4.

Zur Theorie der Variations-Rechnung und der Differential-Gleichungen.

(Von Herrn Prof. *C. G. J. Jacobi* zu Königsberg in Pr.)

(Auszug eines Schreibens desselben vom 29. November 1836 an den Herrn Professor *Enke*, Secretair der mathematischen Classe der Akademie der Wissenschaften zu Berlin.)

Es ist mir gelungen, eine grofse und wesentliche Lücke in der Variationsrechnung auszufüllen. Bei den Problemen des Gröfsten und Kleinsten nämlich, welche von der Variationsrechnung abhängen, kannte man keine allgemeine Regel, woran zu erkennen wäre, ob eine Lösung wirklich ein Gröfstes oder Kleinstes giebt, oder keins von beiden. Man hatte zwar erkannt, dafs die Kriterien hiefür davon abhängen, ob gewisse Systeme Differentialgleichungen Integrale haben, die während des ganzen Intervalls, über den das Integral, welches ein Maximum oder Minimum werden soll, erstreckt wird, endlich bleiben. Aber man konnte diese Integrale selbst nicht finden, und auf keine Weise sonst, ohne sie zu kennen, den Umstand, ob sie innerhalb der gegebenen Grenzen endlich bleiben oder nicht, erörtern. Ich habe aber bemerkt, dafs diese Integrale immer von selber gegeben sind, wenn man die Differentialgleichungen des Problems integrirt hat, d. h. die Differentialgleichungen, die erfüllt werden müssen, damit die erste Variation verschwindet. Hat man durch Integration dieser Differentialgleichungen die Ausdrücke der gesuchten Functionen erhalten, welche eine Anzahl willkührlicher Constanten enthalten werden, so geben ihre nach diesen willkührlichen Constanten genommenen partiellen Differentialquotienten die Integrale der neuen Differentialgleichungen, welche man zur Bestimmung der Kriterien der Gröfsten und Kleinsten zu integriren hat.

Es sei, um den einfachsten Fall zu betrachten, das vorgelegte Integral $\int f\left(x, y, \frac{\partial y}{\partial x}\right) \partial x$; y wird durch die Differentialgleichung $\frac{\partial f}{\partial y} - \partial . \frac{\frac{\partial f}{\partial y'}}{\partial x} = 0$ bestimmt, wo y' für $\frac{\partial y}{\partial x}$ gesetzt ist. Der Ausdruck von y, wie er durch die Integration dieser Gleichung gegeben wird, enthält zwei willkührliche Constanten, die ich a und b nennen will. Die zweite Variation wird, wenn $w = \delta y$, $w' = \frac{\partial w}{\partial x}$ ist,

$$\int \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} w w + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y . \partial y'} w w' + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} w' w' \right) \partial x$$

sein, wo für das Maximum oder Minimum nöthig ist, dafs $\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}$ immer dasselbe Zeichen behält. Aber um die vollständigen Kriterien des Maximums oder Minimums zu haben, mufs man noch den vollständigen Ausdruck einer Function v kennen, welche der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} + v \right)^2$$

Genüge leistet; wie man dies in *Lagrange's* Functionentheorie, oder in *Dirksen's* Variationsrechnung sehen kann. (Die Variationsrechnung von *Ohm* ist in dieser Theorie nicht genau.) Diesen vollständigen Ausdruck für v finde ich nun wie folgt. Es sei $u = \alpha \frac{\partial y}{\partial a} + \beta \frac{\partial y}{\partial b}$, wo $\frac{\partial y}{\partial a}$, $\frac{\partial y}{\partial b}$ die partiellen Differentialquotienten von y bedeuten, nach den willkührlichen Constanten a, b genommen, die in y vorkommen, und α, β neue willkührliche Constanten sind, so wird

$$v = -\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} + \frac{1}{u} . \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

der verlangte Ausdruck von v, welcher eine willkührliche Constante $\frac{\beta}{\alpha}$ enthält.

Schwieriger ist der Fall, wo unter dem Integralzeichen Differentiale höherer Ordnung als die erste vorkommen. Es sei $\int f(x, y, y', y'') \partial x$ zu einem Maximum oder Minimum zu machen, wo wieder $y' = \frac{\partial y}{\partial x}$, $y'' = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, so wird y das Integral der Differentialgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \partial . \frac{\frac{\partial f}{\partial y'}}{\partial x} + \partial^2 . \frac{\frac{\partial f}{\partial y''}}{\partial x^2} = 0,$$

welches 4 willkührliche Constanten a, a_1, a_2, a_3 enthalten wird. Wenn wieder $\delta y = w$, $\delta y' = w'$, $\delta y'' = w''$, so wird die zweite Variation:

$$\int \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} w w + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} w w' + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y''} w w'' + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} w' w' + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial y''} w' w'' \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2 f}{\partial y''^2} w'' w'' \right) \partial x.$$

