Beiträge zur Theorie der Toeplitzschen Formen.

(Fortsetzung [1]).)

Von

G. Szegő in Berlin.

IV. Teil.

Über gewisse Orthogonalsysteme von Polynomen.

Inhalt.

§ 11.

Definition.

29. Es sei $f(\theta)$ nichtnegativ und (L) integrabel, $A(f) > 0$. Ich betrachte für $n \geqq 1$ die Determinante

$$\Delta_n(\zeta) = [\zeta c_{p-q} - c_{p-q+1}]_0^{n-1} = D_{n-1}[f(\cdot)(\zeta - e^{i\cdot})] \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots);$$

dies ist ein Polynom n-ten Grades in ζ mit komplexen Koeffizienten. Ich behaupte den

Satz XXV. *Es ist*

$$\int_0^{2\pi} f(x)\Delta_m(\zeta)\overline{\Delta_n(\zeta)}\,dx = 0 \qquad (\zeta = e^{ix};\ m \gtrless n).$$

[1]) Man vgl. Math. Zeitschr., 6 (1920), S. 167—202.

Zu diesem Zwecke berechne ich die Integrale

$$J_k^{(n)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\Delta_n(\zeta)\,\bar{\zeta}^k\,dx \qquad (\zeta = e^{ix};\ k = 0, 1, \ldots, n;\ n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Das geschieht mit Hilfe der folgenden Umformung von $\Delta_n(\zeta)$:

$$(27)\qquad \Delta_n(\zeta) = [\zeta c_{p-q} - c_{p-q+1}]_0^{n-1} = \begin{vmatrix} c_0 & c_{-1} & \ldots & c_{-n+1} & 1 \\ c_1 & c_0 & \ldots & c_{-n+2} & \zeta \\ \cdot & & \ldots & \cdot & \\ c_n & c_{n-1} & \ldots & c_1 & \zeta^n \end{vmatrix}$$

$(n = 1, 2, 3, \ldots)$[2].

In der Tat, wenn ich

$$e^{i\theta_k} = z_k \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

setze, so gilt identisch

$$(\zeta - z_0)(\zeta - z_1)\ldots(\zeta - z_{n-1}) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ z_0 & z_1 & \ldots & z_{n-1} \\ \cdot & & \ldots & \cdot \\ z_0^{n-1} & z_1^{n-1} & \ldots & z_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ z_0 & z_1 & \ldots & z_{n-1} & \zeta \\ z_0^2 & z_1^2 & \ldots & z_{n-1}^2 & \zeta^2 \\ \cdot & & \ldots & \cdot & \\ z_0^n & z_1^n & \ldots & z_{n-1}^n & \zeta^n \end{vmatrix},$$

also

$$[\zeta z_q^{p-q} - z_q^{p-q+1}]_0^{n-1} = \begin{vmatrix} 1 & z_1^{-1} & \ldots & z_{n-1}^{-n+1} & 1 \\ z_0 & 1 & \ldots & z_{n-1}^{-n+2} & \zeta \\ z_0^2 & z_1 & \ldots & z_{n-1}^{-n+3} & \zeta^2 \\ \cdot & & \ldots & \cdot & \\ z_0^n & z_1^{n-1} & \ldots & z_{n-1} & \zeta^n \end{vmatrix}.$$

Ich multipliziere jetzt mit $f(\theta_0), f(\theta_1), \ldots, f(\theta_{n-1})$ und integriere nach $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$. Dann folgt die gewünschte Gleichung.

Daraus erhält man sofort, daß

$$J_k^{(n)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\Delta_n(\zeta)\,\bar{\zeta}^k\,dx = \begin{vmatrix} c_0 & c_{-1} & \ldots & c_{-n+1} & c_{-k} \\ c_1 & c_0 & \ldots & c_{-n+2} & c_{-k+1} \\ \cdot & & \ldots & & \\ c_n & c_{n-1} & \ldots & c_1 & c_{-k+n} \end{vmatrix} \qquad (\zeta = e^{ix})$$

ist, also

$$J_k^{(n)} = 0 \qquad (0 \leqq k \leqq n-1)$$

und

$$J_n^{(n)} = D_n(f).$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

---

[2]) Vgl. meine Arbeit: Über orthogonale Polynome, die zu einer gegebenen Kurve der komplexen Ebene gehören [Math. Zeitschr. 9 (1921), S. 218–270].

30. Das Polynom $\Delta_n(\zeta)$ hat offenbar die Form

$$\Delta_n(\zeta) = D_{n-1}(f)\,\zeta^n + \ldots,$$

also mit Rücksicht auf das letzte Resultat

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,|\Delta_n(\xi)|^2\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\Delta_n(\zeta)\,\bar{\Delta}_n(\zeta)\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\Delta_n(\zeta)\,D_{n-1}(f)\,\zeta^n\,dx \quad D_{n-1}(f)\,J_n^{(n)} = D_{n-1}(f)\,D_n(f)$$

$$(\zeta = e^{ix}).$$

Setze ich also

$$(28) \qquad \varphi_0(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{D_0(f)}}, \quad \varphi_n(\zeta) = \frac{\Delta_n(\zeta)}{\sqrt{D_{n-1}(f)\,D_n(f)}} = \frac{D_{n-1}[f(.)(\zeta - e^{i\cdot})]}{\sqrt{D_{n-1}(f)\,D_n(f)}}$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots),$$

so ist

$$(29) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\varphi_m(\zeta)\,\varphi_n(\zeta)\,dx = \varepsilon_{mn} \qquad (\zeta = e^{ix};\ m, n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Die Existenz eines solchen Systems von Polynomén ist a priori klar; man muß einfach das Funktionensystem

$$\sqrt{f(x)}, \quad \sqrt{f(x)}\,\zeta, \quad \ldots, \quad \sqrt{f(x)}\,\zeta^n, \quad \ldots \qquad (\zeta = e^{ix})$$

nach dem Verfahren von E. Schmidt für $0 \leqq x \leqq 2\pi$ orthogonalisieren (s. Einleitung). Die Polynome $\varphi_n(\zeta)$ sind dann durch die Forderung (29) (abgesehen von einem konstanten Faktor mit dem absoluten Betrage 1) eindeutig bestimmt. Wir haben hier diese Polynome durch die Fourierschen Konstanten bzw. durch die Toeplitzschen Determinanten von $f(x)$ ausgedrückt.

Die Polynome $\varphi_n(\zeta)$ bezeichne ich als „*die Polynome des zu $f(x)$ gehörigen Orthogonalsystems*". Die sind offenbar eindeutig bestimmt, wenn man man sie etwa so normiert, daß der Koeffizient von ζ^n positiv sei. Dann ist es klar, daß zu $c\,f(x)$, wo $c > 0$ ist, die Polynome $\frac{1}{\sqrt{c}}\varphi_n(\zeta)$ gehören und zu $f(-x)$ die Polynome $\bar{\varphi}_n(\zeta)$ [3]). Daraus folgt, daß für gerade $f(x)$ [4]) sämtliche Koeffizienten der Polynome $\varphi_n(\zeta)$ reell sind.

Ist z. B. $f(x) = 1$, so ist $\varphi_n(\zeta) = \zeta^n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

---

[3]) Wenn $F(\zeta)$ eine Potenzreihe ist, so bezeichne ich mit $F(\zeta)$ die Potenzreihe $F(\bar{\zeta})$, d. h. die Potenzreihe mit den konjugiert komplexen Koeffizienten.

[4]) D. h. $f(-x) = f(x)$.

§ 12.

Beziehungen zu der im II. Teil behandelten Minimum-Aufgabe.

31. Es sei $f(\theta)$ nichtnegativ und (L) integrabel, $A(f) > 0$. Ich gebe der im § 3 formulierten Aufgabe eine neue Form.

