# Reine Infinitesimalgeometrie.

Von

Hermann Weyl in Zürich.

## § 1. Einleitung. Über das Verhältnis von Geometrie und Physik.

Die wirkliche Welt, in die wir kraft unseres Bewußtseins hineingestellt sind, *ist nicht da*, schlechthin und in Einem Schlag, sondern *geschieht*; sie durchläuft, in jedem Augenblick vernichtet und neu geboren, eine kontinuierliche eindimensionale Folge von Zuständen in der *Zeit*. Der Schauplatz dieses zeitlichen Geschehens ist ein dreidimensionaler Euklidischer *Raum*. Seine Eigenschaften untersucht die *Geometrie*; hingegen ist es die Aufgabe der *Physik*, das im Raum existierende Reale begrifflich zu erfassen und die in der Flucht seiner Erscheinungen beharrenden Gesetze zu ergründen. Physik ist demnach eine Wissenschaft, welche die Geometrie zu ihrem Fundament hat; die Begriffe aber, durch welche sie das Wirkliche darstellt — Materie, Elektrizität, Kraft, Energie, elektromagnetisches Feld, Gravitationsfeld usf. — gehören einer ganz andern Sphäre an als die geometrischen.

Diese alte Anschauung über das Verhältnis von Form und Inhalt der Wirklichkeit, von Geometrie und Physik ist durch die Einsteinsche Relativitätstheorie [1]) umgestürzt worden. Die *spezielle Relativitätstheorie* führte zu der Erkenntnis, daß Raum und Zeit zu einer unlöslichen Einheit verschmolzen sind, die als *Welt* bezeichnet werde; die Welt ist dieser Theorie zufolge eine vierdimensionale Euklidische Mannigfaltigkeit — Euklidisch mit der Modifikation, daß die der Weltmetrik zugrundeliegende quadratische Form nicht positiv-definit ist, sondern vom Trägheitsindex 1. Die *allgemeine Relativitätstheorie* gibt das, ganz im Geiste der modernen Nahewirkungsphysik, nur im Unendlichkleinen als gültig zu, nimmt für die Weltmetrik also den von Riemann in seinem Habilitationsvortrag

---

[1]) Ich verweise auf die Darstellung in meinem Buch „Raum, Zeit, Materie", Springer 1918 (im folgenden als RZM zitiert), und die dort angegebene Literatur.

aufgestellten allgemeineren Begriff der auf einer quadratischen *Differential*form beruhenden Maßbestimmung in Anspruch. Das prinzipiell Neue an ihr ist aber die Einsicht: die Metrik ist nicht eine Eigenschaft der Welt an sich; vielmehr ist Raum-Zeit als Form der Erscheinungen ein völlig gestaltloses vierdimensionales Kontinuum im Sinne der Analysis situs, die Metrik aber bringt etwas Reales zum Ausdruck, das in der Welt existiert, das durch Zentrifugal- und Gravitationskräfte physikalische Wirkungen auf die Materie ausübt und dessen Zustand auch umgekehrt durch die Verteilung und Beschaffenheit der Materie naturgesetzlich bedingt ist. Indem ich die Riemannsche Geometrie, die doch reine „Nahe-Geometrie" sein will, von einer ihr gegenwärtig noch anhaftenden Inkonsequenz befreite, ein letztes ferngeometrisches Element ausstieß, das sie von ihrer Euklidischen Vergangenheit her noch bei sich führte, gelangte ich zu einer Weltmetrik, aus welcher nicht nur die Gravitations-, sondern auch die elektromagnetischen Wirkungen hervorgehen, die somit, wie man mit gutem Grund annehmen darf, über alle physikalischen Vorgänge Rechenschaft gibt [2]). Nach dieser Theorie ist *alles Wirkliche, das in der Welt vorhanden ist, Manifestation der Weltmetrik*; die physikalischen Begriffe sind keine andern als die geometrischen. Der einzige Unterschied, der zwischen Geometrie und Physik besteht, ist der, daß die Geometrie allgemein ergründet, was im Wesen der metrischen Begriffe liegt [3]), die Physik aber das Gesetz zu ermitteln und in seine Konsequenzen zu verfolgen hat, durch welches die wirkliche Welt unter allen der Geometrie nach möglichen vierdimensionalen metrischen Räumen ausgezeichnet ist [4]).

In dieser Note möchte ich jene *reine Infinitesimalgeometrie* entwickeln, die nach meiner Überzeugung die physikalische Welt als einen Sonderfall in sich begreift. Der Aufbau der Nahegeometrie vollzieht sich sachgemäß in drei Stufen. Auf der ersten Stufe steht das aller Maßbestimmung bare *Kontinuum* im Sinne der Analysis situs — physikalisch gesprochen, *die leere Welt*; auf der zweiten das *affin zusammenhängende* Kontinuum — so nenne ich eine Mannigfaltigkeit, in welcher der Begriff der infinitesimalen Parallelverschiebung von Vektoren einen Sinn hat; in

---

[2]) Eine erste Mitteilung darüber ist unter dem Titel „Gravitation und Elektrizität" in den Sitzungsber. d. K. Preuß. Akad. d. Wissenschaften 1918, S. 465, erschienen.

[3]) Freilich geht die traditionelle Geometrie von dieser ihrer eigentlichen Aufgabe alsbald zu einer weniger prinzipiellen über, indem sie nun nicht mehr den Raum selbst zum Gegenstand ihrer Untersuchung macht, sondern die im Raume möglichen Gebilde, spezielle Klassen solcher und deren Eigenschaften, die ihnen auf Grund der Raummetrik zukommen.

[4]) Ich bin verwegen genug, zu glauben, daß die Gesamtheit der physikalischen Erscheinungen sich aus einem einzigen universellen Weltgesetz von höchster mathematischer Einfachheit herleiten läßt.

der Physik erscheint der affine Zusammenhang als *Gravitationsfeld* —; auf der dritten endlich das *metrische* Kontinuum — physikalisch: *der „Äther"*, dessen Zustände sich in den Erscheinungen der Materie und Elektrizität kundgeben.

## § 2. Situs-Mannigfaltigkeit (leere Welt).

Infolge der Schwierigkeit, das anschauliche Wesen des stetigen Zusammenhangs durch eine rein logische Konstruktion zu erfassen, ist eine voll befriedigende Analyse des Begriffs der *n-dimensionalen Mannigfaltigkeit* heute nicht möglich[5]). Uns genügt folgendes: Eine $n$-dimensionale Mannigfaltigkeit läßt sich auf $n$ Koordinaten $x_1 x_2 \ldots x_n$ beziehen, deren jede in jedem Punkt der Mannigfaltigkeit einen bestimmten Zahlwert besitzt; verschiedenen Punkten entsprechen verschiedene Wertsysteme der Koordinaten; ist $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n$ ein zweites System von Koordinaten, so bestehen zwischen den $x$- und den $\bar{x}$-Koordinaten desselben willkürlichen Punktes gesetzmäßige Beziehungen

$$x_i = f_i(\bar{x}_1 \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

wo $f_i$ rein logisch-arithmetisch konstruierbare Funktionen bedeuten; von ihnen setzen wir nicht nur voraus, daß sie stetig sind, sondern auch, daß sie stetige Ableitungen

$$\alpha_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial \bar{x}_k}$$

besitzen, deren Determinante nicht verschwindet. Die letzte Bedingung ist notwendig und hinreichend, damit im Unendlichkleinen die affine Geometrie gilt, damit nämlich zwischen den Koordinatendifferentialen in beiden Systemen umkehrbare lineare Beziehungen statthaben:

$$(1) \qquad dx_i = \sum_k \alpha_{ik} d\bar{x}_k .$$

Die Existenz und Stetigkeit höherer Ableitungen nehmen wir an, wo wir ihrer im Laufe der Untersuchung bedürfen. Auf jeden Fall hat also der Begriff der stetigen und stetig differentiierbaren Ortsfunktion, ev. auch der der 2, 3, ... mal stetig differentiierbaren einen invarianten, vom Koordinatensystem unabhängigen Sinn; die Koordinaten selber sind derartige Funktionen. — Eine $n$-dimensionale Mannigfaltigkeit, an der wir keine andern Eigenschaften in Betracht ziehen außer denjenigen, die im Begriff der $n$-dimensionalen Mannigfaltigkeit liegen, nennen wir — in physikalischer Terminologie — eine ($n$-dimensionale) *leere Welt.*

[5]) Vgl. darüber H. Weyl, Das Kontinuum (Leipzig 1918), namentlich S. 77ff.

Die relativen Koordinaten $dx_i$ eines zu dem Punkte $P = (x_i)$ unendlich benachbarten Punktes $P' = (x_i + dx_i)$ sind die Komponenten eines *Linienelementes* in $P$ oder einer *infinitesimalen Verschiebung* $\overrightarrow{PP'}$ von $P$. Bei Übergang zu einem andern Koordinatensystem gelten für diese Komponenten die Formeln (1), in denen $\alpha_{ik}$ die Werte der betreffenden Ableitungen im Punkte $P$ bedeuten. Allgemeiner charakterisieren im Punkte $P$ — bei Zugrundelegung eines bestimmten Koordinatensystems für die Umgebung von $P$ — irgend $n$ in bestimmter Reihenfolge gegebene Zahlen $\xi^i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ einen *Vektor* (oder eine *Verschiebung*) in $P$; die Komponenten $\xi^i$, bzw. $\bar{\xi}^i$ desselben Vektors in irgend zwei Koordinatensystemen, dem „ungestrichenen" und „gestrichenen", hängen durch die gleichen linearen Transformationsformeln (1) zusammen:

$$\xi^i = \sum_k \alpha_{ik} \bar{\xi}^k.$$

Vektoren in $P$ kann man addieren und mit Zahlen multiplizieren; sie bilden also eine „lineare" oder „affine" Gesamtheit. Mit jedem Koordinatensystem sind $n$ „Einheitsvektoren" $\mathfrak{e}_i$ in $P$ verbunden, nämlich diejenigen, welche in dem betreffenden Koordinatensystem die Komponenten

$$\begin{array}{c|l}
\mathfrak{e}_1 & 1, 0, 0, \ldots, 0 \\
\mathfrak{e}_2 & 0, 1, 0, \ldots, 0 \\
\cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\mathfrak{e}_n & 0, 0, 0, \ldots, 1
\end{array}$$

besitzen.