Für das Maximum oder Minimum muſs $\frac{\partial^2 f}{\partial y''^2}$ immer dasselbe Zeichen haben. Um aber die vollständigen Kriterien zu haben, muſs man folgendes System von Differentialgleichungen integriren, wie man aus *Lagrange's* Theorie der Functionen ersehen kann:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}+\frac{\partial v_2}{\partial x}+2v_1\right)=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y'}+v+\frac{\partial v_1}{\partial x}\right)^2;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y''^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y''}+v_1\right)^2;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y''^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}+\frac{\partial v_2}{\partial x}+2v_1\right)=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y'\,\partial y''}+v_2\right)^2.$$

Durch diese 3 Differentialgleichungen erster Ordnung, welche einen ziemlich abschreckenden Anblick bieten, sind die drei Functionen v, v_1 und v_2 zu bestimmen, deren vollständiger Ausdruck 3 willkührliche Constanten enthalten muſs. Ich habe ihre allgemeinen Integrale, wie folgt, gefunden. Es sei

$$u=\alpha\frac{\partial y}{\partial a}+\alpha_1\frac{\partial y}{\partial a_1}+\alpha_2\frac{\partial y}{\partial a_2}+\alpha_3\frac{\partial y}{\partial a_3},\quad u_1=\beta\frac{\partial y}{\partial a}+\beta_1\frac{\partial y}{\partial a_1}+\beta_2\frac{\partial y}{\partial a_2}+\beta_3\frac{\partial y}{\partial a_3},$$

oder es seien u, u_1 lineäre Ausdrücke der partiellen Differentialquotienten von y nach den willkührlichen Constanten, die es enthält, genommen. Die 8 Constanten α, α_1, α_2, α_3, β, β_1, β_2, β_3 sind nicht ganz willkührlich zu nehmen, sondern es muſs zwischen den 6 aus ihnen zusammengesetzten Gröſsen $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta$, $\alpha\beta_2-\alpha_2\beta$, $\alpha\beta_3-\alpha_3\beta$, $\alpha_2\beta_3-\beta_2\alpha_3$, $\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3$, $\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1$ eine gewisse Bedingung Statt finden, in deren nähere Erörterung ich hier nicht eingehen will. Hiernach werden die allgemeinen Ausdrücke für v, v_1, v_2, die ich gefunden habe, folgende:

$$v_2=-\frac{\partial^2 f}{\partial y'\,\partial y''}-\frac{\partial^2 f}{\partial y''^2}\cdot\frac{u\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}-u_1\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{u\dfrac{\partial u_1}{\partial x}-u_1\dfrac{\partial u}{\partial x}},$$

$$v_1=-\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y''}+\frac{\partial^2 f}{\partial y''^2}\cdot\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}-\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{u\dfrac{\partial u_1}{\partial x}-u_1\dfrac{\partial u}{\partial x}},$$

$$v=-\frac{\partial v_1}{\partial x}-\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y'}-\frac{\partial^2 f}{\partial y''^2}\cdot\frac{\left(u\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}-u_1\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\cdot\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}-\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)}{\left(u\dfrac{\partial u_1}{\partial x}-u_1\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2}.$$

Da zwischen den 6 Gröſsen $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta$ u. s. w. eine identische Gleichung Statt findet, auſserdem zwischen denselben noch eine Bedingung gegeben ist, und in den Ausdrücken von v, v_1, v_2 nur ihre Verhältnisse vorkommen, so vertreten sie die Stelle von 3 willkührlichen Constanten, wie verlangt wurde.

Die allgemeine Theorie, wenn unter dem Integralzeichen die Differentiale von y bis auf irgend eine Ordnung vorkommen, wird ohne Schwierigkeit aus einer merkwürdigen Eigenschaft einer besondern Classe lineärer Differentialgleichungen abgeleitet. Diese lineären Differentialgleichungen der $2n$ten Ordnung haben die Form

$$0 = Ay + \frac{\partial . A_1 y'}{\partial x} + \frac{\partial^2 . A_2 y''}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 . A_3 y'''}{\partial x^3} \dots + \frac{\partial^n . A_n y^{(n)}}{\partial x^n} = Y,$$

wo $y^{(m)} = \frac{\partial^m y}{\partial x^m}$ und A, A_1 etc. gegebene Functionen von x sind. Wenn y irgend ein Integral der Gleichung $Y = 0$ ist, und man setzt $u = ty$, so wird der Ausdruck, in welchem $u^{(m)} = \frac{\partial^m u}{\partial x^m}$,

$$y\left(Au + \frac{\partial . A_1 u'}{\partial x} + \frac{\partial^2 . A_2 u''}{\partial x^2} \dots + \frac{\partial^n . A_n u^{(n)}}{\partial x^n}\right) = yU,$$

integrabel, d. h. man kann sein Integral angeben ohne t zu kennen, und dieses Integral hat wieder die Form von Y, nur dafs n um 1 kleiner geworden; man hat nämlich:

$$\int yU\,\partial x = Bt' + \frac{\partial . B_1 t''}{\partial x} + \frac{\partial^2 . B_2 t'''}{\partial x^2} + \dots + \frac{\partial^{n-1} . B_{n-1} t^{(n)}}{\partial x^{n-1}},$$

wo $t^{(m)} = \frac{\partial^m t}{\partial x^m}$ und die Functionen B sich aus u und den Functionen A und deren Differentialen allgemein angeben lassen. Der Beweis dieses Satzes ist nicht ohne Schwierigkeit. Ich habe die allgemeinen Ausdrücke der Functionen B gefunden; doch genügt es für die vorgesetzte Anwendung, nur überhaupt zu beweisen, dafs $\int yU\,\partial x$ die angegebene Form habe, ohne dafs es nöthig ist, die Functionen B selber zu kennen.

