, oder es wird $a=\infty$. Die Winkel ε, ε', h, g werden unendlich klein, von der Ordnung $\frac{1}{\sqrt{a}}$. Man erhält daher für diesen Fall aus den obigen Formeln:

$$\sqrt{a}.\varepsilon=\sqrt{(r+r_0+\varrho)},\qquad \sqrt{a}.\varepsilon'=\sqrt{(r+r_0-\varrho)},$$

ferner

$$\sqrt{a^3}[\varepsilon-\sin\varepsilon)=\tfrac{1}{6}.\sqrt{a^3}.\varepsilon^3=[r+r_0+\varrho]^{\frac{3}{2}},$$

$$\sqrt{a^3}[\varepsilon'-\sin\varepsilon']=\tfrac{1}{6}.\sqrt{a^3}.\varepsilon'^3=[r+r_0+\varrho]^{\frac{3}{2}},$$

wodurch die für V und t angegebenen Ausdrücken folgende Form annehmen:

$$V=2k[\sqrt{(r+r_0+\varrho)}-\sqrt{(r+r_0-\varrho)}],$$

$$t=\frac{1}{6k}\left[(r+r_0+\varrho)^{\frac{3}{2}}-(r+r_0-\varrho)^{\frac{3}{2}}\right],$$

welches letztere der bekannte Ausdruck der Zeit in der parabolischen Bewegung eines Kometen ist. Setzt man der Kürze halber:

$$\frac{1}{\sqrt{(r+r_0-\varrho)}}+\frac{1}{\sqrt{(r+r_0+\varrho)}}=A,\qquad \frac{1}{\sqrt{(r+r_0-\varrho)}}-\frac{1}{\sqrt{(r+r_0+\varrho)}}=B,$$

so erhält man hieraus:

$$x'=\frac{\partial V}{\partial x}=k\left[\frac{x-x_0}{\varrho}A-\frac{x}{r}B\right],\qquad x'_0=-\frac{\partial V}{\partial x_0}=k\left[\frac{x-x_0}{\varrho}A+\frac{x_0}{r_0}B\right],$$

$$y'=\frac{\partial V}{\partial y}=k\left[\frac{y-y_0}{\varrho}A-\frac{y}{r}B\right],\qquad y'_0=-\frac{\partial V}{\partial y_0}=k\left[\frac{y-y_0}{\varrho}A+\frac{y_0}{r_0}B\right],$$

$$z'=\frac{\partial V}{\partial z}=k\left[\frac{z-z_0}{\varrho}A-\frac{z}{r}B\right],\qquad z'_0=-\frac{\partial V}{\partial z_0}=k\left[\frac{z-z_0}{\varrho}A+\frac{z_0}{r_0}B\right].$$

Hamilton giebt den Ausdrücken von t und V noch eine besondere Form, welche ich ebenfalls hersetzen will. Da nämlich ε' aus ε erhalten wird, wenn ich $-\varrho$ statt ϱ schreibe, so kann ich den Werth von V so ausdrücken:

$$V=k\sqrt{a}\int_{-\varrho}^{+\varrho}(1+\cos\varepsilon)\frac{\partial\varepsilon}{\partial\varrho}.\partial\varrho,$$

indem ich a, r, r_0 als constant und nur ϱ während der Integration als veränderlich annehme. Da aber

$$\sin^2\tfrac{1}{2}\varepsilon=\frac{r+r_0+\varrho}{4a},$$

so wird

$$\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon\frac{\partial\varepsilon}{\partial\varrho}=\frac{1}{4a},$$

und daher

$$(1+\cos\varepsilon)\frac{\partial\varepsilon}{\partial\varrho} = \cos^2\tfrac{1}{2}\varepsilon\frac{\partial\varepsilon}{\partial\varrho} = \frac{\cos\frac{1}{2}\varepsilon}{2a\sin\frac{1}{2}\varepsilon} = \frac{1}{2a}\sqrt{\left[\frac{4a}{r+r_0+\varrho}-1\right]}.$$

Hieraus folgt:

$$V = k\int_{-\varrho}^{+\varrho}\left[\frac{1}{r+r_0+\varrho}-\frac{1}{4a}\right]^{\frac{1}{2}}\partial\varrho,$$

$$t = \frac{2a^2}{k^2}\cdot\frac{\partial V}{\partial a} = \frac{1}{4k}\int_{-\varrho}^{+\varrho}\left[\frac{1}{r+r_0+\varrho}-\frac{1}{4a}\right]^{-\frac{1}{2}}\partial\varrho,$$

welches die von *Hamilton* gegebenen Ausdrücke sind. Setzt man in ihnen $a=\infty$ oder negativ, so erhält man die Formeln für die parabolische oder hyperbolische Bewegung.

8.

Nachdem wir im Vorigen gesehn haben, daſs für den Fall der Bewegung eines freien Systemes von n materiellen Puncten, auf welche nur innere Anziehungs- oder Abstoſsungskräfte wirken, das System von $3n$ gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung durch eine einzige partielle Differentialgleichung vollkommen ersetzt wird, von welcher man nur irgend eine vollständige Lösung zu kennen braucht, so frägt sich, welche Mittel die heutige Analysis zur Auffindung einer solchen Lösung besitzt, und ob durch solche Zurückführung nach den bisherigen Kenntnissen etwas gewonnen ist.

So viel mir bekannt ist, ist alles wesentliche, was man über die Integration der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung weiſs, in demjenigen enthalten, was *Lagrange* darüber in seinen Vorlesungen über die Functionenrechnung sagt, und in einer Abhandlung von *Pfaff* in den Abhandlungen der Berliner Akademie der Wissenschaften vom J. 1814. *Lagrange* beschränkt seine Untersuchungen auf die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen d r e i Variabeln, von denen eine als Function der beiden andern, welche als unabhängig betrachtet werden, zu bestimmen ist. Die *Pfaff*sche Methode, welche sich auf die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen jeder beliebigen Anzahl Variabeln erstreckt, habe ich im 2ten Bande dieses Journals auf eine etwas mehr symmetrische und übersichtliche Art darzustellen gesucht, ohne jedoch zu derselben etwas wesentlich neues hinzuzufügen. *Pfaff* verläſst in der angeführten Abhandlung den von *Lagrange* eingeschlagenen Weg, dessen Verfolgung für mehr als drei Variabeln seiner Meinung nach unübersteiglichen Hindernissen unterliegt. Er betrachtet die Aufgabe unter einem ganz neuen Gesichtspunct als einen besondern Fall einer viel allgemeinern, deren vollständige Lösung ihm gelingt. Es sei nämlich x eine Function der n Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$, und $p_1, p_2, \ldots p_n$ ihre nach diesen Variabeln genommenen partiellen Differentialquotienten, so ist eine Gleichung von der Form

$$0 = \varphi(x, x_1, x_2, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_n)$$

der allgemeinste Ausdruck einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung zwischen $n+1$ Variabeln. Denkt man sich vermittelst dieser Gleichung p_n als Function der übrigen $2n$ Gröfsen $x, x_1, x_2, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_{n-1}$ bestimmt, so kommt es darauf an, die zwischen diesen $2n$ Gröfsen Statt habende Gleichung

$$dx = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 \ldots + p_{n-1} dx_{n-1} + p_n dx_n$$

durch ein System von n Gleichungen zu integriren. Ist nämlich x eine Function von $x_1, x_2, \ldots x_n$, so sind auch seine nach diesen Gröfsen genommenen partiellen Differentialquotienten $p_1, p_2, \ldots p_n$ Functionen derselben, oder es giebt zwischen den $2n+1$ Gröfsen $x, x_1, x_2, \ldots x_n, p_2, p_2, \ldots p_n$ eine Anzahl von $n+1$ Gleichungen, von denen eine $\varphi = 0$ gegeben ist, so dafs also, wenn vermittelst dieser letztern Gleichung p_n durch die übrigen Gröfsen ausgedrückt wird, noch n Gleichungen zwischen den $2n$ Gröfsen $x, x_1, x_2, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_{n-1}$ zu finden sind, welche der vorstehenden Differentialgleichung Genüge leisten müssen. *Pfaff* betrachtet die allgemeinste Form einer gewöhnlichen lineären Differentialgleichung erster Ordnung zwischen $2n$ Variabeln $x, x_1, x_2, \ldots x_{2n-1}$,

$$0 = X dx + X_1 dx_1 + \ldots + X_{2n-1} dx_{2n-1},$$

in welcher $X, X_1, \ldots X_{2n-1}$ beliebige Functionen dieser $2n$ Variabeln sind. Diese reducirt sich auf die vorige für den speciellen Fall, wo

$$X_{n+1} = X_{n+2} \ldots = X_{2n-1} = 0,$$

wenn man überdies statt $-\frac{X_1}{X}, -\frac{X_2}{X}, \ldots -\frac{X_n}{X}$ die Gröfsen $p_1, p_2, \ldots$ $\ldots p_n$ schreibt, von denen man $p_1, p_2, \ldots p_{n-1}$ nebst $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ als die unabhängigen Variabeln betrachtet, und p_n als eine gegebene Function derselben, so dafs also die Coefficienten $p_1, p_2, \ldots p_{n-1}$ zu gleicher Zeit die Stelle der $n-1$ unabhängigen Variabeln $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots x_{2n-1}$ vertreten. *Pfaff* stellt sich zunächst die Aufgabe, die $2n$ Variabeln durch eine derselben, z. B. x_{2n-1} und durch $2n-1$ andere $a_1, a_2, \ldots a_{2n-1}$ auszudrücken, so dafs, wenn man die gegebene Differentialgleichung

$$0 = X\,dx + X_1\,dx_1 + \ldots + X_{2n-1}\,dx_{2n-1}$$

durch diese neuen Variabeln darstellt, der in dx_{2n-1} multiplirte Ausdruck verschwindet, und in den in die übrigen Differentialen da_1, da_2, ... da_{2n-1} multiplicirten Ausdrücken die Gröfse x_{2n-1} selber nur in einem allen gemeinschaftlichen Factor vorkommt, wodurch sich nach geschehner Division mit diesem gemeinschaftlichen Factor die Differentialgleichung auf eine andere, blofs zwischen $2n-1$ Gröfsen a_1, a_2, ... a_{2n-1} reducirt. Er zeigt, dafs dieses immer möglich ist, und dafs man die zu machenden Substitutionen findet, wenn man ein System von $2n-1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung, zwischen den $2n$ Variabeln x, x_1, ... x_{2n-1}, welches er aufstellt, vollständig integrirt, und die Ausdrücke der willkührlichen Constanten durch x, x_1, ... x_{2n-1}, wie sie sich durch die $2n-1$ Integralgleichungen ergeben, für die neu einzuführenden Gröfsen a_1, a_2, ... a_{2n-1} annimmt. Es ist so der merkwürdige Satz gefunden, dafs sich jede lineäre gewöhnliche Differentialgleichung zwischen einer geraden Zahl Variabeln in eine andere transformiren läfst, welche nur die nächst niedrige ungerade Zahl Variabeln enthält. Aber es läfst sich nicht eben so eine lineäre gewöhnliche Differentialgleichung zwischen einer ungeraden Zahl Variabeln in eine andere transformiren, welche nur die nächst niedrige gerade Zahl Variabeln enthält, sondern es ist hierzu, wenn es möglich sein soll, eine bestimmte Bedingungsgleichung zwischen den Coefficienten der Differentialgleichung erforderlich. Um daher das gefundene Theorem zu einer weitern Reduction anwenden zu können, setzt *Pfaff* eine der neu eingeführten Gröfsen, z. B. a_{2n-1} einer Constante gleich, wodurch die Differentialgleichung zwischen nur $2n-2$ Variabeln wird, die er nach derselben Methode auf eine zwischen nur $2n-3$ Variabeln b_1, b_2, ... b_{2n-3} reducirt, von welchen er wieder eine, z. B. b_{2n-3}, einer Constante gleich setzt und die Differentialgleichung die dann zwischen $2n-4$ Variabeln ist, auf eine zwischen nur $2n-5$ Variabeln c_1, c_2, ... c_{2n-5} reducirt, von denen er wieder eine z. B. c_{2n-5} einer willkührlichen Constante gleich setzt, und so fort, bis die Aufgabe schliefslich auf die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Variabeln zurückkommt, deren Integration wieder eine willkührliche Constante einführt. Auf diese Weise integrirt *Pfaff* die vorgelegte Differentialgleichung dadurch, dafs er nach und nach n Ausdrücke a_{2n-1}, b_{2n-3}, c_{2n-5} u. s. w., willkührlichen Constanten gleich setzt, oder er zeigt, daſs sich jede lineäre gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung zwischen $2n$ Variabeln durch ein System von n endlichen Integralen, mit n willkührlichen Constanten integriren läſst. Kennt man ein solches System, so leitet *Pfaff* daraus die allgemeinste Lösung ab, mit einer willkührlichen Function von $n-1$ Gröſsen, indem er eine der willkührlichen Constanten die wir $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ nennen wollen, z. B. α_n als willkührliche Function der übrigen setzt, und diese selbst als veränderliche Gröſsen betrachtet; man erhält dann eine Differentialgleichung von der Form:

$$X\,dx + X_1\,dx_1 + \ldots + X_{2n-1}\,dx_{2n-1} = \Pi_1\,d\alpha_1 + \Pi_2\,d\alpha_2 \ldots + \Pi_{n-1}\,d\alpha_{n-1},$$

welche sich auf die gegebene reducirt, wenn man $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}$ als Functionen von $x, x_1, x_2, \ldots x_{2n-1}$ durch die $n-1$ Gleichungen:

$$\Pi_1 = 0, \quad \Pi_2 = 0, \quad \ldots \quad \Pi_{n-1} = 0$$

bestimmt. Behandelt man nach dieser allgemeinen Methode die Gleichung:

$$dx = p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 \ldots + p_{n-1}\,dx_{n-1} + p_n\,dx_n,$$

in welcher p_n durch die gegebene partielle Differentialgleichung als Function der übrigen Gröſsen bestimmt ist, so erhält man n Gleichungen, die, wenn man daraus die $n-1$ Gröſsen $p_1, p_2, \ldots p_{n-1}$ eliminirt, die gesuchte endliche Integralgleichung geben. Dieses ist alles, was meines Wissens über die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung bekannt war, wenn die Zahl der Variabeln drei übersteigt.