Ich setze, wie dort

$$\mu_n(\alpha; f) = \operatorname{Min} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|P_n(z)|^2\,d\theta \qquad (z = e^{i\theta}),$$

für sämtliche Polynome n-ten Grades $P_n(z)$, die der Bedingung $P_n(\alpha) = 1$ genügen; α soll hier beliebig sein.

Es sei nun

$$P_n(z) = x_0\,\varphi_0(z) + x_1\,\varphi_1(z) + \ldots + x_n\,\varphi_n(z)\,[5],$$

wo $x_0, x_1, \ldots, x_n$ komplexe Zahlen bezeichnen und

$$x_0\,\varphi_0(\alpha) + x_1\,\varphi_1(\alpha) + \ldots + x_n\,\varphi_n(\alpha) = 1$$

ist. Man hat aber

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|P_n(z)|^2\,d\theta = |x_0|^2 + |x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2 \qquad (z = e^{i\theta})$$

und nach der Schwarzschen Ungleichheit

$$1 = \left|\sum_{k=0}^{n} x_k\,\varphi_k(\alpha)\right|^2 \leqq \sum_{k=0}^{n} |x_k|^2 \sum_{k=0}^{n} |\varphi_k(\alpha)|^2,$$

wo das Gleichheitszeichen nur für

$$x_k = \lambda\,\overline{\varphi_k(\alpha)} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

gültig ist; λ wird hier durch die Bedingung

$$\lambda \sum_{k=0}^{n} \overline{\varphi_k(\alpha)}\,\varphi_k(\alpha) = \lambda \sum_{k=0}^{n} |\varphi_k(\alpha)|^2 = 1$$

bestimmt[6]. Daraus folgt der

Satz XXVI. *Es sei $f(\theta)$ nichtnegativ, (L) integrabel und $A(f) > 0$; dann hat man*

$$\frac{1}{\mu_n(\alpha; f)} = |\varphi_0(\alpha)|^2 + |\varphi_1(\alpha)|^2 + \ldots + |\varphi_n(\alpha)|^2.$$

---

[5]) Das ist immer möglich, da der höchste Koeffizient von $\varphi_n(z)$ positiv ist.

[6]) Man vgl. Abschnitt 11.

Das Minimum $\mu_n(\alpha; f)$ *der obigen Aufgabe wird nur für das Polynom*

$$P_n(z) = \mu_n(\alpha; f)[\overline{\varphi_0(\alpha)}\varphi_0(z) + \overline{\varphi_1(\alpha)}\varphi_1(z) + \ldots + \overline{\varphi_n(\alpha)}\varphi_n(z)]$$
$$= \mu_n(\alpha; f)\, s_n(\alpha, z)$$

erreicht.

32. Die Polynome

$$s_n(\alpha, z) = \overline{\varphi_0(\alpha)}\varphi_0(z) + \overline{\varphi_1(\alpha)}\varphi_1(z) + \ldots + \overline{\varphi_n(\alpha)}\varphi_n(z)$$

spielen im folgenden eine ausgezeichnete Rolle. Es gilt zunächst der

Satz XXVII. *Es sei* $f(\theta)$ *nichtnegativ,* (L) *integrabel und* $A(f) > 0$. *Dann ist für* $\alpha \neq 0$

$$|\alpha|^{2n}\mu_n(\alpha; f) = \mu_n\left(\frac{1}{\bar\alpha}; f\right);$$

es gilt ferner die Funktionalgleichung

$$s_n(\alpha, z) = (\bar\alpha z)^n \bar s_n\left(\frac{1}{\bar z}, \frac{1}{\bar\alpha}\right) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ist z. B. $f(\theta) = 1$, so ist

$$s_n(\alpha, z) = \frac{1 - (\bar\alpha z)^{n+1}}{1 - \bar\alpha z} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Man hat

$$\mu_n(\alpha; f) = \operatorname{Min} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|P_n(z)|^2\, d\theta \qquad (z = e^{i\theta}),$$

während $P_n(\alpha) = 1$ ist. Ich setze hier

$$P_n(z) = \left(\frac{z}{\alpha}\right)^n \bar Q_n\left(\frac{1}{z}\right),$$

also

$$Q_n(z) = (\bar\alpha z)^n \bar P_n\left(\frac{1}{z}\right),$$

wo $Q_n(z)$ ein beliebiges Polynom n-ten Grades bezeichnet. Dann ist

$$\mu_n(\alpha; f) = \frac{1}{|\alpha|^{2n}} \operatorname{Min} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|\bar Q_n(\bar z)|^2\, d\theta \qquad (z = e^{i\theta})$$

$$= \frac{1}{|\alpha|^{2n}} \operatorname{Min} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|Q_n(z)|^2\, d\theta \qquad (z = e^{i\theta}),$$

während $\bar Q_n\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 1$, d. h. $Q_n\left(\frac{1}{\bar\alpha}\right) = 1$ ist. Also

$$\mu_n(\alpha; f) = \frac{1}{|\alpha|^{2n}}\, \mu_n\left(\frac{1}{\bar\alpha}; f\right), \qquad \text{q. e. d.}$$

Das Minimum wird hier nur für

$$P_n(z) = \mu_n(\alpha; f)\, s_n(\alpha, z),$$

bzw. für

$$Q_n(z) = \mu_n\left(\frac{1}{\bar{\alpha}}; f\right) s_n\left(\frac{1}{\bar{\alpha}}, z\right)$$

erreicht; also

$$P_n(z) = \mu_n(\alpha; f)\, s_n(\alpha, z) = \left(\frac{z}{\alpha}\right)^n \bar{Q}_n\left(\frac{1}{z}\right).$$

Nun ist

$$s_n\left(\frac{1}{\bar{\alpha}}, z\right) = \sum_{k=0}^{n} \overline{\varphi_k\left(\frac{1}{\bar{\alpha}}\right)}\, \varphi_k(z),$$

so daß

$$\bar{Q}_n(z) = \mu_n\left(\frac{1}{\bar{\alpha}}; f\right) \sum_{k=0}^{n} \varphi_k\left(\frac{1}{\bar{\alpha}}\right) \bar{\varphi}_k(z)$$

$$= \mu_n\left(\frac{1}{\bar{\alpha}}; f\right) \sum_{k=0}^{n} \overline{\varphi_k(\bar{z})}\, \varphi_k\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \mu_n\left(\frac{1}{\alpha}; f\right) s_n\left(\bar{z}, \frac{1}{\bar{\alpha}}\right)$$

ist; daraus folgt

$$\mu_n(\alpha; f)\, s_n(\alpha, z) = \left(\frac{z}{\alpha}\right)^n \mu_n\left(\frac{1}{\bar{\alpha}}; f\right) s_n\left(\frac{1}{\bar{z}}, \frac{1}{\bar{\alpha}}\right),$$

d. h.

$$s_n(\alpha, z) = (\bar{\alpha} z)^n s_n\left(\frac{1}{\bar{z}}, \frac{1}{\bar{\alpha}}\right), \qquad \text{q. e. d.}$$

§ 13.

Sätze über Wurzeln.

33. In § 3 habe ich gezeigt, daß für $|\alpha| < 1$ das Polynom

$$\mu_n(\alpha; f)\, s_n(\alpha, z) = \mu_n(\alpha; f) \sum_{k=0}^{n} \overline{\varphi_k(\alpha)}\, \varphi_k(z),$$

welches die Lösung der dort gestellten Minimum-Aufgabe liefert, im Innern des Einheitskreises keine Wurzeln haben kann. Diese Tatsache wird verschärft durch den

Satz XXVIII. *Das Polynom n-ten Grades in z*

$$s_n(\alpha, z) = \overline{\varphi_0(\alpha)}\, \varphi_0(z) + \overline{\varphi_1(\alpha)}\, \varphi_1(z) + \ldots + \overline{\varphi_n(\alpha)}\, \varphi_n(z)$$

hat für $|\alpha| < 1$ alle seine Wurzeln außerhalb des Einheitskreises, für $|\alpha| = 1$ am Rande des Einheitskreises und für $|\alpha| > 1$ im Innern des Einheitskreises.