Die Metaphysik der gefundenen Resultate, um mich eines französischen Ausdruckes zu bedienen, beruht ungefähr auf folgenden Betrachtungen. Man kann bekanntlich der ersten Variation die Form $\int V\,\delta y\,\partial x$ geben, wo $V = 0$ die zu integrirende Gleichung ist. Die zweite Variation erhält hiernach die Form $\int \delta V\,\delta y\,\partial x$. Soll die zweite Variation das Zeichen nicht ändern, so mufs dieselbe nicht verschwinden können, oder die Gleichung $\delta V = 0$, welche in δy lineär ist, darf kein Integral δy haben, welches die Bedingungen, denen nach der Natur des Problems δy unterworfen ist, erfüllt. Man sieht hieraus, dafs die Gleichung $\delta V = 0$ bei dieser Untersuchung eine bedeutende Rolle spielt, und gewahrt in der That bald ihren Zusammenhang mit den für die Kriterien des Max. oder Min. zu integrirenden Differentialgleichungen. Aufserdem sieht man sogleich, dafs ein Werth von δy, welcher die Differentialgleichung $\delta V=0$ erfüllt, jeder partielle Differentialquotient von y ist, nach einer der willkürlichen Constanten genommen, die y als Integral der Gleichung $V=0$ enthält. Man erhält daher den allgemeinen Ausdruck des Integrals δy der Differentialgleichung $\delta V=0$, wenn man aus allen diesen partiellen Differentialquotienten von y einen lineären Ausdruck bildet. Die Gleichung $\delta V=0$, deren sämmtliche Integrale man auf diese Weise kennt, läfst sich aber, wie man zeigen kann, auf die Form der obigen Gleichung $Y=0$ bringen, wenn man in dieser δy für y schreibt, und vermittelst der angegebenen Eigenschaften dieser Art Gleichungen gelingt es, die zweite Variation $\int \delta V\,\delta y\,\partial x$ durch fortgesetzte partielle Integration in einen andern Ausdruck zu transformiren, der unter dem Integralzeichen ein vollständiges Quadrat enthält, welches eben die Transformation der zweiten Variation ist, die man hiebei zu erreichen strebt. Wenn z. B. das obige Integral $\int f(x, y, y', y'')\,\partial x$ vorgelegt ist, und man die für diesen Fall angegebene Bedeutung von u und u_1 beibehält, so erhält δV die Form

$$\delta V = A\,\delta y + \frac{\partial . A_1\,\delta y'}{\partial x} + \frac{\partial^2 . A_2\,\delta y''}{\partial x^2},$$

und es wird $\delta V=0$ für $\delta y=u$. Setzt man $\delta y = u\,\delta' y$, so erhält man nach dem obigen allgemeinen Satze:

$$\int \delta V\,\delta y\,\partial x = \int u\,\delta V\,\delta' y\,\partial x =$$
$$\left(B\,\delta' y' + \frac{\partial . B_1\,\delta' y''}{\partial x}\right)\delta' y - \int \left(B\,\delta' y' + \frac{\partial . B_1\,\delta' y''}{\partial x}\right)\delta' y'\,\partial x.$$

Setzt man nun das letzte Integral $\int V_1\,\delta' y'\,\partial x$, so wird die Gleichung $V_1=0$ erfüllt, wenn man $\delta' y = \frac{u_1}{u}$, also $\delta' y' = \frac{u u_1' - u_1 u'}{u^2}$ setzt. Man kann daher dieselbe Methode fortsetzen, indem man $\delta' y' = \frac{u u_1' - u_1 u'}{u^2} . \delta'' y$ setzt, wodurch nach demselben Satze

$$\int V_1\,\delta' y'\,\partial x = \int V_1 \left(\frac{u u_1' - u_1 u'}{u^2}\right) \delta'' y\,\partial x = C\,\delta'' y' . \delta'' y - \int C (\delta'' y')^2\,\partial x,$$

welches die letzte Transformation ist, in welcher die willkührliche Variation nur in einem Quadrat unter dem Integralzeichen vorkommt. Man sieht übrigens leicht, dafs $B_1 = u^2 A_2$, $C = \left(\frac{u u'_1 - u_1 u'}{u^2}\right)^2 B_1$, und daher $C = \left(\frac{u u'_1 - u_1 u'}{u}\right)^2 A_2$.

Es ist ferner $A_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial y''^2}$, so dafs C immer dasselbe Zeichen wie $\frac{\partial^2 f}{\partial y''^2}$ hat, welches für das Minimum immer positiv, für das Maximum immer negativ sein mufs. Man mufs bekanntlich nun noch untersuchen, ob $\partial'' y'$ zwischen den Grenzen der Integration nicht unendlich werden kann, wozu man durch die Kenntnifs der Functionen u, u_1 in den Stand gesetzt ist, welche man kennt, so wie y gegeben ist oder das vollständige Integral der Gleichung $V = 0$.