Von den n verschiedenen Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen, welche man nach dieser Methode nach einander aufzustellen, und jedes vollständig zu integriren hat, einem von $2n-1$ Differentialgleichungen zwischen $2n$ Variabeln, einem von $2n-3$ Differentialgleichungen zwischen $2n-2$ Variabeln, und so fort bis zu einer Differentialgleichung zwischen 2 Variabeln, kann nur das erste System allgemein angegeben werden, weil in dieser Methode die Aufstellung jedes folgenden die bereits ausgeführte vollständige Integration des zunächst vorhergehenden Systems postulirt. Setzt man der Kürze halber

$$(\alpha, \beta) = \frac{\partial X_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial X_\beta}{\partial x_\alpha},$$

so wird dieses erste System gewöhnlicher Differentialgleichungen in der Form, auf welche ich sie am angeführten Orte (*Crelle* Journal B. II. S. 353) gebracht habe, wenn man noch ein neues Differentiale dN einführt,

$$\begin{array}{rllll}
X\,dN = & * & (0,1)\,dx_1 & + \ldots + & (0,2n-1)\,dx_{2n-1}, \\
X_1\,dN = & (1,0)\,dx & * & + \ldots + & (1,2n-1)\,dx_{2n-1}, \\
X_2\,dN = & (2,0)\,dx + & (2,1)\,dx_1 \quad * & + \ldots + & (2,2n-1)\,dx_{2n-1}, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
X_{2n-1}\,dN = & (2n-1,0)\,dx + & (2n-1,1)\,dx_1 & + \ldots + & *
\end{array}$$

Aus diesen Gleichungen findet man die Verhältnisse von dx_1, dx_2, ... dx_{2n-1}. Es sind in ihnen die Verticalreihen und Horizontalreihen der Coëffizienten respective einander gleich, aber entgegengesetzt, da

$$(\alpha, \beta) = -(\alpha, \beta),$$

nach welcher Regel auch die Terme in der Diagonale alle verschwinden, da

$$(\alpha, \alpha) = 0;$$

ganz wie es der Fall auch in den lineären Gleichungen ist, auf welche *Lagrange* und *Poisson* in ihren Arbeiten über die Variation der Constanten in den Problemen der Mechanik gekommen sind. Ich habe in diesem Journal am angeführten Orte einige Betrachtungen über diese Art lineärer Gleichungen angestellt, welche sich immer mit grofser Leichtigkeit auflösen lassen.

Wenn man für x_{n+1}, x_{n+2}, ... x_{2n-1} respective p_1, p_2, ... p_{n-1} schreibt, und

$$X_1 = p_1, \quad X_2 = p_2, \quad \ldots . \quad X_{n-1} = p_{n-1}, \quad X_n = p_n,$$
$$X = -1, \quad X_{n+1} = X_{n+2} \ldots = X_{2n-1} = 0$$

setzt, so verwandelt sich das aufgestellte System Differentialgleichungen in folgendes:

$$\begin{aligned}
-dN &= -\frac{\partial p_n}{\partial x}\,dx_n, \\
p_1\,dN &= dp_1 - \frac{\partial p_n}{\partial x_1}\,dx_n, \\
p_2\,dN &= dp_2 - \frac{\partial p_n}{\partial x_2}\,dx_n, \\
&\ldots \ldots \\
p_{n-1}\,dN &= dp_{n-1} - \frac{\partial p_n}{\partial x_{n-1}}\,dx_n, \\
p_n\,dN &= \frac{\partial p_n}{\partial x}\,dx + \frac{\partial p_n}{\partial x_1}\,dx_1 \ldots + \frac{\partial p_n}{\partial x_{n-1}}\,dx_{n-1} \\
&\quad + \frac{\partial p_n}{\partial p_1}\,dp_1 + \frac{\partial p_n}{\partial p_2}\,dp_2 \ldots + \frac{\partial p_n}{\partial p_{n-1}}\,dp_{n-1},
\end{aligned}$$

$$0 = -dx_1 - \frac{\partial p_n}{\partial p_1} dx_n,$$
$$0 = -dx_2 - \frac{\partial p_n}{\partial p_2} dx_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$0 = -dx_{n-1} - \frac{\partial p_n}{\partial p_{n-1}} dx_n.$$

Aus diesen Gleichungen erhält man, wenn man für dN vermittelst der ersten überall dx_n einführt, und in der $(n+1)$ten $dx_1, \ldots dx_{n-1}$, $dp_1, \ldots dp_{n-1}$ vermittelst der übrigen Gleichungen eliminirt:

$$dx_1 = -\frac{\partial p_n}{\partial p_1} dx_n,$$
$$dx_2 = -\frac{\partial p_n}{\partial p_2} dx_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$dx_{n-1} = -\frac{\partial p_n}{\partial p_{n-1}} dx_n,$$
$$dp_1 = \left[\frac{\partial p_n}{\partial x_1} + \frac{\partial p_n}{\partial x} p_1\right] dx_n,$$
$$dp_2 = \left[\frac{\partial p_n}{\partial x_2} + \frac{\partial p_n}{\partial x} p_2\right] dx_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$dp_{n-1} = \left[\frac{\partial p_n}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial p_n}{\partial x} p_{n-1}\right] dx_n,$$
$$dx = \left[p_n - p_1 \frac{\partial p_n}{\partial p_1} - p_2 \frac{\partial p_n}{\partial p_2} \ldots - p_{n-1} \frac{\partial p_n}{\partial p_{n-1}}\right] dx_n.$$

Wenn die gegebene partielle Differentialgleichung

$$\varphi(x, x_1, \ldots x_n, p_1, \ldots p_n) = 0$$

ist, so werden

$$\frac{\partial p_n}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}}{\frac{\partial \varphi}{\partial p_n}}, \qquad \frac{\partial p_n}{\partial p_i} = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial p_i}}{\frac{\partial \varphi}{\partial p_n}}.$$

Die vorstehenden Gleichungen verwandeln sich daher, wenn man der Symmetrie wegen ein neues Differentiale dt einführt, in folgende:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial p_1}, \quad -\frac{dp_1}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + p_1\frac{\partial\varphi}{\partial x},$$
$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial p_2}, \quad -\frac{dp_2}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^2} + p_2\frac{\partial\varphi}{\partial x},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{dx_n}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial p_n}, \quad -\frac{dp_n}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_n} + p_n\frac{\partial\varphi}{\partial x},$$
$$\frac{dx}{dt} = p_1\frac{\partial\varphi}{\partial p_1} + p_2\frac{\partial\varphi}{\partial p_2}\dots + p_n\frac{\partial\varphi}{\partial p_n}.$$

Wenn die partielle Differentialgleichung die gesuchte Function nicht selber enthält, so wird $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0$, wodurch in den Gleichungen rechter Hand die in diese Gröfse multiplicirten Terme verschwinden. Wir wollen diese allgemeinen Formeln auf die partielle Differentialgleichung

$$\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z_i}\right)^2\right] = U + h$$

anwenden, in welcher die $3n$ Gröfsen x_i, y_i, z_i die unabhängigen Variabeln, V die gesuchte Function, die in der partiellen Differentialgleichung nicht selber vorkommt, U eine blofse Function der Gröfsen x_i, y_i, z_i, und h eine Constante ist. Setzt man

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = p_i, \quad \frac{\partial V}{\partial y_i} = q_i, \quad \frac{\partial V}{\partial z_i} = r_i,$$

so wird die partielle Differentialgleichung:

$$0 = \Phi = \tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}[p_i^2 + q_i^2 + r_i^2] - U - h,$$

und das Behufs ihrer Integration vollständig zu integrirende System von $6n$ gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial p_i} = \frac{1}{m_i}p_i, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i},$$
$$\frac{dy_i}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial q_i} = \frac{1}{m_i}q_i, \quad \frac{dq_i}{dt} = -\frac{\partial\varphi}{\partial y_i} = \frac{\partial U}{\partial y_i},$$
$$\frac{dz_i}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial r_i} = \frac{1}{m_i}r_i, \quad \frac{dr_i}{dt} = -\frac{\partial\varphi}{\partial z_i} = \frac{\partial U}{\partial z_i};$$

welches, wie man leicht sieht, die Differentialgleichungen der Bewegung sind. Man kann nämlich jedes System gewöhnlicher Differentialgleichung der 2ten Ordnung als ein System von noch einmal so vielen Differentialgleichungen der 1sten Ordnung darstellen, wenn man die Differentialquotienten der 1sten Ordnung als neue Variabeln betrachtet. So lassen sich für den hier betrachteten Fall, wenn man

$$m_i \frac{dx_i}{dt} = p_i, \qquad m_i \frac{dy_i}{dt} = q_i, \qquad m_i \frac{dz_i}{dt} = r_i,$$

setzt, die $3n$ Differentialgleichungen der Bewegung,

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \qquad m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \qquad m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i},$$

welche von der 2ten Ordnung sind, als ein System von $6n$ Differentialgleichungen 1ster Ordnung:

$$m_i \frac{dx_i}{dt} = p_i, \qquad m_i \frac{dy_i}{dt} = q_i, \qquad m_i \frac{dz_i}{dt} = r_i,$$

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \qquad \frac{dr_i}{dt} = \frac{\partial U}{\partial z_i},$$

darstellen, welches die obigen Gleichungen sind.

Will man die allgemeinen Formeln auf die andere Gleichung *Hamiltons*

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \tfrac{1}{2} \Sigma \frac{1}{m_i} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z_i}\right)^2 \right] = U$$

anwenden, so hat man hier eine neue unabhängige Variable t; setzt man wieder

$$\frac{\partial S}{\partial x_i} = p_i, \qquad \frac{\partial S}{\partial y_i} = q_i, \qquad \frac{\partial S}{\partial z_i} = r_i,$$

und das nach t genommene partielle Differentiale

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H,$$

so wird die partielle Differentialgleichung:

$$0 = \tfrac{1}{2} \Sigma \frac{1}{m_i} [p_i^2 + q_i^2 + r_i^2] - H - U = \Phi.$$

Schreibt man in den allgemeinen Formeln dT für das dort eingeführte Differentiale dt, da der Buchstabe t hier bereits in einer andern Bedeutung vorkommt, so erhält man nach den allgemeinen Formeln die vorigen Gleichungen, in welchen nur dT statt dt zu setzen ist, und außerdem noch die Gleichung:

$$\frac{dt}{dT} = -\frac{\partial \varphi}{\partial H} = 1, \quad \text{oder} \quad dT = dt,$$

welche zeigt, daſs man genau wieder die vorigen Gleichungen, oder die Differentialgleichungen der Bewegung erhält.

Wenn daher die Differentialgleichungen der Bewegung durch die neue Methode *Hamiltons* auf die Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung zurückgeführt werden, so besteht, wie ich im Vorigen gezeigt habe, die ganze Kenntniſs die wir bis jetzt über die

Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung wenigstens für den Fall von mehr als drei Variabeln besitzen, darin, die Integration dieser partiellen Differentialgleichung wieder auf die Integration der Differentialgleichungen der Bewegung zurückzuführen. Ja es ist die vollständige Integration der Differentialgleichungen der Bewegung nach der von mir auseinandergesezten *Pfaff'*schen Theorie nur ein erster Schritt zur Integration der partiellen Differentialgleichung; indem zufolge dieser Theorie nachher noch eine Reihenfolge von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen zu bilden und jedes vollständig zu integriren ist. Man mufs daher im umgekehrten Sinne sagen, dafs es eine wichtige Bemerkung *Hamilton's* ist, dafs die Integration der von ihm aufgestellten partiellen Differentialgleichungen nur auf die vollständige Integration der Differentialgleichungen der Bewegung zurückkommt, und es keiner weitern Integration von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen dazu bedarf.

Diese Bemerkung *Hamilton's* gewinnt noch dadurch an Wichtigkeit, dafs sie sich mit Leichtigkeit auf alle partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung ausdehnen läfst. In der That wird man, wenn man die *Hamilton'*sche Methode befolgt, wie ich im Folgenden zeigen will, zu dem allgemeinen Resultate gelangen, dafs zur Integration irgend einer partiellen Differentialgleichung zwischen irgend einer Zahl Variabeln die vollständige Integration des von *Pfaff* aufgestellten ersten Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen vollkommen hinreicht; und man nicht, wie die Methode dieses Analysten fordert, nachher noch eine Reihenfolge anderer Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen nach einander vollständig zu integriren hat. Diese Verallgemeinerung findet sich bereits für den Fall, wo die gesuchte Function selber in der partiellen Differentialgleichung nicht vorkommt, in einigen merkwürdigen Formeln *Hamilton's*, wenn man nur die in diesen Formeln vorkommenden Zeichen nicht, wie *Hamilton* thut, auf die Bedeutung, welche sie in der Mechanik haben, beschränkt.

