8.

Über eine besondere Art von Umkehrung der Reihen.

(Von Herrn *A. F. Möbius*, Professor zu Leipzig.)

Das berühmte Problem der Umkehrung der Reihen besteht bekanntlich darin, dafs, wenn eine Function einer Gröfse durch eine nach Potenzen der Gröfse fortlaufende Reihe gegeben ist, man umgekehrt die Gröfse selbst, oder auch irgend eine andere Function derselben, durch eine nach Potenzen jener Function fortschreitende Reihe ausgedrückt verlangt. Man weifs, dafs es keines geringen analytischen Scharfsinnes bedurfte, um das Gesetz, nach welchem die Coefficienten der zweiten Reihe von denen der ersteren abhängen, aufzufinden. Ungleich einfacher zu lösen ist folgende Aufgabe.

Sei eine Function fx einer Gröfse x durch eine nach den Potenzen von x geordnete Reihe gegeben:

$$1. \quad fx = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots.$$

Man soll x durch eine, nicht nach den Potenzen der Function fx, sondern nach den Functionen f der Potenzen von x fortgehende Reihe darstellen:

$$2. \quad x = b_1 fx + b_2 f(x^2) + b_3 f(x^3) + b_4 f(x^4) + \ldots.$$

Wiewohl diese Aufgabe weder hinsichtlich der Schwierigkeit ihrer Lösung, noch hinsichtlich ihres Nutzens mit dem erst erwähnten eigentlichen Problem der Umkehrung der Reihen in Vergleich gestellt werden kann, indem aus dem Werthe von fx noch nicht die Werthe von $f(x^2)$, $f(x^3)$, ..., also auch noch nicht x nach der Formel (2.) sich berechnen lassen, und daher der eigentliche Zweck des Reversionsproblems hierbei unerfüllt bleibt, so wird uns doch die Lösung dieser neuen Aufgabe zu mehreren, für die Theorie der Reihen sowohl, als für die Combinationslehre, nicht ganz unwichtigen Resultaten führen.

Die Hauptforderung unseres Problems ist: die Coefficienten b_1, b_2, b_3, ... der Reihe (2.), als Functionen der Coefficienten a_1, a_2, a_3, ... der Reihe (1.) auszudrücken; und dies geschieht durch folgende ganz leichte Rechnung. Aus (1.) fliefst:

$$
\begin{aligned}
f(x^2) &= a_1 x^2 + a_2 x^4 + a_3 x^6 + a_4 x^8 + \ldots . \\
f(x^3) &= a_1 x^3 + a_2 x^6 + a_3 x^9 + \ldots . \\
f(x^4) &= a_1 x^4 + a_2 x^8 + \ldots . \\
f(x^5) &= a_1 x^5 + a_2 x^{10} + \ldots . \\
f(x^6) &= a_1 x^6 + a_2 x^{12} + \ldots . \\
&\text{u. s. w.}
\end{aligned}
$$

Substituirt man diese Werthe von $f(x^2)$, $f(x^3)$, ... und von fx aus (1.) selbst in die Gleichung (2.), so kommt:

$$
x = a_1 b_1 + \left.\begin{array}{l} a_2 b_1 \\ + a_1 b_2 \end{array}\right| x^2 + \left.\begin{array}{l} a_3 b_1 \\ + a_1 b_3 \end{array}\right| x^3 + \left.\begin{array}{l} a_4 b_1 \\ + a_2 b_2 \\ + a_1 b_4 \end{array}\right| x^4 + \left.\begin{array}{l} a_5 b_1 \\ + a_1 b_5 \end{array}\right| x^5 + \left.\begin{array}{l} a_6 b_1 \\ + a_3 b_2 \\ + a_2 b_3 \\ + a_1 b_6 \end{array}\right| x^6 + \ldots .
$$

Das Fortgangsgesetz der Coëfficienten dieser Reihe liegt am Tage. Ist nemlich der Coëfficient von x^m zu bestimmen, so zerlege man die Zahl m auf alle möglichen Arten in zwei ganze positive Factoren. Jedes dieser Producte giebt dann ein Glied des gesuchten Coëfficienten, indem man die zwei Factoren des Products als Indices der in einander zu multiplicirenden a und b nimmt.

Da die zuletzt erhaltene Gleichung für jeden Werth von x bestehen mufs, so haben wir:

$$
3. \quad \begin{cases}
a_1 b_1 = 1, \\
a_2 b_1 + a_1 b_2 = 0, \\
a_3 b_1 + a_1 b_3 = 0, \\
a_4 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_4 = 0, \\
a_5 b_1 + a_1 b_5 = 0, \\
a_6 b_1 + a_3 b_2 + a_2 b_3 + a_1 b_6 = 0, \\
\qquad \text{u. s. w.}
\end{cases}
$$

wodurch sich jedes b mit Hülfe der vorhergehenden b berechnen läfst.

Um hieraus die einzelnen b unabhängig von einander zu finden, setze man gröfserer Einfachheit willen $a_1 = 1$, und es kommt:

$$
4. \quad \begin{cases}
b_1 = 1, \\
b_2 = -a_2, \\
b_3 = -a_3, \\
b_4 = -a_4 + a_2 a_2, \\
b_5 = -a_5, \\
b_6 = -a_6 + a_3 a_2 + a_2 a_3, \\
b_7 = -a_7, \\
b_8 = -a_8 + a_4 a_2 + a_2 a_4 - a_2 a_2 a_2, \\
\qquad \text{u. s. w.}
\end{cases}
$$

Schon aus diesen wenigen Entwickelungen ist hinreichend abzunehmen, wie auch die Werthe der folgenden b aus a_2, a_3, ... zusammengesetzt sein werden. Man zerlege nemlich den Index m von b_m auf alle mögliche Arten in Factoren, indem man m selbst als höchsten Factor mitnimmt, die Einheit aber wegläſst, und auch je zwei Zerlegungen, die sich nur durch die Folge ihrer Factoren unterscheiden, als zwei verschiedene betrachtet; oder wie man sich auch in der Sprache der Combinationslehre kurz ausdrücken kann: Man bilde alle Variationen mit Wiederholungen zum Product m. Aus jeder dieser Variationen ergiebt sich dann ein Glied in dem Werthe von b_m dadurch, daſs man die Elemente der Variation zu den Indices von a nimmt, und dieses Glied erhält das positive oder negative Zeichen, je nachdem die Anzahl seiner Elemente gerade oder ungerade ist.

So sind z. B. alle Variationen zum Product 12:

12, 2.6, 3.4, 4.3, 6.2, 2.2.3, 2.3.2, 3.2.2,

und daher

$$b_{12} = -a_{12} + 2a_2a_6 + 2a_3a_4 - 3a_2a_2a_3.$$

Die allgemeine Richtigkeit dieses Gesetzes flieſst aus den recurrirenden Formeln (3.) so leicht, daſs es überflüssig sein würde, uns bei dem Beweise desselben aufzuhalten.

Dieselben Relationen zwischen den Coefficienten a und b würden übrigens auch dann erhalten worden sein, wenn man, so wie (1.) und (2.), auf gleiche Art die allgemeineren Gleichungen

$$fx = a_1 Fx + a_2 F(x^2) + a_3 F(x^3) + \dots$$
$$Fx = b_1 fx + b_2 f(x^2) + b_3 f(x^3) + \dots$$

mit einander verglichen hätte. Finden daher zwischen den a und den b die Relationen (3.) statt, so ist von diesen zwei Gleichungen die zweite eine Folge der ersten, und die erste eine Folge der zweiten, was auch im erstern Falle Fx, und im letzteren fx, für eine Function von x sein mag.