Wenn die im Vorstehenden angedeutete Analysis ziemlich tiefe Speculationen der Integralrechnung erfordert, so werden doch die daraus abgeleiteten Kriterien, ob eine Lösung überhaupt ein Maximum oder ein Minimum giebt, sehr einfach. Ich will den Fall betrachten, wo, wenn unter dem Integralzeichen y mit seinen Differentialen bis zum $n$ten vorkommt die Grenzwerthe von $y, y', \dots y^{(n-1)}$, so wie die Grenzen selber gegeben sind. Setzt man in die $2n$ Integralgleichungen, mit ihren $2n$ willkührlichen Constanten, diese Grenzwerthe, so werden die willkührlichen Constanten bestimmt; aber weil hiezu die Auflösung von Gleichungen nöthig ist, giebt es in der Regel mehrere Arten dieser Bestimmung, so dafs man mehrere Curven erhält, welche denselben Grenzbedingungen, und derselben Differentialgleichung Genüge leisten. Hat man eine von diesen gewählt, so betrachte man den einen Grenzpunct als fest, und gehe von ihm zu den folgenden Puncten auf der Curve über. Nimmt man einen dieser folgenden Puncte zum andern Grenzpuncte, so wird es, nach dem eben Gesagten, sich ereignen können, dafs man durch ihn und den ersten noch andere Curven legen kann, für welche in diesen beiden Grenzen $y', y'', \dots y^{(n-1)}$ dieselben Werthe haben, und welche der vorgelegten Differentialgleichung genügen. Sobald man nun, indem man auf der Curve fortschreitet, zu einem Punct derselben gelangt, für welchen eine jener andern Curven mit ihr zusammenfällt, oder, wie man sich auch ausdrükken kann, ihr unendlich nahe kommt: so ist dieses die Grenze, bis zu welcher, oder über welche hinaus, man die Integration nicht ausdehnen darf, wenn ein Maximum oder Minimum Statt finden soll; wenn man aber das Integral nicht bis zu diesen Grenzen ausdehnt, so wird ein Maximum oder Minimum immer Statt finden, vorausgesetzt, dafs $\frac{\partial^2 f}{\partial y^{(n)2}}$ zwischen den Grenzen immer dasselbe Zeichen hat.

Ich will, um dies an einem Beispiele deutlich zu machen, das Princip der kleinsten Wirkung bei der elliptischen Bewegung eines Planeten betrachten.

Das in dem Princip der kleinsten Wirkung betrachtete Integral kann nie ein Maximum werden, wie *Lagrange* geglaubt hat: es wird aber auch keinesweges immer ein Minimum, sondern es sind dazu bestimmte Einschränkungen für ihre Grenzen nöthig, welche durch die obige allgemeine Regel gegeben werden, widrigenfalls das Integral weder ein Maximum noch ein Minimum wird. Es fange der Planet (Fig. 1.) sich von a zu bewegen an, wo a zwischen dem Peri- und Aphelium liege; der andere Endpunct sei b; wenn $2A$ die grofse Axe, f die Sonne ist; so erhält man bekanntlich den andern Brennpunct der Ellipse als Durchschnitt zweier aus den Centren a und b mit den Radien $2A - af$, $2A - bf$ beschriebenen Kreise. Die beiden Durchschnittspuncte der Kreise geben zwei verschiedene Lösungen des Problems, welche nur dann in eine zusammenfallen können, wenn die Kreise sich berühren, d. h., wenn ab durch den andern Brennpunct geht. Wenn man also von a durch den andern Brennpunct der Ellipse f' die Sehne der Ellipse aa' zieht, so wird, der gegebenen Regel zufolge, der andere Grenzpunct b zwischen a und a_1 liegen müssen, wenn die Ellipse das im Princip der kleinsten Wirkung betrachtete Integral wirklich zu einem Kleinsten machen soll. Fällt b in a_1, so kann die zweite Variation des Integrals zwar nicht negativ werden, aber 0, so dafs die Aenderung des Integrals von der dritten Ordnung und daher sowohl positiv als negativ werden kann. Fällt b über a' hinaus, so kann die zweite Variation auch selbst negativ werden. Wenn der Anfangspunct a zwischen dem Aphelium und Perihelium liegt, so wird der äufserste Punct a' durch die Sehne der Ellipse bestimmt, welche man von a durch die Sonne f zieht. Denn wenn a und a' (Fig. 2.) die Grenzpuncte sind, so erhält man durch Drehung der Ellipse um afa' unendlich viele Lösungen des Problems. Wenn also der zweite Grenzpunct im letztern Falle über a' hinaus liegt, wird es eine *courbe à double courbure* zwischen den beiden gegebenen Grenzen geben, für welche $\int v\,\partial s$ kleiner wird als für die Ellipse.