9.

Es seien wieder $x_1, x_2, \ldots . x_n$ die unabhängigen Variabeln, x eine Function derselben, ihre nach diesen Variabeln genommenen partiellen Differentialquotienten,

$$\frac{\partial x}{\partial x_1} = p_1, \quad \frac{\partial x}{\partial x_2} = p_2, \quad \ldots . \quad \frac{\partial x}{\partial x_n} = p_n,$$

und

$$\varphi(x, x_1, x_2, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_n) = h,$$

wo h eine Constante ist, die gegebene partielle Differentialgleichung erster Ordnung. Um die Integration dieser Gleichung zu bewerkstelligen, stellt *Pfaff* zuerst zwischen den $2n+1$ Variabeln $x, x_1, x_2, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots \ldots p_n$ folgendes System von $2n$ gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung auf:

$$\begin{array}{ll} P\dfrac{dx_1}{dx} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial p_1}, & -P\dfrac{dp_1}{dx} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1} + p_1\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}, \\ P\dfrac{dx_2}{dx} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial p_2}, & -P\dfrac{dp_2}{dx} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2} + p_2\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ P\dfrac{dx_n}{dx} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial p_n}, & -P\dfrac{dp_n}{dx} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_n} + p_n\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}, \end{array}$$

wo der Kürze halber:

$$p_1\frac{\partial\varphi}{\partial p_1} + p_2\frac{\partial\varphi}{\partial p_2} \ldots + p_n\frac{\partial\varphi}{\partial p_n} = P$$

gesetzt ist. Aus diesen Gleichungen folgt identisch:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}dx_2 \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}dx_n$$
$$+ \frac{\partial\varphi}{\partial p_1}dp_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial p_2}dp_2 \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial p_n}dp_n = 0,$$

woraus durch Integration $\varphi = h$, so dafs ein Integral dieser Gleichungen die gegebene Gleichung selber ist. Sind die $2n-1$ anderen Integrale

$$A_1 = \alpha_1, \quad A_2 = \alpha_2, \quad \ldots \quad A_{2n-1} = \alpha_{2n-1},$$

wo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2n-1}$ willkührliche Constanten sind, welche in den Functionen $A_1, A_2, \ldots A_{2n-1}$ selber nicht mehr vorkommen, so zeigt *Pfaff*, dafs das vollständige Integral der vorgelegten partiellen Differentialgleichung dargestellt wird durch ein System von n Gleichungen zwischen den Functionen $A_1, A_2, \ldots A_{2n-1}$ mit n willkührlichen Constanten, vermittelst welcher man, mit Hinzuziehung der gegebenen Gleichung $\varphi = h$, die gesuchte Function x nebst ihren partiellen Differentialquotienten $p_1, p_2, \ldots p_n$ durch $x_1, x_2, \ldots x_n$ ausdrücken kann. Diese n Gleichungen sind so zu bestimmen, dafs sie mit Hülfe der gegebenen Gleichung $\varphi = h$ der einen Differentialgleichung

$$dx = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 \ldots + p_n dx_n$$

Genüge leisten, welche in dem aufgestellten Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen mit enthalten ist. Zu diesem Ende drückt *Pfaff* vermittelst der Gleichungen

$$\varphi = h, \quad A_1 = \alpha_1, \quad A_2 = \alpha_2, \quad \dots \quad A_{2n-1} = \alpha_{2n-1}$$

die Gröfsen $x_1, x_2, \dots x_n, p_1, p_2, \dots p_n$ durch $x, A_1, A_2, \dots A_{2n-1}$ aus, und zeigt, dafs wenn man diese Ausdrücke in die Differentialgleichung:

$$dx = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 \dots + p_n dx_n$$

substituirt, diese sich in eine andere

$$0 = B_1 dA_1 + B_2 dA_2 \dots + B_{2n-1} dA_{2n-1}$$

verwandelt, in welcher $B_1, B_2, \dots B_{2n-1}$ blofs Functionen von $A_1, A_2, \dots A_{2n-1}$ sind. Um diese durch ein System von n Gleichungen mit n willkührlichen Constanten zu integriren, mufs er nach einander $n-1$ verschiedene Systeme gewöhnlichen Differentialgleichungen, respective zwischen $2n-2$, $2n-4$, ... und 2 Variabeln vollständig integriren. Die *Hamilton*sche Methode, in der Allgemeinheit, deren sie fähig ist, aufgefafst, lehrt nun, dafs diese Gleichung

$$0 = B_1 dA_1 + B_2 dA_2 \dots + B_{2n-1} dA_{2n-1}$$

gar keine weitere Aufstellung von Differentialgleichungen und Integration derselben erfordert, sondern giebt unmittelbar die gesuchten n Gleichunchungen mit n willkührlichen Constanten, welche ihr Genüge thun. Man setze nämlich in den Gleichungen

$$A_1 = \alpha_1, \quad A_2 = \alpha_2, \quad \dots \quad A_{2n-1} = \alpha_{2n-1}, \quad \varphi = h,$$

für $x, x_1, x_2, \dots x_n, p_1, p_2, \dots p_n$ die Werthe

$$x = 0, \quad x_1 = x_1^0, \quad x_2 = x_2^0, \quad \dots \quad x_n = x_n^0,$$
$$p_1 = p_1^0, \quad p_2 = p_2^0, \quad \dots \quad p_n = p_n^0,$$

so kann man vermittelst dieser $2n-1$ Gleichungen die Gröfsen $x_1^0, x_2^0, \dots x_n^0, p_1^0, p_2^0, \dots p_n^0$ durch $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{2n-1}$ ausdrücken. Es seien die für $x_1^0, x_2^0, \dots x_n^0$ gefundenen Werthe:

$$x_1^0 = \Pi_1(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{2n-1}),$$
$$x_2^0 = \Pi_2(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{2n-1}),$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$x_n^0 = \Pi_n(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{2n-1}),$$

so sind die Gleichungen

$$x_1^0 = \Pi_1(A_1, A_2, \dots A_{2n-1}),$$
$$x_2^0 = \Pi_2(A_1, A_2, \dots A_{2n-1}),$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$x_n^0 = \Pi_n(A_1, A_2, \dots A_{2n-1}),$$

welche man aus den vorstehenden erhält, indem man statt α_1,

$\alpha_2, \ldots. \alpha_{2n-1}$ respective $A_1, A_2, \ldots. A_{2n-1}$ setzt, die gesuchten n Gleichungen zwischen den Gröſsen $A_1, A_2, \ldots. A_{2n-1}$ mit n willkührlichen Constanten $x_1^0, x_2^0, \ldots. x_n^0$, welche mit der gegebenen Gleichung $\Phi = h$ verbunden, der Differential-gleichung

$$dx = p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 \ldots. + p_n\,dx_n$$

oder ihrer transformirten

$$0 = B_1\,dA_1 + B_2\,dA_2 \ldots. + B_{2n-1}\,dA_{2n-1}$$

Genüge leisten, oder es enthält das System dieser Gleichungen die vollständige Lösung der vorgelegten partiellen Differentialgleichung. Der Beweis hiervon ist folgender.

Vermittelst der Gleichungen

$$\Phi = h, \quad A_1 = \alpha_1, \quad A_2 = \alpha_2, \quad \ldots. \quad A_{2n-1} = \alpha_{2n-1}$$

drücke man $x_1, x_2, \ldots. x_n, p_1, p_2, \ldots. p_n$ durch x und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ $\ldots \alpha_{2n-1}$ aus, und substituire diese Werthe in die Gleichungen:

$$\begin{array}{ll}
P\dfrac{\partial x_1}{\partial x} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial p_1}, & -P\dfrac{\partial p_1}{\partial x} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} p_1, \\
P\dfrac{\partial x_2}{\partial x} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial p_2}, & -P\dfrac{\partial p_2}{\partial x} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} p_2, \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
P\dfrac{\partial x_n}{\partial x} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial p_n}, & -P\dfrac{\partial p_n}{\partial x} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_n} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} p_n,
\end{array}$$

welche dadurch identisch werden müssen, eben so wie die aus ihnen folgende Gleichung:

$$1 = p_1\frac{\partial x_1}{\partial x} + p_2\frac{\partial x_2}{\partial x} \ldots. + p_n\frac{\partial x_n}{\partial x}.$$

Nimmt man von dieser letzten das partielle Differentiale nach einer der willkührlichen Constanten α, so erhält man, wenn man mit P multiplicirt und zugleich die übrigen Gleichungen benutzt:

$$0 = \frac{\partial \varphi}{\partial p_1}\cdot\frac{\partial p_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_2}\cdot\frac{\partial p_2}{\partial \alpha} \ldots. + \frac{\partial \varphi}{\partial p_n}\cdot\frac{\partial p_n}{\partial \alpha}$$
$$+ P\left[p_1\frac{\partial^2 x_1}{\partial \alpha\,\partial x} + p_2\frac{\partial^2 x_2}{\partial \alpha\,\partial x} + \ldots. + p_n\frac{\partial^2 x_n}{\partial \alpha\,\partial x}\right].$$

Nimmt man auch das partielle Differentiale nach α von der Gleichung

$$\Phi = h,$$

so erhält man

$$0 = \frac{\partial\varphi}{\partial p_1}\cdot\frac{\partial p_1}{\partial\alpha} + \frac{\partial\varphi}{\partial p_2}\cdot\frac{\partial p_2}{\partial\alpha}\ldots\ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial p_n}\cdot\frac{\partial p_n}{\partial\alpha}$$
$$+ \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial\alpha} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial\alpha}\ldots\ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial\alpha},$$

oder, wenn man die gegebenen Differentialgleichungen zu Hülfe ruft,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p_1}\cdot\frac{\partial p_1}{\partial\alpha} + \frac{\partial\varphi}{\partial p_2}\cdot\frac{\partial p_2}{\partial\alpha}\ldots\ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial p_n}\cdot\frac{\partial p_n}{\partial\alpha} =$$
$$P\left[\frac{\partial p_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial\alpha} + \frac{\partial p_2}{\partial x}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial\alpha}\ldots\ldots + \frac{\partial p_n}{\partial x}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial\alpha}\right]$$
$$+ \frac{\partial\varphi}{\partial x}\left[p_1\frac{\partial x_1}{\partial\alpha} + p_2\frac{\partial x_2}{\partial\alpha}\ldots\ldots\ldots + p_n\frac{\partial x_n}{\partial\alpha}\right].$$

Dieses in die obige Gleichung substituirt, giebt

$$0 = P\frac{\partial\left[p_1\frac{\partial x_1}{\partial\alpha} + p_2\frac{\partial x_2}{\partial\alpha}\ldots\ldots + p_n\frac{\partial x_n}{\partial\alpha}\right]}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\left[p_1\frac{\partial x_1}{\partial\alpha} + p_2\frac{\partial x_2}{\partial\alpha}\ldots\ldots + p_n\frac{\partial x_n}{\partial\alpha}\right],$$

woraus durch Integration nach x, von $x = 0$ an genommen,

$$p_1\frac{\partial x_1}{\partial\alpha} + p_2\frac{\partial x_2}{\partial\alpha}\ldots\ldots + p_n\frac{\partial x_n}{\partial\alpha} = M\left[p_1^0\frac{\partial x_1^0}{\partial\alpha} + p_2^0\frac{\partial x_2^0}{\partial\alpha}\ldots\ldots + p_n^0\frac{\partial x_n^0}{\partial\alpha}\right],$$

wenn der Kürze halber

$$M = e^{-\int_0^x \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{dx}{P}}$$

gesetzt wird, wo e die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet.

Betrachtet man die Gröfsen $\alpha_1, \alpha_1, \ldots\ldots \alpha_{2n-1}$ ebenfalls als veränderlich, wie sie durch die Gleichungen

$$A_1 = \alpha_1, \quad A_2 = \alpha_2, \ldots\ldots A_{2n-1} = \alpha_{2n-1}$$

bestimmt werden, so hat man

$$dx - [p_1 dx_1 + p_2 dx_2 \ldots\ldots + p_n dx_n)$$
$$= dx\left[1 - p_1\frac{\partial x_1}{\partial x} - p_2\frac{\partial x_2}{\partial x}\ldots\ldots - p_n\frac{\partial x_n}{\partial x}\right]$$
$$-\Sigma\left[p_1\frac{\partial x_1}{\partial\alpha_i} + p_2\frac{\partial x_2}{\partial\alpha_i}\ldots\ldots + p_n\frac{\partial x_n}{\partial\alpha_i}\right]d\alpha_i,$$

wenn man dem i unter dem Summenzeichen die Werthe 1, 2, ... $2n-1$ giebt. Diese Gleichung verwandelt sich, da

$$1 - p_1\frac{\partial x_1}{\partial x} - p_2\frac{\partial x_2}{\partial x}\ldots\ldots - p_n\frac{\partial x_n}{\partial x} = 0$$

und für jedes i,

$$p_1\frac{\partial x_1}{\partial\alpha_i} + p_2\frac{\partial x_2}{\partial\alpha_i}\ldots\ldots + p_n\frac{\partial x_n}{\partial\alpha_i} = M\left[p_1^0\frac{\partial x_1^0}{\partial\alpha_i} + p_2^0\frac{\partial x_2^0}{\partial\alpha_i}\ldots\ldots + p_n^0\frac{\partial x_n^0}{\partial\alpha_i}\right]$$

in folgende:

$$dx - [p_1 dx_1 + p_2 dx_2 \ldots\ldots + p_n dx_n] =$$
$$-M\Sigma \left[p_1^0 \frac{\partial x_1^0}{\partial \alpha_i} + p_2^0 \frac{\partial x_2^0}{\partial \alpha_i} \ldots\ldots + p_n^0 \frac{\partial x_n^0}{\partial \alpha_i}\right] d\alpha_i,$$

oder da

$$dx_k^0 = \Sigma \frac{\partial x_k^0}{\partial \alpha_i} d\alpha_i,$$

in die Gleichung

$$dx - (p_1 dx_1 + p_2 dx_2 \ldots\ldots + q_n dx_n]$$
$$= -M[p_1^0 dx_1^0 + p_2^0 dx_2^0 \ldots\ldots + p_n^0 dx_n^0].$$

Aus dieser identischen Gleichung folgt, daſs die Gleichung:

$$dx - [p_1 dx_1 + p_2 dx_2 \ldots\ldots + p_n dx_n] = 0,$$

in folgende transformirt werden kann:

$$p_1^0 dx_1^0 + p_2^0 dx_2^0 \ldots\ldots + p_n^0 dx_n^0 = 0,$$

welche erfüllt wird, wenn man die Gröſsen x_1^0, x_2^0, ... x_n^0 willkührlichen Constanten gleich setzt, was der zu beweisende Satz war.

