

18.

Über ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik.

(Vom Herrn Hofrath und Prof. Dr. *Gaußs* zu Göttingen.)

Bekanntlich verwandelt das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten die ganze Statik in eine mathematische Aufgabe, und durch D'Alembert's Princip für die Dynamik ist diese wiederum auf die Statik zurückgeführt. Es liegt daher in der Natur der Sache, daß es kein neues Grundprincip für die Bewegungs- und Gleichgewichts-Lehre geben kann, welches der Materie nach nicht in jenen beiden schon enthalten und aus ihnen abzuleiten wäre. Inzwischen scheint doch wegen dieses Umstandes noch nicht jedes neue Princip werthlos zu werden. Es wird allezeit interessant und lehrreich bleiben, den Naturgesetzen einen neuen vortheilhaften Gesichtspunkt abzugewinnen, sei es, daß man aus demselben diese oder jene einzelne Aufgabe leichter auflösen könne, oder daß sich aus ihm eine besondere Angemessenheit offenbare. Der große Geometer, der das Gebäude der Mechanik auf dem Grunde des Principes der virtuellen Geschwindigkeiten, auf eine so glänzende Art aufgeführt hat, hat es nicht verschmäht, Maupertuis Princip der kleinsten Wirkung zu größerer Bestimmtheit und Allgemeinheit zu erheben, ein Princip, dessen man sich zuweilen mit vielem Vortheil bedienen kann *).

Der eigenthümliche Charakter des Principes der virtuellen Geschwindigkeiten besteht darin, daß es eine allgemeine Formel zur Auflösung aller statischen Aufgaben, und so der Stellvertreter aller andern Principe ist, ohne jedoch das Creditiv dazu so unmittelbar aufzuweisen,

*) Es sei mir jedoch hier die Bemerkung erlaubt, daß ich die Art, wie ein anderer großer Geometer versucht hat, Huyghens Gesetz für die außerordentliche Brechung des Lichts in Krystallen von doppelter Brechung, mittelst des Grundsatzes der kleinsten Wirkung zu beweisen, nicht befriedigend finde. In der That ist die Zulässigkeit dieses Grundsatzes wesentlich von dem der Erhaltung der lebendigen Kräfte abhängig, nach welchem die Geschwindigkeiten der bewegten materiellen Punkte bloß durch ihre Plätze bedingt werden, ohne daß die Richtung der Bewegung Einfluß darauf haben kann, was doch in dem erwähnten Versuch vorausgesetzt wird. Es scheint mir, daß im Emanationssystem alle Bemühungen, die Erscheinungen der doppelten Brechung an die allgemeinen dynamischen Gesetze anzuknüpfen, so lange erfolglos bleiben müssen, als man die Lichttheilchen bloß wie Punkte betrachtet.

A. n. m. d. Verf.

dafs es sich, so wie es nur ausgesprochen wird, schon von selbst als plausibel empföhle.

In dieser Beziehung scheint das Princip, welches ich hier aufstellen werde, den Vorzug zu haben: es hat aber auch den zweiten, dafs es das Gesetz der Bewegung und der Ruhe auf ganz gleiche Art in größter Allgemeinheit umfaßt. So sehr es in der Ordnung ist, dafs bei der allmäligen Ausbildung der Wissenschaft und bei der Beléhrung des Individuum das Leichtere dem Schwerern, das Einfachere dem Verwickeltern, das Besondere dem Allgemeinen vorangeht, so fordert doch der Geist, einmal auf dem höhern Standpuncte angelangt, den umgekehrten Gang, wobei die ganze Statik nur als ein ganz specieller Fall der Mechanik erscheine. Selbst der oben erwáhnte Geometer scheint darauf Werth zu legen, indem er als einen Vorzug des Principis der kleinsten Wirkung ansieht, dafs es das Gleichgewicht und die Bewegung zugleich umfasse, wenn man jenes so ausdrücke, dafs die lebendigen Kräfte bei beiden Kleinsten seien, eine Bemerkung, die doch mehr witzig als wahr zu sein scheint, da das Minimum in beiden Fällen in ganz verschiedener Beziehung Statt findet.

Das neue Princip ist nun folgendes.

Die Bewegung eines Systems materieller, auf was immer für eine Art unter sich verknüpfter Punkte, deren Bewegungen zugleich an was immer für äufseré Beschränkungen gebunden sind, geschieht in jedem Augenblick in möglich größter Übereinstimmung mit der freien Bewegung, oder unter möglich kleinstem Zwange, indem man als Maafs des Zwanges, den das ganze System in jedem Zeittheilchen erleidet, die Summe der Produkte aus dem Quadrate der Ablenkung jedes Punkts von seiner freien Bewegung in seine Mafse betrachtet.