Je zwei (linear unabhängige) Linienelemente in $P$ mit den Komponenten $dx_i$, bzw. $\delta x_i$ spannen ein (zweidimensionales) Flächenelement in $P$ auf mit den Komponenten

$$dx_i\,\delta x_k - dx_k\,\delta x_i = \Delta x_{ik},$$

je drei (unabhängige) Linienelemente $dx_i$, $\delta x_i$, $\mathfrak{d} x_i$ in $P$ ein (dreidimensionales) Raumelement mit den Komponenten

$$\begin{vmatrix} dx_i & dx_k & dx_l \\ \delta x_i & \delta x_k & \delta x_l \\ \mathfrak{d} x_i & \mathfrak{d} x_k & \mathfrak{d} x_l \end{vmatrix} = \Delta x_{ikl};$$

usw. Eine von einem willkürlichen Linien- oder Flächen- oder Raum- oder ... Element in $P$ abhängige Linearform heißt ein *linearer Tensor* 1., bzw. 2., 3., ... Stufe. Bei Benutzung eines bestimmten Koordinatensystems können die Koeffizienten $a$ dieser Linearform

$$\sum_i a_i\,dx_i, \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{2!}\sum_{ik} a_{ik}\,\Delta x_{ik}, \quad \frac{1}{3!}\sum_{ikl} a_{ikl}\,\Delta x_{ikl}, \ \ldots$$

eindeutig durch die Forderung des Alternierens normiert werden; diese besagt in dem letzten hingeschriebenen Fall z. B., daß Indextripeln $(ikl)$, die durch eine gerade Permutation auseinander hervorgehen, derselbe Koeffizient $a_{ikl}$ entspricht, während bei ungerader Permutation der Koeffizient in sein Negatives umschlägt, also

$$a_{ikl} = a_{kli} = a_{lik} = -a_{kil} = -a_{lki} = -a_{ilk}.$$

Die so normierten Koeffizienten werden als die *Komponenten* des betreffenden Tensors bezeichnet. Aus einem Skalarfeld $f$ entspringt durch Differentiation ein lineares Tensorfeld 1. Stufe mit den Komponenten

$$f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i};$$

aus einem linearen Tensorfeld 1. Stufe $f_i$ ein solches 2. Stufe:

$$f_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial x_k} - \frac{\partial f_k}{\partial x_i};$$

aus einem solchen 2. Stufe ein lineares Tensorfeld 3. Stufe:

$$f_{ikl} = \frac{\partial f_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial f_{li}}{\partial x_k} + \frac{\partial f_{ik}}{\partial x_l};$$

usf. Diese Operationen sind von dem benutzten Koordinatensystem unabhängig[6]).

Ein linearer Tensor 1. Stufe in $P$ möge eine dort angreifende *Kraft* heißen. Eine solche wird also bei Zugrundelegung eines bestimmten Koordinatensystems charakterisiert durch $n$ Zahlen $\xi_i$, die sich bei Übergang zu einem andern Koordinatensystem kontragredient zu den Verschiebungskomponenten transformieren:

$$\bar{\xi}_i = \sum_k \alpha_{ki} \xi_k.$$

Sind $\eta^i$ die Komponenten einer willkürlichen Verschiebung in $P$, so ist $\sum_i \xi_i \eta^i$ eine Invariante. Unter *Tensor* in $P$ wird allgemein eine Linearform einer oder mehrerer willkürlicher Verschiebungen und Kräfte in $P$ verstanden. Liegt z. B. eine Linearform dreier willkürlicher Verschiebungen $\xi, \eta, \zeta$ und zweier willkürlicher Kräfte $\varrho, \sigma$ vor:

$$\sum a_{ikl}^{pq} \xi^i \eta^k \zeta^l \varrho_p \sigma_q,$$

so sprechen wir von einem Tensor 5. Stufe mit den in bezug auf die Indizes $ikl$ kovarianten, in bezug auf die Indizes $pq$ kontravarianten Komponenten $a$. Eine Verschiebung ist selber ein kontravarianter, eine

[6]) RZM, § 13.

Kraft ein kovarianter Tensor 1. Stufe. Die Fundamentaloperationen der Tensoralgebra sind [7]):

1. Addition von Tensoren und Multiplikation mit einer Zahl;
2. Multiplikation von Tensoren;
3. Verjüngung.

Die Tensoralgebra läßt sich demnach schon in der leeren Welt begründen — sie setzt keine Maßbestimmung voraus —, von der Tensoranalysis hingegen nur die der „linearen" Tensoren. —

Eine „*Bewegung*" in unserer Mannigfaltigkeit ist gegeben, wenn jedem Wert $s$ eines reellen Parameters in stetiger Weise ein Punkt zugeordnet ist; bei Benutzung eines Koordinatensystems $x_i$ drückt sich die Bewegung durch Formeln $x_i = x_i(s)$ aus, in denen rechts die $x_i$ als Funktionszeichen zu verstehen sind. Setzen wir stetige Differentiierbarkeit voraus, so erhalten wir, unabhängig vom Koordinatensystem, zu jedem Punkte $P=(s)$ der Bewegung einen Vektor in $P$ mit den Komponenten

$$u^i = \frac{dx_i}{ds},$$

die *Geschwindigkeit*. Zwei Bewegungen, die durch stetige monotone Transformation des Parameters $s$ auseinander hervorgehen, beschreiben dieselbe *Kurve*.

## § 3. Affin zusammenhängende Mannigfaltigkeit (Welt mit Gravitationsfeld).

### I. Begriff des affinen Zusammenhangs.

Ist $P'$ ein zu dem festen Punkt $P$ unendlich benachbarter, so *hängt* $P'$ mit $P$ *affin zusammen*, wenn von jedem Vektor in $P$ feststeht, in welchen Vektor in $P'$ er durch *Parallelverschiebung* von $P$ nach $P'$ übergeht. Die Parallelverschiebung der sämtlichen Vektoren in $P$ von dort nach $P'$ muß dabei selbstverständlich der folgenden Forderung genügen.

**A.** *Die Verpflanzung der Gesamtheit der Vektoren von $P$ nach dem unendlich benachbarten Punkte $P'$ durch Parallelverschiebung liefert eine affine Abbildung der Vektoren in $P$ auf die Vektoren in $P'$.*

Benutzen wir ein Koordinatensystem und hat $P$ darin die Koordinaten $x_i$, $P'$ die Koordinaten $x_i + dx_i$, ein beliebiger Vektor in $P$ die Komponenten $\xi^i$, der Vektor in $P'$, der aus ihm durch Parallelverschiebung nach $P'$ hervorgeht, die Komponenten $\xi^i + d\xi^i$, so muß also $d\xi^i$ linear von den $\xi^i$ abhängen:

---

[7]) RZM, § 6.

$$d\xi^i = -\sum_r d\gamma^i_r \xi^r.$$

$d\gamma^i_r$ sind infinitesimale Größen, die nur vom Punkte $P$ und der Verschiebung $\overrightarrow{PP'}$ mit den Komponenten $dx_i$ abhängen, nicht aber von dem der Parallelverschiebung unterworfenen Vektor $\xi$. Wir betrachten fortan affin zusammenhängende Mannigfaltigkeiten; in einer solchen steht jeder Punkt $P$ mit all seinen unendlich benachbarten in affinem Zusammenhang. An den Begriff der Parallelverschiebung ist noch eine zweite Forderung, die der *Kommutativität*, zu stellen.

**B.** *Sind $P_1$, $P_2$ zwei zu $P$ unendlich benachbarte Punkte und geht der infinitesimale Vektor $\overrightarrow{PP_1}$ durch Parallelverschiebung von $P$ nach $P_2$ in $\overrightarrow{P_2P_{21}}$ über, $\overrightarrow{PP_2}$ aber durch Parallelverschiebung nach $P_1$ in $\overrightarrow{P_1P_{12}}$, so fallen $P_{12}$ und $P_{21}$ zusammen.* (Es entsteht eine unendlich kleine Parallelogrammfigur.)

Bezeichnen wir die Komponenten von $\overrightarrow{PP_1}$ mit $dx_i$, die von $\overrightarrow{PP_2}$ mit $\delta x_i$, so besagt diese Forderung offenbar, daß

$$d\,\delta x_i = -\sum_r d\gamma^i_r \cdot \delta x_r \tag{2}$$

eine symmetrische Funktion der beiden Linienelemente $d$ und $\delta$ ist. Folglich muß $d\gamma^i_r$ eine Linearform der Differentiale $dx_i$ sein,

$$d\gamma^i_r = \sum_s \Gamma^i_{rs}\,dx_s,$$

und es müssen die nur von der Stelle $P$ abhängigen Koeffizienten $\Gamma$, die „*Komponenten des affinen Zusammenhangs*", der Symmetriebedingung

$$\Gamma^i_{sr} = \Gamma^i_{rs}$$

genügen.

Wegen der Art und Weise, wie in der Formulierung der Forderung **B.** mit infinitesimalen Größen umgegangen wird, könnte dieser vorgeworfen werden, daß sie eines präzisen Sinns entbehre. Wir wollen deshalb noch ausdrücklich durch einen strengen Beweis feststellen, daß die Symmetrie von (2) eine vom Koordinatensystem unabhängige Bedingung ist. Zu dem Zwecke ziehen wir ein (zweimal stetig differentiierbares) Skalarfeld $f$ heran. Aus der Formel für das totale Differential

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

entnehmen wir, daß, wenn $\xi^i$ die Komponenten eines willkürlichen Vektors in $P$ sind,

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \xi^i$$

eine vom Koordinatensystem unabhängige Invariante ist. Wir bilden deren Änderung bei einer zweiten infinitesimalen Verschiebung $\delta$, bei welcher der Vektor $\xi$ parallel mit sich von $P$ nach $P_2$ verschoben werden soll, und erhalten

$$\delta df = \sum_{ik} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \xi^i \delta x_k - \sum_{ir} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \delta \gamma^i{}_r \, \xi^r .$$

Ersetzen wir hierin $\xi^i$ wieder durch $dx_i$ und ziehen von dieser Gleichung die durch Vertauschung von $d$ und $\delta$ entstandene ab, so ergibt sich die Invariante

$$\Delta f = (\delta d - d\delta) f = \sum_i \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \sum_r (d\gamma^i{}_r \delta x_r - \delta \gamma^i{}_r dx_r) \right\}.$$

Die Beziehungen

$$\sum_r (d\gamma^i{}_r \delta x_r - \delta\gamma^i{}_r dx_r) = 0$$

enthalten die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß für jedes Skalarfeld $f$ die Gleichung $\Delta f = 0$ erfüllt ist.

In physikalischer Ausdrucksweise ist ein affin zusammenhängendes Kontinuum als eine Welt zu bezeichnen, in der ein *Gravitationsfeld* herrscht. Die Größen $\Gamma^i{}_{rs}$ sind die Komponenten des Gravitationsfeldes. Die Formeln, nach denen sich diese Komponenten beim Übergang von dem einen zum andern Koordinatensystem transformieren, brauchen wir hier nicht anzugeben. $\Gamma^i{}_{rs}$ verhalten sich gegenüber linearer Transformation wie die in bezug auf $r$ und $s$ kovarianten, in bezug auf $i$ kontravarianten Komponenten eines Tensors, verlieren diesen Charakter jedoch bei nichtlinearen Transformationen. Wohl aber sind die Änderungen $\delta\Gamma^i{}_{rs}$, welche die Größen $\Gamma$ erfahren, wenn man den affinen Zusammenhang der Mannigfaltigkeit willkürlich abändert, die Komponenten eines allgemein-invarianten Tensors von dem angegebenen Charakter.