Es sei nämlich z_0 eine Wurzel von $s_n(\alpha, z)$. (Offenbar ist $z_0 \neq \alpha$.) Ich setze

$$F(\theta) = \left|\frac{s_n(\alpha, z)}{z - z_0}\right|^2 f(\theta) \qquad (z = e^{i\theta}),$$

dann ist für sämtliche Polynome erster Ordnung $P_1(z)$, welche die Bedingung $P_1(\alpha) = 1$ erfüllen,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\left| P_1(z) \frac{s_n(\alpha, z)}{z - z_0} \right|^2 d\theta \geqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\left| \frac{z - z_0}{\alpha - z_0} \frac{s_n(\alpha, z)}{z - z_0} \right|^2 d\theta \qquad (z = e^{i\theta}),$$

d. h.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta) \, | P_1(z) |^2 d\theta \geqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta) \left| \frac{z - z_0}{\alpha - z_0} \right|^2 d\theta \qquad (z = e^{i\theta}).$$

Setze ich also

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta) e^{in\theta} d\theta = C_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)\text{ [7]},$$

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{\sqrt{C_0}}, \qquad \Phi_1(z) = \frac{C_0 z - C_1}{\sqrt{C_0 (C_0^2 - |C_1|^2)}}$$

$(C_0 > |C_1|)$ und

$$S_1(\alpha, z) = \overline{\Phi_0(\alpha)}\, \Phi_0(z) + \overline{\Phi_1(\alpha)}\, \Phi_1(z),$$

dann ist mit Rücksicht auf (28) und auf Satz XXVI

$$S_1(\alpha, z) = \text{const}\, (z - z_0),$$

also

$$S_1(\alpha, z_0) = \overline{\Phi_0(\alpha)}\, \Phi_0(z_0) + \overline{\Phi_1(\alpha)}\, \Phi_1(z_0) = 0.$$

D. h.

$$\frac{1}{C_0} + \frac{(C_0 \overline{\alpha} - \overline{C_1})(C_0 z_0 - C_1)}{C_0 (C_0^2 - |C_1|^2)} = 0.$$

Daraus folgt

$$z_0 = \frac{C_1 \overline{\alpha} - C_0}{C_0 \overline{\alpha} - \overline{C_1}}.$$

Nun ist bekanntlich

$$\left| \frac{x \overline{\alpha} - 1}{\overline{\alpha} - \overline{x}} \right| \gtrless 1 \qquad (|x| < 1),$$

je nachdem

$$|\alpha| \lesseqgtr 1$$

ist. Damit ist die Behauptung bewiesen.

34. Ich setze jetzt

(30) $$\psi_n(z) = \sqrt{\frac{D_n(f)}{D_{n-1}(f)}}\, \varphi_n(z) = z^n + \ldots$$

und

(31) $$\psi_n^*(z) = z^n \overline{\psi}_n\left(\frac{1}{z}\right) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

[7]) $C_0 = A(F)$ ist positiv.

Dann ist $\psi_n^*(0) = 1$ und

$$|\psi_n^*(z)| = |\psi_n(z)| \qquad (|z| = 1),$$

also

$$(32) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|\psi_n^*(z)|^2\,d\theta = \frac{D_n(f)}{D_{n-1}(f)} = \mu_n(0; f) \qquad (z = e^{i\theta}),$$

d. h. nach Satz XXVI

$$(33) \qquad \psi_n^*(z) = \mu_n(0; f)\,s_n(0, z) = \frac{D_n(f)}{D_{n-1}(f)} \sum_{k=0}^{n} \overline{\varphi_k(0)}\,\varphi_k(z)$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots)\ [8].$$

Daraus folgt nach Satz XXVIII, daß sämtliche Wurzeln des Polynoms $\psi_n^*(z)$ außerhalb des Einheitskreises liegen. Es gilt also der

Satz XXIX. *Das Polynom $\varphi_n(z)$ hat alle seine Wurzeln im Innern des Einheitskreises.*

35. Als Anwendung der vorigen behandle ich folgende Frage:

Es sei $f(\theta)$ nichtnegativ und (L) integrabel, $A(f) > 0$ und θ_0 eine feste Zahl im Intervalle $(0, 2\pi)$. Welches ist das Maximum von $\varphi(\theta_0)$ für sämtliche nichtnegative trigonometrische Polynome n-ter Ordnung $\varphi(\theta)$, welche die Bedingung

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,\varphi(\theta)\,d\theta = 1$$

erfüllen?

Lösung. *Das gesuchte Maximum ist*

$$\frac{1}{\mu_n(e^{i\theta_0}; f)} = \sum_{k=0}^{n} |\varphi_k(e^{i\theta_0})|^2.$$

Dies wird erreicht für das einzige trigonometrische Polynom

$$\varphi(\theta) = \mu_n(e^{i\theta_0}; f)\,|s_n(e^{i\theta_0}, z)|^2$$

$$= \mu_n(e^{i\theta_0}; f)\left|\sum_{k=0}^{n} \overline{\varphi_k(e^{i\theta_0})}\,\varphi_k(z)\right|^2 \qquad (z = e^{i\theta}),$$

welches n reelle zweifache Nullstellen besitzt[9]).

[8]) Diese Gleichung folgt auch aus Satz XXVII für $\lim \alpha = 0$.

[9]) Man vgl. L. Fejér, Über trigonometrische Polynome [Journal für die reine und angewandte Mathematik, **146** (1915), S. 53—82] S. 64—66. Hier ist $f(\theta) = 1$, $\varphi_n(z) = z^n$ und $\varphi(\theta) \leqq n+1$. — In meiner Arbeit „Über trigonometrische und harmonische Polynome“ [Mathematische Annalen, **79** (1919), S. 323—339] habe ich diese Aufgabe für

$$f(\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2} \qquad (0 \leqq r < 1)$$

behandelt. Dann ist

$$\varphi_0(z) = 1, \qquad \varphi_n(z) = \frac{z^{n-1}(z-r)}{\sqrt{1-r^2}} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Jedes Polynom n-ten Grades ist nämlich in folgender Form zu schreiben:

$$x_0 \varphi_0(z) + x_1 \varphi_1(z) + \ldots + x_n \varphi_n(z).$$

Nach einem Satze von Fejér[10]) kann man also

$$\varphi(\theta) = |x_0 \varphi_0(z) + x_1 \varphi_1(z) + \ldots + x_n \varphi_n(z)|^2 \qquad (z = e^{i\theta})$$

setzen; ferner ist die obige Normierung von $\varphi(\theta)$ damit äquivalent, daß

$$|x_0|^2 + |x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2 = 1$$

ist. Also

$$\varphi(\theta_0) \leqq \sum_{k=0}^{n} |x_k|^2 \sum_{k=0}^{n} |\varphi_k(e^{i\theta_0})|^2 = \frac{1}{\mu_n(e^{i\theta_0}; f)}, \qquad \text{q. e. d.}$$

Dieses Maximum wird dann und nur dann erreicht, wenn

$$x_k = \lambda \overline{\varphi_k(e^{i\theta_0})} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

ist, wo λ der Bedingung

$$|\lambda|^2 \sum_{k=0}^{n} |\varphi_k(e^{i\theta_0})|^2 = 1$$

unterworfen ist. Also ist

$$|\lambda|^2 = \mu_n(e^{i\theta_0}; f),$$

d. h.

$$\varphi(\theta) = \mu_n(e^{i\theta_0}; f)\, |s_n(e^{i\theta_0}, z)|^2 \qquad (z = e^{i\theta}).$$

Aus Satz XXVIII folgt, daß sämtliche Wurzeln des Polynoms $s_n(e^{i\theta_0}, z)$ am Rande des Einheitskreises liegen.

§ 14.

