EINIGE UNGLEICHUNGEN FÜR ZWEIMAL DIFFERENTIIERBARE FUNKTIONEN

Von EDMUND LANDAU in Göttingen.

[Received May 26th, 1913.—Read June 12th, 1913.]

DIE folgenden Betrachtungen knüpfen an den Ausgangspunkt einer grösseren Reihe von Sätzen der Differentialrechnung an, welche das zweite Kapitel der Abhandlung ausmachen: "Contributions to the Arithmetic Theory of Series," by G. H. Hardy and J. E. Littlewood.* Jenen Ausgangspunkt (pp. 416, 417) bildet der schon früher von Herrn Littlewood† ("The Converse of Abel's Theorem on Power Series," pp. 437, 438) gefundene

SATZ.—*Es sei $f(x)$ eine für $x > x_0$ definierte reelle Funktion; $f''(x)$ sei ebenda vorhanden, stetig und beschränkt. Für $x \to \infty$ sei $f(x) \to s$; dann ist $f'(x) \to 0$.*

Dass die Stetigkeit von $f''(x)$ nicht voll benutzt wird, ist den Verfassern bewusst. Es lässt sich aber beweisen, dass über $f''(x)$ ausser der blossen Existenz und Beschränktheit gar nichts vorausgesetzt zu werden braucht.‡ Nach dem Paradigma des Beweises von Hilfssatz 1 (p. 266) meiner Abhandlung "Über einen Satz des Herrn Littlewood"§ verläuft die Begründung so: Nach Voraussetzung ist $|f''(x)| < c$ für $x > x_0$ Für jedes $\epsilon > 0$ und $x > x_0$ ist nach dem Taylorschen Satz

$$f(x+\epsilon)-f(x) = \epsilon f'(x)+\tfrac{1}{2}\epsilon^2 f''(\xi) \quad (x < \xi < x+\epsilon),$$

---

* *Proc. London Math. Soc.*, Ser. 2, Vol. 11 (1912–1913), pp. 411–478.

† Ebenda, Ser. 2, Vol. 9 (1910–1911), pp. 434–448.

‡ Hierin ist auch ein Satz von Herrn C. N. Moore ["On the Introduction of Convergence Factors into Summable Series and Summable Integrals," *Trans. American Math. Soc.*, Vol. 8 (1907), pp. 299–330 (Lemma 5, p. 316)] enthalten, der ausser meinen Voraussetzungen die weitere $f''(x) \to 0$ macht.

§ *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, Bd. 35 (1913), S. 265–276.

$$|f'(x)| \leqslant \frac{|f(x+\epsilon)-f(x)|}{\epsilon} + \tfrac{1}{2}\epsilon\,|f''(\xi)|$$

$$< \frac{|f(x+\epsilon)-f(x)|}{\epsilon} + \tfrac{1}{2}\epsilon c.$$

Wegen $f(x) \to s$ ist also für $x > x_1 = x_1(\epsilon)$

$$|f'(x)| < \epsilon + \tfrac{1}{2}\epsilon\, c = \epsilon\,(1+\tfrac{1}{2}c),$$

d. h.
$$f'(x) \to 0.$$

Hinter dem so verschärften Littlewoodschen Satze stecken nun folgende weiteren Sätze, die ihn enthalten* und sich dadurch auszeichnen, dass gewisse in ihnen auftretenden Konstanten bestmögliche Werte haben. $f(x)$ bezeichnet eine reelle Funktion.

SATZ 1.—*Wenn in einem Intervall der Länge* $\geqslant 2$

$$|f(x)| \leqslant 1, \qquad |f''(x)| \leqslant 1$$

ist,† *so ist ebenda*
$$|f'(x)| \leqslant 2.$$

SATZ 2.—*Die Konstante* 2 *in der Behauptung des Satzes* 1 *lässt sich durch keine kleinere Zahl ersetzen.*

SATZ 3.—*Die Konstante* 2 *in der Voraussetzung des Satzes* 1 *lässt sich durch keine kleinere Zahl ersetzen.*