Die Relationen (3.) bestehen, wie man leicht wahrnimmt, auch dann noch, wenn man

für a_2, a_3, a_4, ... resp. $2^n a_2$, $3^n a_3$, $4^n a_4$, ... und
für b_2, b_3, b_4, ... resp. $2^n b_2$, $3^n b_3$, $4^n b_4$, ...

substituirt, wo n eine beliebige positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahl sein kann. Wenn daher

$$A.\quad \begin{cases} fx = a_1 Fx + 2^n a_2 F(x^2) + 3^n a_3 F(x^3) + \ldots\ldots, \text{ so ist auch} \\ Fx = b_1 fx + 2^n b_2 f(x^2) + 3^n b_3 f(x^3) + \ldots\ldots \end{cases}$$

und umgekehrt.

Von noch gröſserer Allgemeinheit, als diese, sind folgende zwei zusammengehörige Gleichungen:

$$B.\quad \begin{cases} fx = a_1 Fx + c_2 a_2 F(x^2) + c_3 a_3 F(x^3) + \ldots\ldots \\ Fx = b_1 fx + c_2 b_2 f(x^2) + c_3 b_3 f(x^3) + \ldots\ldots \end{cases}$$

In ihnen können die Coëfficienten c_2, c_3, c_5, ..., deren Indices Primzahlen sind, nach Belieben bestimmt werden. Ein Coëfficient c, dessen Index eine zusammengesetzte Zahl ist, muſs dann gleich genommen werden dem Product aus den Coëfficienten c, deren Indices die einfachen Factoren jener zusammengesetzten Zahl sind; also $c_4 = c_2^2$, $c_6 = c_2 . c_3$, etc. Die zwischen den a und den b erforderlichen Relationen sind dieselben, wie vorhin.

Um jetzt von dieser neuen Art der Reihen-Umkehrung ein sehr einfaches Beispiel zu geben, wollen wir

$$a_1 = a_2 = a_3 = \ldots\ldots = 1$$

setzen, also nach (1.)

$$fx = x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots \text{ und daher } fx = \frac{x}{1-x}.$$

Mit diesen Werthen von a wird aber nach (4.):
$b_1 = 1$, $b_2 = -1$, $b_3 = -1$, $b_4 = 0$, $b_5 = -1$, $b_6 = 1$, $b_7 = -1$, $b_8 = 0$, u. s. w., und daher nach (2.):

$$[1.]\quad x = \frac{x}{1-x} - \frac{x^2}{1-x^2} - \frac{x^3}{1-x^3} - \frac{x^5}{1-x^5} + \frac{x^6}{1-x^6} - \frac{x^7}{1-x^7} + \frac{x^{10}}{1-x^{10}} - \frac{x^{11}}{1-x^{11}} - \frac{x^{13}}{1-x^{13}} + \text{etc.}$$

Man wird es gewiſs sehr auffallend finden, daſs die Coëfficienten dieser Reihe, auch wenn man sie noch weiter fortsetzt, keine andern als 1, 0 und -1 sind. Der Grund dieses merkwürdigen Ergebnisses, und das Gesetz, nach welchem die Coëfficienten 1, 0 und -1 mit einander abwechseln, wird sich am leichtesten mit Hülfe der recurrirenden Formeln (3.) entdecken lassen. Indem wir darin a_1, a_2, a_3, ... $= 1$, und nächstdem, der ersten dieser Formeln zufolge, auch $b_1 = 1$ setzen, werden sie:

$$1 + b_2 = 0,\quad 1 + b_3 = 0,\quad 1 + b_2 + b_4 = 0,\quad 1 + b_5 = 0,$$
$$1 + b_5 = 0,\quad 1 + b_2 + b_3 + b_6 = 0,\quad 1 + b_7 = 0, \text{ u. s. w.},$$

so dafs überhaupt, wenn α, β, γ, δ, ... alle von einander verschiedenen Factoren von m sind, man zur Bestimmung von b_m die Gleichung

$$1 + b_\alpha + b_\beta + b_\gamma + \ldots + b_m = 0$$

hat. Hieraus ist nun

1) ohne weiteres ersichtlich, dafs, wenn m eine Primzahl bedeutet, $1 + b_m = 0$, und daher $b_m = -1$ ist. Sei

2) m ein Product aus zwei einander nicht gleichen Primzahlen α und β, und habe also blofs α und β zu Factoren, so gilt für $b_{\alpha\beta}$ die Gleichung:

$$1 + b_\alpha + b_\beta + b_{\alpha\beta} = 0,$$

mithin

$$1 + b_\alpha + b_\beta + b_\alpha . b_\beta = b_\alpha . b_\beta - b_{\alpha\beta}.$$

Es ist aber von den zwei Factoren $1 + b_\alpha$ und $1 + b_\beta$, in welche sich die linke Seite dieser Gleichung auflösen läfst, nach 1) jeder für sich $= 0$, folglich

$$(a.) \quad b_{\alpha\beta} = b_\alpha . b_\beta .$$

Von einer Zahl, welche ein Product aus drei verschiedenen Primzahlen α, β, γ ist, erhält man sämmtliche Factoren durch Entwickelung des Products $(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)$, und es ist daher

$$1 + b_\alpha + b_\beta + b_\gamma + b_{\alpha\beta} + b_{\alpha\gamma} + b_{\beta\gamma} + b_{\alpha\beta\gamma} = 0.$$

Setzt man darin, der Formel (a.) zufolge, statt $b_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\gamma}$, $b_{\beta\gamma}$ resp. $b_\alpha . b_\beta$, $b_\alpha . b_\gamma$, $b_\beta . b_\gamma$, so kann man die Gleichung auch so schreiben:

$$(1 + b_\alpha)(1 + b_\beta)(1 + b_\gamma) = b_\alpha . b_\beta . b_\gamma - b_{\alpha\beta\gamma},$$

und da jeder der drei Factoren der linken Seite dieser Gleichung $= 0$ ist, so hat man

$$(b.) \quad b_{\alpha\beta\gamma} = b_\alpha . b_\beta . b_\gamma .$$

Hiermit läfst sich auf ganz ähnliche Art zeigen, dafs, wenn δ eine vierte von α, β, γ verschiedene Primzahl ist,

$$(c.) \quad b_{\alpha\beta\gamma\delta} = b_\alpha . b_\beta . b_\gamma . b_\delta ,$$

u. s. w. Nun ist, nach 1), $b_\alpha = b_\beta = b_\gamma =$ etc. $= -1$, und daher

$$b_{\alpha\beta} = +1, \quad b_{\alpha\beta\gamma} = -1, \quad b_{\alpha\beta\gamma\delta} = +1,$$

und so fort abwechselnd. Wenn demnach m das Product aus mehreren einander nicht gleichen Primzahlen ist, so ist $b_m = \pm 1$, und zwar $+$ bei einer geraden, $-$ bei einer ungeraden Anzahl von Primzahlen.

3) Sei $m = \alpha^2 =$ dem Quadrat einer Primzahl, so hat m den Factor α, und es ist daher

$$(d.) \quad 1 + b_\alpha + b_{\alpha^2} = 0,$$

folglich, wegen $1 + b_\alpha = 0$, $b_{\alpha^2} = 0$.