Konvergenzsätze.

36. Ich will in diesem Paragraphen einige Anwendungen der vorigen Sätze zusammenstellen. Zunächst folgt aus Satz XII und Satz XXVI der

Satz XXX. *Es sei $f(\theta)$ nichtnegativ und (L) integrabel, $A(f) > 0$. Ist $G(f) > 0$, so konvergiert die Reihe*

$$|\varphi_0(z)|^2 + |\varphi_1(z)|^2 + \ldots + |\varphi_n(z)|^2 + \ldots$$

für $|z| < 1$; ihre Summe ist gleich

$$\frac{1}{1-|z|^2} \frac{1}{G(z; f)} = \frac{1}{1-|z|^2} \frac{1}{|D(z)|^2} \text{ [11]).}$$

Ist $G(f) = 0$, so ist diese Reihe für $|z| < 1$ divergent[12]).

---

[10]) A. a. O. [9]) S. 62–64.

[11]) Über die Bezeichnungen vgl. Abschnitt 3.

[12]) Sie ist sogar für jedes z divergent. S. Abschnitt 38.

Daraus folgt: *Ist* $G(f) > 0$, *so ist*

$$\lim_{n=\infty} \varphi_n(z) = 0 \qquad (|z| < 1),$$

und zwar gleichmäßig für $|z| \leqq r < 1$.

Beispiel. Es sei E eine Teilmenge des Intervalls $(0, 2\pi)$, deren Lebesguesches Maß $< 2\pi$ ist. Ferner sei $f(\theta)$ nichtnegativ und

$$\int_E f(\theta) d\theta > 0.$$

Ich betrachte das System

$$\sqrt{f(\theta)},\ \sqrt{f(\theta)}\, z,\ \ldots,\ \sqrt{f(\theta)}\, z^n,\ \ldots \qquad (z = e^{i\theta})$$

und bilde daraus nach dem Verfahren von E. Schmidt durch Orthogonalisierung das System

$$\sqrt{f(\theta)}\,\varphi_0(z),\ \sqrt{f(\theta)}\,\varphi_1(z),\ \ldots,\ \sqrt{f(\theta)}\,\varphi_n(z),\ \ldots \qquad (z = e^{i\theta})$$

mit folgenden Eigenschaften:

a) $\varphi_n(z)$ ist ein Polynom n-ten Grades in z.

b) Der Koeffizient von z^n in $\varphi_n(z)$ ist positiv.

c) $\frac{1}{2\pi}\int_E f(\theta)\varphi_m(z)\overline{\varphi_n(z)}\, d\theta = \varepsilon_{mn} \qquad (z = e^{i\theta};\ m, n = 0, 1, 2, \ldots).$

Dann ist die Reihe

$$|\varphi_0(z)|^2 + |\varphi_1(z)|^2 + \ldots + |\varphi_n(z)|^2 + \ldots$$

für $|z| < 1$[13]) divergent.

Wenn ich nämlich $f^*(\theta)$ auf folgende Weise definiere:

$$f^*(\theta) = f(\theta) \quad \text{auf der Menge } E,$$
$$f^*(\theta) = 0 \quad \text{anderswo},$$

so ist

$$G(f^*) = 0.$$

Besonders bemerkenswert ist der Fall $f(\theta) = 1$.

37. Es gilt nun folgende Erweiterung des soeben bewiesenen Satzes:

Satz XXXI. *Ist* $f(\theta)$ *nichtnegativ und* (L) *integrabel, ferner* $G(f) > 0$, *so konvergiert die Reihe*

$$\lim_{n=\infty} s_n(\alpha, z) = \overline{\varphi_0(\alpha)}\,\varphi_0(z) + \overline{\varphi_1(\alpha)}\,\varphi_1(z) + \ldots + \overline{\varphi_n(\alpha)}\,\varphi_n(z) + \ldots$$

für $|\alpha| < 1$, $|z| < 1$ *und zwar gleichmäßig für* $|\alpha|$ *und* $|z| \leqq r < 1$; *ihre Summe ist gleich*

$$\frac{1}{1 - \overline{\alpha} z}\, \frac{1}{\overline{D(\alpha)}}\, \frac{1}{D(z)}.$$

---

[13]) Sogar für jedes z.

Der Beweis dieses Satzes stützt sich auf Satz V. Zunächst ist es klar daß obige Reihe für $|\alpha| < 1$, $|z| < 1$ konvergiert. Die Funktion

$$E_n(z) = \mu_n(\alpha; f)\, s_n(\alpha, z)\, D(z) = e_0^{(n)} + e_1^{(n)} z + \ldots + e_k^{(n)} z^k + \ldots$$
$$(n = 1, 2, 3, \ldots)$$

ist für $|z| < 1$ regulär analytisch, von 0 verschieden und

$$E_n(\alpha) = D(\alpha) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Es ist ferner,

$$\lim_{n=\infty} E_n(z) = E(z) = e_0 + e_1 z + \ldots + e_k z^k + \ldots$$

für jedes $|z| < 1$, und zwar gleichmäßig für $|z| \leqq r < 1$. Also

$$\lim_{n=\infty} e_k^{(n)} = e_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ich setze jetzt

$$f_n(\theta) = |\mu_n(\alpha; f)\, s_n(\alpha, z)|^2 f(\theta) \qquad (z = e^{i\theta});$$

dann hat man

$$A(f_n) = \mu_n(\alpha; f)$$

und $G(f_n) > 0$. Nun ist $s_n(\alpha, z) \neq 0$ für $|\alpha| < 1$, $|z| \leqq 1$, also nach Satz VII

$$G(z; f_n) = |E_n(z)|^2 \qquad (|z| < 1;\ n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Daraus folgt nach Satz V

$$|e_0^{(n)}|^2 + |e_1^{(n)}|^2 + \ldots + |e_k^{(n)}|^2 + \ldots \leqq A(f_n) = \mu_n(\alpha; f),$$

also

$$|e_0|^2 + |e_1|^2 + \ldots + |e_k|^2 + \ldots \leqq \lim_{n=\infty} \mu_n(\alpha; f) = (1 - |\alpha|^2)\, |D(\alpha)|^2.$$

Man hat aber andererseits

$$E(\alpha) = \lim_{n=\infty} E_n(\alpha) = D(\alpha),$$

also

$$|D(\alpha)|^2 = \Big|\sum_{k=0}^{\infty} e_k \alpha^k\Big|^2 \leqq \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha|^{2k} \sum_{k=0}^{\infty} |e_k|^2 \leqq \frac{1}{1-|\alpha|^2} \sum_{k=0}^{\infty} |e_k|^2 \leqq |D(\alpha)|^2,$$

d. h.

$$\Big|\sum_{k=0}^{\infty} e_k \alpha^k\Big|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha|^{2k} \sum_{k=0}^{\infty} |e_k|^2.$$

Daraus folgt

$$e_k = \lambda \bar{\alpha}^k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

und also

$$E(z) = \frac{\lambda}{1 - \bar{\alpha} z}.$$

Die Konstante λ läßt sich aus der Bedingung $E(\alpha) = D(\alpha)$ berechnen. Es ist

$$\lambda = (1 - |\alpha|^2) D(\alpha),$$

also

$$E(z) = \frac{1 - |\alpha|^2}{1 - \bar{\alpha} z} D(\alpha).$$

Daraus folgt die Gleichung

$$\lim_{n=\infty} s_n(\alpha, z) = \frac{E(z)}{\mu(\alpha; f) D(z)} = \frac{1}{1 - \bar{\alpha} z} \frac{1}{\bar{D}(\alpha)} \frac{1}{D(z)}, \qquad \text{q. e. d.}$$

38. Ich will jetzt das Verhalten der Polynome $\varphi_n(z)$ bzw. $s_n(\alpha, z)$ für $|\alpha| \geqq 1$, $|z| \geqq 1$ studieren. Zunächst gilt der

Satz XXXII. *Es sei $f(\theta)$ nichtnegativ und (L) integrabel,* $G(f) > 0$. *Man hat für $|z| > 1$*

$$\lim_{n=\infty} \frac{\varphi_n(z)}{z^n} = \frac{1}{D\left(\frac{1}{z}\right)},$$

und zwar gleichmäßig für $|z| \geqq R > 1$.