Was unter *Parallelverschiebung einer Kraft* in $P$ von dort nach dem unendlich benachbarten Punkte $P'$ zu verstehen ist, ergibt sich aus der Forderung, daß das invariante Produkt dieser Kraft und eines willkürlichen Vektors in $P$ bei Parallelverschiebung erhalten bleibe. Sind $\xi_i$ die Komponenten der Kraft, $\eta^i$ die der Verschiebung, so liefert[8])

$$d(\xi_i \eta^i) = (d\xi_i \cdot \eta^i) + \xi_r d\eta^r = (d\xi_i - d\gamma^r{}_i \xi_r)\eta^i = 0$$

die Formel

$$d\xi_i = \sum_r d\gamma^r{}_i \xi_r .$$

[8]) Wir verwenden im folgenden die Einsteinsche Festsetzung, daß über Indizes, die in einem Formelglied doppelt auftreten, stets zu summieren ist, ohne daß wir es nötig erachten, jedesmal ein Summenzeichen davor zu setzen.

Zu jeder Stelle $P$ kann man ein Koordinatensystem $x_i$ von solcher Art einführen — ich nenne es *geodätisch* in $P$ —, daß in ihm die Komponenten $\Gamma^i_{rs}$ des affinen Zusammenhangs an der Stelle $P$ verschwinden. Sind zunächst $x_i$ beliebige Koordinaten, die in $P$ verschwinden, und bedeuten $\Gamma^i_{rs}$ die Komponenten des affinen Zusammenhangs an der Stelle $P$ in diesem Koordinatensystem, so erhält man ein geodätisches $\bar{x}_i$ durch die Transformation

$$x_i = \bar{x}_i - \tfrac{1}{2}\sum_{rs} \Gamma^i_{rs}\bar{x}_r\bar{x}_s. \tag{3}$$

Betrachten wir nämlich die $\bar{x}_i$ als unabhängige Variable und deren Differentiale $d\bar{x}_i$ als Konstante, so gilt im Sinne Cauchys an der Stelle $P(\bar{x}_i = 0)$:

$$dx_i = d\bar{x}_i, \qquad d^2 x_i = -\Gamma^i_{rs}\, d\bar{x}_r d\bar{x}_s,$$

also

$$d^2 x_i + \Gamma^i_{rs}\, dx_r dx_s = 0.$$

Wegen ihrer invarianten Natur lauten die letzten Gleichungen im Koordinatensystem $\bar{x}_i$:

$$d^2\bar{x}_i + \bar{\Gamma}^i_{rs}\, d\bar{x}_r d\bar{x}_s = 0.$$

Diese sind aber für beliebige konstante $d\bar{x}_i$ nur erfüllt, wenn alle $\bar{\Gamma}^i_{rs}$ verschwinden. *Das Gravitationsfeld kann demnach durch geeignete Wahl des Koordinatensystems an einer einzelnen Stelle stets zum Verschwinden gebracht werden.* Durch die Forderung der „Geodäsie" in $P$ sind Koordinaten in der Umgebung von $P$, wenn man lineare Transformation frei gibt, bestimmt bis auf Glieder 3. Ordnung; d. h. sind $x_i$, $\bar{x}_i$ zwei in $P$ geodätische Koordinatensysteme und verschwinden sowohl die $x_i$ wie die $\bar{x}_i$ in $P$, so gelten unter Vernachlässigung von Gliedern, die in den $\bar{x}_i$ von 3. und höherer Ordnung sind, lineare Transformationsformeln $x_i = \sum_k \alpha_{ik}\bar{x}_k$ mit konstanten Koeffizienten $\alpha_{ik}$.

## II. Tensoranalysis. Gerade Linie.

Erst im affin zusammenhängenden Raum läßt sich die *Tensoranalysis* vollständig begründen. Sind beispielsweise $f_i^k$ die in $i$ kovarianten, in $k$ kontravarianten Komponenten eines Tensorfeldes 2. Stufe, so nehmen wir im Punkte $P$ eine willkürliche Verschiebung $\xi$ und eine Kraft $\eta$ zu Hilfe, bilden die Invariante

$$f_i^k \xi^i \eta_k$$

und ihre Änderung bei einer unendlich kleinen Verrückung $d$ des Argumentpunktes $P$, bei welcher $\xi$ und $\eta$ parallel mit sich verschoben werden. Es ist

$$d(f_i^k \xi^i \eta_k) = \frac{\partial f_i^k}{\partial x_l}\xi^i \eta_k dx_l - f_r^k \eta_k d\gamma^r_i \xi^i + f_i^r \xi^i d\gamma^k_r \eta_k,$$

also sind

$$f^k_{il} = \frac{\partial f^k_i}{\partial x_l} - \Gamma^r_{il} f^k_r + \Gamma^k_{rl} f^r_i$$

die in $il$ kovarianten, in $k$ kontravarianten Komponenten eines Tensorfeldes 3. Stufe, das aus dem gegebenen Tensorfeld 2. Stufe in einer vom Koordinatensystem unabhängigen Weise entspringt.

Im affin zusammenhängenden Raum gewinnt der Begriff der *geraden oder geodätischen Linie* einen bestimmten Sinn. Die Gerade entsteht, wenn man einen Vektor beständig parallel mit sich in seiner eigenen Richtung verschiebt, als Bahnkurve des Anfangspunktes dieses Vektors; sie kann daher als diejenige Kurve bezeichnet werden, die ihre Richtung ungeändert beibehält. Sind $u^i$ die Komponenten jenes Vektors, so sollen also im Verlaufe der Bewegung beständig die Gleichungen

$$du^i + \Gamma^i_{\alpha\beta} u^\alpha dx_\beta = 0,$$

$$dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_n = u^1 : u^2 : \ldots : u^n$$

gelten. Den zur Darstellung der Kurve zu benutzenden Parameter $s$ können wir demnach so normieren, daß identisch in $s$

$$\frac{dx_i}{ds} = u^i$$

ist, und die Differentialgleichungen der geraden Linie lauten dann

$$w^i \equiv \frac{d^2 x_i}{ds^2} + \Gamma^i_{\alpha\beta} \frac{dx_\alpha}{ds} \frac{dx_\beta}{ds} = 0.$$

Für jede beliebige Bewegung $x_i = x_i(s)$ sind die linken Seiten dieser Gleichungen die Komponenten eines mit der Bewegung invariant verknüpften Vektors im Punkte $s$, der *Beschleunigung*. In der Tat gilt, wenn $\xi_i$ eine willkürliche Kraft in jenem Punkte ist, die beim Übergang zum Punkte $s + ds$ parallel mit sich verschoben wird,

$$\frac{d(u^i \xi_i)}{ds} = w^i \xi_i.$$

Eine Bewegung, deren Beschleunigung identisch verschwindet, heißt eine *Translation*. Unter gerader Linie — so kann man unsere obige Erklärung auch fassen — ist die Bahnkurve einer Translation zu verstehen.

## III. Krümmung.

Sind $P$ und $Q$ zwei durch eine Kurve verbundene Punkte, in deren erstem ein Vektor gegeben ist, so kann man diesen parallel mit sich längs der Kurve von $P$ nach $Q$ schieben. Die so zustande kommende *Vektorübertragung* ist jedoch im allgemeinen *nicht integrabel*; d. h. der Vektor, zu dem man in $Q$ gelangt, ist abhängig von dem Verschiebungswege, auf dem die Übertragung vollzogen wird. Nur in dem besonderen Fall, wo Integrabilität stattfindet, hat es einen Sinn, von dem *gleichen* Vektor in zwei verschiedenen Punkten $P$ und $Q$ zu sprechen; es sind darunter solche Vektoren zu verstehen, die durch Parallelverschiebung auseinander hervorgehen. Alsdann heißt die Mannigfaltigkeit *Euklidisch*. In einer solchen lassen sich besondere, „lineare" Koordinatensysteme einführen, die dadurch ausgezeichnet sind, daß bei ihrer Benutzung gleiche Vektoren in verschiedenen Punkten gleiche Komponenten besitzen. Je zwei solche lineare Koordinatensysteme hängen durch lineare Transformationsformeln zusammen. In einem linearen Koordinatensystem verschwinden die Komponenten des Gravitationsfeldes identisch.

In der oben (§ 3, I., **B.**) konstruierten unendlichkleinen Parallelogrammfigur bringen wir im Punkte $P$ einen beliebigen Vektor mit den Komponenten $\xi^i$ an, verschieben ihn einmal parallel mit sich nach $P_1$ und von da nach $P_{12}$, ein andermal zunächst nach $P_2$ und von dort nach $P_{21}$. Da $P_{12}$ mit $P_{21}$ zusammenfällt, können wir die Differenz dieser beiden Vektoren in jenem Punkte bilden und erhalten dadurch offenbar einen Vektor mit den Komponenten

$$\Delta\xi^i = \delta d\xi^i - d\delta\xi^i$$

daselbst. Aus

$$d\xi^i = -d\gamma^i_k\xi^k = -\Gamma^i_{kl}\,dx_l\,\xi^k$$

folgt

$$\delta d\xi^i = -\frac{\partial\Gamma^i_{kl}}{\partial x_m}dx_l\,\delta x_m\,\xi^k - \Gamma^i_{kl}\,\delta dx_l\cdot\xi^k + d\gamma^i_r\,\delta\gamma^r_k\,\xi^k$$

und wegen der Symmetrie von $\delta dx_l$:

$$\Delta\xi^i = \left\{\left(\frac{\partial\Gamma^i_{km}}{\partial x_l} - \frac{\partial\Gamma^i_{kl}}{\partial x_m}\right)dx_l\,\delta x_m + (d\gamma^i_r\,\delta\gamma^r_k - d\gamma^r_k\,\delta\gamma^i_r)\right\}\xi^k.$$

Wir erhalten also

$$\Delta\xi^i = \Delta R^i_k\,\xi^k,$$

wo $\Delta R^i_k$ von dem verschobenen Vektor $\xi$ unabhängige Linearformen der beiden Verrückungen $d$ und $\delta$ oder vielmehr des von ihnen aufgespannten Flächenelements mit den Komponenten

$$\Delta x_{lm} = dx_l\,\delta x_m - dx_m\,\delta x_l$$

sind:

$$\Delta R^i_k = R^i_{klm}\,dx_l\,\delta x_m = \tfrac{1}{2}R^i_{klm}\,\Delta x_{lm} \qquad (R^i_{kml} = -R^i_{klm}), \tag{4}$$

$$R^i_{klm} = \left(\frac{\partial\Gamma^i_{km}}{\partial x_l} - \frac{\partial\Gamma^i_{kl}}{\partial x_m}\right) + (\Gamma^i_{lr}\,\Gamma^r_{km} - \Gamma^i_{mr}\,\Gamma^r_{kl}). \tag{5}$$

Sind $\eta_i$ die Komponenten einer willkürlichen Kraft in $P$, so ist $\eta_i\Delta\xi^i$

eine Invariante; $R^i_{\ klm}$ sind folglich die in $klm$ kovarianten, in $i$ kontravarianten Komponenten eines Tensors 4. Stufe in $P$, der *Krümmung*. Das identische Verschwinden der Krümmung ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Mannigfaltigkeit Euklidisch ist. Außer der neben (4) verzeichneten Bedingung der „schiefen" erfüllen die Krümmungskomponenten noch die Bedingung der „zyklischen" Symmetrie:

$$R^i_{\ klm} + R^i_{\ lmk} + R^i_{\ mkl} = 0 .$$

Von Hause aus ist die Krümmung in einem Punkte $P$ eine lineare Abbildung oder Transformation $\Delta \mathsf{P}$, welche jedem Vektor $\xi$ daselbst einen Vektor $\Delta\xi$ zuordnet; diese Transformation hängt selber linear von einem Flächenelement in $P$ ab:

$$\Delta \mathsf{P} = \mathsf{P}_{ik}\, dx_i\, \delta x_k = \tfrac{1}{2}\mathsf{P}_{ik}\, \Delta x_{ik} \qquad (\mathsf{P}_{ki} = -\mathsf{P}_{ik}).$$

Die Krümmung ist demnach am besten als ein „linearer Transformationen-Tensor 2. Stufe" zu bezeichnen.