Eben so folgt, wenn $m = \alpha^3$ ist, und daher α und α^2 zu Factoren hat:

$$1 + b_\alpha + b_{\alpha^2} + b_{\alpha^3} = 0,$$

mithin wegen c), $b_{\alpha^3} = 0$; und auf gleiche Art erhellet, dafs überhaupt, wenn m die Potenz einer Primzahl ist, $b_m = 0$ ist.

4) Wir haben jetzt noch den allgemeinen Fall zu untersuchen, wo m aus mehreren zum Theil einander gleichen, zum Theil verschiedenen Primzahlen zusammengesetzt ist. Sei daher $m = \alpha^p \beta^q \gamma^r \dots \zeta^z$, also $p, q, r, \dots z$ positive ganze Zahlen, von denen wenigstens eine gröfser als 1 ist. Auch ist darunter der vorige Fall, wo $m = \alpha^p$, als ein specieller, mit begriffen. Die Anzahl aller einfachen Factoren, in welche m aufgelöst werden kann, ist $= p + q + r + \dots + z$, und werde mit N bezeichnet. Ich behaupte nun, dafs für ein m von der angegebenen Beschaffenheit immer $b_m = 0$ ist, und werde dieses beweisen, indem ich zeige, dafs wenn die Behauptung für alle Formen gilt, welche m bei allen Werthen von N, die kleiner als eine gewisse Zahl M sind, haben kann, die Behauptung auch für $N = M$ richtig ist.

Sämmtliche Factoren von $\alpha^p \beta^q \gamma^r \dots \zeta^z$ sind einerlei mit den Gliedern, welche durch Entwickelung des Products

$$(1+\alpha+\alpha^2+\dots+\alpha^p)(1+\beta+\dots+\beta^q)(1+\gamma+\dots+\gamma^r)\dots(1+\zeta+\dots+\zeta^z)$$

erhalten werden, und es ist folglich

$$1 + b_\alpha + b_\beta + \dots + b_\zeta + b_{\alpha\beta} + b_{\alpha\gamma} + b_{\beta\gamma} + \dots + b_{\alpha\beta\gamma} + \dots$$
$$+ b_{\alpha\beta\gamma\dots\zeta} + S + b_{\alpha^p \beta^q \gamma^r \dots \zeta^z} = 0,$$

wo S die Summe aller durch die angezeigte Entwickelung entstehenden Glieder von der Form b_n bedeutet, in denen n dieselbe Beschaffenheit, wie die vorhin von m bemerkte, hat, nur dafs dabei die Summe der Exponenten der Primzahlen nie die Summe der Exponenten $p, q, r, \dots z$ im letzten Gliede der Reihe erreicht. Nun sind von den ersten Gliedern der Reihe bis mit zum Gliede $b_{\alpha\beta\gamma\dots\zeta}$ die Indices sämmtliche Factoren des aus den nicht potenzirten Primzahlen $\alpha, \beta, \gamma, \dots \zeta$ zusammengesetzten Products, und es ist mithin die Summe dieser Glieder nach 2) für sich $= 0$. Wenn folglich jedes der unter S begriffenen Glieder $= 0$ ist, so mufs auch das letzte Glied $b_{\alpha^p \beta^q \dots \zeta^z}$ selbst $= 0$ sein, wie zu erweisen war.

Aus dem in 3) gefundenen $b_{\alpha^2} = 0$ folgt daher

$$b_{\alpha^2 \beta} = 0;$$

und hieraus und aus $b_{\alpha^3} = 0$:

$$b_{\alpha^3 \beta} = 0, \quad b_{\alpha^2 \beta^2} = 0; \quad b_{\alpha^2 \beta\gamma} = 0;$$

und hieraus und aus $b_{\alpha^4} = 0$:

$$b_{\alpha^4\beta}, \quad b_{\alpha^2\beta^2}, \quad b_{\alpha^3\beta\gamma}, \quad b_{\alpha^2\beta^2\gamma}, \quad b_{\alpha^2\beta\gamma\delta} = 0,$$

u. s. w.

In der Reihe [1.], deren allgemeines Glied $\frac{x^m}{1-x^m}$ und deren Summe $= x$ ist, herrscht demnach das Gesetz, dafs für $m = 1$ und für jedes m, welches ein Product aus einer geraden Anzahl von einander verschiedener Primzahlen ist, der Coëfficient des Gliedes $= 1$ ist, dafs jedes Glied, dessen m eine Primzahl selbst, oder ein Product aus einer ungeraden Menge sich nicht gleicher Primzahlen ist, den Coëfficient -1 hat, und dafs endlich alle Glieder wegfallen, deren Exponenten Quadrate oder höhere Potenzen von Primzahlen zu Factoren haben.

Wir entwickelten dieses Gesetz mit Hülfe der recurrirenden Formeln (3.). Indessen wird es nicht unnütz sein, hierbei auch den independenten Bestimmungen (4.) Aufmerksamkeit zu schenken. Da gegenwärtig $a_2 = a_3 = a_4 =$ etc. $= 1$, so ist nach den Formeln (4.) und nach dem, was zunächst über sie bemerkt worden: $b_m = -1 +$ der Anzahl der Binionen oder der Variationen der zweiten Classe, $-$ der Anzahl der Ternionen, oder der Variationen der dritten Classe, $+$ u. s. w., welche mit Wiederholungen zum Product m gebildet werden können. Hieraus, und weil die erste Classe blofs aus der Zahl m besteht, mithin die Anzahl der Unionen $= 1$ ist, fliefst in Verbindung mit dem Vorhergehenden folgender bemerkenswerthe Satz:

Bildet man alle Variationen mit Wiederholungen zu einem bestimmten Producte m, und ordnet diese Variationen nach Classen, wobei die Zahl m selbst die erste Classe ausmacht, die Einheit aber als Factor ausgeschlossen bleibt (indem sonst die Menge der Variationen unendlich sein würde), so ist die Anzahl der Variationen in den geraden Classen der Anzahl der Variationen in den ungeraden entweder gleich oder um 1 gröfser, oder um 1 kleiner als die letztere, je nachdem von den einfachen Factoren von m einige, oder auch alle, einander gleich sind, oder m ein Product aus sämmtlich von einander verschiedenen Primzahlen ist, und dann die Menge dieser Primzahlen entweder gerade oder ungerade ist.

Dieser Satz steht in nahem Zusammenhange mit dem analogen Satze bei Variationen mit Wiederholungen zu einer bestimmten Summe m. Die erste Classe dieser Variationen hat bloſs eine Complexion, nämlich m selbst; die zweite Classe besteht aus den Variationen:

1) $m-1$; 2) $m-2$; 3) $m-3$; .... $m-2, 2$; $m-1, 1$;

und die Anzahl derselben ist $= m-1$; die Anzahl der Variationen der dritten Classe findet sich $= \frac{m-1.m-2}{1.2}$; u. s. w.; und weil

$$1-(m-1)+\frac{m-1.m-2}{1.2}-\ldots = (1-1)^{m-1} = 0,$$

so ist bei Variationen mit Wiederholungen zu einer bestimmten Summe die Anzahl der Variationen in den geraden Classen der Variationenzahl in den ungeraden Classen immer gleich, statt daſs bei Variationen zu einem bestimmten Producte die eine Zahl bald der andern gleich, bald um 1 gröſser, bald um 1 kleiner, als die andere war.