SATZ 4.—*Wenn*
$$\limsup_{x=\infty} |f(x)| \leqslant 1,$$
$$\limsup_{x=\infty} |f''(x)| \leqslant 1$$

ist, so ist
$$\limsup_{x=\infty} |f'(x)| \leqslant \sqrt{2}.$$

---

* In Satz 1 ist der obige Satz enthalten. Denn, wenn $a > 0$, $b > 0$ ist und in Satz 1

$$x = y\sqrt{(b/a)}, \quad f(x) = f[y\sqrt{(b/a)}] = [g(y)]/a$$

gesetzt wird, so lehrt Satz 1: Wenn in einem Intervall der Länge $\geqslant 2\sqrt{(a/b)}$

$$|g(y)| \leqslant a, \quad |g''(y)| \leqslant b$$

ist, so ist ebenda
$$|g'(y)| \leqslant 2\sqrt{(ab)}.$$

Im Falle $g(y) = F(y) - s \to 0$, $|g''(y)| = |F''(y)| < c$ (für $y > y_0$) ist nun bei festem $\delta > 0$ für alle $y > y_1(\delta)$

$$|g(y)| \leqslant \delta, \quad |g''(y)| \leqslant c,$$

also
$$|g'(y)| \leqslant 2\sqrt{\delta}\,\sqrt{c},$$

so dass $g'(y) \to 0$ ist.

† Es ist gleichgiltig, ob man in den Endpunkten $f'(x)$ und $f''(x)$ einseitig nach innen oder zweiseitig meint.

SATZ 5.—*Die Konstante $\sqrt{2}$ des Satzes 4 lässt sich durch keine kleinere Zahl ersetzen.*

BEWEIS VON SATZ 1. — Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $0 \leqslant x \leqslant 2$ das Intervall (d. h. seine Länge $= 2$ und seine Lage rechts an 0 anliegend). Dann ist

$$f(x)-f(0) = xf'(x)-\tfrac{1}{2}x^2 f''(\xi_1) \quad (0 \leqslant \xi_1 \leqslant x \leqslant 2),$$

$$f(2)-f(x) = (2-x)f'(x)+\tfrac{1}{2}(2-x)^2 f''(\xi_2) \quad (0 \leqslant x \leqslant \xi_2 \leqslant 2),$$

$$f(2)-f(0) = 2f'(x)-\tfrac{1}{2}x^2 f''(\xi_1)+\tfrac{1}{2}(2-x)^2 f''(\xi_2),$$

$$2\,|f'(x)| \leqslant 1+1+\tfrac{1}{2}x^2\,.\,1+\tfrac{1}{2}(2-x)^2\,.\,1 = 4-x(2-x) \leqslant 4,$$

$$|f'(x)| \leqslant 2.$$

BEWEIS VON SATZ 2.—Die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2-1$ genügt im Intervall 0 bis 2 den Bedingungen

$$|f(x)| \leqslant 1, \quad |f''(x)| = |1| \leqslant 1,$$

und es ist

$$|f'(2)| = 2,$$

also für kein $\delta > 0$ im Intervall beständig $|f'(x)| \leqslant 2-\delta$.

BEWEIS VON SATZ 3.—Es sei ein positives $\rho < 2$ gegeben. Die Funktion

$$f(x) = \tfrac{1}{2}x^2-\left(\frac{2}{\rho}+\frac{\rho}{2}\right)x+1$$

ist im Intervall $0 \leqslant x \leqslant \rho$ absolut $\leqslant 1$, nämlich 1 für $x = 0$, -1 für $x = \rho$ und dazwischen abnehmend, da

$$f'(x) = x-\left(\frac{2}{\rho}+\frac{\rho}{2}\right) < \rho-2 < 0$$

ist. Es ist ferner

$$|f''(x)| = 1 \leqslant 1,$$

aber

$$|f'(0)| = \frac{2}{\rho}+\frac{\rho}{2} > 2.$$

BEWEIS VON SATZ 4.—Wenn in einem Intervall der Länge $\geqslant 2\sqrt{2}$ sowohl $|g(x)| \leqslant 1$ als auch $|g''(x)| \leqslant 1$ ist,* so ist in seinem Mittelpunkte

$$|g'(x)| \leqslant \sqrt{2},$$

* Es ist gleichgiltig, ob in den Endpunkten $g'(x)$ und $g''(x)$ zweiseitig oder nur einseitig gemeint sind.