Um den Beweis für die Invarianz des Krümmungstensors gegen Einwände sicherzustellen, die etwa gegen die obige Infinitesimalüberlegung erhoben werden könnten, benutze man ein Kraftfeld $f_i$, bilde die Änderung $d(f_i \xi^i)$ des invarianten Produkts $f_i \xi^i$ in solcher Weise, daß bei der unendlichkleinen Verrückung $d$ der Vektor $\xi$ parallel mit sich verschoben wird. Ersetzt man in dem erhaltenen Ausdruck die infinitesimale Verrückung $dx$ durch einen beliebigen Vektor $\varrho$ in $P$, so erhält man eine invariante Bilinearform zweier willkürlicher Vektoren $\xi$ und $\varrho$ in $P$. Von ihr bilde man die Änderung, welche einer zweiten unendlichkleinen Verrückung $\delta$ entspricht, indem man dabei die Vektoren $\xi, \varrho$ parallel mitnimmt, und ersetze hernach die zweite Verrückung durch einen Vektor $\sigma$ in $P$. Man findet die Form

$$\delta d(f_i \xi^i) = \delta d f_i \cdot \xi^i + d f_i\, \delta \xi^i + \delta f_i\, d\xi^i + f_i\, \delta d \xi^i .$$

Durch Vertauschung von $d$ und $\delta$ und nachfolgende Subtraktion ergibt sich daraus wegen der Symmetrie von $\delta d f_i$ die Invariante

$$\Delta(f_i \xi^i) = f_i \Delta \xi^i ,$$

und damit ist der gewünschte Nachweis erbracht.

## § 4. Metrische Mannigfaltigkeit (der Äther).

### I. Begriff der metrischen Mannigfaltigkeit.

Eine Mannigfaltigkeit *trägt im Punkte $P$ eine Maßbestimmung*, wenn die Linienelemente in $P$ sich ihrer Länge nach vergleichen lassen; wir nehmen dabei im Unendlichkleinen die Gültigkeit der Pythagoreisch-

Euklidischen Gesetze an. Es soll also je zwei Vektoren $\xi$, $\eta$ in $P$ eine Zahl $\xi \cdot \eta$ als *skalares Produkt* entsprechen, die in ihrer Abhängigkeit von beiden eine symmetrische Bilinearform ist; diese Bilinearform ist freilich nicht absolut, sondern nur bis auf einen willkürlichen, von 0 verschiedenen Proportionalitätsfaktor bestimmt. Es ist also nicht eigentlich die Form $\xi \cdot \eta$, sondern nur die Gleichung $\xi \cdot \eta = 0$ gegeben; zwei Vektoren, welche sie erfüllen, heißen zueinander *senkrecht*. Wir setzen voraus, daß jene Gleichung nicht-ausgeartet sei, d. h. daß der einzige Vektor in $P$, auf welchem alle Vektoren in $P$ senkrecht stehen, der Vektor 0 ist. Wir setzen dagegen nicht voraus, daß die zugehörige quadratische Form $\xi \cdot \xi$ positiv-definit ist. Hat sie den Trägheitsindex $q$ und ist $n - q = p$, so sagen wir kurz, die Mannigfaltigkeit sei in dem betrachteten Punkte $(p + q)$-dimensional; wegen des willkürlichen Proportionalitätsfaktors sind die beiden Zahlen $p, q$ nur bis auf ihre Reihenfolge bestimmt. Wir nehmen jetzt an, daß unsere Mannigfaltigkeit in jedem Punkte eine Maßbestimmung trägt. Zum Zwecke der analytischen Darstellung denken wir uns 1. ein bestimmtes Koordinatensystem und 2. den an jeder Stelle willkürlich zu wählenden Proportionalitätsfaktor im skalaren Produkt festgelegt; damit ist ein „*Bezugssystem*“ [9]) für die analytische Darstellung gewonnen. Hat dann der Vektor $\xi$ im Punkte $P$ mit den Koordinaten $x_i$ die Komponenten $\xi^i$, $\eta$ die Komponenten $\eta^i$, so wird

$$(\xi \cdot \eta) = \sum_{ik} g_{ik} \xi^i \eta^k \qquad (g_{ki} = g_{ik})$$

sein, wo die Koeffizienten $g_{ik}$ Funktionen der $x_i$ sind. Die $g_{ik}$ sollen nicht nur stetig, sondern zweimal stetig differentiierbar sein. Da sie stetig sind und ihre Determinante $g$ nach Voraussetzung nirgendwo verschwindet, hat die quadratische Form $(\xi \cdot \xi)$ an allen Stellen den gleichen Trägheitsindex $q$; wir können daher die Mannigfaltigkeit in ihrem ganzen Verlaufe als $(p + q)$-dimensional bezeichnen. Behalten wir das Koordinatensystem bei, legen aber eine andere Wahl des unbestimmten Proportionalitätsfaktors zugrunde, so bekommen wir statt der $g_{ik}$ als Koeffizienten des skalaren Produkts Größen

$$g'_{ik} = \lambda \cdot g_{ik},$$

wo $\lambda$ eine nirgendwo verschwindende stetige (und zweimal stetig differentiierbare) Ortsfunktion ist.

Zufolge der bisherigen Annahme ist die Mannigfaltigkeit nur mit einer *Winkelmessung* ausgestattet; die Geometrie, welche auf sie allein sich stützt, wäre als „*konforme Geometrie*“ zu bezeichnen; sie hat be-

---

[9]) Ich unterscheide also zwischen „Koordinatensystem“ und „Bezugssystem“.

kanntlich im Gebiete der zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten („Riemannschen Flächen") wegen ihrer Wichtigkeit für die komplexe Funktionentheorie eine weitgehende Ausbildung erfahren. Machen wir keine weitere Voraussetzung, so bleiben die einzelnen Punkte der Mannigfaltigkeit in metrischer Hinsicht vollständig gegeneinander isoliert. Ein metrischer Zusammenhang von Punkt zu Punkt wird erst dann in sie hineingetragen, wenn ein *Prinzip der Übertragung der Längeneinheit von einem Punkte P zu seinen unendlich benachbarten* vorliegt. Statt dessen machte Riemann die viel weitergehende Annahme, daß sich Linienelemente nicht nur an derselben Stelle, sondern auch an irgend zwei endlich entfernten Stellen ihrer Länge nach miteinander vergleichen lassen. ***Die Möglichkeit einer solchen „ferngeometrischen" Vergleichung kann aber in einer reinen Infinitesimalgeometrie durchaus nicht zugestanden werden.*** Die Riemannsche Annahme ist auch in die Einsteinsche Weltgeometrie der Gravitation übergegangen. Hier soll diese Inkonsequenz beseitigt werden.

Sei $P$ ein fester Punkt, $P_*$ ein unendlich benachbarter, der aus ihm durch die Verschiebung mit den Komponenten $dx_i$ hervorgeht. Wir legen ein bestimmtes Bezugssystem zugrunde. Im Verhältnis zu der damit in $P$ (sowie in allen übrigen Punkten des Raumes) festgelegten Längeneinheit wird das Quadrat der Länge eines beliebigen Vektors $\xi$ in $P$ gegeben sein durch

$$\sum_{ik} g_{ik}\,\xi^i\,\xi^k.$$

Das Längenquadrat eines beliebigen Vektors $\xi_*$ in $P_*$ aber wird, *wenn wir die in $P$ gewählte Längeneinheit von $P$ nach $P_*$ übertragen*, wie wir das als möglich voraussetzen, gegeben werden durch

$$(1+d\varphi)\sum_{ik}(g_{ik}+dg_{ik})\,\xi_*^i\,\xi_*^k,$$

wo $1+d\varphi$ einen unendlich wenig von 1 abweichenden Proportionalitätsfaktor bedeutet; $d\varphi$ muß eine homogene Funktion der Differentiale $dx_i$ von der Ordnung 1 sein. Verpflanzen wir nämlich die im Punkte $P$ gewählte Längeneinheit von Punkt zu Punkt längs einer Kurve, die von $P$ nach dem endlich entfernten Punkte $Q$ führt, so erhalten wir für das Quadrat der Länge eines beliebigen Vektors in $Q$, unter Zugrundelegung der so in $Q$ gewonnenen Längeneinheit, den Ausdruck $g_{ik}\,\xi^i\,\xi^k$, multipliziert mit einem Proportionalitätsfaktor, der sich als Produkt der unendlich vielen einzelnen Faktoren von der Form $1+d\varphi$ ergibt, die jeweils beim Übergang von einem Punkt der Kurve zum nächsten hinzutreten:

$$\Pi(1+d\varphi)=\Pi e^{d\varphi}=e^{\Sigma d\varphi}=e^{\int_P^Q d\varphi}.$$

Damit das im Exponenten auftretende Integral einen Sinn hat, muß $d\varphi$ eine Funktion der Differentiale von der behaupteten Art sein.

Ersetzt man $g_{ik}$ durch $g'_{ik} = \lambda g_{ik}$, so wird an Stelle von $d\varphi$ eine andere Größe $d\varphi'$ treten. Es muß dabei, wenn $\lambda$ den Wert dieses Faktors im Punkte $P$ bedeutet,

$$(1 + d\varphi')(g'_{ik} + a g_{ik}) = \lambda(1 + d\varphi)(g_{ik} + dg_{ik})$$

sein, und das ergibt

$$d\varphi' = d\varphi - \frac{d\lambda}{\lambda}. \tag{6}$$

Von den zunächst über $d\varphi$ möglichen Annahmen, daß es eine lineare Differentialform ist oder die Wurzel aus einer quadratischen oder die Kubikwurzel aus einer kubischen usf., hat, wie wir jetzt aus (6) erkennen, nur die erste einen invarianten Sinn. Wir sind damit zu folgendem Resultat gelangt.