Ich will bei dieser Gelegenheit noch ein Paar Worte über die Variation der Doppel-Integrale sagen, deren Theorie einer gröfsern Eleganz fähig ist, als sie selbst nach den Arbeiten von *Gaufs* und *Poisson* erlangt hat. Um eine Vorstellung von der Art zu geben, wie es mir zweckmäfsig scheint, die Variation der Doppel-Integrale auszudrücken, will ich den einfachsten Fall annehmen, in welchem $\delta\iint f(x,y,z,p,q)\,\partial x\,\partial y$ bebetrachtet wird, wo $p=\frac{\partial z}{\partial x}$, $q=\frac{\partial z}{\partial y}$.

Es sei w die Variation von z, so wird

$$\delta\iint\partial x.\partial y f=\iint\partial x\,\partial y\left(\frac{\partial f}{\partial z}w+\frac{\partial f}{\partial p}.\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial q}.\frac{\partial w}{\partial y}\right).$$

Die bei einfachen Integralen angewendete Methode besteht darin, den Ausdruck unter dem Integralzeichen in zwei Theile zu theilen, von denen der eine in w multiplizirt ist, der andere das Element eines Integrals ist; der erste mufs unter dem Integralzeichen $=0$ gesetzt werden, wenn die Variation verschwinden soll; der zweite kann integrirt werden, und man läfst sein Integral verschwinden. Eben so theile ich den Ausdruck unter dem Doppelzeichen in einen in w multiplizirten Theil, und in einen andern, der das Element eines Doppel-Integrals ist, das heifst, wenn $u=aw$, so setze ich:

$$\frac{\partial f}{\partial z}w+\frac{\partial f}{\partial p}.\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial q}.\frac{\partial w}{\partial y}=Aw+\frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}.\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Vergleicht man die in w, $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ multiplicirten Termen, so erhält man:

$$\frac{\partial f}{\partial z}=A+\frac{\partial a}{\partial x}.\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial a}{\partial y}.\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial f}{\partial p}=a\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial f}{\partial q}=-a\frac{\partial v}{\partial x},$$

woraus

$$A=\frac{\partial f}{\partial z}-\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)}{\partial x}-\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)}{\partial y},$$

folgt, welches $=0$ gesetzt, die bekannte partielle Differentialgleichung giebt, die hier auf eine vollkommen symmetrische Art abgeleitet ist. Die Function v mufs die Gleichung erfüllen: $\frac{\partial f}{\partial p}.\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial q}.\frac{\partial v}{\partial y}=0$. Setzt man $A=0$, so hat man:

$$\delta\iint\partial x\,\partial y f=\iint\partial x\,\partial y\left(\frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}.\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\iint\partial v\,\partial u,$$

welches, in den gegebenen Grenzen genommen, verschwinden mufs. Wenn z in den Grenzen gegeben ist, wird w und mithin auch $u=aw$, in den

Grenzen verschwinden und daher $\iint \partial u \, \partial v = 0$ sein. Wenn die Grenzwerthe von z ganz willkührlich sind, so muſs v in den Grenzen verschwinden, oder wenn $v = 0$ die Grenzcurve bedeutet, so müssen die im Integral der Gleichung $A = 0$ vorkommenden willkührlichen Functionen so bestimmt werden, daſs $\frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ ist, u. s. w.

Um auf das Maximum und Minimum zurückzukommen: so ist es ein Übelstand, daſs im Gebrauch dieser Worte solche Verwirrung herrscht. Man sagt, ein Ausdruck sei ein Maximum oder Minimum, wenn man bloſs sagen will, daſs seine Variation verschwindet, selbst wenn auch weder ein Maximum noch ein Minimum Statt findet. Man sagt, eine Gröſse sei ein Maximum, wenn man nur sagen will, sie sei kein Minimum. So sagt *Poisson* in seiner Mechanik: bei geschlossenen Flächen könne die kürzeste Linie zwischen zwei gegebenen Puncten ein Maximum sein, obgleich es sich von selbst versteht, daſs man durch Ausbiegungen, die unendlich klein sein können, einen noch so groſsen Weg noch gröſser machen kann. Freilich giebt die kürzeste Linie nur dann ein relatives Minimum, wenn die nach meiner obigen allgemeinen Regel gestellte Bedingung erfüllt ist, nämlich daſs es zwischen den beiden Endpuncten auf der Curve nicht zwei andere giebt, zwischen denen man noch eine zweite unendlich nahe kürzeste Curve ziehen kann. Im andern Falle ist aber die Länge kein Maximum, sondern weder ein Maximum noch ein Minimum. Für die Flächen, die in jedem Puncte zwei entgegengesetzte Krümmungen haben, habe ich bewiesen. daſs zwischen je zwei ihrer Puncte die kürzeste Linie wirklich eine kürzeste Linie ist.

Die oben angedeuteten Untersuchungen über die Kriterien des Gröſsten und Kleinsten in den isoperimetrischen Problemen füllen eine wesentliche Lücke in einem der schönsten Theile der Mathematik aus; auſserdem sind sie durch die Kunstgriffe der Integralrechnung, die dabei angewendet werden, merkwürdig. Tiefer aber in das Ganze der Wissenschaft eingreifend dürften folgende Untersuchungen sein, von denen ich mir Ihnen eine kurze Andeutung zu geben erlaube.