Die Variationen zu bestimmten Summen sind in den Schriften über die Combinationslehre zur Genüge behandelt worden, während über Variationen zu bestimmten Producten, wenigstens unter diesem Namen, noch keine Untersuchungen angestellt sein dürften. Gleichwohl aber ist auch von letztern Variationen der Nutzen nicht zu verkennen, wie unter andern schon daraus hervorgeht, daſs die Aufgabe: alle Variationen der $n$ten Classe zum Product $\alpha^p \beta^q \gamma^r \ldots$ zu finden, ganz einerlei ist mit der Aufgabe: $p+q+r+\ldots$ Elemente, von denen p Elemente unter sich, q Elemente unter sich, u. s. w. gleich sind, auf alle mögliche Arten in n verschiedene Fächer zu vertheilen. Auf dieselbe Art ist auch die Bildung der $n$ten Classe von Variationen zur Summe p offenbar nicht verschieden von der Forderung: p einander gleiche Elemente auf alle mögliche Arten in n Fächer zu vertheilen; woraus man zugleich ersieht, daſs das Variiren zu einer bestimmten Summe als ein specieller Fall des Variirens zu einem bestimmten Producte betrachtet werden kann.

Der so eben erhaltene Satz von Variationen zu bestimmten Producten möchte vielleicht einer der merkwürdigsten in diesem noch nicht bebauten Felde der Combinationslehre sein. Obschon er nun durch die vorhergehenden Betrachtungen ganz bündig erwiesen ist, so will ich doch einen zweiten Beweis noch mittheilen, der in höherem Grade, als der vorige, auf der Natur der Variationen selbst beruht, und uns zugleich noch eine andere mit jener verwandte Eigenschaft dieser Variationen entdecken lassen wird.

Sei das Product, zu welchem man Variationen bilden will, zuerst eine Potenz einer Primzahl, also $= \alpha^p$, wo $p > 1$. Irgend eine Classe der Variationen zu diesem Product wird man erhalten, wenn man die ebensovielte Classe von Variationen zur Summe p entwickelt und die Elemente dieser Variationen zu Exponenten von α nimmt. So ergiebt sich z. B. die zweite Classe:

$$\alpha^1.\alpha^{p-1},\quad \alpha^2.\alpha^{p-2},\ \ldots.\ \alpha^{p-2}.\alpha^2,\quad \alpha^{p-1}.\alpha^1.$$

Die Anzahl der Variationen in der $n$ten Classe zum Product α^p ist mithin der Variationenzahl der $n$ten Classe zur Summe p gleich. Da nun, wie vorhin bemerkt worden, beim Variiren zu einer bestimmten Summe die Anzahl der Variationen in den graden Classen der Anzahl der Variationen in den ungraden gleich ist, so muſs dasselbe auch beim Variiren zu einem Product gelten, welches eine Potenz einer Primzahl ist.

Werde jetzt die Anzahl von Variationen zu einem Product m, welche resp. in der ersten, zweiten, dritten, ... $n$ten Classe enthalten sind, durch A_m, B_m, C_m, ... N_m bezeichnet. Sei n die Anzahl der einander sämmtlich oder nur theilweise gleichen, oder durchweg von einander verschiedenen Primzahlen, aus denen m zusammengesetzt ist; also die $n$te Classe die höchste. Sei ferner α eine in m nicht mit enthaltene Primzahl, und werden die Mengen der Variationen zum Product $m\alpha$ nach den verschiedenen Classen, deren höchste die $(n+1)$ste ist, gleicherweise durch $A_{m\alpha}$, $B_{m\alpha}$, ... $\overset{+1}{N}_{m\alpha}$ ausgedrückt. Alsdann wird sein:

$$\begin{aligned}
A_{m\alpha} &= A_m = 1,\\
B_{m\alpha} &= 2A_m + 2B_m,\\
C_{m\alpha} &= 3B_m + 3C_m,\\
&\ldots\ldots\ldots\\
N_{m\alpha} &= n\overset{-1}{N}_m + nN_m,\\
\overset{+1}{N}_{m\alpha} &= (n+1)N_m.
\end{aligned}$$

Denn die zweite Classe zum Product $m\alpha$ findet sich, indem man erstlich die erste Classe zum Product m, d. i. m selbst nimmt, und diesem das eine Mal α vor-, das andere Mal nachsetzt. Dies giebt $2 = 2A_m$ Variationen: α, m und m, α. Die übrigen Variationen der zweiten Classe zum Product $m\alpha$ erhält man aus den Variationen derselben Classe zum Product m, indem man von den zwei Elementen einer solchen Variation, — sie seien f, g, und daher $fg = m$, — das eine Mal das eine, das andere Mal das andere mit α verbindet, — also $f\alpha . g$ und $f . g\alpha$. Jede dieser B_m Variationen giebt daher zwei, und sämmtliche B_m geben $2B_m$ Variationen der zweiten Classe zum Product $m\alpha$, so dafs die Anzahl aller dieser Variationen überhaupt $= 2A_m + 2B_m$ ist. Eben so bekommt man aus jeder der B_m Variationen, wie $f.g$, drei: $\alpha.f.g$; $f.\alpha.g$; $f.g.\alpha$, und aus jeder der C_m Variationen, wie $h.i.k$, wenn $hik = m$ ist, ebenfalls drei, nemlich $h\alpha.i.k$, $h.i\alpha.k$, $h.i.k\alpha$, der $C_{m\alpha}$ Variationen; folglich u. s. w.

Addiren wir nun die obigen Gleichungen mit abwechselnden Zeichen und setzen das Aggregat, mit dessen Werthbestimmung wir uns jetzt beschäftigen:

$$A_m - B_m + C_m - \ldots \pm N_m = S_m,$$

und eben so

$$A_{m\alpha} - B_{m\alpha} + C_{m\alpha} - \ldots \mp \overset{+1}{N}_{m\alpha} = S_{m\alpha},$$

so kommt:

$$S_{m\alpha} = -S_m.$$

Nun ist nach dem Vorigen, und wenn $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ von einander verschiedene Primzahlen bedeuten: $S_{\alpha^p} = 0$, folglich auch $S_{\alpha^p\beta} = 0$, folglich $S_{\alpha^p\beta\gamma} = 0$, $S_{\alpha^p\beta\gamma\delta} = 0$, u. s. w.

Ist ferner m eine Primzahl $= \alpha$, so sind $B_m, C_m, \ldots = 0$, folglich $S_\alpha = A_\alpha = 1$, $S_{\alpha\beta} = -S_\alpha = -1$, $S_{\alpha\beta\gamma} = -S_{\alpha\beta} = 1$, u. s. w. — Alles übereinstimmend mit den schon oben auf andere Weise erhaltenen Resultaten.

Es bleiben uns daher noch diejenigen Werthe von S_m zu bestimmen übrig, bei welchen m zwei oder mehrere Potenzen von Primzahlen zu Factoren hat. Sei zu dem Ende m eine beliebige Zahl, α eine in m nicht mit enthaltene Primzahl, und suchen wir aus den Variationen zum Product m die Variationen zum Product $m\alpha^p$ herzuleiten. Zuerst ist:

$$1) \quad A_{m\alpha^p} = A_m.$$

Die zweite Classe zum Product $m\alpha^p$ wird sich ergeben:

Erstens aus der ersten Classe zum Product m, d. i. aus m allein, indem wir daraus Variationen von den Formen $m\alpha^q . \alpha^r$ und $\alpha^r m\alpha^q$ ableiten, wo für q nach und nach die Werthe $0, 1, 2, \ldots p-1$, und für r

die Werthe 1, 2, ... p zu setzen sind, jedoch so, dafs immer $q+r=p$. Die Anzahl dieser Variationen, welche a heifse, wird offenbar eine blofs von p abhängige Zahl sein.

