18.

Ueber eine besondere Gattung algebraischer Functionen, die aus der Entwicklung der Function $(1-2xz+z^2)^{\frac{1}{2}}$ entstehen.

(Von Herrn Prof. *Jacobi* zu Königsberg in Preufsen.)

1.

Die merkwürdigen Eigenschaften dieser Functionen hat zuerst Legendre in seinen Untersuchungen über die Attraction der Sphäroïde und die Gestalt der Planeten bekannt gemacht, im 10ten Theile der *Savans étrangers*, und in den Memoiren der Pariser Academie von den Jahren 1784 und 1789; später hat er sie im 10ten Paragraph des 5ten Abschnittes seiner *Exercices sur le calcul intégral* zusammengestellt. Sie sind die Entwicklungscoefficienten $X', X'', X''' \ldots X^{(n)}$ in

$$z = \frac{1}{\sqrt{(1-2xz+z^2)}} = 1 + X'z + X''z^2 + X'''z^3 + \ldots + X^{(n)}z^n + \text{etc.}$$

Diese Functionen, als deren *fonction génératrice* $(1-2xz+z^2)^{\frac{1}{2}}$ anzusehen ist, geniefsen unter andern der Eigenschaft, dafs wenn m und n ungleich sind, immer

$$\int_{-1}^{+1} X^{(m)} X^{(n)} \partial x = 0,$$

wenn aber $m = n$, so findet sich

$$\int_{-1}^{+1} X^{(m)} X^{(n)} \partial x = \frac{2}{2n+1},$$

wodurch es möglich wird, wenn man eine Function von x nach diesen Coefficienten entwickeln will, die Coëfficienten als bestimmte Integrale auszudrücken. Setzt man nemlich

$$Fx = A + A'X' + A''X'' + A'''X''' + \ldots + A^{(n)}X^n + \text{etc.},$$

wo $A, A', A'', \ldots A^{(n)}$ kein x enthalten, so wird

$$A^{(n)} = \frac{2n+1}{2} \int Fx . X^{(n)} \partial x,$$

welche Art der Entwicklung viel Aehnlichkeit mit derjenigen hat, welche Euler bei der Entwicklung einer Function nach den Sinus und Cosinus vielfacher Winkel gelehrt hat.

Es scheint mir aber Legendre die Fundamentaleigenschaft dieser Functionen übergangen zu haben. Sie ist in der Gleichung gegeben:

$$X^{(n)} = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\partial^n (x^2-1)^n}{1.2.3\dots n\,\partial x^n}.$$

Man kann diesen Satz leicht a posteriori prüfen, indem man die Entwicklung von z wirklich vornimmt, und auch das $n$te Differentiale von $(x^2-1)^n$ entwickelt. Er findet sich aber direct so: Hat man nemlich eine Gleichung,

$$y - x = zF(y),$$

so ist nach dem Lagrangeschen Lehrsatz:

$$y = x + zFx + \frac{z^2}{1.2} \cdot \frac{\partial Fx^2}{\partial x} + \frac{z^3}{1.2.3} \cdot \frac{\partial^2 Fx^3}{\partial x^2} + \dots + \frac{z^n}{1.2.3\dots n} \cdot \frac{\partial^{n-1} Fx^n}{\partial x^{\iota}} + \text{etc.},$$

woraus folgt:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 1 + z\frac{\partial Fx}{\partial x} + \frac{z^2}{1.2} \cdot \frac{\partial^2 Fx^2}{\partial x^2} + \frac{z^3}{1.2.3} \cdot \frac{\partial^3 Fx^3}{\partial x^3} + \dots + \frac{z^n}{1.2.3\dots n} \cdot \frac{\partial^n Fx^n}{\partial x^n} + \text{etc.}$$

Setzt man nun die Gleichung:

$$y - x = \frac{z}{2}(y^2-1),$$

wo $F(y) = \frac{1}{2}(y^2-1)$, so ist

$$1 - zy = \sqrt{(1-2xz+z^2)}.$$

Differentiirt man aber die gegebene Gleichung, so erhält man:

$$\frac{\partial y}{\partial x}(1-zy) = 1,$$

woraus:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{(1-2xz+z^2)}} = 1 + X'z + X''z^2 + \dots + X^{(n)}z^n + \text{etc.}$$

Vergleicht man damit den oben für $\frac{\partial y}{\partial x}$ gefundenen Ausdruck, in welchem man $Fx = \frac{1}{2}(x^2-1)$ setzt, so erhellet:

$$X^{(n)} = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\partial^n (x^2-1)^n}{1.2.3\dots\partial x^n}.$$

Man sieht sogleich, dafs die vielfachen Integrale von $X^{(n)}$ bis zum $(n-1)$sten zwischen den Grenzen $x = -1$ und $x = 1$ verschwinden, weil sie den Factor x^2-1 enthalten. Bemerkt man nun, dafs durch theilweise Integrirung, wenn y irgend eine Function von x bedeutet,

$$\int y\varphi x\partial x = y\int\varphi x\partial x - \partial y\int^2\varphi x\partial x + \partial^2 y\int^3\varphi x\partial x - \dots$$
$$(-1)^{n-1}\partial^{n-1}y\int^n\varphi x\partial x + (-1)^n\int\partial^n y\int^n\varphi x\partial x^2,$$

und setzt $\varphi x = X^{(n)}$, so erhält man augenblicklich, da

$$\int^n X^{(n)}\partial x^n = \frac{(x^2-1)^n}{2^n.1.2.3\dots n},$$

und die übrigen Glieder zwischen den angegebenen Grenzen verschwinden:

$$\int_{-1}^{+1} y X^{(n)} \partial x = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{(-1)^n}{1.2.3\ldots n} \int_{-1}^{+1} \frac{\partial^n y}{\partial x^{n-1}} (x^2-1)^n.$$