Die hier angewendete Analysis ist genau dieselbe mit derjenigen, wodurch *Pfaff* in der angeführten Abhandlung beweist, daſs die Verhältnisse der $2n-1$ Gröſsen

$$p_1 \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_i} + p_2 \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_i} \ldots\ldots + p_n \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_i}$$

von x unabhängig sind. Aber er hat nicht die Bemerkung hinzugefügt, daſs aus diesem Grunde diese Gröſsen den Gröſsen

$$p_1^0 \frac{\partial x_1^0}{\partial \alpha_i} + p_2^0 \frac{\partial x_2^0}{\partial \alpha_i} \ldots\ldots + p_n^0 \frac{\partial x_n^0}{\partial \alpha_i}$$

proportional gesetzt werden können, wodurch man die transformirte Differentialgleichung selber findet, und unmittelbar die n Gleichungen erhält, durch welche sie erfüllt wird. Ich bemerke noch, daſs wenn der im Vorigen dem x gegebene besondere Werth $x = 0$ Unbequemlichkeiten verursacht, man dafür jeden andern Zahlenwerth setzen kann.

Wenn man vermittelst der Gleichungen

$$\varphi = h, \quad A_1 = \alpha_1, \quad A_2 = \alpha_2, \quad \ldots\ldots \quad A_{2n-1} = \alpha_{2n-1}$$

die Gröſsen x_1, x_2, ... x_n, p_1, p_2, ... p_n durch x und α_1, α_2, ... α_{2n-1} ausdrückt, so enthalten diese Ausdrücke auch h. Differentiirt man die Gleichungen:

$$1 = p_1 \frac{\partial x_1}{\partial x} + p_2 \frac{\partial x_2}{\partial x} \ldots\ldots + p_n \frac{\partial x_n}{\partial x},$$
$$\varphi = h$$

nach h, so erhält man, da vermittelst der aufgestellten Differentialgleichungen:

$$P\frac{\partial x_i}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -P\frac{\partial p_i}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} p_i,$$

folgende Gleichungen:

$$0 = \frac{\partial \varphi}{\partial p_1}.\frac{\partial p_1}{\partial h} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_2}.\frac{\partial p_2}{\partial h} \ldots\ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial p_n}.\frac{\partial p_n}{\partial h}$$

$$+P\left[p_1\frac{\partial^2 x_1}{\partial x\,\partial h} + p_2\frac{\partial^2 x_2}{\partial x\,\partial h} \ldots\ldots + p_n\frac{\partial^2 x_n}{\partial x\,\partial h}\right]$$

$$1 = \frac{\partial \varphi}{\partial p_1}.\frac{\partial p_1}{\partial h} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_2}.\frac{\partial p_2}{\partial h} \ldots\ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial p_n}.\frac{\partial p_n}{\partial h}$$

$$-P\left[\frac{\partial p_1}{\partial x}.\frac{\partial x_1}{\partial h} + \frac{\partial p_2}{\partial x}.\frac{\partial x_2}{\partial h} \ldots\ldots + \frac{\partial p_n}{\partial x}.\frac{\partial x_n}{\partial h}\right]$$

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial x}\left[p_1\frac{\partial x_1}{\partial h} + p_2\frac{\partial x_2}{\partial h} \ldots\ldots + p_n\frac{\partial x_n}{\partial h}\right].$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$0 = 1 + \frac{P\,\partial\left[p_1\frac{\partial x_1}{\partial h} + p_2\frac{\partial x_2}{\partial h} \ldots\ldots + p_n\frac{\partial x_n}{\partial h}\right]}{\partial x}$$

$$+\frac{\partial \varphi}{\partial x}\left[p_1\frac{\partial x_1}{\partial h} + p_2\frac{\partial x_2}{\partial h} \ldots\ldots + p_n\frac{\partial x_n}{\partial h}\right].$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $\frac{1}{MP}$, und integrirt von $x = 0$ bis $x = x$, so erhält man:

$$0 = \int_0^x \frac{\partial x}{MP} + \frac{1}{M}\left[p_1\frac{\partial x_1}{\partial h} + p_2\frac{\partial x_2}{\partial h} \ldots\ldots + p_n\frac{\partial x_n}{\partial h}\right]$$

$$-\left[p_1^0\frac{\partial x_1^0}{\partial h} + p_2^0\frac{\partial x_2^0}{\partial h} \ldots\ldots + p_n^0\frac{\partial x_n^0}{\partial h}\right].$$

Betrachtet man h auch als veränderlich, so mufs zu dem oben gefundenen Ausdruck von dx,

$$dx = p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 \ldots\ldots + p_n\,dx_n - M\,[p_1^0\,dx_1^0 + p_2^0\,dx_2^0 \ldots\ldots + p_n^0\,dx_n^0]$$

noch der Ausdruck

$$\left[p_1\frac{\partial x_1}{\partial h} + p_2\frac{\partial x_2}{\partial h} \ldots\ldots + p_n\frac{\partial x_n}{\partial h}\right]dh - M\left[p_1^0\frac{\partial x_1}{\partial h} + p_2^0\frac{\partial x_2}{\partial h} \ldots\ldots + p_n^0\frac{\partial x_n}{\partial h}\right]dh$$

$$= -M\int_0^x \frac{\partial x}{MP}.dh$$

hinzukommen, wodurch man erhält:

$$dx = p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 \ldots\ldots + p_n\,dx_n - M\,[p_1^0\,dx_1^0 + p_2^0\,dx_2^0 \ldots\ldots + p_n^0\,dx_n^0]$$

$$+M\int_0^x \frac{dx}{MP}.dh.$$

Bezeichnet man durch A_i^0 den Ausdruck von A_i und durch Φ^0 den Ausdruck von Φ, wenn man gleichzeitig $x = 0$, $x_i = x_i^0$, $p_i = p_i^0$ setzt, und eliminirt aus den $2n+1$ Gleichungen

$$\varphi = h,\quad \varphi^\circ = h,\quad A_1 = A_1^\circ,\quad A_2 = A_2^\circ,\quad \ldots\ldots\quad A_{2n-1} = A_{2n-1}^\circ$$

die $2n$ Gröfsen $p_1, p_2, \ldots\ldots p_n, p_1^\circ, p_2^\circ, \ldots\ldots p_n^\circ$, so erhält man x ausgedrückt durch $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n, x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots\ldots x_n^\circ, h$, und die nach diesen Gröfsen genommenen partiellen Differentialquotienten dieses Ausdrucks von x sind:

$$\frac{\partial x}{\partial x_1} = p_1,\qquad \frac{\partial x}{\partial x_2} = p_2,\qquad \ldots\ldots\qquad \frac{\partial x}{\partial x_n} = p_n,$$

$$\frac{\partial x}{\partial x_1^\circ} = -Mp_1^\circ,\qquad \frac{\partial x}{\partial x_2^\circ} = -Mp_2^\circ,\qquad \ldots\ldots\qquad \frac{\partial x}{\partial x_n^\circ} = -Mp_n^\circ,$$

$$\frac{\partial x}{\partial h} = M\int_0^x \frac{\partial x}{MP}.$$

In den beiden in diesen Formeln vorkommenden Integralen

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\frac{dx}{P},\qquad \int \frac{dx}{MP}$$

sind die Gröfsen x_i°, p_i° als Constanten zu betrachten, und vermittelst der vollständigen Integrale der gegebenen gewöhnlichen Differentialgleichungen alle Variabeln durch eine auszudrücken.

Ich habe im Vorigen als willkührliche Constanten die Werthe der Variabeln für $x=0$ angenommen. Man beweist aber eben so, dafs, wenn man vermittelst der vollständigen Integrale der angegebenen gewöhnlichen Differentialgleichungen sämmtliche Variabeln durch irgend eine von ihnen oder eine beliebige andere Gröfse t ausdrückt, und mit x°, $x_1^\circ, \ldots\ldots x_n^\circ$, $p_1^\circ, p_2^\circ, \ldots\ldots p_n^\circ$ die Werthe von $x, x_1, \ldots\ldots x_n, p_1, p_2, \ldots\ldots p_n$ für $t=0$ bezeichnet und diese Werthe ebenfalls als Variabel setzt: die Gleichung Statt finden wird:

$$dx - p_1 dx_1 - p_2 dx_2, \ldots\ldots - p_n dx_n$$
$$= M\,[dx^\circ - p_1^\circ dx_1^\circ - p_2^\circ dx_2^\circ \ldots\ldots - p_n^\circ dx_n^\circ] + M\int_{x_0}^x \frac{dx}{MP}\,dh,$$

in welcher wiederum

$$M = c^{-\int_{x_0}^x \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{dx}{P}}.$$

Wenn die gegebene partielle Differentialgleichung, wie es in den Anwendungen auf die Mechanik der Fall ist, die unbekannte Function x nicht enthält, ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0,$$

und daher

$$M = 1.$$

Das System gewöhnlicher Differentialgleichungen reducirt sich dann auf folgendes System:

$$dx_1 : dx_2 \ldots : dx_n \; : \; dp_1 \; : \; dp_2 \; \ldots \; : \; dp_n$$
$$= \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} : \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} \ldots : \frac{\partial \varphi}{\partial p_n} : -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} : -\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \ldots : -\frac{\partial \varphi}{\partial x_n},$$

welches eine Gleichung und eine Variable x weniger enthält. Hat man dieses System vollständig integrirt, und alle Variabeln x_i, p_i durch eine von ihnen, z. B. x_1, und $2n-1$ willkührliche Constanten ausgedrückt, so erhält man x durch eine bloſse Quadratur vermittelst der Gleichung

$$x - \alpha = \int_0^{x_1} \frac{P\,dx_1}{\frac{\partial \varphi}{\partial p_1}},$$

wo α eine neue willkührliche Constante ist, welche in den Ausdrücken von $x_2, x_3, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_n$ durch x_1 nicht vorkommt. Bedeuten jetzt $x_2^0, x_3^0, \ldots x_1^0, p_1^0, p_2^0, \ldots p_n^0$ die Werthe, welche diese Ausdrücke für $x = 0$ annehmen, und in welchen ebenfalls α nicht vorkommt, so erhält man, da $x_1^0 = 0$ und $M = 1$, aus der obigen allgemeinen Formel

$$dx = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 \ldots + p_n dx_n - [p_2^0 dx_2^0 + p_3^0 dx_3^0 \ldots + p_n^0 dx_n^0]$$
$$+ \int_0^{x_1} \frac{\partial x_1}{\frac{\partial \varphi}{\partial p_1}} dh + d\alpha,$$

wo

$$\frac{dx}{P} = \frac{dx_1}{\frac{\partial \varphi}{\partial p}}$$

gesetzt ist. Diese eine Gleichung giebt:

$$\frac{\partial x}{\partial x_1} = p_1, \quad \frac{\partial x}{\partial x_2} = p_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial x}{\partial x_n} = p_n,$$
$$\frac{\partial x}{\partial x_2^0} = -p_2^0, \quad \frac{\partial x}{\partial x_3^0} = -p_3^0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial x}{\partial x_n^0} = -p_n^0,$$
$$\frac{\partial x}{\partial h} = \int_0^{x_1} \frac{\partial x_1}{\frac{\partial \varphi}{\partial p_1}}.$$

Wenn man durch Einführung eines Elementes dt den gewöhnlichen Differentialgleichungen die Form giebt, die sie in den Problemen der Mechanik haben:

$$\frac{dx_1}{dt}=\frac{\partial\varphi}{\partial p_1},\qquad \frac{dp_1}{dt}=-\frac{\partial\varphi}{\partial x_1},$$
$$\frac{dx_2}{dt}=\frac{\partial\varphi}{\partial p_2},\qquad \frac{dp_2}{dt}=-\frac{\partial\varphi}{\partial x_2},$$
$$\cdots\cdots\qquad\cdots\cdots$$
$$\frac{dx_n}{dt}=\frac{\partial\varphi}{\partial p_n},\qquad \frac{dp_n}{dt}=-\frac{\partial\varphi}{\partial x_n},$$
$$dt=\frac{dx}{P},$$

so erhält man, nachdem man die Gleichungen

$$dx_1 : dx_2 \dots : dx_n : \quad dp_1 : \quad dp_2 \dots : \quad dp_n ;$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial p_1} : \frac{d\varphi}{dp_2} \dots : \frac{\partial\varphi}{\partial p_n} : -\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} : -\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} \dots : -\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}$$

vollständig integrirt, und $x_2, x_3, \dots x_n, p_1, p_2, \dots p_n$ durch x_1 ausgedrückt hat, die Functionen x, t durch bloſse Quadraturen,

$$x-\alpha=\int_0^{x_0}\frac{P\,dx_1}{\frac{\partial\varphi}{\partial p_1}},\qquad t+\tau=\int_0^{x_1}\frac{dx_1}{\frac{\partial\varphi}{\partial p_1}},$$

wo α, τ neue willkührliche Constanten sind. Von diesen beiden Integralen ist aber eines das partielle Differentiale des andern nach h genommen. Hat man nämlich durch Integration x gefunden, so hat man den obigen Formeln zufolge:

$$\frac{\partial x}{\partial h}=\int_0^{x_1}\frac{dx_1}{\frac{\partial\varphi}{\partial p_1}}=t+\tau.$$