Zweitens aus der zweiten Classe zum Product m. Sei nemlich $f.g$ irgend eine Variation dieser Classe, also $fg=m$. Alle daraus fliefsenden Variationen sind dann von der Form $f\alpha^q.g\alpha^r$, wo $q=0, 1, 2, \ldots p$; $r=0, 1, 2, \ldots p$, und immer $q+r=p$ ist. Die Anzahl derselben wird mithin gleichfalls blofs von p abhängen, und heifse b. Eben so viel Variationen der zweiten Classe zu $m\alpha^p$ werden aber auch aus jeder andern Variation der zweiten Classe zum Product m hervorgehen. Die Anzahl aller erstern aus den letztern entstehenden Variationen ist daher $=bB_m$; und folglich überhaupt:

$$2)\quad B_{m\alpha^p} = aA_m + bB_m.$$

Auf gleiche Art werden alle Variationen der dritten Classe zum Product $m\alpha^p$ aus den Variationen der drei ersten Classen zum Product m sich ergeben, und zwar aus jeder Variation einer und derselben Classe gleichviel, so dafs wir setzen können:

$$3)\quad C_{m\alpha^p} = a'A_m + b'B_m + c'C_m,$$

wo a', b', c' nur von p abhängige Zahlen sind; b' z. B. die Menge derjenigen Variationen der dritten Classe zu $m\alpha^p$, welche aus einer und derselben, gleichviel welcher, Variation der zweiten Classe zum Product m fliefsen.

Eben so wird sein:

$$4)\quad D_{m\alpha^p} = a''A_m + b''B_m + c''C_m + d''D_m,$$

wo a'', b'', c'', d'' gleichfalls nur von p abhängen; u. s. w.

Man addire jetzt die Gleichungen 1), 2), 3), 4), u. s. w. mit abwechselnden Zeichen, und man erhält:

$$S_{m\alpha^p} = (1-a+a'-a''+\ldots)A_m - (b-b'+b''-\ldots)B_m$$
$$+ (c'-c''+\ldots)C_m - (d''-\ldots)D_m + \text{etc.}$$

Sei nun zuerst m eine Primzahl, so sind $A_m=1$, B_m, C_m, D_m, $\ldots=0$, und, wie wir vorhin sahen, $S_{m\alpha^p}=0$, folglich nach gegenwärtiger Formel: $1-a+a'-a''+\ldots=0$, und auch dann noch $=0$, wenn m keine Primzahl ist, weil a, a', a'', ... blofs von p abhängen. Mithin ist allgemein:

$$S_{m\alpha^p} = -(b-b'+b''-\ldots)B_m + (c'-c''+\ldots)C_m - (d''-\ldots)D_m + \text{etc.}$$

Sei zweitens m ein Product aus zwei verschiedenen Primzahlen, so werden, B_m ausgenommen, C_m, D_m, ... $= 0$; und da nach dem Vorigen auch für diesen Fall $S_{m\alpha^p} = 0$ ist, so muſs die von m unabhängige Zahl $b - b' + b'' - \ldots = 0$ sein.

Eben so wird bewiesen, indem man m aus drei, vier und mehrern von einander verschiedenen Primzahlen zusammengesetzt sein läſst, daſs auch $c' - c'' + \ldots = 0$, u. s. w. Folglich ist allgemein

$$S_{m\alpha^p} = 0,$$

was auch m für eine positive ganze Zahl sein mag, und unser Satz ist somit von Neuem vollkommen dargethan.

Um den letzten Theil dieses Beweises noch durch ein Beispiel zu erläutern, wollen wir $p = 2$ setzen. Hiermit findet sich

$$\begin{aligned}
A_{m\alpha^2} &= A_m, \\
B_{m\alpha^2} &= 4A_m + 3B_m, \\
C_{m\alpha^2} &= 3A_m + 9B_m + 6C_m, \\
D_{m\alpha^2} &= 6B_m + 16C_m + 10D_m, \\
E_{m\alpha^2} &= 10C_m + 25D_m + 15E_m, \\
&\text{u. s. w.} \qquad \text{u. s. w.}
\end{aligned}$$

In der That erhält man aus der ersten Classe zu m, d. i. aus m selbst, $4 = 4A_m$ Variationen der zweiten Classe zu $m\alpha^2$, nemlich:

$$m.\alpha^2, \quad \alpha^2.m, \quad m\alpha.\alpha, \quad \alpha.m\alpha,$$

und $3 = 3A_m$ Variationen der dritten Classe zu $m\alpha^2$, nemlich:

$$m.\alpha.\alpha, \quad \alpha.m.\alpha, \quad \alpha.\alpha.m,$$

keine Variationen aber der höhern Classen zu $m\alpha^2$, indem hierzu eine höhere Potenz von α, als die zweite, erforderlich ist.

Ist ferner $f.g$ eine der B_m Variationen, so bilden sich hieraus 3 von den $B_{m\alpha^2}$ Variationen:

$$f\alpha^2.g, \quad f.g\alpha^2, \quad f\alpha.g\alpha;$$

9 von den $C_{m\alpha^2}$ Variationen:

$$\begin{aligned}
&\alpha^2.f.g, \quad \alpha.f\alpha.g, \quad \alpha.f.g\alpha, \\
&f.\alpha^2.g, \quad f\alpha.\alpha.g, \quad f.\alpha.g\alpha, \\
&f.g.\alpha^2, \quad f\alpha.g.\alpha, \quad f.g\alpha.\alpha;
\end{aligned}$$

6 von den $D_{m\alpha^2}$ Variationen:

$$\begin{aligned}
&\alpha.\alpha.f.g, \quad \alpha.f.\alpha.g, \quad f.\alpha.\alpha.g, \\
&\alpha.f.g.\alpha, \quad f.\alpha.g.\alpha, \quad f.g.\alpha.\alpha,
\end{aligned}$$

keine aber von den höheren Classen zu $m\alpha^2$.

Ähnlicherweise lassen sich auch die Coëfficienten von C_m, D_m, ... in den obigen Gleichungen verificiren.

Die Anzahl dieser Gleichungen ist immer der Zahl der höchsten Classe zum Product $m\alpha^p$, also der Anzahl aller einfachen Factoren dieses Products gleich, mithin $= p + q$, wenn m sich in q einfache Factoren auflösen läßt. Die $q$te Classe ist die höchste, welche zum Product m gebildet werden kann, also die höchste, welche auf der rechten Seite der Gleichungen vorkömmt. Sei z. B. wie vorhin $p = 2$, und enthalte m drei einfache Factoren, so reduciren sich die vorigen Gleichungen auf folgende fünf:

$$\begin{aligned}
A_{m\alpha^2} &= A_m, \\
B_{m\alpha^2} &= 4A_m + 3B_m, \\
C_{m\alpha^2} &= 3A_m + 9B_m + 6C_m, \\
D_{m\alpha^2} &= 6B_m + 16C_m, \\
E_{m\alpha^2} &= 10C_m.
\end{aligned}$$

Addirt man dieselben mit abwechselnden Zeichen, so werden, übereinstimmend mit dem obigen allgemeinen Beweise, die Coëfficienten von A_m, B_m, C_m einzeln $= 0$.