*Die Metrik einer Mannigfaltigkeit beruht auf einer quadratischen und einer linearen Differentialform*

$$ds^2 = g_{ik} dx_i dx_k \quad \textit{und} \quad d\varphi = \varphi_i dx_i. \tag{7}$$

*Umgekehrt sind aber durch die Metrik diese Formen nicht absolut festgelegt, sondern jedes Formenpaar $ds'^2$, $d\varphi'$, das aus (7) nach den Gleichungen*

$$ds'^2 = \lambda \cdot ds^2, \qquad d\varphi' = d\varphi - \frac{d\lambda}{\lambda} \tag{8}$$

*entspringt, ist dem ersten Paar in dem Sinne äquivalent, daß beide die gleiche Metrik zum Ausdruck bringen. $\lambda$ ist darin eine beliebige, nirgendwo verschwindende stetige* (genauer: zweimal stetig differentiierbare) *Ortsfunktion.* In alle Größen oder Beziehungen, welche metrische Verhältnisse analytisch darstellen, müssen demnach die Funktionen $g_{ik}$, $\varphi_i$ in solcher Weise eingehen, daß Invarianz stattfindet 1. gegenüber einer beliebigen Koordinatentransformation („Koordinaten-Invarianz") und 2. gegenüber der Ersetzung von (7) durch (8) („Maßstab-Invarianz"). $\frac{d\lambda}{\lambda} = d \lg \lambda$ ist ein totales Differential. Während also in der quadratischen Form $ds^2$ ein Proportionalitätsfaktor an jeder Stelle willkürlich bleibt, besteht die Unbestimmtheit von $d\varphi$ in einem additiven totalen Differential.

Eine metrische Mannigfaltigkeit bezeichnen wir in physikalischer Ausdrucksweise als eine vom *Äther* erfüllte Welt. Die bestimmte, in der Mannigfaltigkeit herrschende Metrik zeigt einen bestimmten Zustand des die Welt erfüllenden Äthers an. Dieser Zustand ist also relativ zu einem Bezugssystem durch Angabe (arithmetische Konstruktion) der Funktionen $g_{ik}$, $\varphi_i$ zu beschreiben.

Aus (6) geht hervor, daß der lineare Tensor 2. Stufe mit den Komponenten

$$F_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}$$

durch die Metrik der Mannigfaltigkeit eindeutig festgelegt ist; ich nenne ihn den *metrischen Wirbel.* Er ist, wie ich glaube, dasselbe, was in der Physik *elektromagnetisches Feld* heißt. Er genügt dem „ersten System der Maxwellschen Gleichungen“

$$\frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} + \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} = 0.$$

Sein Verschwinden ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Längenübertragung integrabel ist, daß also jene Voraussetzungen Platz greifen, welche Riemann der metrischen Geometrie zugrunde legte. Wir verstehen daher, wie Einstein durch seine Weltgeometrie, die sich in mathematischer Hinsicht an Riemann anschließt, nur von den Gravitations-, nicht aber von den elektromagnetischen Erscheinungen Rechenschaft geben konnte.

## II. Affiner Zusammenhang einer metrischen Mannigfaltigkeit.

Im metrischen Raum tritt an Stelle der in § 3, I. an den Begriff der infinitesimalen Parallelverschiebung gestellten Forderung **A** die weitergehende

**A***: *daß die Parallelverschiebung der sämtlichen Vektoren in einem Punkte P nach einem unendlich benachbarten P′ nicht nur eine affine, sondern eine kongruente Verpflanzung dieser Vektorgesamtheit sein muß.*

Unter Verwendung der damaligen Bezeichnungen ergibt diese Forderung die Gleichung

$$(9) \qquad (1 + d\varphi)(g_{ik} + dg_{ik})(\xi^i + d\xi^i)(\xi^k + d\xi^k) = g_{ik}\xi^i\xi^k.$$

Bei allen Größen $a^i$, die einen oberen Index ($i$) tragen, definieren wir das „Herunterziehen“ dieses Index durch die Gleichungen

$$a_i = \sum_k g_{ik} a^k$$

(und den umgekehrten Prozeß des Heraufziehens eines Index durch die dazu inversen Gleichungen). Für (9) können wir, diese Symbolik benutzend, schreiben:

$$(g_{ik}\xi^i\xi^k)\,d\varphi + \xi^i\xi^k dg_{ik} + 2\,\xi_i d\xi^i = 0.$$

Der letzte Term ist

$$= -2\,\xi_i\xi^k d\gamma^i_k = -2\,\xi^i\xi^k d\gamma_{ik} = -\xi^i\xi^k(d\gamma_{ik} + d\gamma_{ki});$$

es muß somit

$$(10) \qquad d\gamma_{ik} + d\gamma_{ki} = dg_{ik} + g_{ik}\, d\varphi$$

sein. Diese Gleichung läßt sich gewiß nur erfüllen, wenn $d\varphi$ eine lineare Differentialform ist; eine Annahme, zu der wir schon oben als der einzig vernünftigen gedrängt wurden. Aus (10) oder

$$(10^*) \qquad \Gamma_{i,kr} + \Gamma_{k,ir} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r} + g_{ik}\varphi_r$$

folgt in Anbetracht der Symmetrieeigenschaft $\Gamma_{r,ik} = \Gamma_{r,ki}$:

$$(11) \qquad \Gamma_{r,ik} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ir}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{kr}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r}\right) + \tfrac{1}{2}(g_{ir}\varphi_k + g_{kr}\varphi_i - g_{ik}\varphi_r);$$

$$(\Gamma_{r,ik} = g_{rs}\Gamma^{s}_{ik}).$$

Es zeigt sich somit, daß in einer metrischen Mannigfaltigkeit der Begriff der infinitesimalen Parallelverschiebung eines Vektors durch die aufgestellten Forderungen eindeutig festgelegt wird[10]. Ich betrachte dies als die *Grundtatsache der Infinitesimalgeometrie*, daß mit der Metrik auch der affine Zusammenhang einer Mannigfaltigkeit gegeben ist, *das Prinzip der Längenübertragung ohne weiteres ein solches der Richtungsübertragung mit sich führt*, oder physikalisch ausgedrückt, *der Zustand des Äthers das Gravitationsfeld bestimmt.*

Unter den geodätischen Linien sind, wenn die quadratische Form $g_{ik}\,dx_i\,dx_k$ indefinit ist, die *Nullinien* ausgezeichnet, längs deren jene Form verschwindet. Sie hängen nur vom Verhältnis der $g_{ik}$, dagegen überhaupt nicht von den $\varphi_i$ ab, sind also Gebilde der konformen Geometrie[11].

Wir hatten an den Begriff der Parallelverschiebung gewisse axiomatische Forderungen gestellt und gezeigt, daß ihnen in einer metrischen Mannigfaltigkeit auf eine und nur eine Weise genügt werden kann. Es ist aber auch möglich, jenen Begriff in einfacher Weise explizite zu definieren. Ist $P$ ein Punkt unserer metrischen Mannigfaltigkeit, so wollen wir ein Bezugssystem *geodätisch* im Punkte $P$ nennen, wenn bei seiner Benutzung die $\varphi_i$ in $P$ verschwinden und die $g_{ik}$ stationäre Werte annehmen:

$$\varphi_i = 0, \qquad \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r} = 0.$$

---

[10] Vgl. hierzu Hessenberg, Vektorielle Begründung der Differentialgeometrie, Math. Ann. Bd. 78 (1917), S. 187–217, insb. S. 208.

[11] Mit dieser Bemerkung möchte ich ein Versehen auf Seite 183 meines Buches „Raum, Zeit, Materie" berichtigen.

**D.** *Zu jedem Punkt $P$ gibt es geodätische Bezugssysteme. Ist $\xi$ ein gegebener Vektor in $P$, $P'$ aber ein zu $P$ unendlich benachbarter Punkt, so verstehen wir unter dem aus $\xi$ durch Parallelverschiebung nach $P'$ entstehenden Vektor denjenigen Vektor in $P'$, der in dem zu $P$ gehörigen geodätischen Bezugssystem dieselben Komponenten wie $\xi$ besitzt. Diese Definition ist von der Wahl des geodätischen Bezugssystems unabhängig.*

Es ist nicht schwer, die in dieser Erklärung mitausgesprochenen Behauptungen unabhängig von dem hier befolgten Gedankengang durch direkte Rechnung zu erweisen und auf demselben Wege zu zeigen, daß der so definierte Prozeß der Parallelverschiebung in einem beliebigen Koordinatensystem durch die Gleichungen

$$d\xi^r = -\Gamma^r_{ik}\xi^i dx_k \tag{12}$$

mit den aus (11) zu entnehmenden Koeffizienten $\Gamma$ beschrieben wird[12]. Hier aber, wo die invariante Bedeutung der Gleichungen (12) bereits feststeht, schließen wir einfacher so. In einem geodätischen Bezugssystem verschwinden nach (11) die $\Gamma^r_{ik}$, und die Gleichungen (12) reduzieren sich auf $d\xi^r = 0$. Der von uns aus axiomatischen Forderungen hergeleitete Begriff der Parallelverschiebung stimmt also mit dem in **D.** definierten überein. Es handelt sich nur noch darum, die Existenz eines geodätischen Bezugssystems nachzuweisen. Wir wählen zu diesem Zweck ein in $P$ geodätisches Koordinatensystem $x_i$, das den Punkt $P$ selbst zum Anfangspunkt ($x_i = 0$) hat. Ist die Längeneinheit in $P$ und seiner Umgebung zunächst beliebig gewählt und bedeuten dann $\varphi_i$ die Werte dieser Größen in $P$, so braucht man nur noch den Übergang von (7) zu (8) zu vollziehen mit

$$\lambda = e^{\sum_i \varphi_i x_i},$$

um zu erreichen, daß außer den $\Gamma^i_{rs}$ auch die $\varphi_i$ in $P$ verschwinden. Daraus folgt dann — siehe (10*) — die geodätische Natur des so gewonnenen Bezugssystems. — Die Koordinaten eines in $P$ geodätischen Bezugssystems sind in der unmittelbaren Umgebung von $P$, wenn man lineare Transformation freigibt, bis auf Glieder 3. Ordnung bestimmt, die Längeneinheit aber bis auf Glieder 2. Ordnung, falls die Hinzufügung eines konstanten Faktors freigegeben wird.

---

[12]) Man könnte dabei denjenigen Weg einschlagen, den ich in RZM § 14 gegangen bin.