In der Tat ergibt sich aus (33)

$$\lim_{n=\infty} \psi_n^*(z) = \frac{G(f)}{D(0) D(z)} = \frac{D(0)}{D(z)} \qquad (|z| < 1),$$

also

$$\lim_{n=\infty} \frac{\varphi_n(z)}{z^n} = \frac{1}{D(0)} \lim_{n=\infty} \frac{\psi_n(z)}{z^n} = \frac{1}{D(0)} \lim_{n=\infty} \psi_n^*\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{D\left(\frac{1}{z}\right)} \qquad (|z| > 1),$$

woraus der Satz folgt. Dieser Satz gibt eine asymptotische Abschätzung der orthogonalen Polynome $\varphi_n(z)$ außerhalb des Einheitskreises.

Zur asymptotischen Abschätzung der Polynome $s_n(\alpha, z)$ gebrauche ich den Satz XXVII. Man hat

$$s_n(\alpha, z) = (\bar{\alpha} z)^n s_n\left(\frac{1}{\bar{z}}, \frac{1}{\bar{\alpha}}\right).$$

Ist also $G(f) > 0$, so ist

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n(\alpha, z)}{(\bar{\alpha} z)^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{\bar{\alpha} z}} \frac{1}{D\left(\frac{1}{\bar{\alpha}}\right)} \frac{1}{\bar{D}\left(\frac{1}{z}\right)} \qquad (|\alpha| > 1, |z| > 1).$$

Ist ferner $G(f) = 0$, so ist

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n(z, z)}{|z|^{2n}} = \infty \qquad (|z| > 1).$$

Es gilt somit der

Satz XXXIII. *Es sei $f(\theta)$ nichtnegativ und (L) integrabel. Ist $G(f) > 0$, so hat man*

$$\lim_{n=\infty} \frac{\overline{\varphi_0(\alpha)} \varphi_0(z) + \overline{\varphi_1(\alpha)} \varphi_1(z) + \ldots + \overline{\varphi_n(\alpha)} \varphi_n(z)}{(\bar{\alpha} z)^n}$$

$$= \frac{\bar{\alpha} z}{\bar{\alpha} z - 1} \frac{1}{D\left(\frac{1}{\bar{\alpha}}\right)} \frac{1}{\bar{D}\left(\frac{1}{z}\right)} \qquad (|\alpha| > 1, |z| > 1).$$

Ist $G(f) = 0$, *dann ist*

$$\lim_{n=\infty} \frac{|\varphi_0(z)|^2 + |\varphi_1(z)|^2 + \dots + |\varphi_n(z)|^2}{|z|^{2n}} = \infty \qquad (|z| > 1).$$

Daraus folgt die Divergenz der Reihe

$$|\varphi_0(z)|^2 + |\varphi_1(z)|^2 + \dots + |\varphi_n(z)|^2 + \dots$$

für $|z| > 1$. Ich beweise hier, daß sie auch für $|z| = 1$ divergiert. Wäre nämlich

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\varphi_n(e^{i\theta_0})|^2 = A$$

endlich, so wäre nach Abschnitt 35

$$\varphi(\theta_0) \leqq A \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \varphi(\theta) d(\theta)$$

für jedes nichtnegative trigonometrische Polynom $\varphi(\theta)$, also aus Stetigkeitsgründen auch für jede nichtnegative stetige Funktion $\varphi(\theta)$. Ich setze hier

$$\varphi(\theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - \theta_0) + r^2} \qquad (0 \leqq r < 1).$$

Dann wäre also

$$\frac{1+r}{1-r} \leqq A \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - \theta_0) + r^2} d\theta$$

$$\leqq \frac{A}{\varepsilon} + \frac{A}{2\pi} \frac{1+r}{1-r} \int_{f(\theta) \geqq \frac{1}{\varepsilon}} f(\theta)\, d\theta,$$

wo $\varepsilon > 0$ beliebig ist. Ich setze $\varepsilon = \sqrt{1-r}$, dann ist

$$1 < 1 + r \leqq A\sqrt{1-r} + \frac{A}{\pi} \int_{f(\theta) \geqq \frac{1}{\varepsilon}} f(\theta)\, d\theta.$$

Dies führt aber zum Widerspruch, da ja

$$\lim_{\varepsilon = +0} \int_{f(\theta) \geqq \frac{1}{\varepsilon}} f(\theta)\, d\theta = 0$$

ist. Daraus ergibt sich die Behauptung[14]).

[14]) Es gilt also folgende Ergänzung zu Satz XII: *Ist* $|\alpha| \geqq 1$, *dann hat man*

$$\lim_{n=\infty} \mu_n(\alpha; f) = \mu(\alpha; f) = 0.$$

Für beschränkte $f(\theta)$ war dies bereits durch (9′) bekannt.

§ 15.

Entwickelung nach den Polynomen $\varphi_n(z)$.

39. Ich stelle die folgende Frage:

Es sei $F(z)$ *für* $|z| \leqq 1$ *regulär; welches ist das Polynom n-ten Grades* $P_n(z)$, *für welches das Integral*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|F(z) - P_n(z)|^2\, d\theta \qquad (z = e^{i\theta})$$

das kleinste ist; $f(\theta)$ *bezeichnet hier eine nichtnegative, (L) integrable Funktion, für welche* $A(f) > 0$ *ist.*

Ich setze

$$g_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta) F(z)\, \overline{\varphi_k(z)}\, d\theta \qquad (z = e^{i\theta};\ k = 0, 1, 2, \ldots),$$

dann ist das gesuchte Polynom

$$(34)\qquad P_n(z) = g_0\varphi_0(z) + g_1\varphi_1(z) + \cdots + g_n\varphi_n(z).$$

In der Tat, wenn ich allgemein

$$P_n(z) = x_0\varphi_0(z) + x_1\varphi_1(z) + \cdots + x_n\varphi_n(z)$$

setze, dann ist

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|F(z) - P_n(z)|^2\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|F(z)|^2\, d\theta - 2\,\Re\sum_{k=0}^{n} g_k\bar{x}_k +$$

$$+\sum_{k=0}^{n}|x_k|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|F(z)|^2\, d\theta - \sum_{k=0}^{n}|g_k|^2 + \sum_{k=0}^{n}|g_k - x_k|^2 \quad (z = e^{i\theta});$$

das Minimum tritt also dann ein, wenn $x_k = g_k$ ist, q. e. d.[15]).

Dieses Minimum ist gleich

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|F(z)|^2\, d\theta - \sum_{k=0}^{n}|g_k|^2 \qquad (z = e^{i\theta}).$$

---

[15]) $F(z)$ kann hier natürlich durch eine komplexe Funktion $H(\theta)$ der reellen Variablen θ ersetzt werden, für welche das Integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|H(\theta)|^2\, d\theta$$

endlich ist.

Ist z. B. $f(\theta)=1$, so ist $\varphi_n(z)=z^n$ und die Polynome $P_n(z)$ sind die Partialsummen der zu $F(z)$ gehörigen Taylorschen Entwickelung. Dies ist eine wohlbekannte Tatsache.

40. Es gehört zu jeder im Bereiche $|z|\leqq 1$ regulären Funktion $F(z)$ die formelle Entwickelung

$$(35)\qquad F(z)\sim g_0\varphi_0(z)+g_1\varphi_1(z)+\ldots+g_n\varphi_n(z)+\ldots,$$

wo

$$(36)\qquad g_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)F(z)\overline{\varphi_n(z)}\,d\theta\quad(z=e^{i\theta};\ n=0,1,2,\ldots)$$

ist. Die n-te Partialsumme $S_n(z)$ dieser Entwickelung läßt sich in der Form schreiben

$$S_n(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\zeta)F(\zeta)s_n(\zeta,z)\,dx\qquad(\zeta=e^{ix};\ n=0,1,2,\ldots),$$

wo $s_n(\zeta,z)$ die im Abschnitte 32 definierten Polynome bezeichnen.