Dieses sich Aufheben der Coëfficienten von A_m, ... kann uns zur Aufstellung eines neuen Satzes Gelegenheit geben. Denn um anfangs nur die Coëfficienten 3, 9, 6 von B_m zu berücksichtigen, so erhielten wir diese Zahlen als die Mengen von Variationen in der 2ten, 3ten und 4ten Classe zum Product $fg\alpha^2$, wobei jedoch die Elemente f, g niemals in einem Factor mit einander verbunden vorkamen, auch ihre Folge, g nach f, immer dieselbe blieb. Ziehen wir auf gleiche Weise auch die Cëfficienten von C_m, D_m, etc. in Betracht, setzen die Potenz von α allgemein $= p$, und nehmen, was hier auf die Menge von Variationen keinen Einfluſs hat, die Zahlen f, g, ... insgesammt einander gleich, jede $= \beta$, ihre Menge $= q$, so können wir den aus diesen Betrachtungen hervorgehenden Satz also ausdrücken:

Bildet man alle Variationen zum Product $\alpha^p\beta^q$, so jedoch, daſs in keinem Factor einer dieser Variationen β in einer höhern Potenz, als der ersten, vorkömmt, und ordnet man die Variationen nach Classen, wobei also die $q$te die niedrigste, und die $p+q$te die höchste Classe ist, so ist die Anzahl der Variationen in den geraden Classen der Anzahl in den ungeraden gleich.

Aus der im Obigen erhaltenen merkwürdigen Reihe

$$[1.]\quad x = \frac{x}{1-x} - \frac{x^2}{1-x^2} - \frac{x^3}{1-x^3} - \frac{x^5}{1-x^5} + \frac{x^6}{1-x^6} - \ldots.$$

lassen sich eine unzählige Menge anderer summirbarer Reihen ableiten, von denen ich hier nur diejenigen anführen will, die ihrer Einfachheit willen, mir von Interesse zu sein geschienen haben. Durch Division mit x wird die Reihe

$$[1.^*]\quad 1 = \frac{1}{1-x} - \frac{x}{1-x^2} - \frac{x^2}{1-x^3} - \frac{x^4}{1-x^5} + \ldots.$$

Hierin x negativ genommen, erhält man:

$$1 = \frac{1}{1+x} + \frac{x}{1-x^2} - \frac{x^2}{1+x^3} - \frac{x^4}{1+x^5} + \ldots.$$

und wenn man diese Gleichung Glied für Glied zu der vorigen addirt, dann mit 2 dividirt, und zuletzt y für x^2 schreibt:

$$[2.]\quad 1 = \frac{1}{1-y} - \frac{y}{1-y^3} - \frac{y^2}{1-y^5} - \frac{y^3}{1-y^7} - \frac{y^5}{1-y^{11}} - \frac{y^6}{1-y^{13}} + \ldots.$$

Jedes Glied dieser Reihe hat die Form $\pm \frac{y^{\frac{m-1}{2}}}{1-y^m}$, wo m jede ungerade Zahl ist, die entweder eine Primzahl oder ein Product aus mehreren verschiedenen Primzahlen ist. Das Vorzeichen bestimmt sich wie im Vorigen nach der geraden oder ungeraden Menge der Factoren von m.

Setzt man $-y$ für y, so geht [2.] über in:

$$[3.]\quad 1 = \frac{1}{1+y} + \frac{y}{1+y^3} - \frac{y^2}{1+y^5} + \frac{y^3}{1+y^7} + \frac{y^5}{1+y^{11}} - \frac{y^6}{1+y^{13}} - \ldots.,$$

wo die Glieder einerlei oder entgegengesetzte Vorzeichen mit den gleichstelligen Gliedern in [2.] haben, nachdem m von der Form $4p+1$ oder $4p-1$ ist.

Man addire [2.] und [3.], dividire durch 2 und setze z für y^2, so kommt:

$$[4.]\quad 1 = \frac{1}{1-z} - \frac{z^2}{1-z^3} - \frac{z}{1-z^5} - \frac{z^5}{1-z^7} - \frac{z^8}{1-z^{11}} - \frac{z^3}{1-z^{13}} + \ldots.$$

Die Nenner und die Vorzeichen sind hier dieselben wie in [2.], die Exponenten der Zähler aber $= \frac{1}{4}(m-1)$ oder $= \frac{1}{4}(3m-1)$, nachdem m oder der Exponent im Nenner von der Form $4p+1$ oder $4p-1$ ist.

Nach demselben Verfahren, durch welches [2.] aus [1.*], und [4.] aus [2.] abgeleitet wurde, kann nun aus [4.] eine neue Reihe, aus dieser abermals eine neue, und so fort ohne Ende, entwickelt werden.

Wir wollen jetzt in der Reihe [1.], von welcher wir ausgegangen sind, x^2 für x schreiben, also:

$$(a.)\quad x^2 = \frac{x^2}{1-x^2} - \frac{x^4}{1-x^4} - \frac{x^6}{1-x^6} - \frac{x^{10}}{1-x^{10}} + \frac{x^{12}}{1-x^{12}} - \dots$$

und dieses Ergebnifs zu [1.] addiren. Hiermit findet sich

$$[5.]\quad x+x^2 = \frac{x}{1-x} - \frac{x^3}{1-x^3} - \frac{x^4}{1-x^4} - \frac{x^5}{1-x^5} - \frac{x^7}{1-x^7} - \frac{x^{11}}{1-x^{11}} + \frac{x^{12}}{1-x^{12}} - \dots$$

eine Reihe, die sogleich aus [1.] hervorgeht, wenn man alle in [1.] vorkommenden geraden Exponenten verdoppelt.

Subtrahirt man ($a.$) von [1.], Glied für Glied, so kommt:

$$[6.]\quad x - x^2 = \frac{x}{1-x^2} - \frac{x^2}{1-x^4} - \frac{x^3}{1-x^6} - \frac{x^5}{1-x^{10}} + \frac{x^6}{1-x^{12}} - \dots,$$

und wenn man von [1.] das Doppelte von ($a.$) abzieht:

$$[7.]\quad x - 2x^2 = \frac{x}{1+x} - \frac{x^2}{1+x^2} - \frac{x^3}{1+x^3} - \frac{x^5}{1+x^5} + \frac{x^6}{1+x^6} - \dots$$

In wiefern sich diese zwei Reihen von [1.] unterscheiden, fällt in die Augen und bedarf keiner Erörterung.

Eine Transformation von noch anderer Art wird dadurch bewerkstelliget, dafs man in [1.], $x = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, wo $i = \sqrt{-1}$, setzt. Hiermit wird

$$x^m = r^m(\cos m\varphi + i\sin m\varphi),\qquad \frac{x^m}{1-x^m} = \frac{r^m(\cos m\varphi + i\sin m\varphi) - r^{2m}}{1 - 2r^m\cos m\varphi + r^{2m}},$$

und man erhält, nachdem man für x diese Functionen von r und φ in [1.] substituirt und hierauf das Mögliche vom Unmöglichen abgesondert hat, folgende zwei Gleichungen:

$$[8.]\quad r\cos\varphi = \frac{r\cos\varphi - r^2}{1-2r\cos\varphi + r^2} - \frac{r^2\cos 2\varphi - r^4}{1-2r^2\cos 2\varphi + r^4} - \text{etc.},$$

$$[9.]\quad r\sin\varphi = \frac{r\sin\varphi}{1-2r\cos\varphi + r^2} - \frac{r^2\sin 2\varphi}{1-2r^2\cos 2\varphi + r^4} - \text{etc.}$$