wie aus
$$g(x+\sqrt{2})-g(x) = \sqrt{2}\,.\,g'(x)+\tfrac{1}{2}.2g''(\xi_1),$$
$$g(x)-g(x-\sqrt{2}) = \sqrt{2}\,.\,g'(x)-\tfrac{1}{2}.2g''(\xi_2),$$
$$g(x+\sqrt{2})-g(x-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}.g'(x)+g''(\xi_1)-g''(\xi_2),$$
$$2\sqrt{2}\,|g'(x)| \leqslant 1+1+1+1 = 4$$
folgt. Bei festem $\epsilon > 0$ ist nun,
$$g(x) = f(x)/(1+\epsilon)$$
gesetzt, von einer Stelle $x_1(\epsilon)$ an
$$|g(x)| \leqslant 1, \qquad |g''(x)| = \left|\frac{f''(x)}{1+\epsilon}\right| \leqslant 1,$$
also von der Stelle
$$x_1(\epsilon)+\sqrt{2} = x_2(\epsilon)$$
an
$$|g'(x)| = \left|\frac{f'(x)}{1+\epsilon}\right| \leqslant \sqrt{2}.$$
Daher ist
$$\limsup_{x=\infty} |f'(x)| \leqslant (1+\epsilon)\sqrt{2}$$
für jedes $\epsilon > 0$, also
$$\limsup_{x=\infty} |f'(x)| \leqslant \sqrt{2}.$$

BEWEIS VON SATZ 5.—Es sei ϵ gegeben und $0 < \epsilon < \sqrt{2}$. Ich werde eine bestimmte für alle reellen x definierte, zweimal differentiierbare Funktion der Periode $4\sqrt{2}$ betrachten, die ungerade ist und der Funktionalgleichung
$$f(2\sqrt{2}-x) = f(x)$$
genügt. Eine solche Funktion ist eindeutig charakterisiert, wenn ich sie auf der Strecke $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$ angebe und dabei $f'(x)$ und $f''(x)$ existieren (in 0 nach rechts, in $\sqrt{2}$ nach links), ferner
$$f(0) = 0, \qquad f'_-(\sqrt{2}) = 0, \qquad f''_+(0) = 0$$
ist. Denn die auf Grund der Funktionalgleichungen
$$f(x+4\sqrt{2}) = f(x), \qquad f(-x) = -f(x), \qquad f(2\sqrt{2}-x) = f(x)$$
überall weiter definierte Funktion $f(x)$ ist alsdann auch in den Punkten zweimal differentiierbar, die Multipla von $\sqrt{2}$ sind.

Ich setze nun für $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$
$$f(x) = \int_0^x dt \int_t^{\sqrt{2}} h(u)\,du,$$

wo $h(x)$ folgende Bedeutung hat:

$$h(x) = \begin{cases} x/\epsilon & \text{für } 0 \leqslant x \leqslant \epsilon, \\ 1 & \text{für } \epsilon \leqslant x \leqslant \sqrt{2}. \end{cases}$$

$h(x)$ ist stetig, $f(x)$ also für $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$ zweimal differentiierbar (in 0 nach rechts, in $\sqrt{2}$ nach links) und

$$\int_x^{\sqrt{2}} h(u)\,du = \begin{cases} f'(x) & \text{für } 0 < x < \sqrt{2}, \\ f'_+(x) & \text{für } x = 0, \\ f'_-(x) & \text{für } x = \sqrt{2}; \end{cases}$$

$$-h(x) = \begin{cases} f''(x) & \text{für } 0 < x < \sqrt{2}, \\ f''_+(x) & \text{für } x = 0, \\ f''_-(x) & \text{für } x = \sqrt{2}. \end{cases}$$

Wegen
$$f(0) = 0, \quad f'_-(\sqrt{2}) = 0, \quad f''_+(0) = 0$$

ist die durch die obigen drei Funktionalgleichungen überall definierte Funktion $f(x)$ überall zweimal differentiierbar. Offenbar ist überall

$$|f(x)| \leqslant f(\sqrt{2}) = \int_0^{\sqrt{2}} dt \int_t^{\sqrt{2}} h(u)\,du \leqslant \int_0^{\sqrt{2}} dt \int_t^{\sqrt{2}} du = 1,$$

ferner, da
$$|f''(x)| = |h(x)| \leqslant 1 \quad \text{für} \quad 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$$

ist, überall
$$|f''(x)| \leqslant 1;$$

also ist
$$\limsup_{x=\infty} |f(x)| \leqslant 1, \qquad \limsup_{x=\infty} |f''(x)| \leqslant 1.$$