Ich beweise den

Satz XXXIV. *Es gilt für jede im Bereiche* $|z|\leqq 1$ *reguläre Funktion* $F(z)$ *die Gleichung*

$$|g_0|^2+|g_1|^2+\ldots+|g_n|^2+\ldots=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)|F(z)|^2\,d\theta\quad(z=e^{i\theta}).$$

Dieser Satz sagt *in gewissem Sinne*[16]) die Vollständigkeit des Orthogonalsystems

$$\sqrt{f(\theta)}\,\varphi_0(z),\quad\sqrt{f(\theta)}\,\varphi_1(z),\ldots,\sqrt{f(\theta)}\,\varphi_n(z),\ldots\qquad(z=e^{i\theta})$$

aus. Er folgt also unmittelbar aus jener Tatsache, daß für geeignet gewählte Polynome $P_n(z)$ das Integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)|F(z)-P_n(z)|^2\,d\theta\qquad(z=e^{i\theta})$$

beliebig klein ist.

Der Satz XXXIV ist auf folgende Weise zu verallgemeinern:

Es seien $F_k(z)$ *regulär für* $|z|\leqq 1$ *und*

$$F_k(z)\sim g_0^{(k)}\varphi_0(z)+g_1^{(k)}\varphi_1(z)+\ldots+g_n^{(k)}\varphi_n(z)+\ldots\quad(k=1,2);$$

[16]) Man vgl. Satz XXXV.

dann ist

$$g_0^{(1)}\overline{g_0^{(2)}} + g_1^{(1)}\overline{g_1^{(2)}} + \ldots + g_n^{(1)}\overline{g_n^{(2)}} + \ldots = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\, F_1(z)\,\overline{F_2(z)}\,d\theta$$

$$(z = e^{i\theta}).$$

41. Es gilt nun das folgende allgemeinere Theorem:

Satz XXXV. *Es sei* $H(\theta)$ *irgendeine komplexe Funktion der reellen Variablen* θ *und* $f(\theta)\,|H(\theta)|^2$ (L) *integrabel. Ich setze*

$$h_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,H(\theta)\,\overline{\varphi_n(z)}\,d\theta \quad (z = e^{i\theta};\ n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Dann ist

$$h = |h_0|^2 + |h_1|^2 + \ldots + |h_n|^2 + \ldots \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|H(\theta)|^2\,d\theta.$$

Es gilt ferner für jede im Bereiche $|z| \leqq 1$ *reguläre Funktion* $F(z)$ *die Ungleichung*

$$(37)\quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|F(z) - H(\theta)|^2\,d\theta \geqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|H(\theta)|^2\,d\theta - h \quad (z = e^{i\theta}),$$

deren rechte Seite nicht durch eine größere ersetzt werden kann.

Der erste Teil unserer Behauptung ist eine direkte Folge der bekannten Besselschen Ungleichung. Der zweite Teil folgt aus Abschnitt 39.

Bevor ich weitergehe, will ich folgende Bemerkung machen:

Es sei $F(z)$ *eine für* $|z| \leqq 1$ *reguläre Funktion, für welche in* (37) *die Gleichheit besteht*[17]). *Dann ist*

$$g_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,F(z)\,\overline{\varphi_n(z)}\,d\theta = h_n \quad (z = e^{i\theta};\ n = 0, 1, 2, \ldots),$$

d. h. sämtliche Koeffizienten der Entwickelung von $F(z) - H(\theta)$ *nach den Polynomen* $\varphi_n(z)$ *verschwinden, obwohl im allgemeinen*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|F(z) - H(\theta)|^2\,d\theta > 0 \qquad (z = e^{i\theta})$$

ist.

---

[17]) Eine solche Funktion $F(z)$ muß natürlich nicht unbedingt existieren. Ich werde unten ein Beispiel angeben, in welchem sie wirklich existiert.

Dann ist nämlich

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|F(z)-H(\theta)-P_n(z)|^2\,d\theta \geqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|F(z)-H(\theta)|^2\,d\theta$$
$$(z=e^{i\theta})$$

für jedes Polynom $P_n(z)$ und das Gleichheitszeichen gilt, wenn $P_n(z)=0$ ist. Andererseits tritt dies nur für

$$P_n(z)=\sum_{k=0}^{n}(g_k-h_k)\,\varphi_k(z)$$

ein. Also ist $g_k=h_k$ $(k=0,1,\ldots,n)$, q. e. d.

Beispiel. Es sei $f(\theta)>0$ und $\frac{1}{f(\theta)}$ auch (L) integrabel[18]). Ferner sei $|\alpha|<1$. Ich setze

$$\bar{H}(\theta)=\frac{1}{f(\theta)}\,\frac{z}{z-\alpha}=\frac{1}{f(\theta)}\,\frac{1}{1-\alpha\bar{z}} \qquad (z=e^{i\theta}).$$

Dann ist

$$\bar{h}_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,H(\theta)\,\varphi_n(z)\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{z}{z-\alpha}\,\varphi_n(z)\,d\theta=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{\varphi_n(z)}{z-\alpha}\,dz$$
$$(z=e^{i\theta}),$$

wo das Integral im Cauchyschen Sinne zu nehmen ist. Also

$$\bar{h}_n=\varphi_n(\alpha) \qquad (n=0,1,2,\ldots),$$

woraus z. B. von neuem die Konvergenz der Reihe

$$h=|\varphi_0(\alpha)|^2+|\varphi_1(\alpha)|^2+\ldots+|\varphi_n(\alpha)|^2+\ldots$$

folgt (Vgl. Satz XXX). Man hat hier

$$h=\frac{1}{\mu(\alpha;f)}=\frac{1}{1-|\alpha|^2}\,\frac{1}{|D(\alpha)|^2}$$

und

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|H(\theta)|^2\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{f(\theta)}\,\frac{d\theta}{|1-\bar{\alpha}z|^2} \qquad (z=e^{i\theta}),$$

also ist für jede im Bereiche $|z|\leqq 1$ reguläre $F(z)$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|F(z)-H(\theta)|^2\,d\theta \geqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{f(\theta)}\,\frac{d\theta}{|1-\bar{\alpha}z|^2}-\frac{1}{1-|\alpha|^2}\,\frac{1}{|D(\alpha)|^2}$$
$$(z=e^{i\theta}).$$

[18]) Dann ist notwendigerweise $G(f)>0$, da ja $G(f)\,G\left(\frac{1}{f}\right)=1$ ist.

Es sei jetzt $D(z)$ regulär und von 0 verschieden für $|z| \leqq 1$, so ist in der letzten Ungleichung für

$$F(z) = \frac{1}{1-\bar{\alpha} z} \frac{1}{\overline{D(\alpha)}} \frac{1}{D(z)}$$

das Gleichheitszeichen gültig. Man hat nämlich

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|F(z)|^2\,d\theta = \frac{1}{|D(\alpha)|^2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{|1-\bar{\alpha} z|^2} = \frac{1}{1-|\alpha|^2}\frac{1}{|D(\alpha)|^2} \quad (z=e^{i\theta})$$

und

$$\Re\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,\overline{H(\theta)}\,F(z)\,d\theta = \Re\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{F(z)}{z-\alpha}\,dz = \Re F(\alpha) = \frac{1}{1-|\alpha|^2}\frac{1}{|D(\alpha)|^2}$$
$$(z=e^{i\theta}).$$

Daraus folgt, daß die Entwickelungskoeffizienten der Funktion

$$\frac{1}{1-\bar{\alpha} z}\frac{1}{\overline{D(\alpha)}}\frac{1}{D(z)} - \frac{1}{|D(z)|^2}\frac{1}{1-\bar{\alpha} z} = \frac{1}{1-\bar{\alpha} z}\frac{1}{D(z)}\left(\frac{1}{\overline{D(\alpha)}} - \frac{1}{\overline{D(z)}}\right)$$
$$(z=e^{i\theta})$$

nach dem Polynomen $\varphi_n(z)$ sämtlich verschwinden.