Hamilton hat gezeigt, daſs die Probleme der Mechanik, bei denen der Satz von der lebendigen Kraft gilt, sich auf die Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung zurückführen lassen. Er fordert eigentlich die Integration zweier solcher partiellen Differentialgleichungen: man zeigt aber leicht, dafs es genügt, irgend ein vollständiges Integral einer von ihnen zu kennen. Auch dehnt man seine Resultate leicht mit auf den Fall aus, wo die Kräftefunction, d. i. die Function, deren partielle Differentialquotienten die Kräfte geben, die Zeit explicite enthält; für welchen Fall der Satz von der lebendigen Kraft nicht gilt; aber immer noch das Princip der kleinsten Wirkung. Durch diese Zurückführung auf eine partielle Differentialgleichung könnte wenig gewonnen scheinen, da nach der *Pfaff*'schen Methode in den Abhandlungen Ihrer Academie — und für mehr als 3 Variabeln kannte man bisher weiter nichts über die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung — die Integration der einen partiellen Differentialgleichung, auf welche das dynamische Problem zurückgeführt wird, viel schwieriger ist als die Integration des Systems der unmittelbar gegebenen, gewöhnlichen Differentialgleichungen der Bewegung. In der That, wenn man, wie es ebenfalls ohne Schwierigkeit geschieht, die Untersuchung *Hamiltons* auf alle partielle Differentialgleichungen erster Ordnung ausdehnt, ist es umgekehrt eine bedeutende Entdeckung in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, dafs sie so immer auf die Integration eines einzigen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückgeführt werden können, welche bisher nach der *Pfaff*'schen Methode nicht ausreichend war. Wichtig für die Integration der Differentialgleichungen der Mechanik selber, konnte dies nur werden, wenn man nachwiefs, dafs die Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen, auf welche die partiellen Differentialgleichungen 1ster Ordnung zurückkommen, einer besondern Behandlungsweise fähig sind, welche sie von andern Differentialgleichungen unterscheidet. *Hamilton*, obgleich er manche Anwendung seiner neuen Methode, wie er seine Untersuchungen nennt, zu machen versucht hat, hat hiervon nichts bemerkt, und daher auch aus seinen merkwürdigen Theoremen keinen wesentlichen Nutzen gezogen. Aber in der That hat schon *Lagrange* für die partiellen Differentialgleichungen 1ster Ordnung zwischen drei Variabeln, auf die er sich beschränkt hat, und deren Integration zu seinen schönsten und berühmtesten Entdeckungen gehört, bemerkt, dafs, wenn man ein Integral des Systems von 3 gewöhnlichen Differentialgleichungen 1ster Ordnung zwischen 4 Variabeln, auf welchen er das Problem zurückgeführt hat, kennt, nur noch zwei Differentialgleichungen erster Ordnung, jede zwischen zwei Variabeln zu integriren sind. Im Allgemeinen aber wäre noch eine Differentialgleichung **zweiter** Ordnung zwischen 2 Variabeln zu integriren, die man also für jenes besondere System gewöhnlicher Differentialgleichungen immer auf die 1ste Ordnung zurückführen kann. Wenn die partielle Differentialgleichung 1ster Ordnung zwischen 3 Variabeln die unbekannte Function nicht selber, sondern nur ihre beiden Differentialquotienten enthält; so hat man nur 2 Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen 3 Variabeln zu integriren; und kennt man **ein** Integral derselben, so hat man nach der *Lagrange*schen Methode nur noch zwei Quadraturen auszuführen, während im Allgemeinen noch eine Differentialgleichung 1ster Ordnung zu integriren wäre. Der letzte Fall findet in der Mechanik Statt, d. h. die partiellen Differentialgleichungen 1ster Ordnung, auf welche die dynamischen Probleme zurückkommen, enthalten nie die unbekannte Function selber. Hiernach kann man schon aus dem *Lagrange*schen Verfahren für 3 Variabeln neue, höchst merkwürdige Sätze der Mechanik ziehn. Es folgt nämlich daraus ganz allgemein, daſs, wenn irgend ein Problem der Mechanik, für welches der Satz von der lebendigen Kraft gilt, von einer Differentialgleichung der 2ten Ordnung abhängt, und man noch auſser diesem Satz **ein** Integral kennt, so daſs das Problem auf die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung 1ster Ordnung zwischen zwei Variabeln zurückkommt, man diese letzteren immer integriren kann, d. h. man kann nach einer allgemeinen, ganz bestimmten Regel den Multiplicator derselben finden. Ein solches mechanisches Problem ist z. B. die Bewegung eines Körpers in der Ebene, der nach zwei festen Centren gezogen wird. *Euler* fand hier mit Leichtigkeit auſser dem Integrale der lebendigen Kraft noch ein zweites; die Differentialgleichung erster Ordnung, worauf er hiernach kam, war aber so complicirt, daſs seine ganze Unerschrockenheit dazu gehörte, sich mit der Integration derselben zu beschäftigen und das Gelingen dieser Bemühung zu seinen berühmtesten Meisterstücken gehört. Diese Integration aber würde ohne alle weiteren Kunstgriffe durch die erwähnte allgemeine Regel geleistet. Ich habe vor etwa einem halben Jahre die auf den Fall der freien Bewegung eines Punctes in einer Ebene bezüglichen Formeln, welche allgemein, wenn man auſser dem Integral der lebendigen Kraft noch ein anderes Integral kennt, das Problem auf Quadraturen zurückführen, der Pariser Akademie mitgetheilt. Diese Formeln lassen sich sogleich auch auf die Bewegung eines Punctes auf einer gegebenen Fläche ausdehnen.