## III. Rechenbequeme Erweiterung des Tensorbegriffs.

Diejenigen Größen, welche wir in § 2 als Tensoren eingeführt haben, sind dimensionslos; ihre Komponenten hängen wohl ab von der Wahl des Koordinatensystems, nicht aber von der Wahl der Längeneinheit. In der metrischen Geometrie erweist sich eine Begriffserweiterung als zweckmäßig: unter einem Tensor vom Gewichte $e$ soll eine vom Koordinatensystem unabhängige Linearform einer oder mehrerer Verschiebungen und Kräfte in einem Punkte verstanden werden, die aber in der Weise von der Wahl der Längeneinheit abhängt, daß die Form bei Ersetzung von (7) durch (8) den Faktor $\lambda^e$ annimmt. Die $g_{ik}$ selber sind die Komponenten eines kovarianten Tensors 2. Stufe vom Gewichte 1. Übrigens sehen wir diesen erweiterten Tensorbegriff nur als einen Hilfsbegriff an, den wir lediglich um seiner rechnerischen Bequemlichkeit willen einführen; sachliche Bedeutung schreiben wir nur den Tensoren vom Gewichte 0 zu. Wo daher im folgenden von Tensoren die Rede ist ohne Zusatz einer Gewichtsangabe, ist der Begriff immer in diesem ursprünglichen Sinne zu verstehen.

Jene Bequemlichkeit aber beruht auf folgendem: Üben wir beispielsweise an den Komponenten $a_{ik}$ eines kovarianten Tensors vom Gewichte $e$ den Prozeß des Heraufziehens eines oder beider Indizes aus, so erhalten wir in $a_i^{\,k}$ oder $a^i_{\,k}$ die gemischten Komponenten eines Tensors vom Gewichte $e-1$, in $a^{ik}$ die Komponenten eines kontravarianten Tensors vom Gewichte $e-2$. Wir können uns nicht entschließen, wie dies sonst geschieht, die so entstehenden Tensoren mit dem ursprünglichen zu identifizieren, da sie außer von ihm noch von der Metrik, dem Zustand des Weltäthers abhängen und wir diesen durchaus nicht als a priori fest gegeben betrachten, sondern uns die Möglichkeit vorbehalten, ihn beliebigen virtuellen Veränderungen zu unterwerfen.

## IV. Krümmung im metrischen Raum.

Sind $\xi^i$, $\eta^i$ zwei willkürliche Verschiebungen im Punkte $P$, $f_i$ aber die Komponenten eines Kraftfeldes, so folgt aus

$$f_i\eta^i = f^i\eta_i:$$

$$\Delta(f_i\eta^i) = f_i\Delta\eta^i = \Delta(f^i\eta_i) = f^i\Delta\eta_i,$$

also

$$\xi_i\,\Delta\eta^i = \xi^i\Delta\eta_i. \tag{13}$$

Andererseits ist, wenn wie immer bei virtuellen Verrückungen die Vektoren parallel verschoben werden,

$$d(\xi^i\eta_i) + (\xi^i\eta_i)\,d\varphi = 0,$$

$$\delta d(\xi^i\eta_i) + \delta(\xi^i\eta_i)\,d\varphi + (\xi^i\eta_i)\,\delta d\varphi = 0.$$

Das mittlere Glied in der letzten Gleichung ist

$$= -(\xi^i \eta_i)\,\delta\varphi\, d\varphi,$$

das erste

$$= \eta_i\,\delta d\xi^i + \delta\eta_i\, d\xi^i + d\eta_i\,\delta\xi^i + \xi^i\,\delta d\eta_i.$$

Vertauscht man $d$ und $\delta$ und subtrahiert, so kommt daher

$$(\eta_i \varDelta\xi^i + \xi^i \varDelta\eta_i) + (\xi^i\eta_i)\varDelta\varphi = 0$$

oder wegen (13)

$$(\eta_i \varDelta\xi^i + \xi_i \varDelta\eta^i) + (\xi^i\eta_i)\varDelta\varphi = 0.$$

Setzen wir also

$$\varDelta\xi^i = \bar{\varDelta}\xi^i - \tfrac{1}{2}\xi^i\varDelta\varphi, \tag{14}$$

so haben wir $\varDelta\xi^i$ in eine zu $\xi^i$ senkrechte und eine zu $\xi^i$ parallele Komponente gespalten. Es ist

$$\varDelta\varphi = \tfrac{1}{2} F_{ik}\varDelta x_{ik},$$

und wir schreiben

$$\bar{\varDelta}\xi^i = \varDelta\bar{R}^i{}_k\,\xi^k, \qquad \varDelta\bar{R}^i{}_k = \tfrac{1}{2}\bar{R}^i{}_{klm}\varDelta x_{lm}.$$

Dann gilt

$$R^i{}_{klm} = \bar{R}^i{}_{klm} - \tfrac{1}{2}\delta^i_k F_{lm}, \qquad \delta^i_k = \begin{cases} 1\,(i = k) \\ 0\,(i \neq k) \end{cases}. \tag{15}$$

Ziehen wir den Index $i$ herunter, so sind die Größen $\bar{R}_{iklm}$ nicht nur in $l$ und $m$, sondern auch in $i$ und $k$ schiefsymmetrisch. In der Zerspaltung (15) bezeichnen wir den ersten Summanden als Richtungs-, den zweiten als Längenkrümmung. Längenkrümmung = metrischer Wirbel. Aus der Natur der entsprechenden Zerspaltung (14) von $\varDelta\xi^i$ geht folgender Satz hervor, der zugleich unsere Terminologie rechtfertigt: Dann und nur dann, wenn die durch Parallelverschiebung eines Vektors vollzogene Richtungsübertragung integrabel ist, verschwindet der Tensor $\bar{R}$ der Richtungskrümmung; dann und nur dann, wenn die ebenso vollzogene Längenübertragung integrabel ist, verschwindet der Tensor $F$ der Längenkrümmung.

Wir geben hier noch den expliziten Ausdruck der Richtungskrümmung an. Führen wir in üblicher Weise die Christoffelschen Dreiindizes-Symbole und die Riemannschen Krümmungskomponenten durch die Gleichungen ein:

$$\begin{bmatrix} ik \\ r \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ir}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{kr}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r}\right), \qquad \begin{bmatrix} ik \\ r \end{bmatrix} = \sum_s g_{rs}\begin{Bmatrix} ik \\ s \end{Bmatrix},$$

$$G^i{}_{klm} = \frac{\partial}{\partial x_l}\begin{Bmatrix} km \\ i \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_m}\begin{Bmatrix} kl \\ i \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} lr \\ i \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} km \\ r \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} mr \\ i \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} kl \\ r \end{Bmatrix},$$

setzen ferner für ein beliebiges quadratisches System von Zahlen $a_{ik}$:

$$\tfrac{1}{2}(g_{il}a_{km} + g_{km}a_{il} - g_{im}a_{kl} - g_{kl}a_{im}) = \tilde{a}_{iklm}$$

und bilden

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \left\{ {i k \atop r} \right\} \varphi_r = \Phi_{ik},$$

$$\varphi_i \varphi_k - \tfrac{1}{2} g_{ik} (\varphi_r \varphi^r) = \varphi_{ik},$$

so ist

$$\overline{R}_{iklm} = G_{iklm} - \tilde{\Phi}_{iklm} + \tfrac{1}{2} \tilde{\varphi}_{iklm}.$$

Man beachte, daß hier den einzelnen Bestandteilen auf der rechten Seite keine selbständige Bedeutung zukommt: sie besitzen zwar die „Koordinaten"-, nicht aber die „Maßstab"-Invarianz. Für die verjüngten Tensoren

$$\overline{R}^i{}_{kim} = \overline{R}_{km}, \qquad G^i{}_{kim} = G_{km}$$

gilt

$$\overline{R}_{ik} = G_{ik} - \frac{n-2}{2} (\Phi_{ik} - \tfrac{1}{2} \varphi_{ik}) - \tfrac{1}{2} g_{ik} (\Phi - \tfrac{1}{2} \varphi),$$

wo

$$\Phi = \Phi_i^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g} \varphi^i)}{\partial x_i}, \qquad \varphi = \varphi_i^i = -\frac{n-2}{2} (\varphi_i \varphi^i)$$

ist. Abermalige Verjüngung ergibt, wenn wir

$$\overline{R}_i^i = \overline{R} = R, \qquad G_i^i = G$$

setzen,

$$R = G - (n-1) \left\{ \Phi + \frac{n-2}{4} (\varphi_i \varphi^i) \right\}.$$

Aus der Richtungskrümmung kann man einen nur von den $g_{ik}$ abhängigen Tensor in folgender Weise herleiten. Man setze

$$\begin{aligned} {}^*R_{iklm} = (n-2) \overline{R}_{iklm} - (g_{il} \overline{R}_{km} + g_{km} \overline{R}_{il} - g_{im} \overline{R}_{kl} - g_{kl} \overline{R}_{im}) \\ + \frac{1}{n-1} (g_{il} g_{km} - g_{im} g_{kl}) \overline{R}. \end{aligned}$$

Diese Zahlen ${}^*R_{iklm}$ sind gleich den in analoger Weise aus den $G_{iklm}$ zu bildenden ${}^*G_{iklm}$; bringt man also den Index $i$ wieder nach oben, so sind ${}^*G^i{}_{klm} = {}^*R^i{}_{klm}$ die Komponenten eines invarianten Tensors der konformen Geometrie. Dieser Tensor verschwindet für $n = 2$ und $n = 3$ stets, erst für $n \geqq 4$ spielt er eine Rolle. Sein Verschwinden ist eine notwendige (aber keine hinreichende) Bedingung dafür, daß die Mannigfaltigkeit sich winkeltreu auf eine Euklidische abbilden läßt.

## § 5. Skalare und tensorielle Dichten.

### I. Im Situs-Raum.

Ist $\int \mathfrak{W}\, dx$ — ich schreibe kurz $dx$ für das Integrationselement $dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$ — eine Integralinvariante, so ist $\mathfrak{W}$ eine Größe, die vom Koordinatensystem in der Weise abhängt, daß sie sich bei Übergang zu einem andern Koordinatensystem mit dem absoluten Betrag der Funktionaldeterminante multipliziert. Fassen wir jenes Integral als Maß eines das Integrationsgebiet erfüllenden Substanzquantums auf, so ist $\mathfrak{W}$ dessen Dichte. Eine Größe der beschriebenen Art möge deshalb als *skalare Dichte* bezeichnet werden. Das ist ein wichtiger Begriff, der gleichberechtigt neben den des Skalars tritt und sich durchaus nicht auf ihn reduzieren läßt [13]). Eine Linearform einer oder mehrerer Verschiebungen und Kräfte, die vom Koordinatensystem in solcher Weise abhängt, daß sie bei Übergang zu einem andern sich mit dem absoluten Betrag der Funktionaldeterminante multipliziert, nennen wir analog eine *Tensor-Dichte*. Es ist gerechtfertigt, die Tensoren als *Intensitäts-*, die Tensordichten als *Quantitäts-Größen* zu bezeichnen. Die Ausdrücke kovariant und kontravariant werden wie für Tensoren verwendet. Der allgemeine Begriff der Tensordichte gehört der reinen Situsgeometrie an. Hingegen läßt sich in dieser Geometrie die Analysis der Tensordichten nur in einem analogen Umfange begründen wie die Analysis der Tensoren.