42. Zum Schluß beweise ich den

Satz XXXVI. *Es sei $f(\theta)$ nichtnegativ und (L) integrabel, $G(f) > 0$. Ferner sei $F(z)$ für $|z| \leqq 1$ regulär und ihre Entwickelung nach den Polynomen $\varphi_n(z)$*

$$(35) \qquad F(z) \sim g_0\varphi_0(z) + g_1\varphi_1(z) + \dots + g_n\varphi_n(z) + \dots,$$

wo

$$(36) \qquad g_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,F(z)\,\overline{\varphi_n(z)}\,d\theta \quad (z=e^{i\theta};\ n=0,1,2,\dots)$$

ist. Dann konvergiert diese Entwickelung für $|z| < R$ und stellt $F(z)$ dar, sie divergiert ferner für $|z| > R$, wo $R > 1$ den Radius des größten Kreises um den Nullpunkt bezeichnet, welcher in seinem Innern keinen singulären Punkt von $F(z)$ enthält. Man hat übrigens

$$\limsup_{n=\infty}\sqrt[n]{|g_n|} = \frac{1}{R}.$$

Ich betrachte zunächst ganz allgemein eine Entwickelung

$$\gamma_0\varphi_0(z) + \gamma_1\varphi_1(z) + \dots + \gamma_n\varphi_n(z) + \dots,$$

für welche

$$|\gamma_0|^2 + |\gamma_1|^2 + \dots + |\gamma_n|^2 + \dots$$

konvergiert. Es sei

$$\limsup_{n=\infty} \sqrt[n]{|\gamma_n|} = \gamma,$$

dann behaupte ich, daß diese Entwickelung für $|z| < \frac{1}{\gamma}$ konvergiert und für $|z| > \frac{1}{\gamma}$ divergiert. In dem Bereiche $|z| < \frac{1}{\gamma}$ stellt sie eine reguläre Funktion dar.

Es ist offenbar $\gamma \leqq 1$. Ist $\gamma = 1$, so folgt die Behauptung unmittelbar aus den Sätzen XXX und XXXII. Ist $\gamma < 1$, dann folgt die Divergenz für $|z| > \frac{1}{\gamma}$ aus Satz XXXII. Aus demselben Satze folgt die Konvergenz für $1 < |z| < \frac{1}{\gamma}$, also nach einem wohlbekannten Satz von Weierstraß überhaupt für $|z| < \frac{1}{\gamma}$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Ich betrachte nun die zu $F(z)$ gehörige Entwickelung

$$g_0 \varphi_0(z) + g_1 \varphi_1(z) + \dots + g_n \varphi_n(z) + \dots,$$

für welche nach Satz XXXIV

$$|g_0|^2 + |g_1|^2 + \dots + |g_n|^2 + \dots$$

konvergiert. Es sei

$$\limsup_{n=\infty} \sqrt[n]{|g_n|} = g,$$

dann muß nur bewiesen werden, daß $\frac{1}{g} = R$ ist, wo R den Radius des größten Kreises um den Nullpunkt bezeichnet, welcher in seinem Innern keinen singulären Punkt von $F(z)$ enthält.

Zunächst folgt aus dem eben Bewiesenen, daß die letzte Entwicklung für $|z| < \frac{1}{g}$ konvergiert und dort eine reguläre Funktion darstellt. Daraus folgt die Ungleichung

$$\frac{1}{g} \leqq R.$$

In der Tat, dies ist klar für $g = 1$. Ist aber $g < 1$, d. h. $\frac{1}{g} > 1$, so muß die durch die Entwickelung für $|z| < \frac{1}{g}$ dargestellte Funktion nach Satz XXXIV mit $F(z)$ übereinstimmen, so daß $F(z)$ für $|z| < \frac{1}{g}$ regulär ist, also $\frac{1}{g} \leqq R$.

Die Behauptung wird somit bewiesen, sobald ich die Ungleichheit

$$\frac{1}{g} \geqq R, \quad \text{d. h.} \quad g \leqq \frac{1}{R}$$

nachweise. Dies geschieht folgendermaßen. Es ist nach der Orthogonalitätseigenschaft der $\varphi_n(z)$

$$g_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)(F(z) - Q(z))\,\varphi_n(z)\,d\theta \qquad (z = e^{i\theta}),$$

wo $Q(z)$ ein *beliebiges* Polynom $n-1$-ten Grades bezeichnet. Nun gibt es nach der Bedeutung von R zu jedem $R' < R$ für alle n solche Polynome $n-1$-ten Grades $Q(z)$, daß

$$|F(z) - Q(z)| < \frac{A}{R'^n} \qquad (|z| \leqq 1)$$

ist, wo A von z und n unabhängig ist. D. h.

$$|g_n| < \frac{A}{R'^n}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|\varphi_n(z)|\,d\theta \leqq \frac{A}{R'^n}\sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,d\theta} \quad (z = e^{i\theta}),$$

also

$$g = \limsup_{n=\infty} \sqrt[n]{|g_n|} \leqq \frac{1}{R'},$$

und da R' beliebig nahe zu R gewählt werden kann,

$$g \leqq \frac{1}{R},$$

w. z. b. w. Damit ist unser Satz XXXVI völlig bewiesen.

Korollar. Ist in Satz XXXI die Funktion $D(z)$ für $|z| \leqq 1$ regulär, so gilt die dort ausgesprochene Gleichung

$$\overline{\varphi_0(\alpha)}\,\varphi_0(z) + \overline{\varphi_1(\alpha)}\,\varphi_1(z) + \dots + \overline{\varphi_n(\alpha)}\,\varphi_n(z) + \dots = \frac{1}{1-\bar{\alpha} z}\,\frac{1}{\overline{D(\alpha)}}\,\frac{1}{D(z)}$$
$$(|\alpha| < 1)$$

nicht nur für $|z| < 1$, sondern sogar für $|z| < \operatorname{Min}\left(\frac{1}{|\alpha|}, R\right)$, angenommen, daß $D(z)$ für $|z| < R$ regulär und von 0 verschieden ist.

Beispiele.

43. Es sei

$$f(\theta) = \frac{1}{\varphi(\theta)},$$

wo $\varphi(\theta)$ ein positiv trigonometrisches Polynom p-ter Ordnung bezeichnet. Ferner sei

$$a(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_p z^p \qquad (a_p \neq 0)$$

für $|z| < 1$ von 0 verschieden und

$$\varphi(\theta) = |a(z)|^2 \qquad (z = e^{i\theta}).$$

Dann ist nach Satz XVI

$$\frac{D_n(f)}{D_{n-1}(f)} = G(f) = \frac{1}{G(\varphi)} = \frac{1}{|a_0|^2} \qquad (n \geqq p).$$