Wenn in φ auſser x noch eine der unabhängigen Variabeln, z. B. x_n fehlt, so erhält man noch $\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}=0$; es geben daher die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$dp_n=0 \quad \text{oder} \quad p_n=\text{Const.},$$

wodurch sich die Zahl derselben wieder um 2 reducirt. Sie werden nämlich in diesem Falle

$$dx_1 : dx_2 \dots dx_{n-1} : \quad dp_1 : \quad dp_2 \dots \quad dp_{n-1}$$
$$=\frac{\partial\varphi}{\partial p_1} : \frac{\partial\varphi}{\partial p_2} \dots \frac{\partial\varphi}{\partial p_{n-1}} : -\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} : -\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} \dots -\frac{\partial\varphi}{\partial x_{n-1}},$$

in welchen Ausdrücken man p_n als Constante zu betrachten hat. Hat man durch Integration dieser Gleichungen die Gröſsen $x_1, x_2, \dots x_{n-1}, p_1, p_2, \dots p_{n-1}$ durch eine von ihnen ausgedrückt, so giebt eine der Gleichungen:

$$dx_n = \frac{\partial \varphi}{\partial p_n} \cdot \frac{dx_i}{\frac{\partial \varphi}{\partial p_i}} = -\frac{\partial \varphi}{\partial p_n} \cdot \frac{dp_i}{\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}}$$

durch bloſse Quadratur den Werh von x_n. Man kann aber auch in diesem Falle auf ähnliche Art, wie *Hamilton* die Function S durch V ersetzt, allgemein die Gleichung $\Phi = h$ selber in eine andere transformiren, in welcher die Zahl der unabhängigen Variabeln um eine geringer ist. Wenn nämlich Φ weder x noch x_n enthält, so setze man

$$x = y + p_n x_n,$$

wodurch

$$dy = p_1\, dx_1 + p_2\, dx_2 \ldots . + p_{n-1}\, dx_{n-1} - x_n\, dp_n.$$

In dieser Gleichung betrachte man p_n als Constante, wodurch sie sich in die Gleichung

$$dy = p_1\, dx_1 + p_2\, dx_2 \ldots . + p_{n-1}\, dx_{n-1}$$

verwandelt, so daſs p_1, p_2, ... p_{n-1} die partiellen Differentialquotienten von y nach x_1, x_2, ... x_{n-1} genommen werden, und die gegebene partielle Differentialgleichung, in welcher ebenfalls p_n als Constante betrachtet wird, eine partielle Differentialgleichung für y wird mit nur $n-1$ unabhängigen Variabeln x_1, x_2, ... x_{n-1}. Hat man durch Integration dieser partiellen Differentialgleichung y als Function von x_1, x_2, ... x_{n-1}, von $n-1$ willkührlichen Constanten und der Constante p_n gefunden, so findet man die gesuchte Function x dadurch, daſs man in der Gleichung

$$x = y + p_n x_n$$

die Gröſse p_n vermittelst der Gleichung

$$\frac{\partial y}{\partial p_n} = -x_n$$

eliminirt. Man kann x_n um eine willkührliche Constante vermehren, wodurch x, wie es für eine vollständige Lösung nöthig ist, n willkührliche Constanten erhält.

10.

Wir haben im Vorhergehenden gesehen, wie man durch die Integration eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen eine vollständige Lösung einer vorgelegten partiellen Differentialgleichung erster Ordnung finden kann. Ich will jetzt zeigen, wie man umgekehrt aus irgend einer vollständigen Lösung die vollständigen Integrale des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen ableiten kann.

Kennt man einen Ausdruck von x durch x_1, x_2, ... x_n, mit n willkührlichen Constanten α_1, α_2, ... α_n, welcher der gegebenen partiellen Differentialgleichung $\varphi = h$ Genüge leistet, so bilde man die $n-1$ Gleichungen, welche sich durch die Proportion darstellen lassen:

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha_1} : \frac{\partial x}{\partial \alpha_2} \dots : \frac{\partial x}{\partial \alpha_n} = \beta_1 : \beta_2 \dots : \beta_n,$$

wo β_1, β_2, ... β_n neue willkührliche Constanten seien, die aber, da nur ihre Verhältnisse in Rechnung kommen, nur die Stelle von $n-1$ willkührlichen Constanten vertreten. Führt man eine neue Gröfse M ein, so kann man diese Proportion durch das System Gleichungen ersetzen:

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha_1} + \beta_1 M = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial \alpha_2} + \beta_2 M = 0, \quad \dots \quad \frac{\partial x}{\partial \alpha_n} + \beta_n M = 0.$$

Durch diese Gleichungen sind die $n+2$ Gröfsen x, x_1, x_2, ... x_n, M als Functionen von einer unter ihnen gegeben. Differentiirt man eine dieser Gleichungen

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha_i} + \beta_i M = 0,$$

und setzt für β_i den aus dieser Gleichung gezogenen Werth, so erhält man:

$$0 = -\frac{\partial x}{\partial \alpha_i} \cdot \frac{dM}{M} + \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha_i \, \partial x_1} dx_1 + \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha_i \, \partial x_2} dx_2 \dots + \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha_i \, \partial x_n} dx_n,$$

oder wenn man

$$\frac{\partial x}{\partial x_1} = p_1, \quad \frac{\partial x}{\partial x_2} = p_2, \quad \dots \quad \frac{\partial x}{\partial x_n} = p_n,$$

setzt, die Gleichung:

$$0 = -\frac{\partial x}{\partial \alpha_i} \cdot \frac{dM}{M} + \frac{\partial p_1}{\partial \alpha_i} dx_1 + \frac{\partial p_2}{\partial \alpha_i} dx_2 \dots + \frac{\partial p_n}{\partial \alpha_i} dx_n.$$

Die gegebene Differentialgleichung $\varphi = h$ mufs, wenn man darin für x seinen gegebenen Werth und die daraus durch partielle Differentiation nach x_1, x_2, ... x_n sich ergebenden Werthe von p_1, p_2, ... p_n setzt, eine zwischen den Gröfsen x_1, x_2, ... x_n, α_1, α_2, ... α_n, h identisch Statt findende Gleichung werden. Nimmt man ihr partielles Differential nach α_i, so erhält man:

$$0 = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} \cdot \frac{\partial p_1}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} \cdot \frac{\partial p_2}{\partial \alpha_i} \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial p_n} \cdot \frac{\partial p_n}{\partial \alpha_i}.$$

Vergleicht man die zwei Systeme von n Gleichungen, welche sich aus dieser und der vorhergehenden Gleichung ergeben, wenn man darin für i seine Werthe 1, 2, ... n setzt, so erhält man die Proportion:

$$\frac{dM}{M} : dx_1 : dx_2 \ldots : dx_n = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} : \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} : \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} \ldots : \frac{\partial \varphi}{\partial p_n},$$

welche man auch, da

$$dx = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 \ldots + p_n dx_n,$$

durch die Gleichungen darstellen kann:

$$P\frac{dM}{M dx} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$P\frac{dx_1}{dx} = \frac{\partial \varphi}{\partial p_1}, \quad P\frac{dx_2}{dx} = \frac{\partial \varphi}{\partial p_2}, \quad \ldots \quad P\frac{dx_n}{dx} = \frac{\partial \varphi}{\partial p_n},$$

wo wieder

$$P = p_1 \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} \ldots + p_n \frac{\partial \varphi}{\partial p_n}$$

gesetzt ist. Differentiirt man ferner die Gleichung $\varphi = h$ nach x_i, und setzt in dem Differentiale:

$$\frac{\partial p_k}{\partial x_i} = \frac{\partial p_i}{\partial x_k},$$

so erhält man

$$0 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} \cdot \frac{\partial p_i}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} \cdot \frac{\partial p_i}{\partial x_2} \ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial p_n} \cdot \frac{\partial p_i}{\partial x_n},$$

oder wenn man in diese Gleichung die vorhin erhaltenen Werthe

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p_1} = P\frac{dx_1}{dx}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} = P\frac{dx_2}{dx}, \quad \ldots \quad \frac{\partial \varphi}{\partial p_n} = P\frac{dx_n}{dx}$$

substituirt, die Gleichung:

$$0 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial \varphi}{\partial x} + P\frac{dp_i}{dx}.$$

Wir haben so umgekehrt aus den $2n$ Gleichungen:

$$\varphi = h, \quad \frac{\partial x}{\partial \alpha_1} : \frac{\partial x}{\partial \alpha_2} \ldots : \frac{\partial x}{\partial \alpha_n} = \beta_1 : \beta_2 \ldots : \beta_n,$$

$$\frac{\partial x}{\partial x_1} = p_1, \quad \frac{\partial x}{\partial x_2} = p_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial x}{\partial x_n} = p_n,$$

die $2n$ Differentialgleichungen

$$P\frac{dx_i}{dx} = \frac{\partial \varphi}{\partial p_i}, \quad P\frac{dp_i}{dx} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} p_i$$

abgeleitet, und da jene Gleichungen $2n$ willkührliche Constanten, nämlich h, α_1, α_2, ... α_n und die Verhältnisse von β_1, β_2, ... β_n enthalten, so sind sie zugleich die vollständigen Integrale dieser Differentialgleichungen.

11.

Man kann die letztere Analysis auch auf die allgemeinere Untersuchung ausdehnen, unter welche *Pfaff* die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit einbegreift, und zeigen, daſs wenn irgend ein System von n Gleichungen mit n willkührlichen Constanten gegeben ist, welches der Differentialgleichung

$$0 = X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 \ldots + X_{2n}\,dx_{2n}$$

Genüge leistet, man daraus die vollständigen Integrale des von *Pfaff* aufgestellten und oben mitgetheilten Systems von $2n-1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen ableiten kann *). Durch das gegebene System von n Gleichungen drücke man nämlich $x_1, x_2, \ldots x_n$ durch $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots x_{2n}$ und durch die n willkürlichen Constanten, die wir $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ nennen wollen, aus, und bilde die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
X_1 \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_1} \ldots + X_n \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_1} + M\beta_1 &= 0,\\
X_1 \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_2} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2} \ldots + X_n \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_2} + M\beta_2 &= 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
X_1 \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_n} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_n} \ldots + X_n \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n} + M\beta_n &= 0,
\end{aligned}$$

in welchen $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ neue willkührliche Constanten sind, welche aber nur die Stelle von $n-1$ vertreten, da hier allein ihre Verhältnisse in Rechnung kommen, so werden diese Gleichungen, welche nach Elimination der neu eingeführten Gröſse M die Stelle von $n-1$ Gleichungen vertreten, in Verbindung mit den gegebenen n Gleichungen, die vollständigen Integrale des von *Pfaff* aufgestellten Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen sein, mit $2n-1$ willkührlichen Constanten, nämlich den n willkührlichen Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \ldots \alpha_n$ und den $n-1$ Verhältnissen der willkührlichen Constanten $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$. Man beweist dieses Theorem wie folgt:

Da die durch die gegebenen n Gleichungen bestimmten Ausdrücke von $x_1, x_2, \ldots x_n$ durch $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots x_{2n}$ und die n willkührlichen Constanten der Gleichung:

$$X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 \ldots + X_{2n}\,dx_{2n} = 0$$

genügen sollen, so muſs man die Gleichungen haben:

*) Statt x in den oben mitgetheilten Formeln ist hier x_{2n} geschrieben.

$$X_1 \frac{\partial x_1}{\partial x_{n+1}} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial x_{n+1}} \dots + X_n \frac{\partial x_n}{\partial x_{n+1}} + X_{n+1} = 0,$$
$$X_1 \frac{\partial x_1}{\partial x_{n+2}} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial x_{n+2}} \dots + X_n \frac{\partial x_n}{\partial x_{n+2}} + X_{n+2} = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$X_1 \frac{\partial x_1}{\partial x_{2n}} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial x_{2n}} \dots + X_n \frac{\partial x_n}{\partial x_{2n}} + X_{2n} = 0.$$