Damit aber eine Anwendung dieser Betrachtungen auf complicirtere mechanische Probleme möglich sei, ist es nöthig, die *Lagrange*sche Methode für die Integration partieller Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen 3 Variabeln auf jede Zahl Variabeln auszudehnen. *Pfaff*, der dies mit unübersteiglichen Hindernissen verknüpft hielt, sah sich aus diesem Grunde genöthigt, diese Methode ganz zu verlassen. Er betrachtete das Problem als speciellen Fall eines viel allgemeinern, dessen glückliche Lösung zu den wichtigsten Bereicherungen der Integralrechnung gehört. Aber das Problem der Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung hat vor dem allgemeinen Probleme, welches *Pfaff* betrachtet, Erleichterungen voraus, die ihm entgangen sind, und die er auf seinem Wege nicht finden konnte. Es ist mir gelungen, die Schwierigkeiten, welche der Verallgemeinerung der *Lagrange*schen Methode im Wege standen, zu heben und hiedurch eine neue Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung für jede Zahl Variabeln zu begründen, welche für die Integration derselben die wesentlichsten Vortheile darbietet und unmittelbar auf die Probleme der Mechanik ihre Anwendung findet. Hier mögen folgende Andeutungen genügen.

Die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung und die isoperimetrischen Probleme, in welchen die Differentialquotienten der unbekannten Functionen unter dem Integralzeichen nur bis auf die erste Ordnung steigen, hängen von derselben Analysis ab, so daſs jedes solche isoperimetrische Problem auch als Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung gefaſst werden kann. Man kann unter diesen isoperimetrischen Problemen auch diejenigen begreifen, in welchen der Ausdruck, der ein Maximum oder Minimum werden, oder allgemeiner, dessen Variation verschwinden soll, nicht unmittelbar als Integral, sondern durch eine Differentialgleichung erster Ordnung gegeben ist. Umgekehrt kann man auch die Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung als solches isoperimetrische Problem fassen. Zufolge des Princips der kleinsten Wirkung kann als ein isoperimetrisches Problem der genannten Art die Bewegung eines Systemes sich gegenseitig anziehender Körper betrachtet werden, welche auſserdem noch von constanten Parallelkräften und von Kräften sollicitirt werden können, welche nach festen oder beweglichen Centren gerichtet sind, wofern die Körper des Systems auf die letztern Centra nicht reagiren und die Bewegung derselben als anderweitig bekannt vorausgesetzt wird. Solches mechanische Problem kann daher auch immer als Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung gefaſst werden. Diese Integration hängt von der eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen ab, welche mit den bekannten Differentialgleichungen der Mechanik übereinkommen, aber, als auf eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung bezüglich, besonderer Erleichterungen fähig sind. Man kann nämlich bei denselben durch einen besondern Gang des Verfahrens, und durch besondere Wahl der Gröſsen, die man als Variabeln einführt, bewirken, daſs jedes gefundene Integral die Stelle von zwei Integrationen vertritt. Um dies deutlicher zu machen, will ich sagen, daſs ein System Differentialgleichungen von der $n$ten Ordnung sei, wenn man dasselbe nach Elimination der übrigen Variabeln auf eine gewöhnliche Differentialgleichung $n$ter Ordnung zwischen 2 Variabeln bringen kann. Für die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, welche nicht die unbekannte Function selber, sondern nur ihre partiellen Differentialquotienten enthalten, so wie für die isoperimetrischen Probleme der genannten Art, in welchen der Ausdruck, dessen erste Variation verschwinden soll, als Integral gegeben ist, und daher auch für die genannten mechanischen Probleme, läſst sich nun der zu befolgende Gang der Operationen und der dadurch gewonnene Vortheil wie folgt angeben. Es sei das System der gewöhnlichen Differentialgleichungen, von dem das Problem abhängt, von der $2n$ten Ordnung; man kenne ein Integral derselben, so läſst sich das Problem durch eine bestimmte Wahl von Gröſsen, die man als Variabeln einführt, auf ein System von Differentialgleichungen der $n-2$ten Ordnung bringen. Kennt man von diesem Systeme wieder ein Integral, so läſst sich dasselbe durch eine neue Wahl von Variabeln auf ein System von der $2n-4$ten Ordnung bringen, und so fort, bis man keine Differentialgleichungen mehr zu integriren hat. Alle auſserdem noch auszuführenden Operationen bestehen lediglich in Quadraturen. Ich bemerke der Deutlichkeit wegen, daſs ich ein Integral eines Systemes gewöhnlicher Differentialgleichungen eine Gleichung $U = a$ nenne, wo a eine willkührliche Constante ist, welche in U nicht vorkommt, und U ein solcher Ausdruck, daſs durch die Differentialgleichungen dU identisch Null wird.