Man hat nun nach Abschnitt 34

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|\psi_n^*(z)|^2\,d\theta = \frac{D_n(f)}{D_{n-1}(f)} = \frac{1}{|a_0|^2} \quad (z = e^{i\theta};\ n \geqq p)$$

und

$$e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log f(\theta)\,|\psi_n^*(z)|^2\,d\theta} = G(f)\,|\psi_n^*(0)|^2 = G(f) = \frac{1}{|a_0|^2} \quad (z = e^{i\theta};\ n \geqq p),$$

d. h.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,|\psi_n^*(z)|^2\,d\theta = e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log f(\theta)\,|\psi_n^*(z)|^2\,d\theta} \qquad (z = e^{i\theta};\ n \geqq p);$$

oder ist nach Satz VI

$$f(\theta)\,|\psi_n^*(z)|^2 = \left|\frac{\psi_n^*(z)}{a(z)}\right|^2 = \text{const} \qquad (z = e^{i\theta};\ n \geqq p),$$

woraus[19])

$$\psi_n^*(z) = \text{const}\; a(z)$$

folgt. Aus $\psi_n^*(0) = 1$ ergibt sich

$$\psi_n^*(z) = \frac{a(z)}{a_0} \qquad (n \geqq p).$$

Daraus folgt

$$\psi_n(z) = z^n\,\bar{\psi}_n^*\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{z^n\,\bar{a}\left(\frac{1}{z}\right)}{\bar{a}_0}$$

und also

$$\varphi_n(z) = \frac{|a_0|}{\bar{a}_0}\,z^n\,\bar{a}\left(\frac{1}{z}\right) = z^{n-p}\,b(z) \qquad (n \geqq p),$$

wo

$$b(z) = \frac{|a_0|}{\bar{a}_0}\,z^p\,\bar{a}\left(\frac{1}{z}\right)$$

ein Polynom p-ten Grades bezeichnet[20]).

44. Es sei

$$f(\theta) = \frac{1}{2}|z - z_0|^2 = \frac{1 + r_0^2}{2} - r_0\cos(\theta - \theta_0)$$

$$(z = e^{i\theta};\ z_0 = r_0\,e^{i\theta_0};\ 0 \leqq r_0 < 1).$$

[19]) S. Erste Mitteilung Fußnote [26]).

[20]) Man vgl. a. a. O. [9]).

Dann ist

$$D_n(f) = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1 - r_0^{2n+4}}{1 - r_0^2} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)[21].$$

Die Eigenwerte von $f(\theta)$ ergeben sich durch eine elementare Rechnung; man hat

$$\lambda_k^{(n)} = \frac{1 + r_0^2}{2} - r_0 \cos\frac{(k+1)\pi}{n+2} = f\left(\frac{(k+1)\pi}{n+2} + \theta_0\right)$$
$$(k = 0, 1, \ldots, n;\ n = 0, 1, 2, \ldots)[22].$$

Die Polynome $\varphi_n(z)$ lassen sich auf folgende Weise berechnen. Aus (27) folgt, wenn man die rechtsstehende Determinante nach ihrer letzten Zeile entwickelt,

$$\Delta_n(z) = D_{n-1}(f) z^n - c_1 \Delta_{n-1}(z) \qquad (n = 2, 3, 4, \ldots),$$

also

$$\Delta_n(z) = D_{n-1}(f) z^n - c_1 D_{n-2}(f) z^{n-1} + \ldots + (-c_1)^{n-1} D_0(f) z + (-c_1)^n$$
$$(n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Daraus erhält man leicht die Polynome $\varphi_n(z)$.

Ich betrachte jetzt den interessanten Fall $r_0 = 1$. Dann gestalten sich diese Rechnungen sehr einfach. Man hat

$$f(\theta) = 1 - \cos(\theta - \theta_0)$$

und

$$D_n(f) = \frac{n+2}{2^{n+1}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ich setze $z_0 = e^{i\theta_0}$; dann ist $c_1 = -\frac{z_0}{2}$, also

$$\Delta_n(z) = \frac{n+1}{2^n} z^n + \frac{z_0}{2} \frac{n}{2^{n-1}} z^{n-1} + \ldots + \frac{z_0^n}{2^n}$$
$$= \frac{1}{2^n}[(n+1) z^n + n z_0 z^{n-1} + \ldots + z_0^n] \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Daraus folgt

$$\varphi_n(z) = \sqrt{\frac{2}{(n+1)(n+2)}}[(n+1) z^n + n z_0 z^{n-1} + \ldots + z_0^n] \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Als Anwendung behandle ich nach Abschnitt 35 die folgende Minimum-Aufgabe:

Welche ist die obere Grenze des Maximums von $\varphi(\theta)$ im Intervalle $(0, 2\pi)$, während $\varphi(\theta)$ die Gesamtheit der nichtnegativen trigonometrischen Polynome n-ter Ordnung mit der Bedingung

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [1 - \cos(\theta - \theta_0)]\, \varphi(\theta)\, d\theta = 1$$

durchläuft?

---

[21]) S. Fußnote [19]).

[22]) Man vgl. L. Fejér, a. a. O. [9]), S. 79.

Man hat offenbar

$$|\varphi_n(z)| \leqq \sqrt{\frac{2}{(n+1)(n+2)}} \sum_{k=0}^{n} (k+1) = \sqrt{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$$
$$(|z|=1;\ n \geqq 1),$$

wo das Gleichheitszeichen nur für $z = z_0$ gültig ist; also hat man

$$s_n(z, z) = |\varphi_0(z)|^2 + |\varphi_1(z)|^2 + \ldots + |\varphi_n(z)|^2 \leqq \sum_{k=0}^{n} \binom{k+2}{3} = \binom{n+3}{2}$$
$$(|z|=1).$$

Das ist die gesuchte obere Grenze, d. h.

$$\varphi(\theta) \leqq \binom{n+3}{3}.$$

Das Gleichheitszeichen ist hier nur für

$$\varphi(\theta) = \frac{|s_n(z_0, z)|^2}{\binom{n+3}{3}} \qquad (z = e^{i\theta})$$

und für $\theta = \theta_0$ gültig. Man hat aber

$$\varphi_k(z_0) = z_0^k \sqrt{\frac{(k+1)(k+2)}{2}}$$

und

$$\varphi_k(z_0)\varphi_k(z) = \bar{z}_0^k [(k+1) z^k + k z_0 z^{k-1} + \ldots + z_0^k]$$
$$= (k+1)(\bar{z}_0 z)^k + k(\bar{z}_0 z)^{k-1} + \ldots + 1,$$

also

$$s_n(z_0, z) = n + 1 + n \cdot 2(\bar{z}_0 z) + \ldots + 2 \cdot n(\bar{z}_0 z)^{n-1} + (n+1)(\bar{z}_0 z)^n,$$

d. h.

$$\varphi(\theta) = \frac{|n+1+n\cdot 2z + \ldots + 2\cdot n z^{n-1} + (n+1)z^n|^2}{\binom{n+3}{3}} \quad [z = e^{i(\theta-\theta_0)}].$$

Daraus folgt der Satz:

Es sei

$$\varphi(\theta) = \alpha_0 + \alpha_1 \cos\theta + \beta_1 \sin\theta + \ldots + \alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta$$

ein nichtnegatives trigonometrisches Polynom n-ter Ordnung und

$$\alpha_0 - \frac{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}}{2} = 1\ ^{23}).$$

---

[23]) D. h. $\lambda^{(1)} = 1$. (S. Abschnitt 18.)

Dann ist

$$\varphi(\theta) \leqq \binom{n+3}{3}.$$

Das Gleichheitszeichen ist hier nur für

$$\varphi(\theta) = \frac{|n+1+n\cdot 2z+\ldots+2\cdot n z^{n-1}+(n+1)z^n|^2}{\binom{n+3}{3}} \qquad [z = e^{i(\theta-\theta_0)}]$$

und für $\theta = \theta_0$ *gültig, wo* θ_0 *irgendeinen solchen Winkel bezeichnet, für welchen*

$$(\alpha_1 - i\beta_1)\, e^{i\theta_0}$$

reell und nichtnegativ ist.

Man hat nämlich

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\theta)\, d\theta = \alpha_0$$

und

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\theta)\cos(\theta-\theta_0)\, d\theta = \alpha_1\cos\theta_0 + \beta_1\sin\theta_0 = \Re(\alpha_1 - i\beta_1)\, e^{i\theta_0} = \sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2}.$$

(Eingegangen am 26. Februar 1919.)