Es seien m, m', m'' u. s. w. die Massen der Punkte; a, a', a'' u. s. w. ihre Plätze zur Zeit t ; b, b', b'' u. s. w. die Plätze, welche sie, nach dem unendlich kleinen Zeittheilchen dt , in Folge der während dieser Zeit auf sie wirkenden Kräfte und der zur Zeit t erlangten Geschwindigkeiten und Richtungen, einnehmen würden, falls sie alle vollkommen frei wären. Die wirklichen Plätze c, c', c'' u. s. w. werden dann diejenigen sein, für welche, unter allen mit den Bedingungen des Systems vereinbaren, $m(bc)^2 + m'(b'c')^2 + m''(b''c'')^2$ u. s. w. ein Minimum wird.

Das Gleichgewicht ist offenbar nur ein einzelner Fall des allgemeinen Gesetzes, und die Bedingung dafür, daß

$$m(ab)^2 + m'(a'b')^2 + m''(a''b'')^2 \text{ u. s. w.}$$

selbst ein Minimum sei, oder daß das Beharren des Systems im Zustande der Ruhe, der freien Bewegung der einzelnen Punkte näher liege, als jedes mögliche Heraustreten aus demselben.

Die Ableitung unsers Principis aus den beiden oben angeführten geschieht leicht auf folgende Art.

Die auf den materiellen Punkt m wirkende Kraft ist offenbar zusammengesetzt, erstens aus einer, die, in Verbindung mit der zur Zeit t Statt habenden Geschwindigkeit und Richtung, ihn in der Zeit dt von a nach c führt, und einer zweiten, die ihn in derselben Zeit aus der Ruhe in c , durch cb führen würde, wenn man den Punkt als frei betrachtet. Dasselbe gilt von den andern Punkten. Nach D'Alembert's Princip müssen demnach die Punkte m, m', m'' u. s. w., unter alleiniger Wirkung der zweiten Kräfte, nach $cb, c'b', c''b''$ u. s. w., in den Plätzen c, c', c'' u. s. w., vermöge der Bedingungen des Systems, im Gleichgewicht sein.

Nach dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten erfordert dies Gleichgewicht, daß die Summe der Producte aus je drei Factoren, nemlich jeder der Massen m, m', m'' u. s. w., den Linien $cb, c'b', c''b''$ u. s. w., und irgend welchen auf letztere resp. projecirten, vermöge der Bedingungen des Systems möglichen Bewegungen jener Punkte, immer $= 0$ sei, wie man es gewöhnlich ausspricht*), oder richtiger, daß jene Summe niemals positiv werden könne. Sind daher $\gamma, \gamma', \gamma''$ u. s. w. von c, c', c'' u. s. w. verschiedene, aber mit den Bedingungen des Systems verträgliche Plätze; und $\theta, \theta', \theta''$ u. s. w. die Winkel, welche $c\gamma,$

*) Der gewöhnliche Ausdruck setzt stillschweigend solche Bedingungen voraus, daß die jeder möglichen Bewegung entgegengesetzte gleichfalls möglich sei, wie z. B., daß ein Punkt auf einer bestimmten Fläche zu bleiben genöthigt, daß die Entfernung zweier Punkte von einander unveränderlich sei u. dergl. Allein dies ist eine unnöthige und der Natur nicht immer angemessene Beschränkung. Die Oberfläche eines undurchdringlichen Körpers zwingt einen auf ihr befindlichen materiellen Punkt nicht, auf ihr zu bleiben, sondern verwehrt ihm bloß das Austreten auf die Eine Seite; ein gespannter, nicht ausdehnbarer aber biegsamer Faden zwischen zwei Punkten macht nur die Zunahme, nicht die Abnahme der Entfernung unmöglich u. s. w. Warum wollten wir also das Gesetz der virtuellen Geschwindigkeiten nicht lieber gleich anfangs so ausdrücken, daß es alle Fälle umfasse?

$c'\gamma'$, $c''\gamma''$ u. s. w. mit cb , $c'b'$, $c''b''$ u. s. w. machen, so ist allemal $\Sigma m.cb.c\gamma.\cos\theta$ entweder 0 oder negativ. Da nun

$$\gamma b^2 = cb^2 + c\gamma^2 - 2cb.c\gamma.\cos\theta,$$

so ist klar, dafs

$$\Sigma m.\gamma b^2 - \Sigma m.cb^2 = \Sigma m.c\gamma^2 - 2\Sigma m.cb.c\gamma.\cos\theta,$$

folglich immer positiv sein wird, also $\Sigma m.\gamma b^2$ immer gröfser als $\Sigma m.cb^2$, d. i. dafs $\Sigma m.cb^2$ ein Minimum sein wird. W. Z. B. W.

Es ist sehr merkwürdig, dafs die freien Bewegungen, wenn sie mit nothwendigen Bedingungen nicht bestehen können, von der Natur gerade auf dieselbe Art modificirt werden, wie der rechnende Mathematiker, nach der Methode der kleinsten Quadrate, Erfahrungen ausgleicht, die sich auf unter einander durch nothwendige Abhängigkeit verknüpfte Gröfsen beziehen. Diese Analogie liefse sich noch weiter verfolgen, was jedoch gegenwärtig nicht zu meiner Absicht gehört.