Einen Tensor hatten wir in § 2 linear genannt, wenn er kovariant ist und seine Komponenten der Forderung des Alternierens genügen. Eine Tensordichte wollen wir linear heißen, wenn sie kontravariant ist und alternierende Komponenten besitzt. Eine lineare Tensordichte 1. Stufe kann als „Stromstärke" aufgefaßt werden. Ist $\mathfrak{w}^i$ eine solche, so ist

$$\frac{\partial \mathfrak{w}^i}{\partial x_i} = \mathfrak{w} \tag{16}$$

eine mit ihr invariant verknüpfte skalare Dichte; ist $\mathfrak{w}^{ik}$ eine lineare Tensordichte 2. Stufe, so ist

$$\frac{\partial \mathfrak{w}^{ik}}{\partial x_k} = \mathfrak{w}^i \tag{17}$$

eine lineare Tensordichte 1. Stufe; usf. (16) beweist man in bekannter Weise, indem man zeigt, daß die linke Seite die zur Stromstärke $\mathfrak{w}^i$ gehörige Quellstärke darstellt. Daraus ergibt sich (17), indem man ein Kraftfeld $f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ zu Hilfe nimmt, das aus einem Potential $f$ entspringt, und die Divergenz von $\mathfrak{w}^{ik} f_i$ bildet:

$$\frac{\partial (\mathfrak{w}^{ik} f_i)}{\partial x_k} = \frac{\partial \mathfrak{w}^{ik}}{\partial x_k} \cdot f_i$$

usf.

[13]) Die Gegenüberstellung von Skalar und skalarer Dichte entspricht vollständig derjenigen von Funktion und Abelschem Differential in der Theorie der algebraischen Funktionen.

## II. Im affin zusammenhängenden und im metrischen Raum.

In einer affin zusammenhängenden Mannigfaltigkeit kann man nicht nur von einer linearen, sondern von jedweder Tensordichte deren Divergenz bilden. — Ein Vektorfeld $\xi^i$ werden wir in einem Punkte $P$ stationär zu nennen haben, wenn die Vektoren $\xi$ in den Nachbarpunkten $P'$ von $P$ durch Parallelverschiebung aus dem Vektor $\xi$ in $P$ hervorgehen, d. h. wenn in $P$ die totalen Differentialgleichungen

$$d\xi^i + \Gamma^i_{rs}\xi^r dx_s = 0 \quad \left(\text{oder } \frac{\partial \xi^i}{\partial x_s} + \Gamma^i_{rs}\xi^r = 0\right)$$

bestehen. Offenbar gibt es solche in $P$ stationäre Vektorfelder, welche dem Punkte $P$ einen willkürlich vorgegebenen Vektor $\xi$ zuordnen. Ein analoger Begriff ist für Kraftfelder aufzustellen. Will man nun z. B. die Divergenz einer gemischten Tensordichte $\mathfrak{w}_i^k$ 2. Stufe bilden, so nimmt man ein in $P$ stationäres Vektorfeld $\xi^i$ zu Hilfe und konstruiert von der Tensordichte $\xi^i \mathfrak{w}_i^k$ die Divergenz:

$$\frac{\partial(\xi^i \mathfrak{w}_i^k)}{\partial x_k} = \frac{\partial \xi^r}{\partial x_k}\mathfrak{w}_r^k + \xi^i \frac{\partial \mathfrak{w}_i^k}{\partial x_k} = \xi^i \left(-\Gamma^r_{ik}\mathfrak{w}_r^k + \frac{\partial \mathfrak{w}_i^k}{\partial x_k}\right).$$

Diese Größe ist eine skalare Dichte und demnach

$$\frac{\partial \mathfrak{w}_i^k}{\partial x_k} - \Gamma^r_{is}\mathfrak{w}_r^s$$

eine kovariante Tensordichte 1. Stufe, die aus $\mathfrak{w}_i^k$ in einer von jedem Koordinatensystem unabhängigen Weise entspringt.

Aber man kann nicht nur durch *Divergenzbildung* einer Tensordichte zu einer solchen von einer um 1 geringeren Stufenzahl herabsteigen, sondern auch durch *Differentiation* aus ihr eine Tensordichte bilden, deren Stufenzahl um 1 höher ist. Bedeutet $\mathfrak{s}$ zunächst eine skalare Dichte, die wir als Dichte einer die Mannigfaltigkeit erfüllenden Substanz auffassen und ist $dV = dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$ ein unendlich kleines Volumelement, so ist $\mathfrak{s}\, dV$ das dieses Element erfüllende Substanzquantum. Wir unterwerfen jetzt $dV$ der infinitesimalen Verschiebung $\delta$ (mit den Komponenten $\delta x_i$); darunter verstehen wir einen Prozeß, bei welchem die einzelnen Punkte von $dV$ infinitesimale Verschiebungen erfahren, die selbst durch Parallelverschiebung auseinander hervorgehen. Der Unterschied zwischen den Substanzquanten, welche $dV$ und dieses durch Verschiebung aus $dV$ entstehende Weltgebiet erfüllen, beträgt

$$(\delta\mathfrak{s} - \mathfrak{s}\,\Gamma^r_{ir}\delta x_i)\, dV = (\delta\mathfrak{s} - \mathfrak{s}\,\delta\gamma^r_r)\, dV.$$

Es sind also

$$\frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial x_i} - \Gamma^r_{ir}\mathfrak{s} \tag{18}$$

die Komponenten einer kovarianten Tensordichte 1. Stufe, die in einer vom Koordinatensystem unabhängigen Weise aus der skalaren Dichte $\mathfrak{s}$ entspringt. Ihr Verschwinden an einer Stelle zeigt an, daß die Substanz daselbst gleichförmig verteilt ist. (18) kann übrigens in einer mehr rechnerischen Weise auch folgendermaßen hergeleitet werden. Man nehme ein in $P$ stationäres Vektorfeld $\xi^i$ zu Hilfe und bilde die Divergenz der Stromstärke $\mathfrak{s}\xi^i$:

$$\frac{\partial(\mathfrak{s}\xi^i)}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial x_i}\xi^i + \mathfrak{s}\frac{\partial \xi^i}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial x_i} - \Gamma^r_{ir}\mathfrak{s}\right)\xi^i.$$

Um die Differentiation von der skalaren auf eine beliebige Tensordichte, z. B. die gemischte $\mathfrak{w}_i^k$ von 2. Stufe auszudehnen, bedient man sich in nun schon geläufiger Weise eines in $P$ stationären Vektorfeldes $\xi^i$ und eines daselbst stationären Kraftfeldes $\eta_i$ und differentiiert die skalare Dichte $\mathfrak{w}_i^k \xi^i \eta_k$. Verjüngung der durch Differentiation entsprungenen Tensordichte nach dem Differentiationsindex und einem kontravarianten führt zur Divergenz zurück.

Die Analysis der Tensordichten ist demnach schon in der Affingeometrie vollendet. Was die *metrische* Geometrie neu liefert, ist lediglich folgende *Methode zur Erzeugung* von Tensordichten: man multipliziere einen beliebigen Tensor vom Gewichte $-\frac{n}{2}$ mit $\sqrt{g}$, wo $g$ die Determinante der $g_{ik}$ ist. — Beispiel: Die wirkliche Welt ist eine $(3+1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit; $g$ ist daher negativ und wir benutzen an seiner Stelle das positive $-g$. Aus dem kovarianten metrischen Wirbeltensor $F_{ik}$, der vom Gewichte 0 ist, erhalten wir den kontravarianten $F^{ik}$ vom Gewichte $-2$ und daraus durch Multiplikation mit $\sqrt{-g}$ die Größen

$$\sqrt{-g}\,F^{ik} = \mathfrak{F}^{ik}.$$

Das sind also die Komponenten einer durch den Zustand des Äthers invariant bestimmten linearen Tensordichte 2. Stufe; sie wird als *metrische Wirbeldichte (elektromagnetische Felddichte)* zu bezeichnen sein.

$$\frac{\partial \mathfrak{F}^{ik}}{\partial x_k} = \mathfrak{s}^i \tag{19}$$

ist daher eine Stromstärke (lineare Tensordichte 1. Stufe). In (19) haben wir das zweite System der Maxwellschen Gleichungen vor uns, das freilich erst einen bestimmten Inhalt gewinnt, wenn der „*elektrische Strom*" $\mathfrak{s}^i$ noch in einer zweiten Weise durch den Zustand des Äthers ausgedrückt wird. Jedenfalls kann es aber nach unserer Deutung des elektromagnetischen Feldes nur in einer vierdimensionalen Welt so etwas wie eine elektromagnetische Felddichte und einen elektrischen Strom geben. Das über irgendein Weltgebiet zu erstreckende Integral von

$$\mathfrak{S} = \tfrac{1}{4} F_{ik} \mathfrak{F}^{ik}$$

tritt in der Physik als die in diesem Gebiet enthaltene *elektromagnetische Wirkungsgröße* auf. Ihre Bedeutung beruht darauf, daß die unendlich kleine Änderung, welche sie bei einer infinitesimalen, an den Grenzen des Weltgebiets verschwindenden Variation $\delta g_{ik}$, $\delta \varphi_i$ des Ätherzustandes erfährt,

$$= \int (\mathfrak{s}^i \delta \varphi_i + \tfrac{1}{2} \mathfrak{S}^{ik} \delta g_{ik}) dx \qquad (\mathfrak{S}^{ki} = \mathfrak{S}^{ik})$$

ist, wo $\mathfrak{s}^i$ die durch (19) definierten Komponenten der Stromstärke sind und die gemischte Tensordichte 2. Stufe mit den Komponenten

$$\mathfrak{S}_i^k = \mathfrak{S} \delta_i^k - F_{ir} \mathfrak{F}^{kr}$$

die *Energie-Impulsdichte* des elektromagnetischen Feldes darstellt. *Die Existenz aller dieser Größen ist durchaus an die Dimensionszahl 4 gebunden. Zum erstenmal läßt die hier befürwortete Deutung der physikalischen Erscheinungen einen vernünftigen Grund dafür erkennen, daß die Welt vierdimensional ist.*

$$\Delta \varphi = F_{ik} d x_i \delta x_k$$

ist die „Spur" jener Transformation

$$\Delta \mathsf{P} = \mathsf{P}_{ik} d x_i \delta x_k,$$

welche als Krümmung auftrat. Nach dem Muster von $\mathfrak{S}$ können wir die Transformation bilden

$$\tfrac{1}{4} \sqrt{-g}\, \mathsf{P}_{ik} \mathsf{P}^{ik}$$

(wobei die Multiplikation als Zusammensetzung zu deuten ist). Die Spur $\mathfrak{M}$ derselben ist eine skalare Dichte, die gleichberechtigt neben $\mathfrak{S}$ tritt.