Als Beispiel der allgemeinen Methode nehme ich ein mechanisches Problem, von dem ich bereits in einem frühern Schreiben die Akademie zu unterhalten die Ehre hatte. Es giebt nämlich Fälle bei der Bewegung der Himmelskörper, wie z. B. des Mondes oder eines Cometen, der dem Jupiter nahe vorbeigehet, in welchen die elliptische Bewegung so wenig angenähert ist, dafs man zur Integration der Differentialgleichungen der Bewegung darauf kein Annäherungsverfahren gründen kann, welches wissenschaftlichen Werth hat. Es ist daher von grofser Wichtigkeit, andere Bewegungen zu erfinden, welche einer einfachen Behandlung fähig sind und dem Fall der Natur sich mehr annähern können. Hiezu könnte man versuchen, die Bewegung eines masselosen Punctes zu wählen, der von zwei Körpern angezogen wird, die sich gleichförmig und mit gleicher Winkelgeschwindigkeit um ihren gemeinschaftlichen Schwerpunct drehen. Beim Monde kann man für das Näherungsproblem noch annehmen, dafs die 3 Körper sich in einer Ebene bewegen. Man hat dann zwei Differentialgleichungen 2ter Ordnung, welche, da die Kräfte die Zeit explicite enthalten, und daher weder der Satz von den Flächen, noch der Satz von der lebendigen Kraft gilt, die Stelle einer Differentialgleichung der vierten Ordnung zwischen 2 Variabeln vertreten. Obgleich die beiden Sätze von den Flächen und der lebendigen Kraft nicht gelten, so habe ich doch gezeigt, dafs eine gewisse Combination derselben auch hier Statt findet. Dieses von mir gefundene Integral führt aber das Problem nicht blofs auf die dritte Ordnung zurück, sondern die Anwendung der allgemeinen Methode auf diesen Fall zeigt, dafs man durch zweckmäfsige Wahl der Variabeln das Problem auf eine Differentialgleichung zweiter Ordnung zwischen 2 Variabeln zurückführen kann, von welcher man, wie nach derselben Methode erhellt, wieder nur ein einziges Integral zu kennen braucht. Es ist also vermittelst dieser Methode durch das eine von mir gefundene Integral die Integration der Differentialgleichung 4ter Ordnung darauf zurückgeführt ein einziges Integral einer Differentialgleichung der 2ten Ordnung zu finden, indem alles übrige nur noch Quadraturen erfordert.

Der ganze Gang der angedeuteten Operationen hängt von den jedesmaligen Integralen ab, welche sich entdecken lassen; die Wahl der Variabeln hängt ebenfalls von denselben ab und erfordert auch ihrerseits Integration von Differentialgleichungen, immer aber so, dafs durch ein gefundenes Integral das System Differentialgleichungen auf andere zurückgeführt wird, deren Ordnung um 2 niedriger ist; auch werden sich die zur Bestimmung der Wahl der Variabeln aufzustellenden Differentialgleichungen in vielen Fällen leicht integriren lassen. Wofern man nur die einfachen Integrale, die sich finden lassen, nicht übersieht, kann man auf dem genannten Wege sicher sein, das Problem, wenn nicht gänzlich auf Quadraturen, doch so weit zurückzuführen, als es seiner Natur nach möglich ist. Auch wenn die Differentialgleichungen, auf welche man kommt, sich nicht integriren lassen, wird man doch merkwürdige Eigenschaften derselben erkennen, welche sich vortheilhaft benutzen lassen. So weiſs man in dem angeführten Problem, wenn man auch die Differentialgleichungen der zweiten Ordnung, auf welche dasselbe zurückkommt, nicht integriren kann, daſs ihre beiden Integrale, eins aus dem andern durch bloſse Quadraturen gefunden werden können.

Sie sehen, hochgeehrtester Herr Professor, daſs die in vorstehenden kurzen Umrissen angedeuteten Resultate ein neues wichtiges Capitel der analytischen Mechanik begründen, die Vortheile betreffend, welche man aus der besonderen Form der Differentialgleichungen der Mechanik für ihre Integration ziehen kann. Wir verdanken *Lagrange* diese Form, aber sie hat bis jetzt in seinen und in den Händen der ihm nachfolgenden Analysten nur dazu gedient, die analytischen Transformationen rascher und übersichtlicher zu leisten, und den bekannten allgemeinen mechanischen Gesetzen die Ausdehnung zu geben, deren sie fähig sind. Aber diese Form erhält jetzt eine viel wichtigere Bedeutung, indem sich zeigt, daſs gerade die Differentialgleichungen von dieser bestimmten Form einer eigenthümlichen Behandlung fähig sind, welche die Schwierigkeiten ihrer Integration bedeutend vermindert.

Den 29. November 1836.