Man denke sich jetzt vermittelst der n Gleichungen

$$X_1 \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_i} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_i} \dots + X_n \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_i} + M\beta_i = 0$$

die $n+1$ Gröfsen x_{n+1}, x_{n+2}, ... x_{2n}, M durch eine von ihnen, z. B. durch M, ausgedrückt, wodurch diese Gröfsen und daher auch x_1, x_2, ... x_n Functionen von M, von α_1, α_2, ... α_n, und von β_1, β_2, ... β_n werden. Die auf diese Annahme sich beziehenden partiellen Differentialquotienten werde ich der Unterscheidung wegen in Klammern einschliefsen, während die partiellen Differentialquotienten ohne Klammern sich auf die Annahme beziehen, dafs x_1, x_2, ... x_n als Functionen von x_{n+1}, x_{n+2}, ... x_{2n}, α_1, α_2, ... α_n betrachtet werden. Man hat demnach:

$$X_1 \left(\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_i}\right) + X_2 \left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_i}\right) \dots + X_n \left(\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_i}\right) =$$
$$X_1 \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_i} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_i} \dots + X_n \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_i}$$
$$+ \left[X_1 \frac{\partial x_1}{\partial x_{n+1}} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial x_{n+1}} \dots + X_n \frac{\partial x_n}{\partial x_{n+1}}\right] \left(\frac{\partial x_{n+1}}{\partial \alpha_i}\right)$$
$$+ \left[X_1 \frac{\partial x_1}{\partial x_{n+2}} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial x_{n+2}} \dots + X_n \frac{\partial x_n}{\partial x_{n+2}}\right] \left(\frac{\partial x_{n+2}}{\partial \alpha_i}\right)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+ \left[X_1 \frac{\partial x_1}{\partial x_{2n}} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial x_{2n}} \dots + X_n \frac{\partial x_n}{\partial x_{2n}}\right] \left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial \alpha_i}\right)$$
$$= -M\beta_i - X_{n+1} \left(\frac{\partial x_{n+1}}{\partial \alpha_i}\right) - X_{n+2} \left(\frac{\partial x_{n+2}}{\partial \alpha_i}\right) \dots - X_{2n} \left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial \alpha_i}\right),$$

oder:

$$X_1 \left(\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_i}\right) + X_2 \left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_i}\right) \dots + X_{2n} \left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial \alpha_i}\right) + M\beta_i = 0.$$

Differentiirt man diese Gleichung nach M, so erhält man:

$$\frac{dX_1}{dM} \left(\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_i}\right) + \frac{dX_2}{dM} \left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_i}\right) \dots + \frac{dX_{2n}}{dM} \left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial \alpha_i}\right)$$
$$+ X_1 \left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial M\, \partial \alpha_i}\right) + X_2 \left(\frac{\partial^2 x_2}{\partial M\, \partial \alpha_i}\right) \dots + X_{2n} \left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial M\, \partial \alpha_i}\right) + \beta_i = 0.$$

Es folgt ferner aus der Gleichung

$$X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 \ldots\ldots + X_{2n}\,dx_{2n} = 0,$$

wenn man alle Gröfsen als Functionen von M betrachtet:

$$X_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial M}\right) + X_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial M}\right) \ldots\ldots + X_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial M}\right) = 0.$$

Differentiirt man diese Gleichung nach α_i, so erhält man:

$$X_1\left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial M\,\partial\alpha_i}\right) + X_2\left(\frac{\partial^2 x_2}{\partial M\,\partial\alpha_i}\right) \ldots\ldots + X_{2n}\left(\frac{\partial^2 x_{2n}}{\partial M\,\partial\alpha_i}\right)$$

$$+ \frac{\partial X_1}{\partial\alpha_i}\cdot\frac{dx_1}{dM} + \frac{\partial X_2}{\partial\alpha_i}\cdot\frac{dx_2}{dM} \ldots\ldots + \frac{\partial X_{2n}}{\partial\alpha_i}\cdot\frac{dx_{2n}}{dM} = 0,$$

wodurch sich die obige Gleichung, wenn man sie mit dM multiplicirt, in folgende verwandelt:

$$dX_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial\alpha_i}\right) + dX_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial\alpha_i}\right) \ldots\ldots + dX_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial\alpha_i}\right)$$

$$- dx_1\left(\frac{\partial X_1}{\partial\alpha_i}\right) - dx_2\left(\frac{\partial X_2}{\partial\alpha_i}\right) \ldots\ldots - dx_{2n}\left(\frac{\partial X_{2n}}{\partial\alpha_i}\right) + \beta_i\,dM = 0.$$

Eliminirt man aus dieser Gleichung β_i vermittelst der Gleichung:

$$X_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial\alpha_i}\right) + X_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial\alpha_i}\right) \ldots\ldots + X_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial\alpha_i}\right) + M\beta_i = 0,$$

so erhält man:

$$dX_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial\alpha_i}\right) + dX_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial\alpha_i}\right) \ldots\ldots + dX_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial\alpha_i}\right)$$

$$- dx_1\left(\frac{\partial X_1}{\partial\alpha_i}\right) - dx_2\left(\frac{\partial X_2}{\partial\alpha_i}\right) \ldots\ldots - dx_{2n}\left(\frac{\partial X_{2n}}{\partial\alpha_i}\right)$$

$$- \frac{dM}{M}\left[X_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial\alpha_i}\right) + X_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial\alpha_i}\right) \ldots\ldots + X_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial\alpha_i}\right)\right] = 0.$$

Setzt man, wie erlaubt ist, $\beta_n = 1$, so erhält man durch die nämliche Analysis ähnliche Formeln, wie für α_i, auch für die $n-1$ andern willkürlichen Constanten $\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots \beta_{n-1}$. Zuvörderst hat man:

$$X_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial\beta_i}\right) + X_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial\beta_i}\right) \ldots\ldots + X_n\left(\frac{\partial x_n}{\partial\beta_i}\right) =$$

$$\left[X_1\frac{\partial x_1}{\partial x_{n+1}} + X_2\frac{\partial x_2}{\partial x_{n+1}} \ldots\ldots + X_n\frac{\partial x_n}{\partial x_{n+1}}\right]\left(\frac{\partial x_{n+1}}{\partial\beta_i}\right)$$

$$+ \left[X_1\frac{\partial x_1}{\partial x_{n+2}} + X_2\frac{\partial x_2}{\partial x_{n+2}} \ldots\ldots + X_n\frac{\partial x_n}{\partial x_{n+2}}\right]\left(\frac{\partial x_{n+2}}{\partial\beta_i}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \left[X_1\frac{\partial x_1}{\partial x_{2n}} + X_2\frac{\partial x_2}{\partial x_{2n}} \ldots\ldots + X_n\frac{\partial x_n}{\partial x_{2n}}\right]\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial\beta_i}\right)$$

$$= -\left[X_{n+1}\left(\frac{\partial x_{n+1}}{\partial\beta_i}\right) + X_{n+2}\left(\frac{\partial x_{n+2}}{\partial\beta_i}\right) \ldots\ldots + X_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial\beta_i}\right)\right],$$

oder

$$0 = X_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial \beta_i}\right) + X_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial \beta_i}\right) \dots + X_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial \beta_i}\right).$$

Differentiirt man diese Gleichung nach M und die Gleichung

$$0 = X_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial M}\right) + X_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial M}\right) \dots + X_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial M}\right)$$

nach β_i, und zieht beide Resultate von einander ab, so erhält man nach Multiplication mit dM:

$$0 = dX_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial \beta_i}\right) + dX_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial \beta_i}\right) \dots + dX_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial \beta_i}\right)$$
$$- dx_1\left(\frac{\partial X_1}{\partial \beta_i}\right) - dx_2\left(\frac{\partial X_2}{\partial \beta_i}\right) \dots - dx_{2n}\left(\frac{\partial X_{2n}}{\partial \beta_i}\right),$$

von welcher Gleichung wir, um ihr dieselbe Form mit der Gleichung zu geben, die wir in Bezug auf α_i gefunden hatten, die Gleichung:

$$0 = X_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial \beta_i}\right) + X_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial \beta_i}\right) \dots + X_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial \beta_i}\right),$$

mit $\frac{dM}{M}$ multiplicirt, abziehn wollen, wodurch man erhält:

$$0 = dX_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial \beta_i}\right) + dX_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial \beta_i}\right) \dots + dX_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial \beta_i}\right)$$
$$- dx_1\left(\frac{\partial X_1}{\partial \beta_i}\right) - dx_2\left(\frac{\partial X_2}{\partial \beta_i}\right) \dots - dx_{2n}\left(\frac{\partial X_{2n}}{\partial \beta_i}\right)$$
$$- \frac{dM}{M}\left[X_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial \beta_i}\right) + X_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial \beta_i}\right) \dots + X_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial \beta_i}\right)\right].$$

Wir wollen in dieser Gleichung, so wie in der oben gefundenen ähnlichen, auf α_i bezüglichen, für die partiellen Differentialen

$$\left(\frac{\partial X_k}{\partial \alpha_i}\right), \quad \left(\frac{\partial X_k}{\partial \beta_i}\right)$$

ihre entwickelten Werthe

$$\left(\frac{\partial X_k}{\partial \alpha_i}\right) = \frac{\partial X_k}{\partial x_1}\left(\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_i}\right) + \frac{\partial X_k}{\partial x_2}\left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_i}\right) \dots + \frac{\partial X_k}{\partial x_{2n}}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial \alpha_i}\right),$$
$$\left(\frac{\partial X_k}{\partial \beta_i}\right) = \frac{\partial X_k}{\partial x_1}\left(\frac{\partial x_1}{\partial \beta_i}\right) + \frac{\partial X_k}{\partial x_2}\left(\frac{\partial x_2}{\partial \beta_i}\right) \dots + \frac{\partial X_k}{\partial x_{2n}}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial \beta_i}\right)$$

setzen, und die Gleichungen nach den Gröfsen

$$\left(\frac{\partial x_k}{\partial \alpha_i}\right), \quad \left(\frac{\partial x_k}{\partial \beta_i}\right)$$

ordnen, so verwandeln sie sich in folgende:

$$0 = T_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_i}\right) + T_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_i}\right) \dots + T_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial \alpha_i}\right),$$

$$0 = T_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial \beta_i}\right) + T_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial \beta_i}\right) \dots + T_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial \beta_i}\right),$$

wo

$$T_1 = dX_1 - \left[\frac{\partial X_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial X_2}{\partial x_1} dx_2 \ldots + \frac{\partial X_{2n}}{\partial x_1} dx_{2n}\right] - \frac{X_1\, dM}{M},$$

$$T_2 = dX_2 - \left[\frac{\partial X_1}{\partial x_2} dx_1 + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} dx_2 \ldots + \frac{\partial X_{2n}}{\partial x_2} dx_{2n}\right] - \frac{X_2\, dM}{M},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$T_{2n} = dX_{2n} - \left[\frac{dX_1}{\partial x_{2n}} dx_1 + \frac{\partial X_2}{\partial x_{2n}} dx_2 \ldots + \frac{\partial X_{2n}}{\partial x_{2n}} dx_{2n}\right] - \frac{X_{2n}\, dM}{M}.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit dx_1, dx_2, ... dx_{2n}, und addirt sie, so heben sich, da

$$X_1\, dx_1 + X_2\, dx_2 \ldots + X_{2n}\, dx_{2n} = 0,$$

$$\frac{\partial X_k}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial X_k}{\partial x_2} dx_2 \ldots + \frac{\partial X_k}{\partial x_{2n}} dx_{2n} = dX_k,$$

alle Terme rechter Hand fort, wodurch man die Gleichung erhält:

$$T_1\, dx_1 + T_2\, dx_2 \ldots + T_{2n}\, dx_{2n} = 0,$$

welche man auch so schreiben kann:

$$T_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial M}\right) + T_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial M}\right) \ldots + T_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial M}\right) = 0,$$

da wir in den vorstehenden Formeln alle Gröfsen x_1, x_2, ... x_{2n} als Functionen blofs von **einer** Gröfse M, und α_1, α_2, ... α_n, β_1, β_2, ... β_{n-1} als Constanten betrachten, was ich durch den Gebrauch der Charakteristik d andeute. Aus den $2n$ Gleichungen, nämlich den n Gleichungen:

$$T_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_i}\right) + T_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_i}\right) \ldots + T_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial \alpha_i}\right) = 0,$$

den $n-1$ Gleichungen

$$T_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial \beta_i}\right) + T_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial \beta_i}\right) \ldots + T_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial \beta_i}\right) = 0$$

und der Gleichung

$$T_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial M}\right) + T_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial M}\right) \ldots + T_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial M}\right) = 0$$

folgen die $2n$ Gleichungen

$$T_1 = 0, \quad T_2 = 0, \quad \ldots\ldots \quad T_{2n} = 0,$$

welche mit den *Pfaff*'schen Differentialgleichungen übereinkommen, wie ich sie oben aufgestellt habe, wenn man in ihnen $\frac{dM}{M}$ statt dN und X_{2n}, x_{2n} für X, x setzt.