Eine neue reichhaltige Quelle summirbarer Reihen eröffnet sich, wenn wir die allgemeineren Gleichungen (A) zur Hülfe nehmen. Werden $a_1, a_2, a_3, \dots = 1$ gesetzt, so sind $b_1 = 1$, $b_2 = -1$, $b_3 = -1$, $b_4 = 0$, $b_5 = -1$, $b_6 = 1$, u. s. w. und man hat daher allgemein, wenn

$$\text{I.}\quad \begin{cases} fx = Fx + 2^n F(x^2) + 3^n F(x^3) + 4^n F(x^4) + \dots \text{ ist:} \\ Fx = fx - 2^n f(x^2) - 3^n f(x^3) - 5^n f(x^5) + 6^n f(x^6) - \dots \end{cases}$$

Setzt man hierin $Fx = x$ und $n = -1$, so wird

$$fx = x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \dots = -\log(1-x),\ \text{und daher}$$

$$[10.]\quad x = -\log(1-x) + \tfrac{1}{2}\log(1-x^2) + \tfrac{1}{3}\log(1-x^3) + \tfrac{1}{5}\log(1-x^5) - \dots$$

Setzt man ferner $Fx = x - x^2$ und $n = -1$, so wird

$$fx = x - x^2 + \tfrac{1}{2}(x^2 - x^4) + \tfrac{1}{3}(x^3 - x^6) + \dots.$$
$$= x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \dots. = \log(1+x),$$

folglich

$$[11.] \quad x - x^2 = \log(1+x) - \tfrac{1}{2}\log(1+x^2) - \tfrac{1}{3}\log(1+x^3) - \dots.$$

Eben so wie [10.] ist auch:

$$y = -\log(1-y) + \tfrac{1}{2}\log(1-y^2) + \tfrac{1}{3}\log(1-y^3) + \dots.$$

und wenn man diese Gleichung zu [10.] addirt:

$$x + y = -\log(1-x)(1-y) + \tfrac{1}{2}\log(1-x^2)(1-y^2) + \dots.$$

Man setze hierin $x = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $y = r(\cos\varphi - i\sin\varphi)$, und es kommt:

$$[12.] \quad 2r\cos\varphi = -\log(1 - 2r\cos\varphi + r^2) + \tfrac{1}{2}\log(1 - 2r^2\cos 2\varphi + r^4) + \dots.$$

Aus [10.], [11.], [12.] folgt noch, wenn e die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet:

$$[13.] \quad e^x = (1-x)^{-1}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}(1-x^3)^{\frac{1}{3}}(1-x^5)^{\frac{1}{5}}(1-x^6)^{-\frac{1}{6}} \text{ etc.}$$
$$[14.] \quad e^{x-x^2} = (1+x)(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}(1+x^3)^{-\frac{1}{3}}(1+x^5)^{-\frac{1}{5}} \text{ etc.}$$
$$[15.] \quad e^{2r\cos\varphi} = (1 - 2r\cos\varphi + r^2)^{-1}(1 - 2r^2\cos 2\varphi + r^4)^{\frac{1}{2}} \text{ etc.}$$

Man setze jetzt in [2.] x^2 statt y, und multiplicire die Gleichung mit x, so kommt:

$$x = \frac{x}{1-x^2} - \frac{x^3}{1-x^6} - \frac{x^5}{1-x^{10}} - \frac{x^7}{1-x^{14}} - \dots.$$

Man hat aber $\frac{x}{1-x^2} = x + x^3 + x^5 + x^7 + \dots.$ Wenn daher

$$a_1 = 1,\ a_2 = 0,\ a_3 = 1, \quad a_4 = 0,\ a_5 = 1, \quad a_6 = 0, \text{ etc.},$$

so ist $b_1 = 1$, $b_2 = 0$, $b_3 = -1$, $b_4 = 0$, $b_5 = -1$, $b_6 = 0$, etc., und es ist mithin von den zwei Gleichungen

$$\text{II.} \quad \begin{cases} fx = Fx + 3^n F(x^3) + 5^n F(x^5) + 7^n F(x^7) + \dots. \\ Fx = fx - 3^n f(x^3) - 5^n f(x^5) - 7^n f(x^7) - 11^n f(x^{11}) - \dots. \end{cases}$$

eine jede eine Folge der andern. Eben so fließen aus [3.] die zwei zusammengehörigen Gleichungen:

$$\text{III.} \quad \begin{cases} fx = Fx - 3^n F(x^3) + 5^n F(x^5) - 7^n F(x^7) + \dots. \\ Fx = fx + 3^n f(x^3) - 5^n f(x^5) + 7^n f(x^7) + 11^n f(x^{11}) - \dots. \end{cases}$$

Nimmt man darin $Fx = x$ und $n = -1$, so wird

$$fx = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \dots. = \operatorname{arc\,tang} x,$$

folglich

$$[16.] \quad x = \operatorname{arc\,tang} x + \tfrac{1}{3}\operatorname{arc\,tang}(x^3) - \tfrac{1}{5}\operatorname{arc\,tang}(x^5) + \tfrac{1}{7}\operatorname{arc\,tang}(x^7)$$
$$+ \tfrac{1}{11}\operatorname{arc\,tang}(x^{11}) + \dots.$$

Die Zahlen 3, 5, 7, 11, ... sind hierbei alle ungeraden Zahlen, die entweder selbst Primzahlen oder Producte aus verschiedenen Primzahlen sind. Jedes Glied, dessen Zahl ein Product aus einer ungeraden Menge von Primzahlen und von der Form $4p-1$, oder aus einer geraden Menge und von der Form $4p+1$ ist, hat das positive Zeichen, die übrigen Glieder das negative.

Erwägt man dabei, daſs, wenn Zahlen, die zum Theil von der Form $4p+1$, zum Theil von der Form $4p-1$ sind, in einander multiplicirt werden, das Product entweder von der ersten oder zweiten Form ist, je nachdem die Factoren der zweiten Form in gerader oder ungerader Anzahl vorhanden sind; daſs folglich sowohl ein Product von der Form $4p-1$, welches eine ungerade Anzahl von Factoren hat, als ein Product von der Form $4p+1$, dessen Factorenzahl gerade ist, eine grade Zahl Factoren, jeden von der Form $4p+1$ haben muſs: so sieht man leicht, daſs die Coëfficienten der Reihe [16.] nichts Anderes sind, als alle die einzelnen aus der Multiplication

$$(1+\tfrac{1}{3})(1-\tfrac{1}{5})(1+\tfrac{1}{7})(1+\tfrac{1}{11})(1-\tfrac{1}{13})(1-\tfrac{1}{17}) \text{ etc.}$$

hervorgehenden Producte, wo die Nenner der Brüche alle ungeraden Primzahlen sind, und die Brüche das positive oder negative Vorzeichen haben, je nachdem ihr Nenner von der Form $4p-1$ oder $4p+1$ ist.

Die jetzt erhaltenen Reihen [10.], [11.], [12.] und [16.] lassen sich auch sehr einfach durch Integration aus den vorhergehenden ableiten, z. B. [10.] aus [1.], wenn man [1.] vorher mit x dividirt und mit dx multiplicirt. Indessen schien es mir zweckmäſsiger, statt Integralrechnung ein auf der hier vorgetragenen Reversionsmethode selbst beruhendes Princip zu gebrauchen.