Hat man daher

$$Fx = A + A'X + A''X^{(2)} + A'''X^{(3)} + \text{etc.},$$

so erhält man sogleich:

$$A + 3A'z + 5A''z^2 + 7A'''z^3 + \text{etc.} = 2\int_{-1}^{+1} F\left(x - \frac{z}{2}(x^2-1)\right)\partial x.$$

2.

Es findet aber zwischen den Differentialen von $(x^2-1)^n$ noch eine merkwürdige Relation statt, welche dann gleichfalls eine neue Eigenschaft der Functionen $X^{(n)}$ zu erkennen geben wird. Sie ist in der Gleichung enthalten:

$$\frac{\partial^{n-r}(x^2-1)^n}{1.2.3\ldots n-r} = (x^2-1)^r \frac{\partial^{n+r}(x^2-1)^n}{1.2.3\ldots n+r} \cdot (r \leqq n).$$

Ich gelange zu ihr durch folgende Methode, deren ich mich schon in meinen „*Disquisitiones analyticae de fractionibus simplicibus*" (Berlin bei Herbig A. 1825.), bedient habe.

Bezeichnet man in der Entwicklung einer Function von h, $F(h)$, den Coefficienten von h^n mit

$$\{F(h)\}h^n,$$

so hat man zufolge des Taylorschen Lehrsatzes:

$$\frac{\partial^{n+r}(x^2-1)^n}{1.2\ldots(n+r)\partial x^{n+r}} = \{(x^2-1+2xh+h^2)^n\}h^{n+r}$$
$$= (x^2-1)^n\left\{\left[1+2x\frac{h}{x^2-1}+(x^2-1)\left(\frac{h}{x^2-1}\right)^2\right]^n\right\}h^{n+r}.$$

Indem man in der Entwicklung h mit dem Nenner x^2-1 behaftet läfst, wird der Coefficient von h^{n+r} mit dem Nenner $(x^2-1)^{n+r}$ behaftet sein Zieht man diesen heraus, so erhält man:

$$(x^2-1)^{-r}\{[1+2xh+h^2(x^2-1)]\}h^{n+r}.$$

Setzt man statt h jetzt $\frac{1}{h}$, so geht der Ausdruck über in:

$$(x^2-1)^{-r}\left\{\left(1+\frac{2x}{h}+\frac{x^2-1}{h^2}\right)^n\right\}h^{-(n+r)}.$$

Die Multiplication mit h^{2n} giebt

$$(x^2-1)^{-r}\{[(x+h)^2-1]^n\}h^{n-r}.$$

Man hat also:

$$\{[(x+h)^2-1]^n\}h^{n+r} = (x^2-1)^{-r}\{[(x+h)^2-1]^n\}h^{n-r}, \text{ oder}$$
$$\{[(x+h)^2-1]^n\}h^{n-r} = (x^2-1)^r\{[(x+h)^2-1]^n\}h^{n+r};$$

welches so viel ist als:

$$\frac{\partial^{n-r}(x^2-1)^n}{1.2.3\ldots.(n-r)\,\partial x^{n-r}} = (x^2-1)^r \frac{\partial^{n+r}(x^2-1)^n}{1.2.3\ldots.(n+r)\,\partial x^{n+r}}.$$

Nimmt man das $r$fache Integral von $X^{(n)}$ so, daſs jedes genommene Integral für $x=-1$, oder für $x=+1$ verschwindet, so hat man:

$$\int^r X^{(n)}\,\partial x^r = \frac{1}{2^n.1.2.3\ldots.n}\,\partial^{n-r}(x^2-1).$$

Man kann die gefundene Eigenschaft, in Bezug auf $X^{(n)}$, daher auch so ausdrücken:

$$\frac{\int^r X^{(n)}\,\partial x^r}{1.2.3\ldots.(n-r)} = (x^2-1)^r \frac{\partial^r X^{(n)}}{1.2.3\ldots.(n+r)\,\partial x^r}.$$

Es ist zu bemerken, daſs im Allgemeinen die Functionen, welche man durch $\partial^n \frac{(x-a)^n (x-b)^n}{\partial x^n}$ darstellen kann, derselben Eigenschaften genieſsen, wenn man bei den Integrationen, statt der Grenzen -1 und $+1$, die Grenzen a und b nimmt. Uebrigens ist die Function $X^{(n)}$ dieselbe mit der Function, welche Gauſs in seiner „*Nova methodus integralium valores etc.*" mit U bezeichnet, und deren Wurzeln die Intervalle der zu berechnenden Ordinaten angeben, damit die Quadratur der durch die respectiven Puncte gelegten parabolischen Curve eine möglichst gröſste Näherung gebe; wie ich denn auch in der Abhandlung über diese Methode die Function P, welche mit dieser zusammenhängt, rückwärts aus denselben Eigenschaften deducirt habe. —

Königsberg in Preuſsen, im August, 1826.