Dafs man aus den $2n$ angegebenen Gleichungen die Gleichungen

$$T_1 = 0, \quad T_2 = 0, \quad \ldots\ldots \quad T_{2n} = 0$$

folgern kann, läfst sich, wie folgt, beweisen. Man betrachte gleichzeitig $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{n-1}, M$ als Variabeln, so wird durch die zwischen diesen Gröfsen und den $2n$ Gröfsen $x_1, x_2, \ldots x_{2n}$ aufgestellten Gleichungen keine Relation zwischen diesen letztern allein gegeben, sondern sie zeigen nur, wie das eine System von $2n$ Variabeln sich durch das andere System von $2n$ Variabeln ausdrücken läfst. Man bezeichne beliebige Variationen der Gröfsen $x_1, x_2, \ldots x_{2n}$ mit δx_1, $\delta x_2, \ldots \delta x_{2n}$, die von einander unabhängig sind, da zwischen den Gröfsen $x_1, x_2, \ldots x_{2n}$ selber keine Relation Statt finden soll. Sind $\delta\alpha_1$, $\delta\alpha_2, \ldots \delta\alpha_n, \delta\beta_1, \delta\beta_2, \ldots \delta\beta_{n-1}, \delta M$ die entsprechenden Variationen der Variabeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{n-1}, M$, so hat man:

$$\begin{aligned}\delta x_k = &\left(\frac{\partial x_k}{\partial \alpha_1}\right)\delta\alpha_2 + \left(\frac{\partial x_k}{\partial \alpha_2}\right)\delta\alpha_2 \ldots + \left(\frac{\partial x_k}{\partial \alpha_n}\right)\delta\alpha_n \\ &+ \left(\frac{\partial x_k}{\partial \beta_1}\right)\delta\beta_1 + \left(\frac{\partial x_k}{\partial \beta_2}\right)\delta\beta_2 \ldots + \left(\frac{\partial x_k}{\partial \beta_{n-1}}\right)\delta\beta_{n-1} \\ &+ \left(\frac{\partial x_k}{\partial M}\right)\delta M.\end{aligned}$$

Multiplicirt man daher die $2n$ Gleichungen, die wir gefunden haben:

$$\begin{aligned}
&T_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1}\right) + T_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_1}\right) \ldots + T_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial \alpha_1}\right) = 0, \\
&T_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_2}\right) + T_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2}\right) \ldots + T_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial \alpha_2}\right) = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&T_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_n}\right) + T_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_n}\right) \ldots + T_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial \alpha_n}\right) = 0, \\
&T_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial \beta_1}\right) + T_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial \beta_1}\right) \ldots + T_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial \beta_1}\right) = 0, \\
&T_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial \beta_2}\right) + T_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial \beta_2}\right) \ldots + T_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial \beta_2}\right) = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&T_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial \beta_{n-1}}\right) + T_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial \beta_{n-1}}\right) \ldots + T_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial \beta_{n-1}}\right) = 0, \\
&T_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial M}\right) + T_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial M}\right) \ldots + T_{2n}\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial M}\right) = 0
\end{aligned}$$

respective mit $\delta\alpha_1, \delta\alpha_2, \ldots \delta\alpha_n, \delta\beta_1, \delta\beta_2, \ldots \delta\beta_{n-1}, \delta M$, und addirt sie, so erhält man:

$$T_1\,\delta x_1 + T_2\,\delta x_2 \ldots + T_{2n}\,\delta_{2n} = 0,$$

welche Gleichung, da $\delta x_1, \delta x_2, \ldots \delta x_{2n}$ beliebige, von einander unabhängige Variationen sind, nicht anders bestehn kann, als wenn

$$T_1 = 0, \quad T_2 = 0, \quad \dots\dots \quad T_{2n} = 0,$$

was zu beweisen war.

Dafs man auf die angegebene Art, wenn man der Gleichung

$$X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 \dots + X_{2n}\,dx_{2n} = 0$$

durch irgend ein System von n Gleichungen mit n willkührlichen Constanten genügen kann, immer auch die vollständigen Integrale der von *Pfaff* aufgestellten gewöhnlichen Differentialgleichungen erhält, läfst sich auch durch folgende Betrachtungen einsehen. Man löse die n Gleichungen nach den n willkührlichen Constanten auf, so dafs sie die Form erhalten,

$$A_1 = \alpha_1, \quad A_2 = \alpha_2, \quad \dots\dots \quad A_n = \alpha_n,$$

wo α_1, α_2, ... α_n die willkührlichen Constanten sind und in A_1, A_2, ... A_n nicht mehr vorkommen. Sollen diese Gleichungen der Differentialgleichung

$$X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 \dots + X_{2n}\,dx_{2n} = 0$$

genügen, so mufs es n Multiplicatoren U_1, U_2, ... U_n geben, vermittelst welcher identich

$$X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 \dots + X_{2n}\,dx_{2n} = U_1\,dA_1 + U_2\,dA_2 \dots + U_{2n}\,dA_{2n}$$

wird, da der Ausdruck linker Hand vom Gleichheitszeichen verschwinden soll, wenn A_1, A_2, ... A_n willkührliche Constanten werden. Denkt man sich x_1, x_2, ... x_n durch A_1, A_2, ... A_n, x_{n+1}, x_{n+2}, ... x_{2n} ausgedrückt, so erhält man hieraus:

$$U_i = X_2 \frac{\partial x_1}{\partial A_i} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial A_i} \dots + X_{2n} \frac{\partial x_{2n}}{\partial A_i}.$$

Aus der von *Pfaff* selber gegebenen Analysis folgt, dafs wenn man auf irgend eine Art die Gleichung

$$0 = X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 \dots + X_{2n}\,dx_{2n}$$

in eine andere zwischen nur $2n-1$ Variabeln transformiren kann, diese willkührlichen Constanten gleich gesetzt, die vollständigen Integrale seiner gewöhnlichen Differentialgleichungen geben. Nun haben wir aber

$$0 = X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 \dots + X_{2n}\,dx_{2n} = U_1\,dA_1 + U_2\,dA_2 \dots + U_n\,dA_n,$$

oder

$$0 = \frac{U_1}{U_n}\,dA_1 + \frac{U_2}{U_n}\,dA_2 \dots + \frac{U_{n-1}}{U_n}\,dA_{n-1} + dA_n,$$

welches eine Differentialgleichung zwischen nur $2n-1$ Variabeln

$$A_1, \; A_2, \; \dots\dots \; A_n, \; \frac{U_1}{U_n}, \; \frac{U_2}{U_n}, \; \dots\dots \; \frac{U_{n-1}}{U_n}$$

ist. Diese willkührlichen Constanten gleich gesetzt, müssen daher die vollständigen Integrale des *Pfaff*schen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen sein; sie kommen aber genau mit den $2n-1$ Gleichungen überein, wie ich sie oben aufgestellt habe.

12.

Ich habe oben bemerkt, dafs es in der von *Pfaff* zur Integration der Gleichung

$$X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 \ldots + X_{2n}\,dx_{2n} = 0$$

vorgeschlagenen Methode ein Uebelstand sei, dafs man von den nach einander zu integrirenden Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen nur das erste wirklich aufstellen kann, und für die andern Systeme nur die Art angeben kann, wie man sie, wenn man die vorhergehenden vollständig integrirt hat, zu bilden hat. In der That ist klar, dafs es hierdurch unmöglich fällt, das Ganze der Aufgabe zu übersehen. Für den besondern Fall, welcher die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung giebt, haben wir gesehen, dafs die Integration des ersten dieser Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen vollkommen ausreicht, und es der Aufstellung und Integration anderer Systeme nicht weiter bedarf. Dieser besondere Fall kann als derjenige bezeichnet werden, in welchen von den $2n$ Gröfsen X_1, X_2, ... X_{2n} eine Anzahl von $n-1$ gleich 0 ist. Es sei z. B.

$$X_{n+2} = X_{n+3} \ldots = X_{2n} = 0,$$

so dafs die zu integrirende Gleichung wird:

$$dx_{n+1} = \frac{-1}{X_n}\left[X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 \ldots + X_n\,dx_n\right].$$

Man setze:

$$-\frac{X_1}{X_{n+1}} = p_1, \quad -\frac{X_2}{X_{n+2}} = p_2, \quad \ldots\ldots \quad -\frac{X_n}{X_{n+1}} = p_n,$$

so sind p_1, p_2, ... p_n die partiellen Differentialquotienten von x_{n+1} als Functionen von x_1, x_2, ... x_n betrachtet, und die Elimination der $n-1$ Gröfsen x_{n+2}, x_{n+3}, ... x_{2n} aus diesen n Gleichungen giebt die zu integrirende partielle Differentialgleichung. Ich will jetzt im Folgenden zeigen, dafs wenn man die Methode, welcher wir uns für diesen besondern Fall bedienten, auf die allgemeine *Pfaff*sche Differentialgleichung anwendet, man des oben bezeichneten Uebelstandes ledig werden kann, indem es dadurch gelingt, mit Leichtigkeit alle zu integrirenden Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen aufzustellen, ohne eines derselben wirklich integrirt zu haben.

Um hierzu zu gelangen, nehme man in den Integralen des von *Pfaff* aufgestellten ersten Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen als willkührliche Constanten die Werthe, welche x_1, x_2, ... x_{2n-1} für $x_{2n}=0$ annehmen, und die wir mit x_1^0, x_2^0, ... x_{2n-1}^0 bezeichnen wollen. Bezeichnet man auch die entsprechenden Werthe von X_1, X_2, ... X_{2n} mit X_1^0, X_2^0, ... X_{2n}^0, so erhält man Gleichungen von der Form:

$$\begin{array}{ll} x_1 = x_1^0 + x_{2n}\xi_1, & X_1 = X_1^0 + x_{2n}\Xi_1, \\ x_2 = x_2^0 + x_{2n}\xi_2, & X_2 = X_2^0 + x_{2n}\Xi_2, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ x_{2n-1} = x_{2n-1}^0 + x_{2n}\xi_{2n-1}, & X_{2n} = X_{2n}^0 + x_{2n}\Xi_{2n}, \end{array}$$

wo ξ_1, ξ_2, ... ξ_{2n-1}, Ξ_1, Ξ_2, ... Ξ_{2n} Functionen von x_{2n}, x_1^0, x_2^0, ... x_{2n-1}^0 sind, welche für $x_{2n}=0$ nicht unendlich werden. Substituirt man diese Werthe von x_1, x_2, ... x_{2n-1}, wie sie durch vollständige Integration der von *Pfaff* aufgestellten gewöhnlichen Differentialgleichungen gefunden werden, in die Gleichung:

$$0 = X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 \dots + X_{2n}\,dx_{2n},$$

indem man auch die Gröfsen x_1^0, x_2^0, ... x_{2n-1}^0 als unveränderlich betrachtet, so erhält man

$$\begin{aligned} 0 = {} & [X_1^0 + x_{2n}\Xi_1]\,d[x_1^0 + x_{2n}\xi_1] \\ & + [X_2^0 + x_{2n}\Xi_2]\,d[x_2^0 + x_{2n}\xi_2] \\ & \dots\dots\dots\dots\dots \\ & + [X_{2n-1}^0 + x_{2n}\Xi_{2n-1}]\,d[x_{2n-1}^0 + x_{2n}\xi_{2n-1}] \\ & + [X_{2n}^0 + x_{2n}\Xi_{2n}]\,dx_{2n} \\ = {} & B\,dx_{2n} + B_1\,dx_1^0 + B_2\,dx_2^0 \dots + B_{2n-1}\,dx_{2n-1}^0, \end{aligned}$$

wo, wenn i eine der Zahlen 1, 2, ... $2n-1$ bedeutet,

$$\begin{aligned} B_i = {} & X_i^0 + x_{2n}\Xi_i \\ & + x_{2n}\left[X_1^0\frac{\partial\xi_1}{\partial x_i^0} + X_2^0\frac{\partial\xi_2}{\partial x_i^0} \dots + X_{2n-1}^0\frac{\partial\xi_{2n-1}}{\partial x_i^0}\right] \\ & + x_{2n}^2\left[\Xi_1\frac{\partial\xi_1}{\partial x_i^0} + \Xi_2\frac{\partial\xi_2}{\partial x_i^0} \dots + \Xi_{2n-1}\frac{\partial\xi_{2n-1}}{\partial x_i^0}\right]. \end{aligned}$$

Aber *Pfaff* hat bewiesen, dafs wenn man vermittelst vollständiger Integration der von ihm aufgestellten gewöhnlichen Differentialgleichungen die Gröfsen x_1, x_2, ... x_{2n} durch eine von ihnen, z. B. x_{2n}, und durch die $2n-1$ willkürlichen Constanten ausdrückt, und diese Werthe in den Ausdruck

$$X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 \dots + X_{2n}\,dx_{2n}$$

substituirt, indem man die willkührlichen Constanten ebenfalls als veränderlich betrachtet, der Coëfficient von dx_n verschwindet, und die Verhältnisse der Coëfficienten der Differentialen der willkührlichen Constanten von x_n unabhängig werden. Da hiernach

$$B = 0,$$

und die Verhältnisse von B_1, B_2, ... B_{2n-1} von x_{2n} unabhängig sein werden, so bleiben diese Verhältnisse ungeändert, wenn in B_1, B_2, ... B_{2n-1} man $x_{2n} = 0$ setzt, wodurch man erhält:

$$B_1 : B_2 \ldots. : B_{2n-1} = X_1^0 : X_2^0 \ldots. X_{2n-1}^0,$$

oder, wenn man einen Multiplicator M einführt,

$$B_1 = MX_1^0, \quad B_2 = MX_2^0, \quad \ldots. \quad B_{2n-1} = MX_{2n-1}^0.$$

Wir sehen also, daſs wenn man statt der Variabeln x_1, x_2, ... x_{2n-1}, x_{2n} die Variabeln x_1^0, x_2^0, ... x_{2n-1}^0, x_{2n} einführt, vermittelst der Gleichungen

$$x_1 = x_1^0 + x_{2n}\,\xi_1, \quad x_2 = x_2^0 + x_{2n}\,\xi_2, \quad \ldots. \quad x_{2n-1} = x_{2n-1}^0 + x_{2n}\,\xi_{2n-1},$$

welche sich durch die vollständige Integration der von *Pfaff* aufgestellten gewöhnlichen Differentialgleichungen ergeben, die vorgelegte Differentialgleichung

$$0 = X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 \ldots. + X_{2n}\,dx_{2n}$$

sich in die Gleichung

$$0 = X_1^0\,dx_1^0 + X_2^0\,dx_2^0 \ldots. + X_{2n-1}^0\,dx_{2n-1}^0$$

verwandelt, oder in eine andere Differentialgleichung mit einer Variable weniger, welche aus der gegebenen Differentialgleichung erhalten wird, wenn man in ihr $x_{2n} = 0$ setzt, und x_1^0, x_2^0, ... x_{2n-1}^0 für x_1, x_2, ... x_{2n-1} schreibt. Die Integration dieser letztern Gleichung giebt also die Integration der vorgelegten, wenn man in ihren Integralgleichungen wieder x_1^0, x_2^0, ... x_{2n-1}^0 durch x_1, x_2, ... x_{2n-1}, x_{2n} vermittelst der angegebenen Gleichungen ausdrückt.