Den Schluſs dieses Aufsatzes mögen einige numerische Anwendungen der entwickelten Reihen machen. Die Reihe [1.] erhält, indem man $\frac{1}{v}$ für x schreibt, die etwas einfachere Form:

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v-1} - \frac{1}{v^2-1} - \frac{1}{v^3-1} - \frac{1}{v^5-1} + \frac{1}{v^6-1} - \dots.$$

Setzt man hierin $v = 10$, so kommt:

$$[17.] \quad \tfrac{1}{10} = \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{99} - \tfrac{1}{999} - \tfrac{1}{99999} + \tfrac{1}{999999} - \dots$$

folglich $\frac{9}{10} = 1 - \frac{1}{11} - \frac{1}{111} - \dots$, $1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{11} + \frac{1}{111} + \dots$, d. i.

$$[18.] \quad \tfrac{1}{10} = \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{111} + \tfrac{1}{11111} - \tfrac{1}{111111} + \dots$$

Hiermit ist die **doppelte Aufgabe** gelöset: **den Bruch** $\frac{1}{10}$ **als ein Aggregat von Brüchen darzustellen, deren Zähler** $=1$, und deren Nenner das eine Mal blofs mit der Ziffer 9, das andere Mal blofs mit der Ziffer 1 geschrieben werden. Das in der einen und andern Reihe herrschende Gesetz geht unmittelbar aus [1.] hervor. Auch ist es leicht, sich durch Rechnung zu überzeugen, dafs keine der beiden Aufgaben noch auf andere Weise gelöset werden kann.

Man setze noch in der für $\frac{1}{v}$ erhaltenen Reihe, $v = 1 + w$, wo w eine unendlich kleine Gröfse bedeute, so kommt, wenn man in der Entwickelung blofs die erste Potenz von w beibehält:

$$\frac{1}{1+w} = \frac{1}{w} - \frac{1}{2w} - \frac{1}{3w} - \frac{1}{5w} + \frac{1}{6w} - \ldots;$$

folglich, wenn man mit w multiplicirt:

$$[19.] \quad 0 = 1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{11} - \ldots$$

Aus der uns schon bekannten Beschaffenheit der Vorzeichen und der Nenner dieser Reihe ersehen wir ohne Schwierigkeit, dafs die Reihe sich auch als ein Product aus den Factoren $1 - \frac{1}{2}$, $1 - \frac{1}{3}$, $1 - \frac{1}{5}$, $1 - \frac{1}{7}$, etc. darstellen läfst, wo 2, 3, 5, 7, ... die Reihe der sämmtlichen Primzahlen ist. Hiermit wird:

$$[20.] \quad 0 = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{4}{5} \cdot \tfrac{6}{7} \cdot \tfrac{10}{11} \cdot \tfrac{12}{13} \cdot \tfrac{16}{17} \ldots$$

Ein Product aus allen Brüchen, deren Nenner die sämmtlichen Primzahlen sind, und deren Zähler um 1 kleiner als die Nenner sind, hat daher Null zum Grenzwerth. Dieses Resultat findet sich auch in Euler's *Introductio, Tom.* I. in dem Kapitel *de seriebus ex evolutione factorum ortis*, §. 277. Exempl. I.

Setzt man auf gleiche Weise in [13.] $x = 1 - w$, so kommt, mit Weglassung der höhern Potenzen von w:

$$e^{1-w} = w^{-1}(2w)^{\frac{1}{2}}(3w)^{\frac{1}{3}} \ldots = w^{-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \ldots$$

Da nun das Product auf der rechten Seite dieser Gleichung dem Gliede mit der niedrigsten Potenz von w in der Entwickelung von e^{1-w} gleich sein mufs, und $e^{1-w} = e \cdot e^{-w} = e(1 - w + \ldots)$ ist, so mufs gedachtes Product $= e$ selbst, also unabhängig von w sein. Dieses ist aber nicht anders möglich, als wenn $-1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots = 0$, wie schon vorhin gefunden wurde; folglich

$$[21.] \quad e = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{5}} \cdot 6^{-\frac{1}{6}} \cdot 7^{\frac{1}{7}} \cdot 10^{-\frac{1}{10}} \cdot 11^{\frac{1}{11}} \text{ etc.}$$

Zieht man demnach aus jeder Zahl, welche eine Primzahl oder ein Product aus mehreren verschiedenen Primzahlen ist, die eben so vielte Wurzel, als die Zahl Einheiten hat, und multiplicirt die aus allen den Zahlen, welche Producte

aus einer geraden Menge von Primzahlen sind, gezogenen Wurzeln in einander, desgleichen die Wurzeln aus allen den Zahlen, welche entweder Primzahlen selbst, oder Producte aus einer ungeraden Menge von Primzahlen sind: so giebt die Division des erstern Products in das letztere die Basis der natürlichen Logarithmen.

Um mich einigermaſsen über die Annäherung zu belehren, mit welcher man auf diese Weise e berechnen kann, bin ich in der Factorenreihe bis zu $51^{-\frac{1}{51}}$ fortgegangen, und habe damit $e = 2,7258$ gefunden. Der wahre Werth von e ist $= 2,7183$, und daher das Product aus den von $53^{-\frac{1}{53}}$ an weggelassenen Factoren

$$= \frac{2,7183}{2,7258} = \frac{1}{1,0028}.$$

Jener sonderbare Ausdruck für e, und zugleich eine andere noch merkwürdigere Formel, läſst sich auch aus [15.] herleiten. Setzt man darin $r = 1$ und $\varphi = 2\psi$, so kommt:

$$e^{2\cos 2\psi} = (2 - 2\cos 2\psi)^{-1}(2 - 2\cos 4\psi)^{\frac{1}{2}} \ldots = 4^{-1+\frac{1}{2}+\ldots}(\sin \psi^2)^{-1}(\sin 2\psi^2)^{\frac{1}{2}} \ldots,$$

folglich, weil $-1 + \frac{1}{2} + \ldots = 0$, und wenn man beiderseits die Quadratwurzel auszieht:

$$[22.] \quad e^{\cos 2\psi} = \sin\psi^{-1} \sin 2\psi^{\frac{1}{2}} \sin 3\psi^{\frac{1}{3}} \sin 5\psi^{\frac{1}{5}} \sin 6\psi^{-\frac{1}{6}} \ldots$$

Nimmt man nun hierin ψ unendlich klein, setzt also $\cos 2\psi = 1$ und $\sin\psi = \psi$, $\sin 2\psi = 2\psi$, etc. so erhält man, weil $\psi^{-1+\frac{1}{2}+\ldots} = 1$ ist, denselben Ausdruck für e, wie vorhin.

Noch folgt aus dieser Gleichung, wenn man von beiden Seiten die Logarithmen nimmt:

$$[23.] \quad \cos 2\psi = -\log\sin\psi + \tfrac{1}{2}\log\sin 2\psi + \tfrac{1}{3}\log\sin 3\psi + \tfrac{1}{5}\log\sin 5\psi - \ldots$$

Endlich setze man in [16.], $x = 1$; hierdurch wird $\operatorname{arctang} x = \operatorname{arctang}(x^2) =$ etc., $= \frac{1}{4}\pi$, π in der bekannten Bedeutung genommen, und damit:

$$[24.] \quad \frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} - \frac{1}{17} + \text{etc.}$$

eine Formel, welche, mit Berücksichtigung des oben zu [16.] Bemerkten, ganz mit der von Euler in dem vorhin angeführten Kapitel der *Introductio* §. 285. gegebenen Formel

$$[25.] \quad \frac{4}{\pi} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{17}{16} \cdot \frac{19}{20} \cdot \frac{23}{24} \cdot \text{ etc.}$$

identisch ist.