Andererseits ist im Punkte 0, also für alle durch $2\sqrt{2}$ teilbaren x,

$$|f'(x)| = \int_0^{\sqrt{2}} h(u)\,du \geqslant \int_\epsilon^{\sqrt{2}} du = \sqrt{2} - \epsilon,$$

folglich
$$\limsup_{x=\infty} |f'(x)| \geqslant \sqrt{2} - \epsilon,$$

womit Satz 5 bewiesen ist.

Die Sätze 1 und 4 lassen sich noch dahin verschärfen, dass auf die Existenz von $f''(x)$ verzichtet wird und dafür nur die entsprechende Beschränktheitsannahme dem Differenzenquotienten von $f'(x)$ auferlegt wird. Es gelten nämlich die beiden folgenden Sätze, die offenbar die Sätze 1 resp. 4 enthalten.

SATZ 6.—*Wenn in einem Intervall der Länge* $\geqslant 2$

$$|f(x)| \leqslant 1$$

und

$$\frac{|f'(y)-f'(x)|}{y-x} \leqslant 1 \quad (x<y)$$

ist, so ist ebenda

$$|f'(x)| \leqslant 2.$$

BEWEIS.—Das Intervall sei $(0 \ldots 2)$. Dann ist [da $f'(t)$ nach Voraussetzung für $0 \leqslant t \leqslant 2$ stetig ist]

$$|f(x)-f(0)-xf'(x)| = \left| \int_0^x [f'(t)-f'(x)]\,dt \right|$$

$$\leqslant \int_0^x |t-x|\,dt = \int_0^x u\,du = \tfrac{1}{2}x^2,$$

$$|f(2)-f(x)-(2-x)f'(x)| = \left| \int_x^2 [f'(t)-f'(x)]\,dt \right|$$

$$\leqslant \int_x^2 (t-x)\,dt = \int_0^{2-x} u\,du = \tfrac{1}{2}(2-x)^2,$$

etc. wie beim Beweis des Satzes 1.

SATZ 7.—*Wenn*

$$\limsup_{x=\infty} |f(x)| \leqslant 1$$

und

$$\limsup_{x=\infty} \left| \textit{obere Grenze von } \frac{|f'(y)-f'(x)|}{y-x} \textit{ für } y>x \right| \leqslant 1$$

ist, so ist

$$\limsup_{x=\infty} |f'(x)| \leqslant \sqrt{2}.$$

BEWEIS.—Wenn in einem Intervall der Länge $\geqslant 2\sqrt{2}$ sowohl

$$|g(x)| \leqslant 1$$

als auch

$$\frac{|g'(y)-g'(x)|}{y-x} \leqslant 1 \quad (x<y)$$

ist, ist im Mittelpunkte

$$|g'(x)| \leqslant \sqrt{2},$$

wie aus

$$|g(x+\sqrt{2})-g(x)-\sqrt{2}\,g'(x)|$$

$$= \left| \int_x^{x+\sqrt{2}} [g'(t)-g'(x)]\,dt \right| \leqslant \int_x^{x+\sqrt{2}} (t-x)\,dt = 1,$$

$$|g(x)-g(x-\sqrt{2})-\sqrt{2}\,g'(x)|$$
$$=\left|\int_{x-\sqrt{2}}^{x}[g'(t)-g'(x)]\,dt\right| \leqslant \int_{x-\sqrt{2}}^{x}|t-x|\,dt = 1$$

folgt. Es werde für $\epsilon > 0$

$$g(x) = f(x)/(1+\epsilon)$$

gesetzt. Dann gibt es ein $x_1(\epsilon)$ derart, dass für $x \geqslant x_1(\epsilon)$

$$|g(x)| \leqslant 1$$

und für $y > x \geqslant x_1(\epsilon)$

$$\frac{|g'(y)-g'(x)|}{y-x} \leqslant 1$$

ist. Für $x \geqslant x_1(\epsilon)+\sqrt{2} = x_2(\epsilon)$ ist also

$$|g'(x)| \leqslant \sqrt{2},$$

etc. wie beim Beweis von Satz 4.