Nach der *Pfaff*schen Methode hat man nun in der Gleichung

$$0 = X_1^0\,dx_1^0 + X_2^0\,dx_2^0 \ldots. + X_{2n-1}^0\,dx_{2n-1}^0$$

eine der Gröſsen x_1^0, x_2^0, ... x_{2n-1}^0 einer willkührlichen Constanten gleich zu setzen; es sei also

$$x_{2n-1} = \alpha_1,$$

wo α_1 eine willkührliche Constante. Die Differentialgleichung wird demnach

$$0 = X_1^0\,dx_1^0 + X_2^0\,dx_2^0 \ldots. + X_{2n-2}^0\,dx_{2n-2}^0,$$

wo in den Gröſsen X_i^0 für x_{2n-1} die Constante α_1 zu setzen ist. Hat man diese neue Differentialgleichung durch $n-1$ Gleichungen mit $n-1$ willkührlichen Constanten integrirt, so füge man die Gleichung

$$x^0_{2n-1} = \alpha_1$$

hinzu, und drücke vermittelst der Integralgleichungen des ersten Systems x^0_1, x^0_2, ... x^0_{2n-1} durch x, x_1, ... x_{2n} aus, so hat man die n Gleichungen mit n willkührlichen Constanten, welche der vorgelegten Differentialgleichung

$$0 = X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 \ldots + X_{2n}\,dx_{2n}$$

Genüge thun.

Man kann auf dieselbe Weise nun wieder die Differentialgleichung, auf welche die vorgelegte reducirt worden ist, auf eine andere mit 2 Variabeln weniger reduciren. Das zu diesem Ende zu integrirende zweite System Differentialgleichungen erhält man aus dem ersten, wenn man die beiden letzten Gleichungen desselben fortläfst, $x_{2n} = 0$, $x_{2n-1} = \alpha_1$ setzt, und für x_i, X_i schreibt x^0_i, X^0_i. Man erhält dann $2n-3$ gewöhnliche Differentialgleichungen zwischen den $2n-2$ Variabeln x^0_1, x^0_2, ... x^0_{2n-2}. Als willkührliche Constanten nehme man wieder die Werthe von x^0_1, x^0_2, ... x^0_{2n-3} für $x^0_{2n-2} = 0$, welche wir mit x^{00}_1, x^{00}_2, ... x^{00}_{2n-3} bezeichnen wollen, und nenne X^{00}_i den entsprechenden Werth von X^0_i, so ist die Aufgabe darauf zurückgeführt, die Gleichung

$$X^{00}_1\,dx^{00}_1 + X^{00}_2\,dx^{00}_2 \ldots + X^{00}_{2n-4}\,dx^{00}_{2n-4} = 0,$$

welche aus der vorgelegten erhalten wird, wenn man $x_{2n} = x_{2n-2} = 0$, $x_{2n-1} = \alpha_1$, $x_{2n-3} = \alpha_2$ setzt, wo α_1, α_2 willkührliche Constanten bedeuten, und X^{00}, x^{00} für X, x schreibt, durch $n-2$ Gleichungen mit $n-2$ willkührlichen Constanten zu integriren. Zu diesen füge man die Gleichung

$$x^{00}_{2n-3} = \alpha_2,$$

und drücke x^{00}_1, x^{00}_2, ... x^{00}_{2n-3} vermittelst der Integralgleichungen des zweiten Systems durch x^0_1, x^0_2, ... x^0_{2n-2} aus, füge wieder die Gleichung

$$x^0_{2n-1} = \alpha_1$$

hinzu, und drücke x^0_1, x^0_2, ... x^0_{2n-1} vermittelst der Integralgleichungen des ersten Systems durch x_1, x_2, ... x_{2n} aus, so hat man die n Integrale der vorgelegten Gleichung mit n willkührlichen Constanten. Indem man auf diese Weise fortfährt jede Differentialgleichung, auf welche man die vorgelegte reducirt hat, dadurch noch um 2 Variabeln zu verringern, dafs man eine Variable $= 0$, eine andere einer willkührlichen Constante gleich setzt, kommt man zuletzt auf eine Differentialgleichung zwischen nur 2 Variabeln:

$$X_1\, dx_1 + X_2\, dx_2 = 0,$$

wo in X_1, X_2 zu setzen ist $x_{2n} = x_{2n-2} \ldots\ldots = x_4 = 0$, $x_{2n-1} = \alpha_1$, $x_{2n-3} = \alpha_2$ $\ldots\ldots x_3 = \alpha_{n-1}$.

Bezeichnet man daher mit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_n$ willkührliche Constanten, so besteht das ganze Verfahren zur Aufstellung der verschiedenen zu integrirenden Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen im Folgenden. In dem oben aufgestellten ersten Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen setzt man $x_{2n} = 0$, $x_{2n-1} = \alpha_1$, läſst die beiden letzten Gleichungen fort, und schreibt x_i^0, X_i^0 für x_i, X_i, wodurch man das zweite System erhält; in diesem setzt man $x_{2n-2}^0 = 0$, $x_{2n-3}^0 = \alpha_2$, läſst wieder die beiden letzten Gleichungen fort, und schreibt x_i^{00}, X_i^{00} für x_i^0, X_i^0, wodurch man das 3te System erhält; in diesem setzt man $x_{2n-4}^{00} = 0$, $x_{2n-5}^{00} = \alpha_3$, läſst wieder die beiden letzten Gleichungen fort, und schreibt x_i^{000}, X_i^{000} für x_i^{00}, X_i^{00}, wodurch man das 4te System Differentialgleichungen erhält, und so fort; zuletzt kommt man auf die Gleichung, welche das $n$te System vorstellt,

$$X_1^{0^{n-1}}\, dx_1^{0^{n-1}} + X_2^{0^{n-1}}\, dx_2^{0^{n-1}} = 0.$$

Läſst man $x_1^{0^{n-m}}$, $x_2^{0^{n-m}}$, $\ldots\ldots$ $x_{2m+1}^{0^{n-m}}$ die Werthe bedeuten, welche in den $2m+1$ Integralen des $(n-m)$ten Systems Differentialgleichungen $x_1^{0^{n-m-1}}$, $x_2^{0^{n-m-1}}$, $\ldots\ldots$ $x_{2m+1}^{0^{n-m-1}}$ für $x_{2m+2}^{0^{n-m-1}} = 0$ annehmen, so geben die sämmtlichen Integralgleichungen der verschiedenen Systeme, verbunden mit den Gleichungen

$$x_{2n-1}^{0} = \alpha_1, \quad x_{2n-3}^{00} = \alpha_2, \quad x_{2n-5}^{000} = \alpha_3, \quad \ldots\ldots \quad x_1^{0^n} = \alpha_n,$$

die verlangte Lösung. Man kann nämlich in der letzten der n Gleichungen:

$$x_{2n-1}^{0} = \alpha_1, \quad x_{2n-3}^{00} = \alpha_2, \quad x_{2n-5}^{000} = \alpha_3, \quad \ldots\ldots \quad x_1^{0^n} = \alpha_n.$$

vermittelst des Integrals der letzten Differentialgleichung (des $n$ten Systems) $x_1^{0^n}$ durch $x_1^{0^{n-1}}$, $x_2^{0^{n-1}}$, dann in den beiden letzten vermittelst der drei Integrale des $(n-1)$ten Systemes $x_1^{0^{n-1}}$, $x_2^{0^{n-1}}$, $x_3^{0^{n-1}}$ durch $x_1^{0^{n-2}}$, $x_2^{0^{n-2}}$, $x_3^{0^{n-2}}$, $x_4^{0^{n-2}}$, dann in den drei letzten vermittelst der 5 Integrale des $n-2$ten Systems Differentialgleichungen $x_1^{0^{n-2}}$, $x_2^{0^{n-2}}$, $x_3^{0^{n-2}}$, $x_4^{0^{n-2}}$, $x_5^{0^{n-2}}$ durch $x_1^{0^{n-3}}$, $x_2^{0^{n-3}}$, $\ldots\ldots$ $x_6^{0^{n-3}}$ ausdrücken, und so fortfahren, bis man vermittelst der Integration des 1sten Systems alles in den n Gleichungen durch die ursprünglichen Variabeln $x_1, x_2, \ldots\ldots x_{2n}$ ausgedrückt hat.

Wir haben gesehen, dafs wenn von den $2n$ Gröfsen $X_1, X_2, \ldots$ $\ldots X_{2n}$ eine Zahl $n-1$ verschwindet, was den Fall der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung giebt, die Integration des 1sten Systems Differentialgleichungen hinreicht. Wenn eine geringere Zahl $n-m$ fehlen, so dafs

$$X_1 = X_2 \ldots = X_{n-m} = 0,$$

so braucht man das obige Verfahren nur so weit fortzusetzen, bis man die vorgelegte Differentialgleichung auf eine mit $2n-2m+2$ Variabeln reducirt hat, welche die Form haben wird:

$$0 = X^{0^{m-1}}_{n-m+1}\, dx^{0^{m-1}}_{n-m+1} + X^{0^{m-1}}_{n-m+2}\, dx^{0^{m-1}}_{n-m+2} \ldots + X^{0^{m-1}}_{2n-2m+2}\, dx^{0^{m-1}}_{2n-2m+2},$$

indem die Coëfficienten von $dx^{0^{m-1}}_1$, $dx^{0^{m-1}}_2$, ... $dx^{0^{m-1}}_{n-m}$ fehlen. Die Integration des $m$ten Systems Differentialgleichungen reicht hin, die $n-m+1$ Gleichungen zu finden, durch welche dieser Differentialgleichung Genüge geschieht, und man braucht keine Differentialgleichungen weiter zu integriren.

Man kann sich auch zur Integration der Gleichung

$$X_1\, dx_1 + X_2\, dx_2 \ldots + X_{2n}\, dx_{2n} = 0$$

folgender Methode bedienen, welche von der *Pfaff*schen verschieden ist. Indem man nur x_1 und x_2 als Variabeln betrachtet, kann man durch Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung zwischen 2 Variabeln

$$X_1\, dx + X_2\, dx_2 = U\, du$$

setzen. Betrachtet man auch x_3 und x_4 als Variabeln, so erhält man hierdurch

$$X_1 dx_1 + X_2\, dx_2 + X_3\, dx_3 + X_4\, dx_4 = U\, du + U'\, dx_3 + U''\, dx_4,$$

wo, wenn man u statt x_1 einführt, U, U', U'' Functionen von u, x_2, x_3, x_4 werden. Durch Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung zwischen 3 Variabeln kann man, wie sich leicht zeigen läfst, diesem Ausdruck die Form geben

$$U\, du + U'\, dx_3 + U''\, dx_4 = V_1\, dv_1 + V_2\, dv_2,$$

wodurch auch

$$X_1\, dx_1 + X_2\, dx_2 + X_3\, dx_3 + X_4\, dx_4 = V_1\, dv_1 + V_2\, dv_2.$$

Betrachtet man noch x_5, x_6 als Variabeln, so erhält man hierdurch:

$$X_1\, dx_1 + X_2\, dx_2 \ldots + X_6\, dx_6 = V_1\, dv_1 + V_2\, dv_2 + V'\, dx_5 + V''\, dx_6,$$

wo, wenn man v_1, v_2 statt x_1, x_2 einführt, V_1, V_2, V', V'' Functionen von v_1, v_2, x_3, x_4, x_5, x_6 werden. Dem vorstehenden Ausdruck kann man durch Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung zwischen 4 Variabeln die Form geben

$$V_1\,dv_1 + V_2\,dv_2 + V'\,dx_5 + V''\,dx_6 = W_1\,dw_1 + W_2\,dw_2 + W_3\,dw_3,$$

wodurch auch

$$X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 \dots + X_6\,dx_6 = W_1\,dw_1 + W_2\,dw_2 + W_3\,dw_3,$$

u. s. w. Fährt man so fort, so erhält man, nachdem man zuerst eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Variabeln, und dann hintereinander partielle Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen 3, 4, ... n Variabeln integrirt hat, zuletzt durch Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung zwischen $n+1$ Variabeln die verlangten n Gleichungen. Da nach dem oben auseinandergesetzten Verfahren eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung zwischen $k+1$ Variabeln die Integration von $2k-1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen $2k$ Variabeln gefordert, so sieht man, dafs man nach dieser Methode eben so viel Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen zwischen gleich viel Variabeln zu integriren hat, wie nach der früheren Methode. Wenn m von den Gröfsen X_1, X_2, ... X_{2n} gleich 0 sind, so kann man sogleich bei diesem Gange der Operationen mit der Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung zwischen $n+2$ Variabeln anfangen.

Den 9ten December 1836.