## III. Die Wirkungsgröße und ihre Variation.

Wir kehren zur reinen Mathematik zurück. Ist $\mathfrak{W}$ irgendeine durch den Zustand des Äthers (unabhängig vom Koordinatensystem) eindeutig bestimmte skalare Dichte, so wollen wir (nach dem Vorbild der Maxwellschen Theorie) die Integralinvariante $\int \mathfrak{W} dx$ als die in dem Integrationsgebiet enthaltene *Wirkungsgröße* bezeichnen. Bei einer beliebigen Variation des Ätherzustandes von der eben geschilderten Art werde

$$(20) \qquad \delta \int \mathfrak{W} dx = \int (\mathfrak{w}^i \delta \varphi_i + \tfrac{1}{2} \mathfrak{W}^{ik} \delta g_{ik}) dx \qquad (\mathfrak{W}^{ki} = \mathfrak{W}^{ik})$$

gesetzt. $\mathfrak{w}^i$ sind die Komponenten einer kontravarianten, $\mathfrak{W}_i^k$ die einer gemischten Tensordichte der 1. bzw. 2. Stufe. *Zwischen diesen „Lagrangeschen Ableitungen" der Wirkungsfunktion $\mathfrak{W}$ bestehen $n+1$ Identitäten, die aus der Invarianz der Wirkungsgröße entspringen.* Zunächst muß Invarianz statthaben, wenn man $g_{ik}$ durch $\lambda g_{ik}$ und gleichzeitig $\varphi$ durch

$\varphi_i - \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x_i}$ ersetzt; nehmen wir darin für $\lambda$ eine unendlich wenig von 1 abweichende Größe $1 + \delta\lambda$, so muß demnach (20) verschwinden für

$$\delta g_{ik} = g_{ik}\,\delta\lambda, \qquad \delta\varphi_i = -\frac{\partial(\delta\lambda)}{\partial x_i}.$$

Das ergibt die erste jener $n+1$ Identitäten:

$$\boxed{\frac{\partial \mathfrak{w}^i}{\partial x_i} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{W}_i^i = 0.} \tag{21}$$

Zweitens nutzen wir die Invarianz der Wirkungsgröße gegenüber Koordinatentransformation durch eine infinitesimale Deformation des Äthers aus[14]). Wir verschieben die Ätherstelle $P = (x_i)$ nach $\overline{P} = (\overline{x}_i)$. Dabei möge aber die Verschiebung $P\overline{P}$ an der Grenze des betrachteten Gebiets verschwinden, so daß dieses Gebiet nach der Verschiebung von demselben Ätherquantum erfüllt ist. In einem zweiten Koordinatensystem schreiben wir dem Punkte $\overline{P}$ die Koordinaten $x_i$ zu. Verschieben wir den Äther ohne Änderung seines Zustandes, so wird nach der Verschiebung in diesen neuen Koordinaten die Metrik an der Stelle $\overline{P}$ durch

$$g_{ik}(x)\,dx_i\,dx_k \quad \text{und} \quad \varphi_i(x)\,dx_i$$

festgelegt sein, oder, wenn wir auf die alten Koordinaten zurücktransformieren, durch

$$\overline{g}_{ik}(\overline{x})\,d\overline{x}_i\,d\overline{x}_k \quad \text{und} \quad \overline{\varphi}_i(\overline{x})\,d\overline{x}_i;$$

also an der Stelle $P$ durch

$$\overline{g}_{ik}(x)\,dx_i\,dx_k \quad \text{und} \quad \overline{\varphi}_i(x)\,dx_i.$$

Für den so erhaltenen Zustand des Äthers muß die Wirkungsgröße wegen ihrer Invarianz den gleichen Wert besitzen wie für den ursprünglichen. Ist jene Deformation infinitesimal: $\overline{x}_i = x_i + \delta x_i$, so ergibt sich

$$\delta g_{ik} = \overline{g}_{ik}(x) - g_{ik}(x) = -\left\{ g_{ir}\frac{\partial(\delta x_r)}{\partial x_k} + g_{kr}\frac{\partial(\delta x_r)}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r}\,\delta x_r \right\},$$

$$\delta\varphi_i = \overline{\varphi}_i(x) - \varphi_i(x) = -\left\{ \varphi_r\frac{\partial(\delta x_r)}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_r}\,\delta x_r \right\}.$$

Für diese Variation muß (20) verschwinden. Beseitigt man die Ableitungen der Verrückungskomponenten $\delta x_i$ durch partielle Integration, so erhält man die Gleichungen

$$\left\{ \frac{\partial \mathfrak{W}_i^k}{\partial x_k} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{rs}}{\partial x_i}\mathfrak{W}^{rs} \right\} + \left\{ \frac{\partial(\mathfrak{w}^k\varphi_i)}{\partial x_k} - \mathfrak{w}_k\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \right\} = 0.$$

---

14) Weyl, Ann. d. Physik Bd. 54 (1917), S. 117 (§*2); F. Klein, Nachr. d. K. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen, math.-physik. Kl., Sitzung v. 25. Jan. 1918.

Benutzen wir (21), so finden wir für den zweiten der beiden durch die geschweifte Klammer zusammengefaßten Teile

$$-\tfrac{1}{2}\, g_{rs}\varphi_i \cdot \mathfrak{W}^{rs} + F_{ik}\, \mathfrak{w}^k .$$

Nun ist

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{rs}}{\partial x_i} + g_{rs}\varphi_i\right)\mathfrak{W}^{rs} = \tfrac{1}{2}(\Gamma_{r,is} + \Gamma_{s,ir})\,\mathfrak{W}^{rs}$$

wegen der Symmetrie von $\mathfrak{W}^{rs}$

$$= \Gamma_{r,is}\,\mathfrak{W}^{rs} = \Gamma^r_{is}\,\mathfrak{W}^s_r .$$

Damit nehmen die Gleichungen schließlich die folgende Gestalt an, in der ihr invarianter Charakter zutage tritt:

$$\boxed{\left(\frac{\partial \mathfrak{W}^k_i}{\partial x_k} - \Gamma^r_{is}\,\mathfrak{W}^s_r\right) + F_{ik}\,\mathfrak{w}^k = 0.} \tag{22}$$

## IV. Überleitung zur Physik.

In einer metrischen Mannigfaltigkeit, deren Äther sich im Zustand extremaler Wirkung befindet, so daß also für jedes Weltgebiet bei beliebiger, an den Grenzen verschwindender infinitesimaler Variation der $\varphi_i$ und $g_{ik}$

$$\delta \int \mathfrak{W}\, dx = 0 \tag{23}$$

ist, gelten die Lagrangeschen Gleichungen

$$\mathfrak{w}^i = 0, \qquad \mathfrak{W}^k_i = 0. \tag{24}$$

In der Physik werden die ersten als die *elektromagnetischen*, die zweiten als die *Gravitationsgesetze* bezeichnet. Wie die Mechanik, mündet auch die Physik in einem Hamiltonschen Prinzip[15]): *die wirkliche Welt ist eine solche, deren Äther sich im Zustand extremaler Wirkung befindet.* Wir kennen die in ihr gültigen, durch das Hamiltonsche Prinzip (23) zusammengefaßten Naturgesetze, wenn wir die Wirkungsdichte $\mathfrak{W}$ in ihrer Abhängigkeit vom Zustande des Äthers kennen. Die Gleichungen (24) sind nicht unabhängig voneinander, sondern zwischen ihnen bestehen die fünf ($n = 4$) Identitäten (21), (22). In der Tat können ja durch die Gesetze (24) die Größen $g_{ik}$, $\varphi_i$ nur so weit bestimmt sein, daß der Übergang von einem Bezugssystem zu einem beliebigen andern noch frei bleibt; ein solcher Übergang hängt aber von fünf willkürlichen Funktionen ab. Das Verschwinden der aus den linken Seiten der elektromagnetischen

[15]) Vgl. dazu G. Mie, Annalen der Physik, Bd. 37, 39, 40 (1912/13), oder die Darstellung der Mieschen Theorie in RZM § 25; D. Hilbert, Die Grundlagen der Physik (1. Mitteilung), Nachr. d. K. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen, Sitzung vom 20. Nov. 1915.

Gleichungen gebildeten Divergenz $\frac{\partial \mathfrak{w}^i}{\partial x_i}$ ist also eine Folge der Gravitationsgesetze und umgekehrt das Verschwinden von deren Divergenz

$$\frac{\partial \mathfrak{W}_i^k}{\partial x_k} - \Gamma_{is}^r \mathfrak{W}_r^s$$

eine Folge der elektromagnetischen. Jene fünf Identitäten stehen in engstem Zusammenhang mit den sog. *Erhaltungssätzen*, nämlich dem (einkomponentigen) Satz von der Erhaltung der Elektrizität und dem (vierkomponentigen) Energie-Impulsprinzip. Sie lehren nämlich: die Erhaltungssätze (auf deren Gültigkeit die *Mechanik* beruht) folgen auf doppelte Weise aus den elektromagnetischen sowie den Gravitationsgleichungen; man möchte sie daher als die gemeinsame Eliminante dieser beiden Gesetzesgruppen bezeichnen.

Der einzige Ansatz für die Wirkungsdichte in der $(3+1)$-dimensionalen Welt, den man vernünftigerweise in Betracht zu ziehen hat, ist der folgende

$$\mathfrak{W} = \mathfrak{M} + \alpha \mathfrak{S},$$

wobei $\alpha$ eine numerische Konstante ist und die Bedeutung von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{S}$ aus Abschnitt II dieses Paragraphen zu entnehmen ist. Man sieht, wie eng der Spielraum ist, welcher durch unsere Theorie dem Weltgesetz gelassen wird. Als erste Approximation, bei Beschränkung auf die linearen Glieder, ergeben sich dann in der Tat aus dem Hamiltonschen Prinzip die Maxwellschen Gesetze des elektromagnetischen Feldes und das Newtonsche Gravitationsgesetz. Darin, daß die Wirkungsgröße eine reine Zahl ist, liegt die Möglichkeit eines *Wirkungsquantums* begründet, dessen Existenz nach der heutigen Physik als die fundamentale atomistische Struktur des Kosmos anzusehen ist.

Doch werde hier, wo es sich nur um die systematische Entwicklung der reinen Infinitesimalgeometrie handelt und der mit ihr verbundenen Analysis der Tensoren und Tensordichten, auf die physikalische Ausdeutung der Theorie nicht näher eingegangen. Heben wir noch einmal jene Punkte hervor, in denen diese über das bisher Vorliegende hinausgeht! Das sind: der stufenweise Aufbau in den drei Stockwerken der Situs-, Affin- und metrischen Geometrie, die Befreiung der letzteren von einer ihr in der Riemannschen Fassung noch anhaftenden ferngeometrischen Inkonsequenz und die Ergänzung der Lehre von den Tensoren (Intensitätsgrößen) durch ihr Gegenstück, die Lehre von den Tensordichten (oder Quantitätsgrößen).

(Eingegangen am 8. Juni 1918.)